





BIBLIOTEKA
AKADEMII EKONOMICZNEJ
W POZNANIU

AKADEMIA EKONOMICZNA W POZNANIU

ZESZYTY NAUKOWE - SERIA II

Prace doktorskie i habilitacyjne

Zeszyt 82

EMIL PANEK

**OPTYMALNE TRAJEKTORIE WZROSTU
W ZAGREGOWANYCH
MODELACH EKONOMICZNYCH**



POZNAN 1986

KOMITET REDAKCYJNY

*Zenon Chojecki, Zdzisław Dąbrowski, Zbigniew Gługiewicz, Ewa Kotkowska,
Alina Krauze, Edmund Kurtys, Andrzej Matysiak, Eugeniusz Najlepszy,
Józef Orczyk, Emil Panek, Mieczysław Przedpełski (zastępca przewodniczącego),
Antoni Sobczak (sekretarz), Halina Szulce, Stanisław Warkoczewski,
Janusz Wierzbicki (przewodniczący)*

RECENZENT

Tadeusz Kasprzak

OPRACOWANIE EDYTORSKIE

I TECHNICZNE

Genowefa Koźma



Wydano za zgodą Rektora
Akademii Ekonomicznej w Poznaniu
pismem z dnia 04.04.1985 znak 1/WU/40/85

WYDAWNICTWO AKADEMII EKONOMICZNEJ W POZNANIU

Adres Wydawnictwa: ul. Marchlewskiego 146/150, 60-967 Poznań
tel. 699-261 w. 11-86

Wydanie I. Nakład 200+30 egz. Arkuszy wyd. 18,65. Arkuszy druku 17,25. Papier drukowy kl. V 71 g. Przyjęto do druku 22.04.1985 r. Podpisano do druku 30.12.1985 r. Druk ukończono w lutym 1986 r. Zamówienie nr S/180/85.S-7/53. Cena zł 186,50

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Poznańskiej
61-821 Poznań, ul. Ogrodowa 11, telefon 554-25

P 1986 11911

Spis treści

Od autora	7
Wstęp	9
1. Wyjaśnienia terminologiczne	9
2. Zagadnienie sterowania optymalnego wzrostem	11
3. Równowaga ekonomiczna i wzrost	11
4. Kryterium wzrostu	14
5. Interpretacja zmiennych ekonomicznych	15
6. Przykład zadania sterowania optymalnego wzrostem	16
R o z d z i a ł I. WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII STEROWANIA OPTY- MALNEGO	19
§ 1. System dynamiczny	19
1.1. Pojęcia podstawowe	19
1.2. Definicja	21
1.3. System gładki	23
1.4. Stacjonarność	26
§ 2. Równowaga i stabilność	27
2.1. Równowaga statyczna	27
2.2. Uogólnienie pojęcia równowagi. Równowaga dynamiczna	27
2.3. Stabilność	29
§ 3. Sterowanie optymalne	32
3.1. Sformułowanie zagadnienia	32
3.2. Warunki konieczne optymalności. Zasada maksimum Pon- trjagina w przypadku stacjonarnego zadania sterowania optymalnego z kryterium całkowym i nie ustalonym mo- mentem końcowym	36
3.3. Niektóre uogólnienia i przypadki szczególne	39
3.4. Uwagi o dostatecznych warunkach optymalności rozwiązań zadań sterowania optymalnego	47
R o z d z i a ł II. OPTIMALNE TRAJEKTORIE WZROSTU W MODELACH JEDNOSEKTOROWYCH	49
§ 4. Optymalny podział dochodu narodowego w jednoczynnikowym mo- delu wzrostu	50

4.1. Podstawowe założenia	50
4.2. Optymalny podział dochodu narodowego w modelu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji	53
4.3. Ciągłość trajektorii inwestycji i konsumpcji - drugie zadanie sterowania optymalnego	61
4.4. Przypadek, kiedy wzrost inwestycji zależy od wzrostu dochodu narodowego	68
§ 5. Optymalny podział dochodu narodowego w jednoczynnikowym modelu wzrostu uwzględniającym liczbę ludności	75
5.1. Podstawowe założenia	75
5.2. Pierwsze zadanie sterowania optymalnego	76
5.3. Drugie zadanie sterowania optymalnego	83
5.4. Procesy wzrostu z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji - trzecie zadanie sterowania optymalnego	89
§ 6. Optymalny podział dochodu narodowego w dwuczynnikowym modelu wzrostu	95
6.1. Podstawowe wiadomości o funkcji produkcji Cobbe-Douglasa	95
6.2. Optymalny podział dochodu narodowego w dwuczynnikowym modelu wzrostu z przedziałami ciągłą trajektorią inwestycji	100
6.3. Model z niemalejącym technicznym uzbrojeniem pracy i dodatnim poziomem konsumpcji	115
6.4. Procesy wzrostu z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji	127
R o z d z i a ł III. OPTIMALNE TRAJEKTORIE WZROSTU W MODELACH DWUSEKTOROWYCH	135
§ 7. Optymalny podział inwestycji między dwa sektory w jednoczynnikowym modelu wzrostu	136
7.1. Podstawowe założenia	136
7.2. Wzrost optymalny w modelu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji	138
7.3. Procesy wzrostu z niemalejącymi trajektoriami majątku produkcyjnego w sektorach	144
7.4. Przykład optymalnego procesu wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji	152
§ 8. Optymalny podział inwestycji między sektory w jednoczynnikowym modelu uwzględniającym liczbę ludności	158
8.1. Podstawowe założenia	158

8.2. Procesy wzrostu z niemalejącymi trajektoriami konsumpcji na osobę	161
8.3. Wzrost optymalny z ciągłą trajektorią inwestycji	167
§ 9. Optymalny podział inwestycji między sektory w dwuczynnikowym modelu wzrostu	172
9.1. Podstawowe założenia	172
9.2. Optymalny proces wzrostu z przedziałami ciągłą trajektorią inwestycji	173
9.3. Proces wzrostu z trzema fazami	178
9.4. Proces wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji	189
§ 10. Optymalny podział inwestycji między sektory w dwusektorowym dynamicznym modelu Leontiewa	191
10.1. Podstawowe założenia	191
10.2. Procesy wzrostu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji w sektorach	194
10.3. Przykład optymalnego procesu wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji w sektorach	199
Zakończenie	201
Bibliografia	206
Streszczenia obcojęzyczne	209
Aneks	211
Dodatek matematyczny do paragrafu 1	211
Dodatek matematyczny do paragrafu 3	212
Dodatek matematyczny do paragrafu 4	224
Dodatek matematyczny do paragrafu 5	235
Dodatek matematyczny do paragrafu 6	245
Dodatek matematyczny do paragrafu 7	262
Dodatek matematyczny do paragrafu 8	271
Dodatek matematyczny do paragrafu 9	272

E r r a t a

Strona	Wieraz		Jest	Powinno być
	od góry	od dołu		
21	23		danamicznego	dynamicznego
26		19	$\dot{C}^0[E^n \times U \times T]$	$C^0[E^n \times U \times T]$
		18	jako rozwiązanie	jadno rozwiązanie
100	4		wymiar $1/RL$, gdzie	wymiar $z_1^{1-\varepsilon}/RL^{1-\varepsilon}$ (gdzie
		13	$m^0 \geq 0$	$m^0 > 0$
110	7		interpretację na	interpretację na
118		3	$[t_0, \tau_2)$	$[t_0, \tau_1)$
130		16	$(\mu + \lambda) - \frac{\omega}{1-\varepsilon}$	$(\mu + \lambda - \frac{\omega}{1-\varepsilon})$
132	9		horyzont T	horyzont T^*
133		17	$t_1 - \theta_\varepsilon]$	$t_1^* - \theta_\varepsilon]$
158	12		od stopy wzrostu	do stopy wzrostu
159	8		$\frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{1}{y_2(t)}$	$\frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{1}{y_1(t)}$
221		13	$\forall t \in [t_0, t_1^*]$	$\forall t \in [t_0, t_1^*]$ (3')
276	1		że może być	że ε może być
		5	$\exists \varphi > 0: \varphi(\tau; t) \leq \varphi$	$\exists \bar{\varphi} > 0: \varphi(\tau; t) \leq \bar{\varphi}$
		4	$\delta_{u_{2T}}^* + \frac{\mu + \lambda}{ T } [T - (t_1 - \tau)]$	$\delta_{u_{2T}}^* + \frac{\mu + \lambda}{ T } [T - (t_1 - \tau)]$

Emil P a n e k: Optymalne trajektorie wzrostu w zagregowanych modelach ekonomicznych. Zez. Nauk. AE w Poznaniu. Seria II. Zez. 82.

Od autora

Od czasu opublikowania pracy L.S.Pontriagina i współpracowników [42] ekonomiści matematyczni nieustannie podejmują próby wykorzystania teorii sterowania optymalnego do rozwiązywania zagadnień wzrostu gospodarczego. Nie jest to zadanie łatwe. O przydatności teorii matematycznej do rozwiązywania problemów praktycznych decyduje m.in. to, czy jej założenia nie upraszczają zbyt mocno tych problemów, czyniąc je praktycznie nieciekawymi. Jednocześnie, aby problem mógł być efektywnie rozwiązany na gruncie pewnej teorii matematycznej, powinien być sformułowany w możliwie prostej postaci, ponieważ teorie matematyczne bez „mocnych” założeń dają z reguły nieciekawe twierdzenia. Pytanie o praktyczną przydatność określonej teorii matematycznej aprowadza się w szczególności do tego, czy na jej gruncie możliwe jest takie sformułowanie problemu, aby - pomimo „mocnych” założeń - był on interesujący także z punktu widzenia rzeczywistości poza matematycznej.

Wydaje się, że w przypadku teorii sterowania optymalnego można dać odpowiedź twierdzącą, mając na uwadze jej zastosowanie jako narzędzia badawczego zjawisk nie tylko fizycznych, lecz również ekonomicznych. Metodę, którą posługuję się w książce, jest zespół warunków optymalności zwany *zasadą maksimum Pontriagina*. Zaletą zasady maksimum jest jej prostota matematyczna. Posługiwanie się nią wymaga jednak dużej ostrożności, zwłaszcza gdy chodzi o zagadnienia ekonomiczne. Zasada maksimum, w jej oryginalnym brzmieniu, pozostaje bowiem słuszna tylko w obrębie specyficznej klasy zadań nie zawierających tzw. mieszanych warunków ubocznych (np. holonomicznych, całkowych). Warunki takie, najczęściej w postaci równań i nierówności, występują praktycznie we wszystkich modelach wzrostu. Potrzebne są niekiedy skomplikowane zabiegi, aby przekształcić je do postaci pozwalającej na zastosowanie oryginalnej zasady maksimum*.

Podstawy większości znanych modeli wzrostu opracowane zostały, zanim powstała teoria sterowania optymalnego. Z zastosowaniem jej metod w ekonomii matematycznej wiąże się często konieczność weryfikacji tradycyjnych założeń modeli w świetle ich nowej interpretacji ekonomicznej. „Mechanicz-

* Część zadań tego typu można rozwiązać, posługując się zmodyfikowanymi warunkami optymalności typu zasady maksimum, zob. np. K.J. Arrow [2], A.J. Dubowickij, A.A. Milutin [17], S.W. Dubowski i in. [18], G. Hadley, M.C. Kemp [22], A.M. Tier-Krikorow [48]. Problematyka ta wykracza poza ramy książki. W literaturze polskiej lukę tę wypełnia częściowo praca O. Gedymina [20].

ne" uogólnienia prowadzą bowiem z reguły do rozwiązań nie do przyjęcia w świetle naszej wiedzy o wzroście. Dlatego, chociaż zasadniczo nie wykraczam poza modele wzrostu znane w ekonomii matematycznej, sposób formułowania problemów wzrostu niekiedy znacznie odbiega od tradycyjnego (por. zestawienie modeli i zadań sterowania optymalnego na s. 18).

Pisząc książkę starałem się, by założeniom i wnioskom towarzyszyła możliwie wyczerpująca interpretacja ekonomiczna. Na etapie formułowania założeń, czyli budowy matematycznego obrazu gospodarki i następnie przy przejściu do formalnego wywodu matematycznego do jego interpretacji ekonomicznej występuję w roli ekonomisty. Kiedy z założeń próbuję wyciągnąć określone wnioski matematyczne, przejmuję obowiązki i odpowiedzialność matematyka. Czytelnik oceni, jak wywiązałem się z tych ról. Obie były trudne i odpowiedzialne.

Słowa kilka o układzie treści. Książka składa się z trzech rozdziałów i Dodatku matematycznego. Oryginalne wyniki zawarte są przede wszystkim w rozdziałach II, III. Należą do nich wszystkie sformułowane tam twierdzenia z wyjątkiem twierdzeń 4.1, 6.1, 7.1, 9.1, 10.1 będących z reguły modyfikacjami znanych rezultatów. W rozdziałach I-III stosuję zasadę ciągłej numeracji wzorów wewnątrz paragrafów, a w Dodatku matematycznym zasadę ich ciągłej numeracji w ramach każdego dowodzonego twierdzenia.

Rozdział I nie zawiera oryginalnych wyników z wyjątkiem propozycji definicji równowagi (dynamicznej) systemu przedstawionej w paragrafie 2 będącej uogólnieniem „klasycznej” definicji równowagi w systemach stacjonarnych. Do koncepcji równowagi wyłożonej w tym paragrafie nawiązuję w kolejnych rozdziałach, dowodząc tzw. magistralnych właściwości optymalnych trajektorii wzrostu. Pozostałe paragrafy tego rozdziału zawierają niezbędne definicje oraz podstawowe wiadomości z teorii sterowania optymalnego.

W rozdziale II zajmuję się zagadnieniami optymalnego podziału dochodu narodowego na akumulację i spożycie i wiążącymi się z tym zagadnieniami równowagi ekonomicznej i stabilności optymalnych procesów wzrostu w modelach jednosektorowych jednoczynnikowych typu Domara-Horroda (paragrafy 4,5) i dwuczynnikowych typu Shella (paragraf 6).

Przedmiotem rozdziału III są zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między sektory gospodarki, równowagi ekonomicznej i stabilności optymalnych procesów wzrostu w modelach dwusektorowych jednoczynnikowych typu Mahalanobisa (paragrafy 7,8), dwuczynnikowych typu Uzawy (paragraf 9) oraz w dwusektorowym modelu wzrostu typu Leontiewa (paragraf 10).

Dodatek matematyczny, zamykający książkę, zawiera dowody twierdzeń, na które powołuję się w rozdziałach wcześniejszych.

WSTĘP

1. WYJAŚNIENIA TERMINOLOGICZNE

Język teorii sterowania optymalnego, którym posługuję się w książce, nie jest językiem powszechnie przyjętym w ekonomii matematycznej, ani w ogóle w ekonomii, i wobec tego celowe będzie wyjaśnienie na wstępie niektórych kwestii terminologicznych.

Przez matematyczny model wzrostu rozumiem układ założeń opisujących w języku matematycznym powiązania między zmiennymi ekonomicznymi, z których przynajmniej niektóre są funkcjami czasu. W książce nie zajmuję się wszystkimi modelami wzrostu znanymi w ekonomii matematycznej. Poza jej ramy wykracza obszerna problematyka sterowania wzrostem w modelach wielosektorowych (zdezagregowanych). Interesują mnie poza tym wyłącznie takie modele wzrostu, w których przewidziana jest możliwość kształtowania procesów produkcji i wymiany przez władzę gospodarczą. Nie zajmuję się modelami, których założenia przesądzają wyłącznie rynkową formę procesów produkcji i wymiany.

Jedną ze zmiennych w modelach wzrostu jest czas. Pozostałe zmienne można podzielić na zmienne autonomiczne, niezależne od woli władzy gospodarczej (np. liczba ludności) i zmienne sterowane bezpośrednio lub pośrednio kształtowane przez władzę gospodarczą (trwały majątek produkcyjny, produkcja, inwestycje produkcyjne, konsumpcja itp.). Zmienne sterowalne bezpośrednio kształtowane przez władzę gospodarczą nazywam zmiennymi sterującymi lub sterowaniami (taką zmienną może być np. stopa inwestycji). Wartości pozostałych zmiennych sterowalnych zależą od wartości zmiennych sterujących i zmiennych autonomicznych. Nazywam je zmiennymi wynikowymi. Część zmiennych wynikowych tworzą takie wielkości ekonomiczne, które bezpowrotnie „wychodzą” poza układ gospodarczy (np. konsumpcja). Zmienne te charakteryzują stan wyjścia gospodarki. O pozostałych zmiennych wynikowych (trwały majątek produkcyjny, produkcja, dochód narodowy itp.) mówię, że charakteryzują jej stan wewnętrzny. Na zasadzie analogii mówię także, że zmienne sterujące charakteryzują stan wejścia gospodarki. Zmienne, które w rozpatrywanym okresie czasu są stałymi (liczbami lub wektorami) nazywam parametrami modelu.

O funkcjach czasu opisujących przebieg zmiennych sterowalnych i spełniających założenia modelu mówię, że opisują dopuszczalny proces wzrostu¹. Funkcje takie nazywam *t r a j e k t o r i a m i* (np. trajektoria dochodu narodowego, inwestycji itd.). Zakładam, że na przebieg procesu wzrostu ma wpływ władza gospodarcza decydująca o konkretnych wartościach zmiennych sterujących. Aby ocenić różne procesy, a więc pośrednio ocenić działanie władzy gospodarczej, należy ustalić *k r y t e r i u m w z r o s t u* w postaci pewnej funkcji skalarnej określonej na zbiorze dopuszczalnych procesów wzrostu. Procesy, którym odpowiada maksymalna wartość takiej funkcji-kryterium nazywam *o p t y m a l n y m i p r o c e s a m i w z r o s t u* (z punktu widzenia danego kryterium).

Książka poświęcona jest analizie optymalnych procesów wzrostu w zagregowanych modelach *j e d n o s e k t o r o w y c h* (rozdział II) i *d w u s e k t o r o w y c h* (rozdział III) przy różnych założeniach o powiązaniach między zmiennymi ekonomicznymi i sposobach oddziaływania władzy gospodarczej na przebieg procesów wzrostu. Każdy sektor, niezależnie od stopnia dezagregacji modelu, wytwarza olbrzymią liczbę różnorodnych produktów. Dlatego przyjmuję, że dany jest układ cen pozwalający wielkość produkcji sektora wyrazić w jednostkach pieniężnych. Ze względu na liczbę wyróżnionych czynników produkcji rozpatruję modele *z e r o - , j e d n o - i d w u c z y n n i k o w e*. Jedynym modelem zeroczynnikowym, którym zajmuję się, jest dwusektorowy model wzrostu typu Leontiewa. W modelu tym produkcję traktuje się jako proces przetwarzania wytworzonych produktów w inne produkty, który może odbywać się w dowolnej skali, byle były zachowane odpowiednie proporcje między rozmiarami produkcji w sektorach. W modelach jednoczynnikowych czynnikiem produkcji jest trwały majątek produkcyjny (kapitał). W modelach dwusektorowych jest on podzielony między dwa podstawowe sektory produkcyjne gospodarki (działy): sektor 1 wytwarzający środki produkcji i sektor 2 wytwarzający dobra konsumpcyjne. Zakładam, że istnieje układ cen pozwalający w każdym momencie czasu na scharakteryzowanie zasobu tego czynnika w każdym sektorze za pomocą jednej liczby. W modelach dwuczynnikowych zakładam, że produkcję ograniczają zasoby trwałego majątku produkcyjnego oraz zasoby jednorodnej pracy. Ponieważ praca w rzeczywistości nie jest wielkością jednorodną, więc przyjmuję, że jej zasób i nakłady dają się wyrazić w pewnych umownych jednostkach (np. przyjmuję, że miarą ilości pracy zaangażowanej w procesie produkcji jest zatrudnienie).

¹ Dopuszczalny- z punktu widzenia założeń modelu.

2. ZAŁOŻENIE STEROWANIA OPTYMALNEGO WZROSTEM

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie sterowania optymalnego wzrostem jest typem zagadnienia na ekstremum funkcji (kryterium wzrostu) na pewnym zbiorze dopuszczalnych procesów wzrostu odpowiadających różnym sterowaniom. O wyborze konkretnych sterowań ze zbioru sterowań dopuszczalnych decyduje władza gospodarcza. Jeżeli władza gospodarcza ustala wartości sterowań na pewnym stałym poziomie, tzn. jeżeli postuluje, by zmienne sterujące były w rozpatrywanym okresie czasu stałymi (nazywamy je wtedy parametrami sterującymi), wówczas zadanie sterowania optymalnego można najczęściej rozwiązać za pomocą klasycznego rachunku różniczkowego. W modelach wzrostu założenie o stałości sterowań (stałości funkcji grających rolę sterów) jest jednak z reguły niezgodne z rzeczywistością. Zainteresowanie teorią sterowania optymalnego wiąże się z tym, że pozwala ona na znaczne osłabienie tego założenia i formułowanie problemów wzrostu w matematycznie ogólniejszej i, wydaje się, ekonomicznie poprawniejszej postaci. „Mechaniczne” uogólnienia problemów stawianych na gruncie klasycznego rachunku optymalizacyjnego prowadzą jednak z reguły do rozwiązań nie do przyjęcia w świetle naszej wiedzy o wzroście, m.in. ze względu na niedopuszczalny skokowy przebieg zmiennych ekonomicznych grających rolę sterów². Skłania to do głębszych refleksji na temat możliwości stosowania aparatu teorii sterowania optymalnego jako narzędzia badawczego zjawisk ekonomicznych. Albo jego przydatność jest niewielka, albo też nierealne rozwiązania są wynikiem niepoprawnego sformułowania zadań sterowania optymalnego. Celem moim jest m.in. pokazanie, że nierealne rozwiązania są przede wszystkim rezultatem niepoprawnego (z ekonomicznego punktu widzenia) opisu matematycznego problemów wzrostu. Uważam, że aparat teorii sterowania optymalnego, który faktycznie wyrósł z pewnych praktycznych problemów technicznych, ma zastosowanie nie tylko jako użyteczne narzędzie badawcze zjawisk fizycznych. Aparat ten można również efektywnie wykorzystywać do rozwiązywania wielu ważnych problemów ekonomicznych, w tym przede wszystkim problemów wzrostu. Zarzuty o nierealność rozwiązań należy kierować pod adresem założeń modeli, a nie teorii sterowania optymalnego.

3. RÓWNOWAGA EKONOMICZNA I WZROST

Rozwiązanie zagadnienia sterowania optymalnego wzrostem, a więc ustalenie, który z dopuszczalnych procesów wzrostu jest procesem optymalnym z punktu widzenia określonego kryterium, nie wyczerpuje listy teoretycznych

² Zwraca na to uwagę m.in. Z. Czerwiński w artykule [13]; zob. także pracę [37].

problemów wzrostu. Nie mniej ważny i ciągle dyskusyjny jest problem równowagi ekonomicznej.

Pojęcie równowagi nie jest w naukach ekonomicznych rozumiane jednoznacznie. W ekonomii matematycznej dominuje walrasowska koncepcja równowagi konkurencyjnej (rynkowej) jako takiego stanu gospodarki wyrażającego się w wielkości i strukturze produkcji, czynników produkcji i poziomie cen, przy których popyt na produkcję i czynniki produkcji jest równy ich podaży. Zakłada się przy tym, że procesy produkcji i wymiany są całkowicie podporządkowane mechanizmowi rynkowemu. Wyklucza się możliwość jakiegokolwiek ingerencji ze strony władzy gospodarczej. Oznaczałoby to zachwianie równowagi sił na rynku³.

W technice odpowiednikiem stanu walrasowskiej równowagi konkurencyjnej jest stan równowagi (statycznej) autonomicznego obiektu, wyposażonego we własne „prawa ruchu”, na który nie działają żadne siły zewnętrzne. Jest to położenie obiektu, np. wahadła, do którego dochodzi on samoczynnie, bez jakiegokolwiek wymuszającej siły zewnętrznej i w którym pozostaje tak długo, dopóki nie zadziała niezerowy impuls zewnętrzny⁴.

Odmienna jest idea tzw. równowagi neumannowskiej, zgodnie z którą gospodarka znajduje się w równowadze, jeżeli może równomiernie (np. ze stałą stopą) zwiększać produkcję, przy czym zachowana zostaje pewna zgodność wzrostu technologicznego gospodarki z jej wzrostem ekonomicznym⁵. Idea ta, choć bliższa naszemu rozumieniu równowagi ekonomicznej niż idea równowagi walrasowskiej, opartej wyłącznie na relacjach rynkowych, ma z kolei tę wadę, że równowagę ekonomiczną zawęża do sfery produkcji (produkcja dla produkcji). W ujęciu Neumanna realne problemy konsumpcji pozostają w cieniu naczelnego problemu, jakim jest równomierny wzrost produkcji.

Pośrednia w stosunku do walrasowskiej i neumannowskiej jest neoklasyczna koncepcja równowagi w wieloczynnikowych modelach wzrostu, zgodnie z którą gospodarka znajduje się w równowadze, jeżeli ma miejsce równomierny wzrost wszystkich podstawowych

³ Modele równowagi rynkowej formułowane są w dwóch wersjach: statycznej i dynamicznej. Wersja statyczna pozwala na określenie warunków, w których istnieje stan równowagi konkurencyjnej. Wersja dynamiczna umożliwia również analizę jego stabilności, zob. np. R.G.D. Allen [1] rozdz.9, A. Bergstrom [7] rozdz.8, G. Debreu [14], M. Intriligator [24] rozdz.9, K. Lancaster [29] rozdz.9,12, M. Morishima [35] rozdz.2, H. Nikaido [36] rozdz.5.

⁴ Zob. np. S.W. Director, R.A. Rohrer [15] s.21, A.J. Lerner [30] rozdz.4.

⁵ Obezerne omówienie problematyki neumannowskiej równowagi ekonomicznej zawiera praca W.L. Makarowa, I.A.M. Rubinowa [31]; zob. także S. Karlin [27] rozdz.9, p.9.9-9.10, M. Morishima [35] rozdz.5, H. Nikaido [36] rozdz.2, p.9.2, rozdz.4.

wielkości ekonomicznych: czynników produkcji, produkcji (dochodu) i konsumpcji⁶. Jeżeli w standardowym neoklasycznym modelu wzrostu, np. w modelu Solowa [45], przyjmujemy ponadto neoklasyczne założenia, że płaca równa się krańcowej wydajności pracy, a stopa procentowa równa się krańcowej produktywności kapitału, to otrzymamy wniosek, że podaż dóbr konsumpcyjnych jest równa popytowi (sumie płac) a więc, że zachodzi równowaga rynkowa.

Pisałem już, że nie interesują mnie modele - a więc i wnioski, do których dochodzi się za ich pomocą - w których postuluje się wyłącznie rynkową formę procesów produkcji i wymiany. Interesują mnie modele, w których przewidziana jest możliwość kształtowania tych procesów przez władzę gospodarczą. Potrzebne jest zatem także odmienne (a w każdym razie szersze) spojrzenie na istotę równowagi ekonomicznej, by odpowiadała ona również specyfice gospodarki nie podporządkowanej wyłącznie mechanizmom rynkowym.

Spróbujmy ustalić cechy wspólne przedstawionych koncepcji równowag. We wszystkich równowaga oznacza istnienie pewnych niezmienników ekonomicznych. W równowadze walrasowskiej niezmienną są np. wielkość produkcji, czynników produkcji i ceny, w równowadze neumannowskiej - stopa wzrostu produkcji (oraz jej struktura) itd. Obiekty techniczne w równowadze też nie zmieniają pewnych swoich właściwości, np. naturalnym stanem równowagi wahadła jest jego położenie pionowe przy zerowej prędkości kątowej (stan spoczynku). W modelach wzrostu, mówiąc o równowadze mamy zawsze na myśli pewien okres czasu, w którym stwierdzamy jej istnienie lub jej brak. Nie utożsamiamy jej zatem z pojedynczym stanem gospodarki, lecz z pewną sekwencją (funkcją) jej stanów w czasie, czyli z procesem wzrostu, w którym gospodarka jest zdolna reprodukować (odtworzać) określone cechy, właściwości. W równowadze walrasowskiej reprodukowane są takie cechy gospodarki, jak wielkość produkcji, czynników produkcji i poziom cen - trajektorie tych wielkości są konstantami, w równowadze neumannowskiej - stopa wzrostu produkcji i jej struktura (trajektoria produkcji jest wówczas funkcją wykładniczą) itd. Również złożone obiekty fizyczne w równowadze reprodukują pewne ewolucyjne właściwości, np. okręt w równowadze ma oś pionową skierowaną stale ku środkowi ziemi i zerową prędkość kątową - współrzędnymi jego trajektorii mogą być np. położenie geograficzne i prędkość poruszania się.

W szczególnych przypadkach repertuar cech - atrybutów równowagi obiektu można określić jednoznacznie, mamy wówczas do czynienia z jednym typem równowagi. Na ogół jednak - dotyczy to zwłaszcza obiektów tak złożonych jak gospodarka - może on ulegać zmianie zarówno pod wpływem czynników zewnętrznych (adaptacje), jak i czynników wewnętrznych (samoregulacja). Innymi słowy, zestaw tych cech może zmieniać się w czasie. Na przykład, w

⁶ Por. E. P h e l p e [40] oraz np. K.J. A r r o w [2], M. I n t r i l l i g a t o r [24] rozdz.16, K. S h e i l l [44], L. S t o l e r u [46] rozdz.11,12.

gospodarce z niskim technicznym uzbrojeniem pracy jednym z atrybutów równowagi będzie szybsze tempo rozwoju sektora (działu) pierwszego niż drugiego. W gospodarce osiągnącej wysoki poziom technicznego uzbrojenia pracy zjawisko takie może okazać się z czasem niekorzystne. Forsowanie wysokiego tempa wzrostu produkcji działu pierwszego może doprowadzić do „przeinwestowania” gospodarki. Zmiana repertuaru (zestawu) cech - atrybutów równowagi oznacza de facto zmianę typu równowagi. W przypadku tak złożonych obiektów, jak gospodarka, należy więc raczej mówić o różnych typach równowag, a nie o jednej równowadze „absolutnej”. Tak rozumiana równowaga nie jest zjawiskiem niezależnym od woli władzy gospodarczej. Omawiając różne modele wzrostu, pokażę, że w długich okresach czasu władza może zainicjować zmianę określonego typu równowagi, wykorzystując w tym celu pozostające do jej dyspozycji instrumenty ekonomiczne. Optymalne procesy wzrostu dzielą się wówczas na pewne fazy (np. inwestycyjną, konsumpcyjną) związane z określonymi typami równowag.

Z pojęciem równowagi wiąże się pojęcie stabilności. Przez stabilny rozumieć proces równomiernego wzrostu w otoczeniu stanów gospodarki w określonej równowadze. Najprostsze obiekty techniczne często mają tylko jeden „naturalny” stan równowagi. W przypadku wahadła współrzędnymi stanu równowagi są jego położenie pionowe i zerowa prędkość kątowna. Stabilność (asymptotyczna) wahadła w otoczeniu tego stanu oznacza jego powrót z upływem czasu do położenia pionowego. Złożone obiekty, jak gospodarka, posiadające zdolność samoorganizacji, samoregulacji itd. charakteryzują się na ogół wieloma typami równowag, zbliżając się w procesie rozwoju okresowo do stanów równowagi tego lub innego typu.

W książce nie zajmuję się analizą stabilności wszystkich dopuszczalnych procesów wzrostu. Interesuje mnie głównie przebieg procesów optymalnych.

4. KRYTERIUM WZROSTU

Ostatecznym, nadrzędnym celem społecznego procesu produkcji powinno być zaspokojenie szeroko pojmowanych potrzeb konsumpcyjnych społeczeństwa. W jego realizacji zawarty jest sens całego procesu produkcji. Czynniki produkcji, produkcja, inwestycje produkcyjne itd. są tylko środkami umożliwiającymi realizację tego celu. Dlatego przy ocenie różnych procesów wzrostu kieruję się wyłącznie następującymi „konsumpcyjnymi” kryteriami:

- (a) maksymalizacji konsumpcji lub konsumpcji przypadającej średnio na osobę w ustalonym okresie,
- (b) maksymalizacji konsumpcji lub konsumpcji na osobę w momencie końcowym ustalonego okresu,
- (c) minimalizacji czasu dojścia gospodarki do pewnego założonego, docelowego poziomu produkcji dóbr konsumpcyjnych.

W zagadnieniach wzrostu z kryteriami typu (a), (b) przedział czasu, (okres) w którym analizuje procesy wzrostu jest ustalony; chodzi w nich o wskazanie optymalnego procesu wzrostu w zbiorze (wiązce) procesów dopuszczalnych, spełniających założenia modelu w ustalonym z góry okresie czasu. Natomiast w zagadnieniach minimalnoczasowych z kryterium typu (c) należy ustalić nie tylko postać optymalnego procesu wzrostu, lecz także długość okresu czasu, w którym gospodarka dochodzi do założonego poziomu produkcji dóbr konsumpcyjnych. W niektórych przypadkach kryteria (b), (c) mogą być zbieżne - odpowiednie zagadnienia wzrostu mogą okazać się wzajemnie dualne.

5. INTERPRETACJA ZMIENNYCH EKONOMICZNYCH

Czas w modelach wzrostu jest zmienną, której funkcjami są (explicitie lub implicitie) wszystkie pozostałe zmienne. Zmienna czasu t może przebiegać zbiór liczb naturalnych $\{t_0, t_0+1, \dots, t_1\}$ (najczęściej utożsamianych z latami), bądź przedział liczb rzeczywistych $[t_0, t_1]$. Mówimy, że w pierwszym przypadku czas zmienia się w sposób skokowy, w drugim - w sposób ciągły. W modelach wzrostu oba ujęcia czasu są dopuszczalne i jednakowo poprawne. Wnioski ekonomiczne, do których prowadzą badania matematycznych modeli wzrostu są podobne niezależnie od tego, czy są to modele z czasem skokowym, czy modele z czasem ciągłym.

W kolejce zakładam, że czas zmienia się w sposób ciągły. Oznacza to, że jeżeli za jednostkę czasu przyjmę rok - R , wtedy każdy moment czasu t oznacza pewną rzeczywistą wielokrotność roku. Przykładowo $t = 2,25 R$ oznacza w przybliżeniu koniec pierwszego kwartału roku trzeciego, $t = 1980 \frac{11}{12} R \approx 1980,92 R$ - koniec listopada 1981 roku itd.

Przy założeniu, że istnieje pewien układ cen wielkość trwałego majątku produkcyjnego w momencie t można wyrazić w jednostkach pieniężnych, np. w złotych. Wielkość ta jest określona w każdym momencie czasu. Nazywa się ją **z a s o b e m**. Liczba ludności też jest zasobem mierzonym w określonych jednostkach, np. w milionach osób.

Oznaczmy przez T pewien przedział czasu (okres), $T = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, oraz przez $Y(\tau)$ wielkość dochodu narodowego (w zł.) wytworzonego w przedziale czasu $[t_0, \tau] \subset T$, $t_0 < \tau$. Wielkość $Y(\tau)$ nazywa się **s t r u m i e n i e m d o c h o d u n a r o d o w e g o** wytworzonego w okresie $[t_0, \tau]$. Strumieniem jest także wielkość inwestycji w pewnym okresie oraz konsumpcji. Załóżmy, że funkcja charakteryzująca strumień dochodu narodowego jest gładka (ciągła i różniczkowalna). Pochodna $y(t) = dY(t)/dt$ ma wymiar: zł/ R . Wielkość tę nazywa się **g ę s t o ś c i ą s t r u m i e n i a d o c h o d u n a r o d o w e g o** w momencie t . Podobnie definiuje się się gęstość strumienia inwestycji i konsumpcji. Gęstość strumienia dochodu narodowego (inwestycji, konsumpcji) określa tylko prędkość

narastania dochodu narodowego (inwestycji, konsumpcji). W modelach z czasem ciągłym zwrot „wielkość dochodu narodowego w momencie t ” jest, ściśle rzecz biorąc, pozbawiony sensu, ponieważ w poszczególnych momentach czasu wielkość ta podobnie jak wielkość inwestycji, konsumpcji jest nieokreślona. Określona jest wielkość dochodu narodowego (inwestycji, konsumpcji) w pewnym okresie, np. można mówić o wielkości dochodu narodowego wytworzonego w roku pierwszym rozumianym jako przedział czasu $[0, 1]$: jest ona równa $\int_0^1 y(t) dt$. W literaturze ekonomiczno-matematycznej przyjęto jednak umownie nazywać wielkością dochodu narodowego w momencie czasu t (podobnie wielkością inwestycji, konsumpcji) gęstość strumienia dochodu narodowego (inwestycji, konsumpcji) w tym momencie. Terminologię tę stosuję także w książce. Należy pamiętać jednak o jej umowności.

6. PRZYKŁAD ZADANIA STEROWANIA OPTIMALNEGO WZROSTEM

Ustalmy przedział czasu $T = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, i weźmy moment czasu $t \in T$. Przyjmijmy oznaczenia: $m(t)$ - trwały majątek produkcyjny w momencie t (zasób, wymiar: zł); $y(t)$, $i(t)$, $c(t)$ - dochód narodowy, inwestycje produkcyjne i konsumpcja w momencie t (strumienie, wymiar: zł/R); a - wskaźnik efektywności majątku (parametr dodatni, wymiar: 1/R).⁷ Wszystkie zmienne są rzeczywiste i nieujemne.

Rozpatrzmy następujący układ założeń (dla prostoty zakładamy, że wszystkie funkcje są różniczkowalne):

$$y(t) = a m(t) \quad (1)$$

(dochód narodowy zawsze wytwarzany jest w stałej proporcji do trwałego majątku produkcyjnego - stała efektywność majątku).

$$\dot{m}(t) = m(\tau) + \int_{\tau}^t i(\theta) d\theta \quad (2)$$

dla każdej pary momentów $\tau, t \in T$, $\tau \leq t$ (trwały majątek produkcyjny w momencie t jest równy jego wielkości we wcześniejszym momencie τ powiększonej o inwestycje produkcyjne poniesione w okresie $[\tau, t]$)⁸.

$$c(t) = y(t) - i(t) \geq 0 \quad (3)$$

(na konsumpcję przeznaczana jest część dochodu narodowego pozostająca po odliczeniu inwestycji).

⁷Jego odwrotność, współczynnik kapitałochłonności, ma wymiar czasu: R.

⁸Zakładamy, że majątek produkcyjny w rozpatrywanym okresie czasu nie zużywa się (inwestycje brutto równają się inwestycjom netto).

Przy założeniu różniczkowalności równanie całkowe (2) można zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{d}{dt} m(t) = i(t). \quad (2')$$

Z równania (3) zważywszy na (1) otrzymujemy:

$$c(t) = a m(t) - i(t). \quad (3')$$

Założmy, że ustalona jest początkowa wielkość trwałego majątku produkcyjnego (w momencie t_0):

$$m(t_0) = m^0 > 0. \quad (4)$$

Nieujemne funkcje opisujące wzrost majątku produkcyjnego, inwestycji i konsumpcji w okresie czasu T i spełniające warunki (2'), (3'), (4), a także odpowiadającą im zgodnie z (1) funkcję wzrostu dochodu narodowego nazywam trajektoriami (majątku produkcyjnego, inwestycji itd.). Trajektorie opisują proces wzrostu gospodarki spełniające warunki (1), (2'), (3'), (4) w okresie czasu T . Inwestycje pełnią rolę sterowania. Konsumpcja charakteryzuje stan wyjścia gospodarki, pozostałe wielkości - stan wewnętrzny.

Można analizować wzrost gospodarki zakładając kolejno różne postacie trajektorii inwestycji. Analiza taka pozwoli ocenić co najwyżej kilka wariantów procesów wzrostu. Nie da odpowiedzi na pytanie, który z procesów spełniających warunki (1), (2'), (3'), (4) będzie najlepszy z punktu widzenia określonego, interesującego nas kryterium wzrostu. Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy rozwiązać zadanie ekstremalne, np.

$$\max \int_T c(t) dt \quad (\text{zmaksymalizować wielkość konsumpcji w okresie czasu } T)$$

przy warunkach
(2'), (3'), (4).

Postać rozwiązania zależy od tego, jaka klasa funkcji opisujących proces wzrostu nas interesuje (ciągłe, różniczkowalne, przedziałami ciągłe itd.). W najprostszych przypadkach, np. funkcji różniczkowalnych i przy założeniu stałego udziału inwestycji produkcyjnych w dochodzie narodowym (stałej stopy inwestycji, $i(t)/y(t) = \text{const.}$ w każdym momencie czasu $t \in T$), rozwiązanie tego zadania można otrzymać za pomocą klasycznego rachunku różniczkowego. Przez długi okres czasu metodami tymi próbowano rozwiązywać szereg zagadnień wzrostu⁹. Przypadki bardziej złożone, w tej liczbie zagadnienia, którymi zajmuję się w tym opracowaniu wymagają zastosowania aparatu teorii sterowania optymalnego.

⁹Por. np. Z. Czerwiński [11], M. Kałalecki [25], B. Minc, W. Przelaszkowska [33].

Tabela 1

Rodzaje zadań sterowania i typy modeli wzrostu
rozpatrywanych w książce

Zbiór stanów docelowych $X^1 = R^n$		Zbiór stanów docelowych $X^1_{CR}{}^n$ - zadanie minimalnoczasowe	
		zadanie z kryterium caiko- wym	zadanie starowania do- celowego
Horizont czasu T - ustalony	wersja nietajna	-Model typu Domara-Harroda, zad.(4.12) - (4.13); -Model typu Shella zad.(6.15) - (6.16), (6.20) - (6.21)	
	wersja stacjonarna	-Model typu Domara-Harroda, zad.(4.26') - (4.27'), (5.13) - (4.31'), - (4.32'), (5.13) - (5.14), (5.18'), - (5.19'), (5.27) - (5.28); -Model typu Mahalanobisa, zad.(7.11) - (7.12), (7.16') - (7.17'), (8.8) - (8.9); -Model typu Leontiewa, zad.(10.5) - (10.6), (10.16) - (10.17)	-Model typu Mahalanobisa, zad.(7.18') - (7.19'), (7.25) - (7.26), (8.10) - (8.11), (8.16) - (8.17); -Model typu Uzawy, zad.(9.8) - (9.9), (9.14) - (9.15), (9.25) - (9.26); -Model typu Leontiewa, zad.(10.7) - (10.8)
Horizont T - nie ustalony, nietajna	wersja stacjo-		Model typu Shella, zad.(6.30) - (6.31); -Model typu Mahalanobisa, zad.(7.20') - (7.21'), (8.12) - (8.13); -Model typu Leontiewa, zad.(10.9) - (10.10)

Rozdział I

WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII STEROWANIA OPTIMALNEGO

Pojęcie sterowanie, równowaga używa się powszechnie w różnych znaczeniach, wiążąc je z równie wieloznacznym pojęciem systemu. Aby uniknąć nieporozumień, pojęciom tym nadamy bardziej jednoznaczne, a wobec tego węższe znaczenie i tylko w tym znaczeniu będziemy używać ich dalej. System, dokładniej - system dynamiczny, sterowanie, równowaga są w książce pojęciami matematycznymi. Definiujemy je w paragrafach 1,2. W paragrafie 3 przedstawiamy aparat teorii sterowania optymalnego, z którego korzystamy w rozdziałach następnych.

§ 1. SYSTEM DYNAMICZNY

1.1. Pojęcia podstawowe¹

Kiedy mówimy „system dynamiczny”, mamy na myśli obiekt (lub zbiór obiektów) spełniający następujące warunki:

- na obiekt można działać na wejściu za pomocą określonych bodźców zewnętrznych zwanych wielkościami wejściowymi,
- pod wpływem bodźców zewnętrznych obiekt może zmieniać w pewnych dopuszczalnych granicach swój stan wewnętrzny,
- reakcje obiektu na bodźce zewnętrzne można obserwować na wyjściu w postaci określonych wielkości wyjściowych. Reakcje te zmieniają się na ogół wraz ze zmianą stanu wewnętrznego obiektu.

¹ Redagując ten paragraf opieraliśmy się m.in. na pracach:
 M. Athans, P.L. Falb [3] rozdz.4, S.W. Director,
 A. Rohrer [15] rozdz. 1,2,4, R.E. Kalman, P.L. Falb,
 M.A. Arbib [26] rozdz.1,2, W.A. Porter [43] rozdz.1-3, L.A.
 Zadeh, C.A. Desoer [51] rozdz. 1-6.

P r z y k ł a d y. 1^o. Mówimy, że przedsiębiorstwo jest systemem dynamicznym, w którym wielkościami wejściowymi są m.in. napływyające surowce i półfabrykаты (tzw. wielkości zasileniowe), a także informacja o cenach, wskaźnikach ekonomicznych, popycie na produkcję itp. (wielkości informacyjne). Wielkościami wyjściowymi są m.in. produkcja sprzedana, wszelkie wychodzące na zewnątrz sprawozdania, rozliczenia, zamówienia, stanem wewnętrznym - środki trwałe, zatrudnienie, zapasy, produkcja w toku itp.

2^o. W przykładzie przytoczonym we Wstępie (punkt 6) gospodarka jest systemem dynamicznym, w którym wielkością wejściową w momencie t są inwestycje produkcyjne, wielkością wyjściową - konsumpcja (część dochodu narodowego przeznaczana na spożycie). Stan wewnętrzny opisują dwie zmienne: trwałe majątek produkcyjny i wytworzony dochód narodowy. Zgodnie z (3') wielkość wyjściowa w momencie t jest funkcją wielkości wejściowej w tym momencie i aktualnego stanu wewnętrznego. Stan wewnętrzny w momencie t zależy, jak wynika z (2), od stanu wewnętrznego w dowolnym momencie $\tau \leq t$ i wielkości wejściowych w okresie $[\tau, t]$. Dany stan wewnętrzny w momencie τ i funkcja wielkości wejściowych w okresie $[\tau, t]$ określają (jednoznacznie) funkcję stanów wewnętrznych i wielkości wyjściowych w tym okresie.

Przykład ten sugeruje pewną definicję, którą przytoczymy za chwilę. Pierwszorzędną rolę gra w niej czas, dokładniej - uporządkowany zbiór momentów czasu $T \subseteq E^1$ ². W każdym momencie $t \in T$ wielkość wejściowej systemu $u(t)$ odpowiada pewną wielkość wyjściową $y(t)$ z dokładnością do jego aktualnego stanu wewnętrznego $x(t)$. Stan wewnętrzny $x(t)$ jest określony jednoznacznie, jeżeli dane są: stan wewnętrzny $x(\tau)$ ($\tau, t \in T$) i funkcja wielkości wejściowych systemu w okresie $[\tau, t] \cap T$, jeżeli $\tau \leq t$ lub $[t, \tau] \cap T$, jeżeli $\tau > t$ ³. Wielkość wejściową $u(t)$ nazywamy **sterowaniem**, a wielkość wyjściową $y(t)$ - **stanem wyjścia** systemu w momencie t . Zazwyczaj zakłada się, że sterowania mogą przyjmować wartości tylko w pewnym zbiorze U **sterowań dopuszczalnych**. W przykładzie przytoczonym we Wstępie inwestycje (sterowania) są nieujemne oraz nie przekraczają wielkości dochodu narodowego. Podobnie zakłada się, że stany wewnętrzne $x(t)$ i stany wyjścia $y(t)$ należą do pewnych zbiorów X, Y **dopuszczalnych stanów wewnętrznych i stanów wyjścia**. Funkcje sterowań $u: T \rightarrow U$, stanów wewnętrznych $x: T \rightarrow X$ i sta-

²Przez E^k oznaczamy k -wymiarową przestrzeń Euklidesa; E^1 - oś liczbowa rzeczywista.

³W pierwszym przypadku ($\tau \leq t$) mówimy o systemie prospektywnym (stan wewnętrzny we wcześniejszym momencie τ i funkcja wielkości wejściowych w okresie czasu $[\tau, t]$ determinują stany wewnętrzne systemu we wszystkich momentach czasu następujących po τ i nie przekraczających t), w drugim ($\tau > t$) - o systemach retrospektywnych, zob. H. Greniewski [21] s. 23-24. Choć w książce zajmujemy się wyłącznie systemami prospektywnymi (w modelach wzrostu należy najczęściej określić przyszłe stany gospodarki na podstawie informacji o jej stanach aktualnych i przeszłych), wszystkie definicje i wywody tego paragrafu odnoszą się do systemów obu typów.

nów wyjścia $y: T \rightarrow Y$ nazywamy **t r a j e k t o r i a m i** (sterowań, stanów wewnętrznych i stanów wyjścia). Trajektorie utożsamiamy też z relacjami $u_T = \{(t, u(t)), t \in T\} \subset T \times U$, $x_T = \{(t, x(t)), t \in T\} \subset T \times X$, $y_T = \{(t, y(t)), t \in T\} \subset T \times Y$ czyli z wykresami funkcji, jeżeli np. $U, X, Y \subset E^1$ ⁴.

Weźmy trajektorię sterowań u_T i momenty $\tau, t \in T; \tau \leq t$. Trajektorię $u_{[\tau, t]} = \{(\theta, u(\theta)), \theta \in [\tau, t] \cap T\}$ nazywamy $[\tau, t]$ - s e g m e n t e m trajektorii u_T . Analogicznie definiujemy $[\tau, t]$ - segment trajektorii stanów wewnętrznych x_T i trajektorii stanów wyjścia y_T , a także (τ, t) , (τ, t) oraz (τ, t) - segmenty tych trajektorii⁵.

Ze względu na interpretację lub z przyczyn formalno - matematycznych trajektorie sterowań nie mogą być dowolnymi funkcjami $u: T \rightarrow U$, np. inwestycje w przykładzie ze Wstępu muszą opisywać funkcje przynajmniej całkowalne (w sensie Riemanna). Ogólnie zakłada się, że trajektorie sterowań należą do pewnej klasy funkcji $K[T]$. Dla ścisłości podobne założenia należałoby przyjąć także o trajektoriach stanów wewnętrznych i stanów wyjścia. Nie będzie to jednak konieczne. W praktyce o trajektoriach tych przyjmuje się na ogół dość „słabe” założenia, a w zagadnieniach, które są przedmiotem książki, wynikają one wprost z właściwości trajektorii sterowań.

1.2. Definicja

Po tym wstępnym przygotowaniu możemy przystąpić do podania pełnej matematycznej definicji pojęcia systemu dynamicznego.

Definicja 1.1.⁶ Systemem dynamicznym będziemy nazywać następujący obiekt matematyczny:

(A) Dany jest zbiór momentów czasu T , zbiór stanów wewnętrznych X , zbiór sterowań U , zbiór (klasa) $K[T]$ trajektorii sterowań z wartościami w U w każdym momencie $t \in T$, zbiór stanów wyjścia Y .

⁴Oznaczenia $f: A \rightarrow B$ i f_A stosujemy zamiennie. Oznaczenie f_A jest mniej dokładne, ponieważ nie wskazuje, jaka jest przeciwdziedzina funkcji f . Jeżeli z kontekstu będzie wiadomo, o jaką dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji chodzi, wtedy będziemy ją krótko oznaczać symbolem f . $A \times B$ oznacza iloczyn kartezjański zbiorów A, B .

⁵ $[\tau, t]$ - oznacza przedział (odcinek) obustronnie domknięty w E^1 , (τ, t) - przedział lewostronnie otwarty (nie zawierający punktu τ), (τ, t) - przedział prawostronnie otwarty (nie zawierający punktu t), (τ, t) - przedział obustronnie (lewo- i prawostronnie) otwarty w E^1 .

⁶Bardzo zbliżoną definicję (systemu dynamicznego prospektywnego) podaje R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib w pracy [26].

(B) Zbiór T jest uporządkowanym co najmniej dwuelementowym podzbiorem E^1 .

(C) Zbiór trajektorii sterowań $K[T]$ spełnia następujące warunki:

(C1) $K[T] \neq \emptyset$.

(C2) Dla dowolnych trajektorii $u, u' \in K[T]$ i momentów

$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ ($\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T$) istnieje trajektoria $u'' \in K[T]$,

$$u''(t) = \begin{cases} u(t) & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2] \cap T \\ u'(t) & \text{dla } t \in [\tau_2, \tau_3] \cap T. \end{cases}$$

(Warunek ten głosi, że w rezultacie „sklejenia” segmentów dwóch trajektorii sterowań otrzymujemy ponownie segment trajektorii sterowań).

(D) Dane są: funkcja przejścia⁷

$$\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot)) : X \times K[T] \rightarrow X,$$

której wartościami są stany wewnętrzne $x(t) = \varphi(t; \tau, x, \omega_{\tau, t}(u)) \in X$ w momencie t systemu z trajektorią sterowań $u \in K[T]$ i stanem wewnętrznym $x \in X$ w momencie τ , oraz przekształcenie wyjścia

$$\eta(\cdot, \cdot, t) : X \times U \rightarrow Y,$$

którego wartościami są stany wyjścia $y(t) = \eta(x, u, t)$ systemu w momencie t , jeżeli w momencie tym jego stan wejścia $u(t) = u \in U$, a stan wewnętrzny $x(t) = x \in X$.

(D1) Przekształcenie $\omega_{\tau, t} : K[T] \rightarrow K[\tau, t]$ jest określone dla każdej pary momentów $\tau, t \in T$ i przekształca trajektorię sterowań u_T w jej $[\tau, t]$ - segment, tzn.

$$u \in K[T] \Rightarrow \omega_{\tau, t}(u) = \begin{cases} u|_{[\tau, t]}, & \text{jeżeli } \tau \leq t, \\ u|_{[t, \tau]}, & \text{jeżeli } \tau > t. \end{cases}$$

(D2) Przekształcenie wyjścia $\eta(\cdot, \cdot, t) : X \times U \rightarrow Y$ jest określone w każdym momencie $t \in T$. Funkcja przejścia $\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot))$ spełnia następujące warunki:

(D3) Przekształcenie $\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot)) : X \times K[T] \rightarrow X$ jest określone dla każdej pary momentów $\tau, t \in T$.

(D4) $\varphi(t; t, x, \omega_{\tau, t}(u)) = x$ w każdym momencie $t \in T$, dla dowolnego stanu $x \in X$ i dowolnej trajektorii sterowań $u \in K[T]$. (Jeżeli w momencie t system znajduje się w stanie x , to w momencie tym pozostaje on w tym stanie, niezależnie od postaci trajektorii sterowań).

(D5) Dla dowolnych momentów $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ ($\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T$), dowolnego stanu $x \in X$ i każdej trajektorii sterowań $u \in K[T]$:

$$\varphi(\tau_3; \tau_1, x, \omega_{\tau_1, \tau_3}(u)) = \varphi(\tau_3; \tau_2, \varphi(\tau_2; \tau_1, x, \omega_{\tau_1, \tau_2}(u)), \omega_{\tau_2, \tau_3}(u)).$$

⁷ Symbolem $f(x, \cdot)$ oznaczamy funkcję argumentu zaznaczonego kropką.

(Jeżeli system z trajektorią sterowań u_T znajduje się w momencie τ_1 w stanie $x(\tau_1) = x$, a w momencie τ_3 osiąga stan $x(\tau_3)$, to stan ten osiąga także, „startując” w momencie τ_2 ze stanu $x(\tau_2) = \varphi(\tau_2; \tau_1, x, \omega_{\tau_1, \tau_2}(u))$). ▲

Funkcję przejścia $\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot))$ nazywamy także przez k e z t a ł c e n i e m lub t r a n s f o r m a c j ą s t a n ó w w e w n ę t r z n y c h s y s t e m u, a z b i ó r $T \times X$ - p r z e s t r z e - n i ą f a z o w ą s y s t e m u. Trajektoria stanów wewnętrznych x_T wyznacza krzywą w przestrzeni fazowej $T \times X$. Zbiór momentów czasu T nazywamy h o r y z o n t e m c z a s u. Zakładamy, że horyzont czasu T jest ograniczonym i domkniętym (zwartym) podzbiorem przestrzeni E^1 . Momenty $t_0 = \inf T$ oraz $t_1 = \sup T$ nazywamy m o m e n t e m p o c z ą t k o w y m i m o m e n t e m k o ń c o w y m h o r y z o n t u c z a s u T , stan $x^0 = x(t_0)$ - s t a n e m p o c z ą t k o w y m, a stan $x^1 = x(t_1)$ - s t a n e m k o ń c o w y m s y s t e m u.

1.3. System gładki

Jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, wtedy trajektorię sterowań będziemy nazywać krótko s t e r o w a n i e m. Będziemy też mówić, że w horyzoncie czasu T sterowanie przeprowadza system ze stanu początkowego x^0 do stanu końcowego x^1 . Umówimy się, że

△ D e f i n i c j a 1.2. System dynamiczny nazwiemy (i) s y s t e m e m z c z a s e m c i ą g ł ą y m, jeżeli horyzont T będzie spójnym podzbiorem przestrzeni E^1 , (ii) s y s t e m e m n - w y m i a r o w y m, jeżeli zbiór stanów wewnętrznych $X \subseteq E^n$ i E^n będzie najmniejszą przestrzenią Euklidesa zawierającą X . ▲

W książce zajmujemy się skończeniowym wymiarami systemami z czasem ciągłym, w których $X = E^n$, $U \subseteq E^m$, $Y = E^k$. Spośród nich szczególnie ważną, interesującą nas klasę tworzą systemy gładkie.

△ D e f i n i c j a 1.3.⁸ Skończeniowym systemem dynamicznym z czasem ciągłym nazwiemy s y s t e m e m g ł ą d k i m, jeżeli (i) zbiór sterowań $U \subseteq E^m$, zbiór stanów wewnętrznych $X = E^n$, zbiór stanów wyjścia $Y = E^k$, (ii) każde sterowanie $u \in K[T]$ jest funkcją przedziałami ciągłą na T i ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na $\text{int } T$ ⁹, (iii) każda trajektoria stanów wewnętrznych x_T , gdzie $x(t) = \varphi(t; \tau, x, \omega_{\tau, t}(u))$, jest funkcją ciągłą na T dla dowolnego momentu $\tau \in T$, dowolnego $x \in E^n$ i każdego sterowania $u \in K[T]$, a

⁸Jest to faktycznie definicja tylko pewnej podklasy systemów gładkich wg K a l m a n a, F a l b a, A r b i b a [26], z którymi będziemy wyłącznie mieli do czynienia w książce.

⁹Ogólnie, $\text{int } A$ oznacza wnętrze zbioru A (w przestrzeni, w której zbiór jest zanurzony). Jeżeli $T = [t_0, t_1]$, to $\text{int } T = (t_0, t_1)$.

jej pochodna istnieje i jest funkcją przedziałami ciągłą na T wszędzie poza punktami nieciągłości sterowania u_T , (iv) przekształcenie wyjścia $\eta \in C^0 [X \times U \times T]$ ¹⁰. ▲

Mówiąc, że funkcja ma punkt nieciągłości pierwszego rodzaju rozumiemy, że jest ona w tym punkcie nieciągła i ma skończoną granicę lewo- i prawostronną. W gładkim systemie dynamicznym wartość sterowania w skończonej liczbie punktów nieciągłości $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ nie ma wpływu na przebieg trajektorii stanów wewnętrznych. Wygodnie będzie jednak przyjąć, że w punktach nieciągłości sterowania są funkcjami ciągłymi prawostronnie, tzn. $u(\tau_i) = \lim_{t \rightarrow \tau_i + 0} u(t)$, $i=1, 2, \dots, k$. Klasę funkcji przedziałami ciągłych na T , o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na int T , w punktach nieciągłości ciągłych prawostronnie oznaczamy przez $\tilde{C}^0 [T]$ ¹¹. W dalszym ciągu zajmiemy się gładkimi systemami dynamicznymi, których sterowania spełniają warunek: $u \in \tilde{C}^0 [T]$, $u(t) \in U$ w każdym momencie $t \in T$. Trajektorie stanów wewnętrznych takich systemów są prawie wszędzie na T rozwiązaniami pewnego równania różniczkowego:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1.1)$$

gdzie $dx/dt = (dx_1/dt, dx_2/dt, \dots, dx_n/dt)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Rzeczywiście, weźmy sterowanie $u \in \tilde{C}^0 [T]$, moment $t \in T$ ($t < \tau_1$) i taką liczbę ε , że $t + \varepsilon \in T$. Załóżmy, że w momencie t system znajduje się w stanie $x(t) = x$. Wówczas $x(t + \varepsilon) = \varphi(t + \varepsilon; t, x, \omega_{t, t+\varepsilon}(u)) = \varphi(t + \varepsilon; t, x, u_{[t, t+\varepsilon]})$ i wobec tego, że prawie wszędzie na T istnieje pochodna $dx(t)/dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [x(t + \varepsilon) - x(t)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(t + \varepsilon; t, x, u_{[t, t+\varepsilon]}) - \varphi(t; t, x, u(t))] = \\ &= f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

prawie wszędzie na T .

Reasumując, zajmiemy się gładkimi systemami dynamicznymi, których trajektorie stanów wewnętrznych są prawie wszędzie rozwiązaniami równań różniczkowych typu (1.1), a przekształcenia wyjścia mają postać

$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t), \quad (1.2)$$

gdzie $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$. Sterowania są funkcjami z klasy $\tilde{C}^0 [T]$. Funkcja η jest ciągła na obszarze $E^n \times U \times T$. O funkcji f będziemy dalej

¹⁰ Symbolem $C^1 [A]$ oznaczamy klasę funkcji ciągłych na A do 1 - tej pochodnej włącznie; $C^0 [A]$ - klasa funkcji ciągłych na A .

¹¹ Symbolem $\tilde{C}^1 [T]$ oznaczamy klasę funkcji ciągłych na T do (i-1) -szej pochodnej włącznie, których i - ta pochodna jest funkcją z klasy $\tilde{C}^0 [T]$.

zakładać, że jest ciągła na $E^n \times U \times T$ i ma na tym obszarze ciągle pochodne cząstkowe $\partial f / \partial x = (\partial f_1 / \partial x_j)$ względem współrzędnych x_1, x_2, \dots, x_n wektora x .

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że

□ **T w i e r d z e n i e 1.1.**¹² Jeżeli prawa strona równania

$$\frac{d}{dt} x(t) = g(x(t), t) \quad (1.3)$$

$(x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), g = (g_1, g_2, \dots, g_n))$ oraz jej pochodne cząstkowe $\partial g / \partial x = (\partial g_1 / \partial x_j)$ są funkcjami ciągłymi na otwartym zbiorze $E^n \times (\theta_0, \theta_1)$, to przez każdy punkt $(\tau^0, x^0) \in (\theta_0, \theta_1) \times E^n$ przechodzi dokładnie jedna trajektoria $x(\theta_0', \theta_1')$ będąca na pewnym przedziale $(\theta_0', \theta_1') \subseteq (\theta_0, \theta_1)$ zawierającym punkt τ^0 rozwiązaniem równania (1.3). ■

Założmy, że prawa strona równania (1.3) jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi $\partial g / \partial x$ na $E^n \times [t_0, t_1]$ (łącznie z momentem t_0). Nietrudno wykazać, że dla dowolnego stanu $x^0 \in E^n$ istnieje dokładnie jedna taka trajektoria $x[t_0, t_1]$, określona i ciągła na pewnym przedziale $[t_0, t_1'] \subseteq [t_0, t_1]$, że na (t_0, t_1') jest ona rozwiązaniem równania (1.3), a ponadto

$$x(t_0) = x^0. \quad (1.4)$$

Rzeczywiście, wystarczy przyjąć w (1.3), że $g(x, t) = g(x, t_0)$ dla $t < t_0$. Wtedy prawa strona równania (1.3) i jej pochodne cząstkowe $\partial g / \partial x$ będą funkcjami ciągłymi na otwartym zbiorze $E^n \times (-\infty, t_1)$. Zgodnie z twierdzeniem 1.1 istnieje dokładnie jedna trajektoria $x(\theta, t_1')$ ($-\infty < \theta < t_0 < t_1' \leq t_1$) przechodząca przez punkt (t_0, x^0) , a więc spełniająca warunek (1.4). Trajektoria ta na przedziale (θ, t_1') jest ciągła, a na (t_0, t_1') spełnia równanie (1.3).

Twierdzenie 1.1 ma charakter „lokalny”, tzn. zapewnia istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (1.3) tylko na pewnym, być może „bardzo małym”, przedziale $(\theta_0', \theta_1') \subseteq (\theta_0, \theta_1)$ otaczającym punkt τ^0 , choć nie wyklucza również takich przypadków, kiedy równanie typu (1.3) będzie miało jednoznaczne rozwiązanie określone na całym przedziale (θ_0, θ_1) , tzn. przypadków, kiedy $\theta_0' = \theta_0$, $\theta_1' = \theta_1$. Wyłącznie z takimi równaniami będziemy mieli do czynienia w książce (właściwość tę mają m.in. równania różniczkowe liniowe). Uwagi te prowadzą do następującego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności trajektorii stanów wewnętrznych w gładkich systemach dynamicznych:

□ **T w i e r d z e n i e 1.2.**¹³ Założmy, że (i) w równaniu (1.1) funkcje $f, \partial f / \partial x \in C^0 [E^n \times U \times T]$, (ii) jeżeli u jest ciągłą i ograniczoną funkcją na otwartym przedziale (θ_0, θ_1) , to przez każdy punkt $(\tau^0, x^0) \in (\theta_0, \theta_1) \times E^n$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1.3), w któ-

¹²Zob.np. L.S. P o n t r i a g i n [41] s.152-172.

¹³Dowód.zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 1, twierdzenie 1.2 (s. 211).

rym $g(x, t) = f(x, u(t), t)$, określone i ograniczone na całym przedziale (θ_0, θ_1) .

Przy tych założeniach każdemu sterowaniu $u \in \tilde{C}^0[T]$ odpowiada dokładnie jedna ciągła trajektoria x_T , która prawie wszędzie (wszędzie, poza punktami nieciągłości sterowania u_T) jest rozwiązaniem równania (1.1), a w momencie początkowym t_0 spełnia warunek (1.4). ■

U w a g a 1^o. Twierdzenie 1.2 wyjaśnia, w jakim sensie pojmujemy dalej rozwiązanie równania typu (1.1) z przedziałami ciągłym sterowaniem u_T . Przez rozwiązanie równania (1.1) rozumiemy ciągłą trajektorię x_T spełniającą to równanie wszędzie, poza punktami nieciągłości sterowania u_T . Nazywamy je r o z w i ą z a n i e m r ó ż n i c z k o w e g o w s e n s i e c a ł k o w y m.

2^o. Nietrudno zauważyć, że każde równanie typu (1.1) spełniające warunki twierdzenia 1.2 opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych, gładkiego systemu dynamicznego. Dokładniej: istnieje takie przekształcenie stanów wewnętrznych $\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot)) : E^n \times K[T] \rightarrow E^n$ spełniające warunki definicji 1.1, że $x(t) = \varphi(t; \tau, x, \omega_{\tau, t}(u))$ dla dowolnej pary momentów $\tau, t \in T$, dowolnego stanu $x \in E^n$ i każdego sterowania $u \in K[T]$, gdzie $K[T] = \{u : u \in \tilde{C}^0[T], u(t) \in U \subset E^m \text{ w każdym momencie } t \in T\}$, x_T jest rozwiązaniem równania (1.1) z warunkiem $x(\tau) = x$ i sterowaniem u_T .

Mówiąc dalej, o gładkim systemie dynamicznym, którego przekształcenie stanów wewnętrznych opisuje równanie typu (1.1) z funkcjami $f, \partial f / \partial x \in \tilde{C}^0[E^n \times U \times T]$ i sterowaniem $u \in \tilde{C}^0[T]$, rozumiemy, że każdemu punktowi $(\tau, x) \in T \times E^n$ odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie x_T tego równania (w sensie całkowym) spełniające warunek $x(\tau) = x$. Trajektoria x_T jest na T ciągła i wszędzie, poza punktami nieciągłości sterowania u_T , gładka (różniczkowalna). O parze równań (1.1), (1.2) będziemy mówić, że o p i s u j e f u n k c j o n o w a n i e g ł a d k i e g o s y s t e m u d y n a m i c z n e g o.

1.4. Stacjonarność

W praktyce często mamy do czynienia z sytuacją, kiedy przekształcenie stanów wewnętrznych $\varphi(t; \tau, \cdot, \omega_{\tau, t}(\cdot))$ nie zależy jawnie od zmiennych czasu τ, t , lecz co najwyżej od ich różnicy $t - \tau$, a przekształcenie wyjścia $\eta(\cdot, \cdot, t)$ nie zależy jawnie od zmiennej t . Mówiąc nieściśle - nie zdefiniowaliśmy bowiem pojęcia struktury systemu - są to systemy, których struktura nie zmienia się w czasie. Systemy takie nazywamy stacjonarnymi. W szczególności

Δ D e f i n i c j a 1.4. Gładki system dynamiczny nazwiemy systemem s t a c j o n a r n y m, jeżeli (i) przekształcenie jego stanów wewnętrznych opisuje równanie różniczkowe z prawą stroną niezależną (jawnie) od zmiennej czasu t :

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t))$$

w każdym momencie $t \in T$, (ii) przekształcenie wyjścia $\eta(\dots, t)$ nie zależy jawnie od zmiennej czasu t . ▲

§ 2. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ

2.1. Równowaga statyczna

Powszechnie przyjęta w technice definicja stanu równowagi brzmi:¹⁴
 „Stanem równowagi nazywamy taki stan wewnętrzny systemu \bar{x} , w którym pozostaje on dowolnie długo przy zerowym impulsie wejściowym (sterowaniu)”.
 Innymi słowy, w każdym momencie $t \in T$ zachodzi warunek

$$\bar{x} = \varphi(t; t_0, \bar{x}, \omega_{t_0, t}(0_T)) \quad (2.1)$$

(t_0 - jest momentem początkowym horyzontu T , 0_T - oznacza sterowanie tożsamościowo równe zeru na T). Zakłada się przy tym z reguły, że moment końcowy horyzontu czasu T jest równy nieskończoności.

Idea takiej równowagi „statycznej” mająca interpretację i zastosowanie w technice przewija się m.in. także w teorii równowagi ogólnej L. Walrasa i oparta jest na hipotezie, że istnieją obiekty (fizyczne, społeczne, mogące funkcjonować w całkowitej izolacji od otaczającego je świata, bez jakiegokolwiek ingerencji z zewnątrz (zerowy impuls wejściowy). Jak już o tym pisaliśmy we Wstępie, walrasowska gospodarka idealnie konkurencyjna, podporządkowana wyłącznie rynkowym mechanizmom rządzącym zachowaniem niezależnych producentów i konsumentów, ma jednak niewiele wspólnego z realną gospodarką, w której przewidziana jest możliwość świadomego kształtowania procesów wzrostu przez władzę gospodarczą. Mówiąc o równowadze ekonomicznej w takiej gospodarce mamy na myśli proces jej równomiernego, harmonijnego wzrostu przebiegający w warunkach celowego, świadomego oddziaływania ze strony władzy (otoczenia).

2.2. Uogólnienie pojęcia równowagi. Równowaga dynamiczna

Definicja, którą sformułujemy za chwilę jest uogólnieniem klasycznej definicji równowagi. Relatywizuje pojęcie równowagi, nie utożsamiając jej z pojedynczym stanem spoczynku systemu, ani nie wykluczając możliwości oddziaływania z zewnątrz w celu jej zainicjowania.

¹⁴Zob. np. S.W. Director, R.A. Rohrer [15] s.21.

Przyjmując, że symptomem równowagi tak czy inaczej powinna być niezmiennosc pewnych charakterystyk systemu, nie wymagamy, aby charakterystykę taką tworzył bezwarunkowo stan wewnętrzny systemu \bar{x} odpowiadający zerowemu sterowaniu (zerowemu impulsowi wejściowemu), a więc stan równowagi statycznej w tym rozumieniu, w jakim pojęcia tego używa się w technice. „Niezmiennikami” mogą być, ogólnie rzecz biorąc, wartości pewnych funkcji określonych na stanach (wewnętrznych, wyjścia) systemu lub na ich podzbiorach, opisujących określone właściwości systemu. Nie musi nim być stan wewnętrzny systemu, lecz np. jego pochodna (wtedy trajektoria stanów wewnętrznych będzie funkcją liniową) lub np. suma wartości jego współrzędnych stanu wyjścia (o ile, oczywiście, operacja taka będzie miała określoną interpretację) itp. Pożądane jest przy tym, aby system w równowadze charakteryzował regularny przebieg jego trajektorii, co w przypadku systemów gładkich oznacza ich ciągłość i odpowiednią „gładkość”. Myśl tę zawrzemy w następującej definicji:

Δ D e f i n i c j a 2.1. Będziemy mówić, że gładki system dynamiczny z trajektorią sterowań \bar{u}_T , trajektorią stanów wewnętrznych \bar{x}_T i stanów wyjścia \bar{y}_T znajduje się w horyzoncie czasu T w G -równowadze (gdzie G jest taką funkcją określoną na $E^n \times E^k$ z wartościami w pewnej przestrzeni Euklidesa Z , że $G(x, y) \neq \text{const.}$ na $E^n \times E^k$), jeżeli (i) $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y} \in C^1 [T]$ oraz (ii) $G(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \text{const.}$ we wszystkich momentach czasu $t \in T$. ▲

Funkcja G jest miarą tych charakterystyk systemu, których utrzymanie na określonym poziomie uznaje się za szczególnie pożądane jako symptom równowagi systemu. W praktyce jej postać zależy od specyfiki problemu, celu badań itp.

P r z y k ł a d y. 1^o. Klasyczną definicję stanu równowagi statycznej (przy zerowym impulsie wejściowym) otrzymujemy przyjmując: $\bar{u}(t) = 0$ w każdym momencie $t \in T$ oraz $G(x, y) = x$ dla dowolnych x, y (w tym przypadku $Z = E^n$).

2^o. Jeżeli przyjmiemy,¹⁵ że w pewnym systemie $G(x, y) = \langle e, x \rangle$ (wówczas $Z = E^n$), współrzędne wektora $x(t)$ oznaczają masę, a $\bar{x} \in C^1 [T]$ jest taką trajektorią stanów wewnętrznych, że $\langle e, \bar{x}(t) \rangle = \text{const.} > 0$ w każdym momencie $t \in T$, to równowaga oznacza właściwość zachowania masy bez względu na jej rozkład (bez względu na to, „kosztem” jakich impulsów \bar{u}_T masa zostanie zachowana oraz jak to uwidoczni się w stanach wyjścia $\bar{y} \in C^1 [T]$).

3^o. Niech $G(x, y) = (\delta_x, \delta_y)$.

¹⁵ Symbolem $\langle a, b \rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów a, b . Jeżeli $a, b \in E^n$, to $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$; $e = (1, 1, \dots, 1)$ (wektor złożony z jedynek).

$$\delta_x = \left(\frac{d}{dt} x_1 \cdot \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{d}{dt} x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right),$$

$$\delta_y = \left(\frac{d}{dt} y_1 \cdot \frac{1}{y_1}, \dots, \frac{d}{dt} y_k \cdot \frac{1}{y_k} \right).$$

Niech współrzędne wektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznaczają produkcję, współrzędne wektora $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ - konsumpcję określonych dóbr. Zatem (δ_x, δ_y) - jest $(n+k)$ - elementowym wektorem, którego współrzędnymi są stopy wzrostu produkcji i konsumpcji ($Z = E^{n+k}$). Jeżeli \bar{x}_T, \bar{y}_T będą takimi trajektoriami (odpowiadającymi pewnemu sterowaniu \bar{u}_T), że $\bar{x}, \bar{y} \in C^1 [T]$, oraz $(\delta_{\bar{x}(t)}, \delta_{\bar{y}(t)}) = \text{const.} > 0$ w każdym momencie $t \in T$, to cechą charakterystyczną gospodarki w G - równowadze będzie równomierny wzrost produkcji i konsumpcji. Przyjmując $G(x, y) = \delta_x$, osłabimy warunki równowagi do równomiernego wzrostu produkcji (poza oceną pozostaje wzrost konsumpcji). Odwrotną sytuację będziemy mieli, przyjmując $G(x, y) = \delta_y$.

4^o. Jeżeli przyjmiemy¹⁶ $G(x, y) = \left(\frac{1}{|x|} x, \frac{1}{|y|} y \right)$ (zatem $Z = E^{n+k}$), przez x oznaczymy wektor produkcji, przez y - wektor konsumpcji, a \bar{x}_T, \bar{y}_T będą takimi trajektoriami (odpowiadającymi pewnemu sterowaniu \bar{u}_T), że

$$\bar{x}(t) \neq 0, \bar{y}(t) \neq 0, \left(\frac{1}{|\bar{x}(t)|} \bar{x}(t), \frac{1}{|\bar{y}(t)|} \bar{y}(t) \right) = \text{const.}$$

w każdym momencie $t \in T$, wtedy warunkiem równowagi będzie zachowanie struktury produkcji i konsumpcji (podczas, gdy sama produkcja i konsumpcja mogą zarówno rosnąć, jak i maleć).

Gdybyśmy przyjęli $G(x, y) = \frac{1}{|x|} x$, wtedy w tak rozumianej równowadze zachowana byłaby tylko struktura produkcji, natomiast w przypadku $G(x, y) = \frac{1}{|y|} y$ - tylko struktura konsumpcji.

2.3. Stabilność

Założmy, że horyzont T jest półosią czasu z początkiem w t_0 i nieskończonym momentem końcowym. Niech \bar{x}_T będzie trajektorią systemu w G - równowadze (w sensie definicji 2.1) odpowiadającą sterowaniu \bar{u}_T . W technice przyjęte są powszechnie następujące definicje stabilności¹⁷:

¹⁶ Przez $|a|$ oznaczamy sumę wartości bezwzględnych współrzędnych wektora a . Jeżeli $a \in E^n$, to $|a| = \sum_{i=1}^n |a_i|$. Jeżeli a - liczba, to

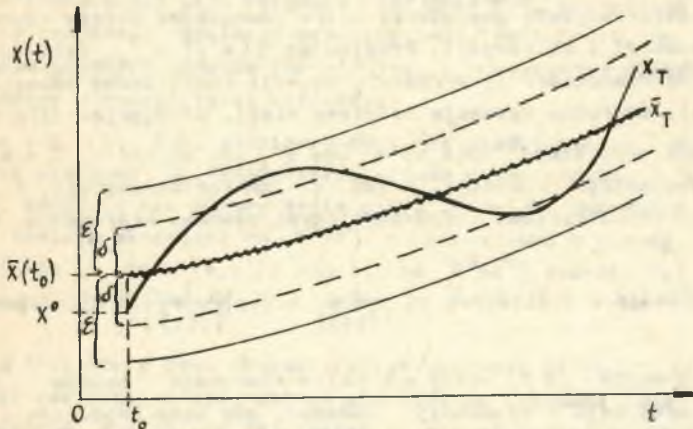
$|a|$ - wartość bezwzględna liczby a .

¹⁷ Zob. np. prace: [15] rozdz. 6, [29] rozdz. 12, [51] rozdz. 7. Symbolem $\|x\|$ oznaczamy normę Euklidesa wektora x w E^n .

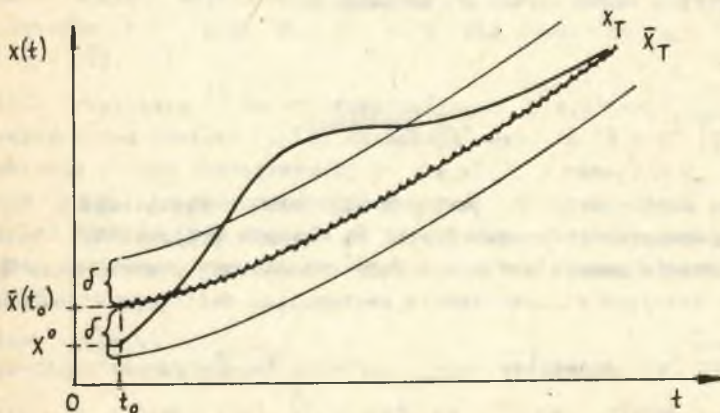
(i) System nazywamy stabilnym (w otoczeniu trajektorii \bar{x}_T), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, iż z nierówności $\|x^0 - \bar{x}(t_0)\| \leq \delta$ wynika, że $\|\varphi(t; t_0, x^0, \omega_{t_0, t}(\bar{u})) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$ w każdym momencie czasu $t \geq t_0$ (zob. rys.2.1).

(ii) System nazywamy asymptotycznie stabilnym (w otoczeniu trajektorii \bar{x}_T), jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $\|x^0 - \bar{x}(t_0)\| \leq \delta$ wynika, iż $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t; t_0, \omega_{t_0, t}(\bar{u})) - \bar{x}(t)\| = 0$ (rys.2.2).

(iii) Jeżeli warunek (ii) spełniony jest dla $\delta = +\infty$, wówczas system taki nazywamy globalnie (asymptotycznie) stabilnym.



Rys.2.1. Przebieg trajektorii systemu stabilnego w otoczeniu trajektorii $\bar{x} [t_0, \infty)$



Rys.2.2. Przebieg trajektorii systemu asymptotycznie stabilnego w otoczeniu trajektorii $\bar{x} [t_0, \infty)$

Przytoczone definicje stabilności tracą znaczenie, gdy przyjmemy, że horyzont T jest ograniczonym przedziałem czasu $[t_0, t_1]$. Tymczasem jest

to założenie towarzyszące wszystkim zagadnieniom wzrostu gospodarczego rozpatrywanym w książce. W zagadnieniach tych interesują nas poza tym wyłącznie procesy optymalne. Uwagi te prowadzą do następującej definicji¹⁸:

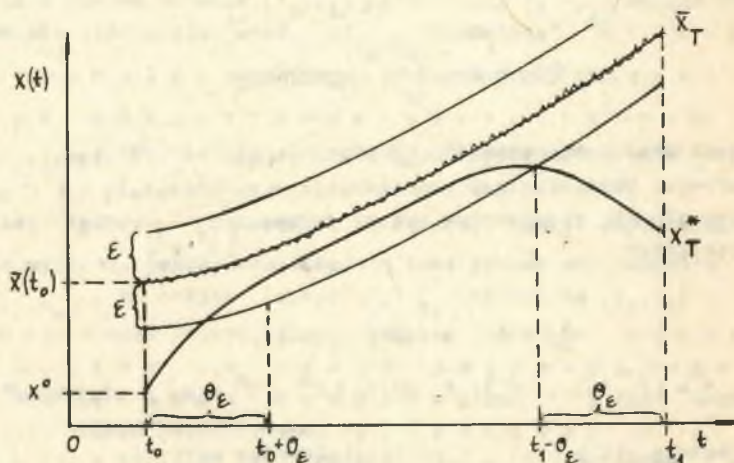
Δ D e f i n i c j a 2.2. Niech \bar{x}_T oznacza trajektorię stanów wewnętrznych gładkiego systemu dynamicznego w G -równowadze ze sterowaniem \bar{u}_T i ograniczonym horyzontem czasu $T = [t_0, t_1]$, a x_T^* - optymalną trajektorię stanów systemu¹⁹ z warunkiem początkowym $x^*(t_0) = x^0$.

System jest s t a b i l n y (w otoczeniu trajektorii \bar{x}_T), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, iż z nierówności $|T| = t_1 - t_0 \geq 2\theta_\varepsilon$ wynika, że

$$\|x^*(t) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$ ²⁰. ▲

Pomijając ten fakt, że w definicji 2.2 istotny jest przebieg tylko optymalnych trajektorii w otoczeniu trajektorii systemu w G -równowadze (podczas gdy w definicjach przytoczonych uprzednio chodziło o przebieg wszystkich trajektorii przynajmniej z pewnego otoczenia trajektorii w G -równowadze), ich odmiennność polega na różnym pojmowaniu zbieżności trajektorii (zob. rys. 2.3).



Rys. 2.3. Stabilność systemu w otoczeniu trajektorii \bar{x}_T w G -równowadze

¹⁸ Definicja nawiązuje do idei stabilności, o której mowa w tzw. twierdzeniach o magistrali w modelach Neumanna-Gale'a, por. np. prace: [29] rozdz. 11, [35] rozdz. 5, [36] rozdz. 4.

¹⁹ W świetle kryteriów, o których będzie mowa w następnym paragrafie.

²⁰ Tutaj oraz wszędzie dalej symbolem $|T|$ oznaczamy długość horyzontu czasu T .

W ujęciu klasycznym dwie trajektorie są zbieżne, jeżeli z upływem czasu różnica między nimi (między ich wartościami w kolejnych momentach czasu) maleje do zera. Natomiast zbieżność trajektorii w sensie definicji 2.2 oznacza, że w miarę wydłużania horyzontu czasu T różnica między nimi maleje wszędzie, z wyjątkiem co najwyżej pewnego okresu na początku i pod koniec horyzontu.

§ 3. STEROWANIE OPTIMALNE

Poprzednie dwa paragrafy poświęciliśmy definicjom pojęć, obecnie przechodzimy do omówienia materiału stanowiącego rdzeń matematyczny książki. Znaczna część dalszych wywodów opiera się na twierdzeniach, które prezentujemy w tym paragrafie. Ich znajomość wystarcza dla zrozumienia zagadnień formułowanych i rozwiązywanych w rozdziałach następnych. Nie omawiamy wszystkich metod matematycznych sterowania optymalnego. Metodą, którą posługujemy się w książce, jest zasada maksimum Pontriagina. Twierdzenia staramy się formułować precyzyjnie, choć dowody mają niekiedy charakter intuicyjny²¹.

3.1. Sformułowanie zagadnienia

Zagadnienie sterowania optymalnego przedstawimy na przykładzie systemu stacjonarnego. Uogólnieniami zajmiemy się w punkcie 3.3.

Rozpatrzmy gładki, stacjonarny system dynamiczny z przekształceniem stanów wewnętrznych

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t)), \quad (3.1)$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n); f, \partial f / \partial x \in C^0 [E^n \times U]; u(\tau) \in U \subset E^m$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1]$ i przekształceniem wyjścia

$$y(t) = \eta(x(t), u(t)), \quad (3.2)$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k); \eta \in C^0 [E^n \times U].$$

²¹ Czytelnika pragnącego gruntowniej zapoznać się z zasadą maksimum Pontriagina i innymi metodami sterowania optymalnego bezpośrednio nie opartymi na zasadzie maksimum odsyłamy do prac: L.S. Pontriagina i in. [42], M. Athans, P.L. Falb [3], W.G. Bołtiański [8], O. Gedymin [20], G. Hadley, M.C. Kemp [22], R.E. Kalman i in. [26], A.M. Tier-Krikorow [48], a także R. Bellman [5], R. Bellman, R. Kalaba [6], M. Intriligator [24] rozdz. 13, 14, R. Kulikowski [28] rozdz. 4.

W układzie (3.1) - (3.2) wektor $x(t)$ oznacza stan wewnętrzny systemu, wektor $u(t)$ - wartość sterowania (stan wejścia), wektor $y(t)$ - stan wyjścia systemu w momencie t , U - jest zbiorem sterowań. Horyzontem jest przedział czasu $[t_0, t_1]$. Będziemy zakładać, że moment początkowy t_0 horyzontu jest ustalony. Momentem końcowym może być dowolny moment czasu $t_1 > t_0$ ($t_1 < +\infty$). Sterowaniem w okresie $[t_0, t_1]$ może być każda funkcja $u \in \tilde{C}^0 [t_0, t_1]$ z wartościami w zbiorze U . Zakładamy, że każdemu takiemu sterowaniu odpowiada dokładnie jedna trajektoria $x [t_0, t_1]$ spełniająca warunek początkowy (1.4), będąca na $[t_0, t_1]$ rozwiązaniem równania (3.1) w sensie całkowym. Trajektorie te są funkcjami z klasy $\tilde{C}^1 [t_0, t_1]$.

Definicja 3.1. Oznaczmy przez $X^1 \subseteq E^n$ ($X^1 \neq \emptyset$) pewien podzbiór stanów docelowych systemu. (i) Parę $(u, x) [t_0, t_1]$ gdzie $u [t_0, t_1]$ jest sterowaniem w okresie $[t_0, t_1]$, a $x [t_0, t_1]$ - odpowiadającą mu trajektorią stanów wewnętrznych (rozwiązanie równania (3.1)) spełniającą warunek początkowy (1.4), nazywać będziemy procesem sterowania. (ii) Proces sterowania nazwiemy dopuszczalnym, jeżeli w momencie końcowym t_1 spełniony będzie warunek: $x(t_1) \in X^1$. ▲

Jeżeli w pewnym okresie $[t_0, t_1]$ para $(u, x) [t_0, t_1]$ będzie dopuszczalnym procesem sterowania, wtedy $u [t_0, t_1]$ nazwiemy sterowaniem dopuszczalnym, a $x [t_0, t_1]$ - dopuszczalną trajektorią stanów wewnętrznych. Trajektorię $y [t_0, t_1]$ odpowiadającą procesowi dopuszczalnemu zgodnie z (3.2) nazwiemy dopuszczalną trajektorią wyjścia. Funkcja $y [t_0, t_1]$ wtedy i tylko wtedy będzie dopuszczalną trajektorią wyjścia, jeżeli znajdzie się taki proces dopuszczalny $(u, x) [t_0, t_1]$, że trójka $(u, x, y) [t_0, t_1]$ spełni na $[t_0, t_1]$ warunek (3.2). O sterowaniu dopuszczalnym będziemy mówić, że przeprowadza system ze stanu początkowego x^0 do zbioru stanów docelowych X^1 , a o dopuszczalnej trajektorii stanów wewnętrznych, że wychodzi z x^0 i wchodzi do X^1 . Zwracamy uwagę, że dwa różne sterowania dopuszczalne mogą przeprowadzać system ze stanu x^0 do zbioru X^1 w różnym czasie, tzn., że różne mogą być nie tylko trajektorie stanów wewnętrznych odpowiadające tym sterowaniom, lecz także momenty końcowe ich dojścia do X^1 .

Określmy na procesach dopuszczalnych funkcjonal całkowity Φ z wartościami

$$\Phi[(u, x) [t_0, t_1]] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt. \quad (3.3)$$

Wartość funkcjonału (3.3) będziemy nazywać wskaźnikiem jakości procesu $(u, x) [t_0, t_1]$, zaś funkcjonal - kryterium funkcjonowania systemu²². O funkcji podcałkowej f_0 zakładamy, że spełnia te same warunki co funkcja f w równaniu (3.1), tzn. $f_0, \partial f_0 / \partial x \in C^0 [E^n \times U]$.

Δ Definicja 3.2. Proces dopuszczalny $(u^*, x^*) [t_0^*, t_1^*]$ nazwiemy procesem optymalnym, jeżeli spełniony będzie warunek

$$\int_{t_0^*}^{t_1^*} f_0(x^*(t), u^*(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt$$

dla każdego procesu dopuszczalnego $(u, x) [t_0, t_1]$. \blacktriangle

Procesem optymalnym będzie zatem ten proces dopuszczalny, któremu odpowiada maksymalny wskaźnik jakości. Jeżeli $(u^*, x^*) [t_0^*, t_1^*]$ będzie procesem optymalnym, to $u^* [t_0^*, t_1^*]$ nazwiemy sterowaniem optymalnym, $x^* [t_0^*, t_1^*]$ - optymalną trajektorią stanów wewnętrzných, $y^* [t_0^*, t_1^*]$ - optymalną trajektorią wyjścia, a przedział czasu $[t_0^*, t_1^*]$ - optymalnym horyzontem. Zadaniem sterowania optymalnego nazywamy zadanie wyboru procesu optymalnego - maksymalizującego wartość funkcjonału (3.3) - ze zbioru (z wiązki) procesów dopuszczalnych. Zadanie to będziemy zapisywać w następującej postaci:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t)), \\ u(t) &\in U, u \in \tilde{C}^0 [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x^0, x(t_1) \in X^1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

W dalszym ciągu nazywać je będziemy stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym i nie ustalonym momentem końcowym.

²² Ogólnie, kryterium funkcjonowania systemu może być funkcjonałem określonym zarówno na dopuszczalnych procesach $(u, x) [t_0, t_1]$ jak i na odpowiadających im trajektoriach wyjścia $y [t_0, t_1]$. Kryterium takie zawsze można przekształcić do postaci (3.3) zwązywwszy, że w każdym momencie czasu stan wyjścia jest z założenia ciągłą funkcją stanu wewnętrznego i stanu wejścia (sterowania).

Moment końcowy t_1 w zadaniu tym nie jest ustalony ad hoc (jest zmienną decyzyjną zadania). O zbiorze stanów docelowych X^1 zakładamy, że jest gładką rozmaiłością w E^n ²³.

Δ D e f i n i c j a 3.3. Niech $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ będzie funkcją wektorową z E^n w E^k ($k \leq n$). Niepusty zbiór

$$X^1 = \{x \in E^n: p(x) = 0\}$$

nazwiemy gładką $(n-k)$ -wymiarową rozmaiłością, jeżeli (i) $p \in C^1 [E^n]$.

(ii) w każdym punkcie $x \in X^1$ wektory $\partial p_1(x)/\partial x = (\partial p_1(x)/\partial x_1, \dots, \partial p_1(x)/\partial x_n)$, $i=1, 2, \dots, k$, są liniowo niezależne. ▲

Na przykład, zbiór wszystkich wektorów $x \in E^n$ spełniających równanie $\langle a, x \rangle = \text{const.}$ będzie $(n-1)$ -wymiarową gładką rozmaiłością (hiperpłaszczyzną) w E^n , jeżeli $a \neq 0$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$X_i^1 = \{x \in E^n: p_i(x) = 0\}, i=1, 2, \dots, k.$$

Wówczas $X^1 = \bigcap_{i=1}^k X_i^1$. Zbiory X_i^1 nazywamy hiperpowierzchniami gładkimi w E^n . Punkt $x \in X_i^1$ nazywamy punktem osobliwym hiperpowierzchni X_i^1 , jeżeli $\partial p_i(x)/\partial x = 0$. Gładka hiperpowierzchnia nie mająca punktów osobliwych jest $(n-1)$ -wymiarową gładką rozmaiłością w E^n . Niech $P_{1,x}$ będzie hiperpłaszczyzną styczną w punkcie $x \in X^1$ do gładkiej hiperpowierzchni X_1^1 . Wówczas wektor $\partial p_1(x)/\partial x$ jest jej wektorem normalnym, tzn.:

$$P_{1,x} = \left\{ y \in E^n : \left\langle \frac{\partial p_1(x)}{\partial x}, y-x \right\rangle = 0 \right\}.$$

Δ D e f i n i c j a 3.4. (i) Zbiór $P_x = \bigcap_{i=1}^k P_{i,x}$ nazywamy płaszczyzną

styczną w punkcie x do gładkiej rozmaiłości X^1 . (ii) Wektor z z początkiem w x nazywamy wektorem stycznym w punkcie x do gładkiej rozmaiłości X^1 , jeżeli jest on ortogonalny do wszystkich wektorów $\partial p_i(x)/\partial x$, $i=1, 2, \dots, k$. ▲

Wektor z wtedy i tylko wtedy jest styczny do gładkiej rozmaiłości X^1 w punkcie x , jeżeli $z = y-x$ dla pewnego $y \in P_x$. Pojęcie płaszczyzny stycznej gra istotną rolę w warunkach optymalności formułowanych dalej.

²³ W teorii sterowania optymalnego jest to typowe założenie, dzięki któremu obok „właściwej” zasady maksimum pojawiają się dodatkowo tzw. warunki transwersalności. Mowa o nich w dowodzie twierdzenia 3.1 (zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 3, twierdzenie 3.1, s. 212).

3.2. Warunki konieczne optymalności. Zasada maksimum Pontriagina w przypadku stacjonarnego zadania sterowania optymalnego z kryterium całkowym i nie ustalonym momentem końcowym

Znane są dwie podstawowe metody rozwiązywania zadań sterowania optymalnego typu (3.4) - (3.5):²⁴ metoda Pontriagina i współpracowników, a ściślej mówiąc zespół warunków koniecznych optymalności znanych pod ogólną nazwą z a s a d y m a k s y m u m oraz metoda programowania dynamicznego, w której kluczową rolę gra r ó w n a n i e B e l l m a n a. W zastosowaniach metoda Pontriagina jest na ogół dogodniejsza od metody Bellmana. W celu rozwiązania zadania sterowania optymalnego metodą programowania dynamicznego potrzebne są pewne dodatkowe informacje o właściwościach rozwiązań, których nie wymaga metoda Pontriagina. Co więcej, posługując się zasadą maksimum Pontriagina, można rozwiązać takie zadania, których w ogóle nie daje się rozwiązać metodą programowania dynamicznego. Pełne wyprowadzenie warunków optymalności (zasady maksimum) wykracza poza ramy książki. Przy pewnych dodatkowych założeniach można jednak stosunkowo łatwo otrzymać je z równania Bellmana. W tym celu potraktujemy zadanie (3.4) - (3.5) jako jedno z rodziny zadań z różnymi stanami początkowymi $x \in E^n$ i momentami początkowymi $t \in E^1$. Zamiast jednego zadania (3.4) - (3.5) rozpatrzmy zatem klasę zadań sterowania typu (3.4) - (3.5) z ustalonym (we wszystkich zadaniach takim samym) zbiorem stanów docelowych X^1 , lecz z różnymi stanami i momentami początkowymi x, t . Wyjściowe zadanie (3.4) - (3.5) otrzymamy, przyjmując $x = x^0, t = t^0$.

▽ Z a ł o ż e n i e 3.1. Dla każdego stanu początkowego $x \in E^n$ i dowolnego momentu $t \in E^1$ istnieje rozwiązanie zadania

$$\max \int_t^{t_1} f_0(x(\theta), u(\theta)) d\theta, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} x(\theta) &= f(x(\theta), u(\theta)), \\ u(\theta) &\in U, u \in C^0[t, t_1], \\ x(t) &= x, x(t_1) \in X^1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

W zadaniu tym, podobnie jak w zadaniu (3.4) - (3.5), moment końcowy t_1 nie jest ustalony. Oznaczmy przez $J(x, t)$ maksymalną wartość funkcjonału (3.6) w zadaniu (3.6) - (3.7) z momentem początkowym t i stanem początkowym x . W myśl założenia 3.1 funkcja J zmiennych x, t jest określona na E^{n+1} .

²⁴ Nie licząc tzw. metod gradientowych, w których wykorzystuje się aparat analizy funkcjonalnej, por. np. R. K u l i k o w s k i [28] rozdz. 4.

▼ Założenie 3.2. $\exists \in C^2 [E^n \times E^1]$. ▼

Przy tych założeniach prawdziwe jest następujące twierdzenie.

□ Twierdzenie 3.1.²⁵ Jeżeli spełnione są założenia 3.1, 3.2 i proces $(u^x, x^x) [t_0, t_1^x]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to istnieje taka stała $\psi_0^x > 0$ oraz takie rozwiązanie $\psi^x [t_0, t_1^x]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^x, \psi(t), x, u^x(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^x(t)},$$

ze w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^x]$

$$\max_{u \in U} H(\psi_0^x, \psi^x(t), x^x(t), u) = H(\psi_0^x, \psi^x(t), x^x(t), u^x(t)) = 0,$$

a ponadto w momencie końcowym t_1^x

$$\langle \psi^x(t_1^x), x - x^x(t_1^x) \rangle = 0$$

dla każdego wektora $x \in P_{x^x(t_1^x)}$, gdzie $H(\psi_0, \psi, x, u) =$

$= \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle$, $P_{x^x(t_1^x)}$ jest płaszczyzną styczną do x^1 w punkcie $x^x(t_1^x)$. ■

To, że przy dowodzie tego twierdzenia korzysta się z założeń 3.1, 3.2 nie miałyby większego znaczenia, gdyby założenia te były spełnione w praktyce. Okazuje się jednak, że w konkretnych zadaniach sterowania, z którymi spotykamy się w praktyce, założenia te na ogół nie są spełnione. Pontrygin i współpracownicy wyprowadzili zespół warunków koniecznych optymalności bardzo podobny do warunków sformułowanych w twierdzeniu 3.1, jednak bez założeń 3.1, 3.2. Dzięki temu właśnie, a także ze względu na jej przejrzystość i prostotę, zasada maksimum Pontrygina stanowi podstawową metodę rozwiązywania wielu praktycznych zadań sterowania optymalnego.

Teza twierdzenia, które formułujemy poniżej różni się nieznacznie od tezy twierdzenia 3.1. Twierdzenie 3.2 jest ogólniejsze, ponieważ procesy spełniające warunki twierdzenia 3.1 spełniają również warunki tego twierdzenia. Jego najistotniejszą zaletą jest to, że w odróżnieniu od twierdzenia 3.1 jest prawdziwe bez założeń 3.1, 3.2.

□ Twierdzenie 3.2.²⁶ Niech proces $(u^x, x^x) [t_0, t_1^x]$ będzie rozwiązaniem następującego stacjonarnego zadania sterowania optymalnego z kryterium całkowym, ustalonym momentem początkowym i nie ustalonym momentem końcowym:

²⁵ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 3, twierdzenie 3.1. s.212.

²⁶ Zob. np. O. G e d y m i n [20] s.134-135, twierdzenie 2-5.

$$\max_{t_0}^{t_1} \int f_0(x(t), u(t)) dt,$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in U, u \in \tilde{C}^0 [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_1) \in X^1$$

($f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$); $f_0, f, \partial f_0 / \partial x, \partial f / \partial x \in C^0 [E^n \times U]$; X^1 jest gładką rozmaiłością w E^n).

Zdefiniujmy funkcję H (hamiltonian) zmiennych $\psi_0 \in E^1$, $\psi, x \in E^n, u \in E^m$:

$$H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle.$$

Istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ oraz takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \left. \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \right|_{x=x^*(t)},$$

że

$$(A) (\psi_0^*, \psi^*(t)) \neq 0$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$,

$$(B) \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$,

$$(C) \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0$$

dla każdego wektora $x \in P_{x^*(t_1^*)}$, gdzie $P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaiłości X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$. ■

Twierdzenie to, poza tym, że jest prawdziwe bez założeń 3.1, 3.2 różni się tylko tym od twierdzenia 3.1, że stała ψ_0^* może, ogólnie biorąc, przyjąć obecnie również wartość zerową i wobec tego pojawia się dodatkowy warunek (nietrywialności) (A). W twierdzeniu 3.1 warunek ten jest zawsze spełniony, a stałą ψ_0^* wprowadziliśmy tam po to, aby otrzymać tezę maksymalnie zbliżoną do tezy twierdzenia 3.2. Jego dowód jest jednak znacznie trudniejszy i wykracza poza ramy tej książki. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do prac wymienionych na początku paragrafu.

3.3. Niektóre uogólnienia i przypadki szczególne

Korzystając z twierdzenia 3.2, przedstawimy warunki optymalności rozwiązań kilku typów zadań sterowania, z którymi zetkniemy się w następujących rozdziałach. W zadaniach tych hamiltonian H będzie liniową funkcją sterowania. W takim przypadku, przy dodatkowym założeniu, że zbiór sterowań U jest prostopadłością, warunek maksimum (B) twierdzenia 3.2 można przedstawić w prostszej postaci.

Założmy, że zbiór sterowań U jest prostopadłością w E^m , tzn.

$$U = \{ u : a \leq u \leq b \}, \quad (3.8)$$

gdzie a, b - wektory w E^m , $a \neq b$. Założmy, że proces $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1]}$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), w którym zbiór sterowań U jest prostopadłością postaci (3.8), a hamiltonian H przy ustalonych ψ_0, ψ, x jest liniową funkcją zmiennej u (sterowania). Wtedy warunek maksimum (B) w twierdzeniu 3.2 można zastąpić następującym warunkiem równoważnym:

$$u_i^*(t) = b_i, \text{ jeżeli } \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u)}{\partial u_i} > 0, \quad (3.9)$$

$$u_i^*(t) = a_i, \text{ jeżeli } \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u)}{\partial u_i} < 0,$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1]$ ($i=1, 2, \dots, m$). Pozostałe warunki twierdzenia nie zmieniają się.

3.3.1. NIESTACJONARNE ZADANIE STEROWANIA Z KRYTERIUM CAŁKOWYM I NIE USTALONYM MOMENTEM KOŃCOWYM

Ustalimy, jaką postać przyjmie zasada maksimum w następującym zadaniu niestacjonarnym

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f_0(x(t), u(t), t),$$

$$u(t) \in U, \quad u \in \tilde{C}^0[t_0, t_1], \quad (3.11)$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_1) \in X^1$$

(moment końcowy t_1 - nie ustalony, zmienna decyzyjna zadania), w którym przekształcenie stanów wewnętrznych opisuje równanie różniczkowe z prawą stroną jawnie zależną od zmiennych x, u i czasu t . Zakładamy, że funk-

cje f_0, f zmierzających x, u, t oraz ich pochodne cząstkowe $\partial f_0 / \partial x, \partial f / \partial x$ należą do klasy $C^0 [E^n \times U \times [t_0, t_1]]$, $U \subseteq E^m$, X^1 jest gładką rozmaitością w E^n .

Wprowadźmy funkcję $x_{n+1} : E^1 \rightarrow E^1$,

$$x_{n+1}(t) = t.$$

Funkcja ta jest rozwiązaniem równania

$$\frac{d}{dt} x_{n+1}(t) = 1$$

z warunkiem początkowym $x_{n+1}(t_0) = t_0$. Wprowadzając ją do zadania (3.10) - (3.11), otrzymamy następujące równoważne stacjonarne zadanie sterowania:

$$\max_{t_0} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), x_{n+1}(t)) dt \quad (3.10')$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), x_{n+1}(t)),$$

$$\frac{d}{dt} x_{n+1}(t) = 1,$$

$$u(t) \in U, \quad u \in C^0[t_0, t_1], \quad (3.11')$$

$$(x(t_0), x_{n+1}(t_0)) = (x^0, t_0),$$

$$(x(t_1), x_{n+1}(t_1)) \in X^1 = \{(x, x_{n+1}) : x \in X^1, x_{n+1} \in E^1\}.$$

Ponieważ X^1 jest gładką rozmaitością w E^n , zatem X^1 jest gładką rozmaitością w E^{n+1} ²⁷. Do zadania (3.10') - (3.11') stosuje się twierdzenie 3.2, co prowadzi do następujących warunków optymalności w wyjściowym, niestacjonarnym zadaniu (3.10) - (3.11).

□ T w i e r d z e n i e 3.3.²⁸ Niech proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ będzie rozwiązaniem niestacjonarnego zadania (3.10) - (3.11) z kryterium całkowym i nie ustalonym momentem końcowym. Wprowadźmy hamiltonian H :

$$H(\psi_0, \psi, x, u, t) = \psi_0 f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

Istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ i takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)},$$

²⁷ Ponieważ $x_{n+1}(t_1) = t_1$, a moment t_1 w zadaniu tym jest nie ustalony, zatem w gładkiej rozmaitości X^1 zmienna x_{n+1} przebiega całą oś rzeczywistą.

²⁸ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 3, twierdzenie 3.3 s. 219.

że

$$(A) (\psi_0^*, \psi^*(t)) \neq 0$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$,

$$(B) \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)$$

w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$,

$$(C) H(\psi_0^*, \psi^*(t_1^*), x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) = 0,$$

$$(D) \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0$$

dla każdego wektora $x \in P_{x^*(t_1^*)}$, gdzie $P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$. ■

U w a g a. Jeżeli w niestacjonarnym zadaniu (3.10) - (3.11) hamiltonian będzie liniową funkcją sterowania, a zbiór sterowań U prostopadłościąm postaci (3.8), to warunek maksimum (B) w twierdzeniu 3.3 można zastąpić warunkiem typu (3.9).

3.3.2. ZADANIE STEROWANIA OPTIMALNEGO Z KRYTERIUM CAŁKOWYM, USTALONYM HORYZONTEM I SWOBODNYM PRAWYM KRAŃCEM - WERSJA STACJONARNA I NIESTACJONARNA

W zadaniach rozpatrywanych dotąd moment końcowy t_1 , w którym trajektoria stanów wewnętrznych systemu wchodziła do zbioru stanów docelowych X^1 był nie ustalony (był jedną ze zmiennych decyzyjnych zadań), a więc nie ustalona była ad hoc długość horyzontu czasu T . Obecnie założymy, że horyzont T jest ustalony, tzn. że dany jest zarówno jego moment początkowy t_0 jak i moment końcowy $t_1 > t_0$. Nie będziemy natomiast nakładać żadnych ograniczeń na stany systemu w momencie końcowym t_1 . Inaczej mówiąc przyjmiemy, że zbiór stanów docelowych $X^1 = E^n$.

Rozpatrzmy najpierw zadanie stacjonarne

$$\max_T \int f_0(x(t), u(t)) dt, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in U, \quad u \in \bar{C}^0 [T], \quad (3.13)$$

$$x(t_0) = x^0$$

($T = [t_0, t_1]$, moment t_1 - ustalony).

Twierdzenie 3.4.²⁹ Jeżeli proces $(u^*, x^*)|_T$ jest rozwiązaniem zadania (3.12) - (3.13) z ustalonym momentem końcowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii, to istnieje stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie ψ_T^* równania

²⁹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 3, twierdzenie 3.4. s. 221.

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}$$

z warunkiem końcowym

$$(A) \quad \psi^*(t_1) = 0,$$

ze

$$(B) \quad \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \\ = \text{const.}$$

w każdym momencie $t \in T$, gdzie

$$H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle. \blacksquare$$

Niestacjonarne zadanie sterowania z ustalonym momentem końcowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii

$$\max_T \int f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$u(t) \in U, \quad u \in \bar{C}^0[T], \quad (3.15)$$

$$x(t_0) = x^0$$

($T = [t_0, t_1]$, moment t_1 - ustalony) jest równoważne z następującym zadaniem stacjonarnym z nie ustalonym momentem końcowym:

$$\max_{t_0}^{t_1} \int f_0(x(t), u(t), x_{n+1}(t)) dt, \quad (3.14')$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), x_{n+1}(t)),$$

$$\frac{d}{dt} x_{n+1}(t) = 1,$$

$$u(t) \in U, \quad u \in \bar{C}^0[t_0, t_1], \quad (3.15')$$

$$(x(t_0), x_{n+1}(t_0)) = (x^0, t_0),$$

$$(x(t_1^*), x_{n+1}(t_1^*)) \in \bar{X}^1 = \{(x, x_{n+1}) : x \in E^n, x_{n+1} = t_1\},$$

które otrzymujemy, przeprowadzając rozumowanie szczegółowo opisane w punkcie 3.3.1. i dowodzie twierdzenia 3.4 zamieszczonym w Dodatku matematycznym (zadanie (2) - (3)). Zwazwszy na równoważność zadań (3.14) - (3.15), (3.14') - (3.15') z twierdzenia 3.2, otrzymujemy następujące warunki optymalności procesu $(u^*, x^*)_T$ w zadaniu (3.14) - 3.15).

□ T w i e r d z e n i e 3.5.³⁰ Jeżeli proces $(u^*, x^*)_T$ jest rozwiązaniem niestacjonarnego zadania sterowania (3.14) - (3.15) ze swobodnym prawym krańcem trajektorii, to istnieje stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie ψ_T^* równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}$$

z warunkiem końcowym

$$(A) \quad \psi^*(t_1) = 0.$$

że

$$(B) \quad \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)$$

w każdym momencie $t \in T$, gdzie $H(\psi_0^*, \psi, x, u, t) = \psi_0^* f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle$. ■

U w a g i. 1^o. W twierdzeniach 3.4, 3.5 bez ograniczeń można przyjąć $\psi_0^* = 1$ ³¹.

2^o. Warunki optymalności w stacjonarnym zadaniu sterowania z ustalonym momentem końcowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii stanów wewnętrznych (twierdzenia 3.4, 3.5) różnią się nieznacznie między sobą. W zadaniu stacjonarnym hamiltonian określony na procesie optymalnym jest stałą funkcją czasu we wszystkich momentach horyzontu T . Właściwości tej nie ma hamiltonian w zadaniu niestacjonarnym.

3^o. Jeżeli w zadaniach (3.12) - (3.13), (3.14) - (3.15) hamiltonian będzie liniową funkcją sterowania, a zbiór sterowań U - prostopadłością, to warunek postaci (3.8), wtedy warunek maksimum (B) w twierdzeniach 3.4, 3.5 można zastąpić warunkiem typu (3.9).

3.3.3. ZADANIE STEROWANIA DOCELOWEGO (USTALONY MOMENT KOŃCOWY, SWOBODNY PRAWY KRANIEC TRAJEKTORII STANÓW WEWNĘTRZNYCH) - WERSJA STACJONARNA I NIESTACJONARNA

W przedstawionych dotąd zadaniach sterowania kryterium funkcjonowania systemu było funkcjonałem postaci (3.3) w zadaniach stacjonarnych lub (3.10) w zadaniach niestacjonarnych, określonym na dopuszczalnych sterowaniach i odpowiadających im trajektoriach stanów wewnętrznych. Obecnie rozpatrzymy przypadek, kiedy kryterium jest liniową funkcją stanu końcowego systemu, tzn.

³⁰ Dowód pomijamy. Przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 3.3.

³¹ Nietrudno zauważyć, że jeżeli para (ψ_0^*, ψ_T^*) spełnia warunki (A), (B), to spełnia je także każda para $(\lambda \psi_0^*, \lambda \psi_T^*)$, gdzie $\lambda > 0$. Wystarczy przyjąć $\lambda = 1/\psi_0^*$.

$$\Phi[(u, x)_T] = \langle c, x(t_1) \rangle, \quad (3.16)$$

gdzie $c \in E^n$, $c \neq 0$, a $x(t_1)$ jest stanem wewnętrznym systemu w momencie końcowym t_1 ustalonego horyzontu czasu T . Zadanie sterowania optymalnego z kryterium postaci (3.16) i swobodnym prawym krańcem trajektorii stanów wewnętrznych nazywamy dalej zadaniem sterowania docelowego³².

Rozpatrzmy stacjonarne zadanie sterowania docelowego

$$\max \langle c, x(t_1) \rangle, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t)), \\ u(t) &\in U, u \in \bar{C}^0[T], \\ x(t_0) &= x^0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

($T = [t_0, t_1]$, moment końcowy t_1 - ustalony). Zauważmy, że

$$\langle c, x(t_1) \rangle = \langle c, x^0 \rangle + \int_T \langle c, f(x(t), u(t)) \rangle dt.$$

Wobec tego, że dodanie stałej do kryterium nie zmienia rozwiązania, otrzymujemy następujące stacjonarne zadanie sterowania z kryterium całkowym, ustalonym momentem końcowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii równoważne z zadaniem (3.17) - (3.18):

$$\max \int_T \langle c, f(x(t), u(t)) \rangle dt, \quad (3.17')$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t)), \\ u(t) &\in U, u \in \bar{C}^0[T], \\ x(t_0) &= x^0. \end{aligned} \quad (3.18')$$

Warunki optymalności rozwiązania tego typu zadania podaje twierdzenie 3.4. Przyjmując oznaczenie $\xi(t) = \psi(t) + c$, można zapisać je w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.6³³ Jeżeli proces $(u^*, x^*)_T$ jest rozwiązaniem stacjonarnego zadania sterowania docelowego (3.17) - (3.18), to istnieje takie rozwiązanie ξ_T^* równania

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = - \frac{\partial H(\xi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}$$

z warunkiem końcowym

$$(A) \quad \xi^*(t_1) = c,$$

³² Faktycznie zadania tego typu stanowią podklasę zadań sterowania docelowego (z liniowym kryterium względem współrzędnych wektora stanu końcowego). W rozdziałach następnym będziemy mieli do czynienia wyłącznie z tego typu zadaniami sterowania docelowego.

³³ Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzenia 3.4, biorąc pod uwagę równoważność zadań (3.17) - (3.18) i (3.17') - (3.18') oraz przyjmując $\psi_0^* = 1$ (por. uwagę 1^o do twierdzeń 3.4, 3.5 na s. 43).

że

$$(B) \max_{u \in U} H(\xi^*(t), x^*(t), u) = H(\xi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{const.}$$

w każdym momencie $t \in T$, gdzie $H(\xi, x, u) = \langle \xi, f(x, u) \rangle$. ■

Podobną postać mają warunki optymalności w niestacjonarnym zadaniu sterowania docelowego:

$$\max \langle c, x(t_1) \rangle. \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ u(t) &\in U, u \in \bar{C}^0[T], \\ x(t_0) &= x^0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

które otrzymujemy z twierdzenia 3.5, zastępując kryterium (3.19) równoważnym kryterium całkowym

$$\max \int \langle c, f(x(t), u(t), t) \rangle dt.$$

□ **T w i e r d z e n i e 3.7.**³⁴ Jeżeli proces $(u^*, x^*)_T$ jest rozwiązaniem niestacjonarnego zadania sterowania docelowego (3.19) - (3.20), to istnieje takie rozwiązanie ξ_T^* równania

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = - \left. \frac{\partial H(\xi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \right|_{x=x^*(t)}$$

z warunkiem końcowym

$$(A) \xi^*(t_1) = c,$$

że

$$(B) \max_{u \in U} H(\xi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\xi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)$$

w każdym momencie $t \in T$, gdzie $H(\xi, x, u, t) = \langle \xi, f(x, u, t) \rangle$. ■

U w a g a. Jeżeli w zadaniach sterowania docelowego (3.17) - (3.18), (3.19) - (3.20) hamiltonian będzie liniową funkcją sterowania, a zbiór sterowań U - prostopadłością postaci (3.8), wtedy warunek maksimum (B) w twierdzeniach 3.6, 3.7 można zastąpić warunkiem typu (3.9).

3.3.4. MINIMALNOZASOWE ZADANIE STEROWANIA - WERSJA STACJONARNA I NIE-STACJONARNA

Rozpatrzmy najpierw zadanie stacjonarne, w którym wskaźnikiem jakości procesu jest czas przejścia od ustalonego stanu początkowego systemu x^0 do zbioru stanów docelowych X^1 . Proces optymalny charakteryzuje się najkrótszym czasem dojścia trajektorii stanów wewnętrznych systemu do X^1 .

³⁴ Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzenia 3.5, przyjmując $\psi_0^* = 1$.

Zadanie to zapisujemy w postaci następującej:

$$\min t_1, \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in U, \quad u \in C^0[t_0, t_1], \quad (3.22)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) \in X^1$$

(moment początkowy t_0 jest ustalony, nie jest ustalony natomiast moment końcowy t_1 - zmienna decyzyjna zadania).

Aby ustalić warunki, które w zadaniu spełnia proces optymalny przedstawimy je w następującej równoważnej postaci zważywszy, że kryterium (3.21) jest równoważne z kryterium $\max(t_0 - t_1)$:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} (-1) dt, \quad (3.21')$$

przy warunkach (3.22).

Warunki optymalności rozwiązania tego stacjonarnego zadania sterowania z kryterium całkowym i nie ustalonym momentem końcowym podaje twierdzenie 3.2 (należy tylko przyjąć $f_0(x, u) = -1$), a stąd już nietrudno otrzymać warunki optymalności procesu $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1^*]}$ w wyjściowym zadaniu minimalnoczasowym (3.21) - (3.22).

T w i e r d z e n i e 3.8. Jeżeli proces $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1^*]}$ jest rozwiązaniem stacjonarnego zadania minimalnoczasowego (3.21) - (3.22), to istnieje takie rozwiązanie $\psi^*_{[t_0, t_1^*]}$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}$$

że w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$

$$(A) \quad \psi^*(t) \neq 0,$$

$$(B) \quad \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi^*(t), x^*(t), u(t)) = \text{const.} \geq 0$$

oraz

$$(C) \quad \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0$$

dla każdego wektora $x \in P_{x^*(t_1^*)}$, gdzie $H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle$, $P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmierności X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$. ■

Stosując ten sam zabieg, tzn. zastępując kryterium (3.21) kryterium całkowym (3.21') w niestacjonarnym zadaniu minimalnoczasowym

$$\min t_1, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ u(t) &\in U, \quad u \in \bar{C}^0[t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x^0, \quad x(t_1) \in X^1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

otrzymujemy następujące warunki optymalności wynikające z twierdzenia 3.3.

Twierdzenie 3.9. Jeżeli proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem niestacjonarnego zadania minimalnoczasowego (3.23) - (3.24), to istnieje takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \left. \frac{\partial H(\psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \right|_{x=x^*(t)},$$

że w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$

$$(A) \quad \psi^*(t) \neq 0,$$

$$(B) \quad \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)$$

oraz

$$(C) \quad H(\psi^*(t_1^*), x^*(t_1^*), u(t_1^*), t_1^*) \geq 0,$$

$$(D) \quad \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0$$

dla każdego wektora $x \in P_{x^*(t_1^*)}$, gdzie $H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle$,

$P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$. ■

U w a g 1. 1^o. Jeżeli zbiór stanów docelowych X^1 zredukujemy do punktu, $X^1 = \{x^1\}$, wtedy zamiast warunków transversalności w twierdzeniach 3.8, 3.9 pojawi się dodatkowy warunek końcowy $x^*(t_1^*) = x^1$. Uwaga ta dotyczy także wcześniej omawianych zadań (z wyjątkiem zadania sterowania docelowego).

2^o. Jeżeli hamiltonian w twierdzeniach 3.8, 3.9 będzie liniową funkcją sterowania, a zbiór sterowań U - prostopadłością postaci (3.8), wtedy warunek maksimum (B) można zastąpić warunkiem typu (3.9).

3.4. Uwagi o dostatecznych warunkach optymalności rozwiązań zadań sterowania optymalnego

Twierdzenia sformułowane w tym paragrafie ustalają jedynie warunki konieczne optymalności rozwiązań zadań sterowania. Warunki te muszą spełniać procesy optymalne choć nie jest wykluczone, że będą je spełniać rów-

niez niektóre inne procesy dopuszczalne. Jeżeli zatem rozwiązując zadanie sterowania optymalnego, znajdziemy proces dopuszczalny spełniający warunki optymalności, to nie musi on, ogólnie rzecz biorąc, być automatycznie procesem optymalnym. Przedstawione twierdzenia pozwalają tylko na wyodrębnienie w zbiorze procesów dopuszczalnych wiązki procesów „podejrzanych” o to, że mogą one być procesami optymalnymi. Nie są wykluczone takie szczególne przypadki, kiedy pewne zadania sterowania optymalnego w ogóle nie będą miały rozwiązania. Tak więc, ściśle rzecz biorąc, należałoby każdorazowo przeprowadzać dodatkowe badania pozwalające stwierdzić istnienie rozwiązania zadania sterowania optymalnego. Wykraczają one poza ramy książki. W następnych rozdziałach rozwiązując konkretne zadania sterowania optymalnego wzrostem zakładamy, że

Hipoteza (H). Omawiane w książce zadania sterowania optymalnego wzrostem mają rozwiązanie.

Wystarczy wtedy ustalić, że istnieje tylko jeden proces dopuszczalny spełniający warunki optymalności. Proces taki będzie rozwiązaniem zadania sterowania optymalnego. Wyłącznie z takimi zadaniami będziemy mieli do czynienia dalej.

Rozdział II

OPTYMALNE TRAJektorie WZROSTU W MODELACH JEDNOSEKTOROWYCH

Modele jednosektorowe są najprostszymi modelami wzrostu. Opisują powiązania między kilkoma podstawowymi zmiennymi-agregatami, jak dochód narodowy, trwały majątek produkcyjny, inwestycje, konsumpcja. Tradycyjnie dzielimy je na modele jedno- i dwuczynnikowe. W paragrafach 4,5 zajmujemy się zagadnieniem optymalnego podziału dochodu narodowego na inwestycje (akumulację) i konsumpcję (część dochodu narodowego przeznaczoną na spożycie) w modelach jednosektorowych jednoczynnikowych. W modelach tych zakładamy, że jedynym czynnikiem produkcji, od którego zależy wielkość wytwarzanego dochodu narodowego jest trwały majątek produkcyjny. Ponieważ nie uwzględnia się w nich *explicite* drugiego podstawowego czynnika produkcji, jakim jest praca, więc modele te można uznać za obrazy takiej gospodarki, w której warunki techniczne produkcji jednoznacznie określają niezbędny poziom technicznego uzbrojenia pracy (proporcje między majątkiem i zatrudnieniem), a zasoby pracy są na tyle obfite, iż wystarczają na uruchomienie i eksploatację każdego majątku produkcyjnego. Kryterium wzrostu jest maksymalizacja konsumpcji (paragraf 4) lub konsumpcji przypadającej średnio na osobę w ustalonym okresie czasu (paragraf 5). W modelach omawianych w paragrafie 4 brak założeń o preferencjach konsumpcyjnych społeczeństwa w poszczególnych momentach czasu. Pojawiają się one w paragrafie 5, gdzie formułujemy dodatkowe warunki dotyczące minimalnego poziomu konsumpcji w każdym momencie ustalonego okresu czasu. W paragrafie 6 rozpatrujemy zagadnienie optymalnego podziału dochodu narodowego na inwestycje i konsumpcję w modelach jednosektorowych dwuczynnikowych, w których zasoby jednorodnej pracy stanowią drugi - obok trwałego majątku produkcyjnego - podstawowy czynnik produkcji. W modelach tych zakładamy, że o rozmiarach produkcji decydują ograniczone zasoby obu czynników.

We wszystkich modelach wzrost trwałego majątku produkcyjnego uzależniony jest od wielkości wytworzonego dochodu narodowego i sposobu jego podziału na inwestycje i konsumpcję. Wysoki udział inwestycji w dochodzie narodowym powoduje szybki wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w przyszłości. Wzrost taki odbywa się jednak kosztem bieżącej konsumpcji, albowiem zwiększenie udziału inwestycji w dochodzie narodowym oznacza zmniejszenie udziału konsumpcji. Niski udział inwestycji w dochodzie narodowym, a więc wysoki udział konsumpcji, przyczynia się z kolei do wolnego wzrostu majątku produkcyjnego i dochodu, a więc pośrednio także konsumpcji.

W rozdziale tym wyjaśnimy, jak przy różnych założeniach o dopuszczalnych procesach wzrostu przebiegałby w gospodarce podział dochodu narodowego, gdyby planista przy ustalaniu przyszłych ścieżek wzrostu podstawowych zmiennych ekonomicznych kierował się kryterium maksymalizacji konsumpcji. Zarówno w modelach jednoczynnikowych jak i dwuczynnikowych analiza optymalnych procesów wzrostu wskazuje na istnienie pewnych prawidłowości (reguł) takiego podziału. Procesy podporządkowane tym regułom przebiegają okresowo w otoczeniu stanów gospodarki w różnego typu równowagach.

§ 4. OPTIMALNY PODZIAŁ DOCHODU NARODOWEGO W JEDNOCZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU

4.1. Podstawowe założenia¹

Ustalmy przedział czasu (horyzont) $T = [t_0, t_1]$; $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$. Zmiennymi modelu w poszczególnych momentach $t \in T$ są: trwały majątek produkcyjny $m(t)$ (zasób, wymiar: zł), wytworzony dochód narodowy $y(t)$, inwestycje produkcyjne brutto $i(t)$, netto $j(t)$, konsumpcja $c(t)$ (strumienie, wymiar: zł/R, R - ustalona jednostka czasu, np. R = 1 rok) oraz wskaźnik efektywności majątku produkcyjnego $a(t)$ (odwrotność współczynnika kapitałochłonności, wymiar: 1/R). Parametrami są: wskaźnik wycofywanej z eksploatacji części majątku² μ oraz stopa wzrostu efektywności majątku ν (oba parametry mają wymiar: 1/R). Wszystkie zmienne i parametry są rzeczywiste. Wartości parametrów μ , ν oraz wskaźnika $a(t)$ są w horyzoncie czasu T ustalone, przy czym³

▼ Zał o ż e n i e 4.1. (i) $a(t) = a^0 e^{\nu(t-t_0)}$ w każdym momencie $t \in T$, $a^0 > 0$, (ii) $0 < \nu \leq \mu < 1$. ▼

Warunek (i) jest założeniem o rosnącej efektywności majątku produkcyjnego. Uzasadnienie drugiego warunku podamy później.

Weźmy dowolny przedział czasu $[\tau, t] \subseteq T$. W całym rozdziale zakładamy, że wielkość trwałego majątku produkcyjnego w momencie t jest równa jego wielkości w momencie τ powiększonej o część nowo wytworzoną w okresie

¹ Przedstawiamy tu z pewnymi modyfikacjami model, który od nazwisk autorów nazywany bywa modelem Domara-Harroda, por. E. D. D o m a r [16], a także R. A l l e n [1] rozdz.3, Z. C z e r w i ń s k i [12] rozdz.2, J. T i n b e r g e n, H. C. B o s [49] rozdz.2 oraz praca [34] rozdz.13.

² Nie przesadzamy, z jakiego okresu pochodzi wycofywana z eksploatacji część majątku produkcyjnego.

³ W tej postaci założenie to obowiązuje tylko w punktach 4.1, 4.2. W pozostałych punktach paragrafu będziemy zakładać, że w całym horyzoncie czasu T efektywność majątku produkcyjnego jest stała.



$(\tau, t]$, którą utożsamiamy z inwestycjami produkcyjnymi netto poniesionymi w tym okresie:⁴

$$m(t) = m(\tau) + \int_{\tau}^t j(\theta) d\theta .$$

Zważywszy na definicyjną równość

$$j(t) = i(t) - \mu m(t)$$

otrzymujemy równanie wzrostu majątku:

$$m(t) = m(\tau) + \int_{\tau}^t (i(\theta) - \mu m(\theta)) d\theta . \quad (4.1)$$

Majątek produkcyjny jest w modelu jedynym czynnikiem produkcji, a zależność między jego wielkością i wielkością dochodu narodowego wytwarzanego w poszczególnych momentach czasu opisuje liniowa (jednoczynnikowa) funkcja produkcji

$$y(t) = a(t)m(t) . \quad (4.2)$$

Zakładamy, że ustalona jest początkowa wielkość majątku produkcyjnego (w momencie t_0)

$$m(t_0) = m^0 > 0 , \quad (4.3)$$

oraz, że inwestycje (brutto)⁵ w żadnym momencie czasu $t \in T$ nie przekraczają dochodu narodowego:

$$0 \leq i(t) \leq y(t) . \quad (4.4)$$

Nie przeznaczoną na inwestycje część dochodu narodowego

$$c(t) = y(t) - i(t) \quad (4.5)$$

nazywamy konsumpcją.

Warunki (4.1) - (4.5) uzależniają wzrost dochodu narodowego i konsumpcji od wielkości majątku produkcyjnego i inwestycji. Trudności obliczeniowe w tym układzie sprawia warunek (4.4). Wyjaśnimy to bliżej.

Weźmy na przykład nieujemną, przynajmniej przedziałami ciągłą funkcję wzrostu inwestycji $i_T = \{(t, i(t)), t \in T\}$ ($i \in \bar{C}^0 [T]$). Rozwiązaniem równania całkowego (4.1) z warunkiem początkowym (4.3) będzie wówczas ciągła, wszędzie dodatnia funkcja $m_T = \{(t, m(t)), t \in T\}$ wzrostu majątku produkcyjnego z wartościami

$$m(t) = m^0 e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\mu(t-\theta)} i(\theta) d\theta .$$

⁴ Bliższe omówienie warunków matematycznych nakładanych na funkcje opisujące przebieg zmiennych ekonomicznych modelu odkładamy do punktu 4.2.

⁵ W dalszym ciągu inwestycje produkcyjne brutto nazywamy krótko inwestycjami.

której odpowiada na podstawie (4.2) ciągła, dodatnia funkcja $y_T = \{(t, y(t)), t \in T\}$ wzrostu dochodu narodowego,

$$y(t) = y^0 [a(t)/a^0] e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^t a(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} i(\tau) d\tau,$$

gdzie $y^0 = a^0 m^0$. Funkcję wzrostu konsumpcji $c_T = \{(t, c(t)), t \in T\}$ otrzymujemy z równania (4.5). Warunki (4.1) - (4.5) pozwalają wyznaczyć funkcje m_T, y_T, c_T w zależności od postaci funkcji i_T . Postulując określoną funkcję i_T , nie mamy jednak pewności, że będzie ona spełniała warunek na T warunek (4.4). Po jej wyborze może okazać się, że układ warunków (4.1) - (4.5) będzie sprzeczny. Aby tego uniknąć, nierówność (4.4) zastąpimy równaniem

$$i(t) = s(t)y(t), \quad (4.6)$$

oraz warunkiem

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in \tilde{C}^0 [T]. \quad (4.7)$$

Współczynnik $s(t)$ określa udział inwestycji w dochodzie narodowym w momencie t (stopa inwestycji, wielkość niemianowana).

Nietrudno wykazać, że przy tych samych pozostałych założeniach w klasie $\tilde{C}^0 [T]$ przedziałami ciągłymi funkcji wzrostu inwestycji i_T warunek (4.4) jest równoważny z (4.6) - (4.7). Rzeczywiście, jeżeli funkcje i_T, m_T, y_T, c_T spełniają warunki (4.1) - (4.5), wtedy z (4.4) wynika, że $i(t) = s(t)y(t)$ dla pewnej funkcji $s_T = \{(t, s(t)), t \in T\}$ z klasy $\tilde{C}^0 [T]$ z wartościami w $[0, 1]$. Zatem z (4.4) otrzymujemy (4.6) - (4.7). Załóżmy teraz, że funkcje i_T, m_T, y_T, c_T, s_T spełniają warunki (4.1) - (4.3), (4.5) - (4.7). Wystarczy pokazać, że funkcja y_T jest dodatnia i ciągła. Wtedy funkcja i_T będzie nieujemna i przynajmniej przedziałami ciągła na podstawie (4.6) - (4.7) oraz $i(t) \leq y(t)$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Rozwiązaniem równania całkowego (4.1) z warunkiem początkowym (4.3) po uwzględnieniu (4.2), (4.6) jest ciągła, dodatnia funkcja m_T .

$$m(t) = m^0 \exp \int_{t_0}^t (a(\theta)s(\theta) - \mu) d\theta. \quad (4.8)$$

Przy założeniu 4.1 funkcja y_T jest ciągła i dodatnia na podstawie (4.2).

W dalszym ciągu zamiast układu warunków (4.1) - (4.5) rozpatrywać będziemy równoważny układ (4.1) - (4.3), (4.5) - (4.7). Jego rozwiązaniem są dodatnie funkcje wzrostu majątku produkcyjnego m_T i dochodu narodowego y_T oraz nieujemna funkcja wzrostu inwestycji i_T i konsumpcji c_T , odpowiadające danej funkcji udziału inwestycji w dochodzie narodowym s_T . Zerową wielkość inwestycji w momencie czasu t otrzymujemy przyjmując $s(t) = 0$. Wszędzie, gdzie $s(t) = 1$ otrzymujemy zerową wielkość konsumpcji.

4.2. Optymalny podział dochodu narodowego w modelu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji

4.2.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA STEROWANIA OPTIMALNEGO

W punkcie tym zakładamy, że funkcje udziału inwestycji w dochodzie narodowym s_T należą do klasy $\tilde{C}^0[T]$ (funkcji przedziałami ciągłych na T o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na $\text{int } T$, w punktach nieciągłości ciągłych prawostronnie; zob. paragraf 1, punkt 1.3). Z (4.1) uwzględniając (4.2), (4.6), otrzymujemy równanie całkowe

$$m(t) = m(\tau) + \int_{\tau}^t (a(\theta)s(\theta) - \mu)m(\theta) d\theta,$$

którego rozwiązanie m_T dla każdej pary momentów czasu $\tau, t \in [T]$ spełnia warunek

$$m(t) = m(\tau) \exp \int_{\tau}^t (a(\theta)s(\theta) - \mu) d\theta. \quad (4.9)$$

Z założenia funkcja $a \in C^1[T]$, zatem funkcja $m \in \tilde{C}^1[T]$ zważywszy, że $s \in \tilde{C}^0[T]$. Z (4.2), (4.5), (4.6) otrzymujemy ponadto równanie

$$c(t) = a(t)(1-s(t))m(t). \quad (4.10)$$

Równanie (4.9) jest przekształceniem stanów wewnętrznych, a równanie (4.10) - przekształceniem wyjścia gładkiego (jednowymiarowego) systemu dynamicznego w sensie definicji 1.1 - 1.3. Horyzontem jest przedział czasu $T = [t_0, t_1]$, stanem wewnętrznym w momencie czasu $t \in T$ - wielkość majątku produkcyjnego $m(t)$, sterowaniem - wskaźnik udziału inwestycji w dochodzie narodowym $s(t)$, stanem wyjścia - wielkość konsumpcji $c(t)$. Zbiorem sterowań jest przedział $[0, 1] \subset E^1$ dopuszczalnych wartości wskaźnika udziału inwestycji w dochodzie narodowym. Trajektorie sterowań s_T są funkcjami z klasy $\tilde{C}^0[T]$ z wartościami w $[0, 1]$. Trajektorie stanów wewnętrznych m_T należą do klasy funkcji $\tilde{C}^1[T]$, trajektorie stanów wyjścia - do klasy funkcji $\tilde{C}^0[T]$. Trajektorja m_T wtedy i tylko wtedy spełni równanie (4.9), jeżeli będzie rozwiązaniem (w sensie całkowym) równania różniczkowego

$$\frac{d}{dt} m(t) = (a(t)s(t) - \mu)m(t). \quad (4.11)$$

Zgodnie z terminologią przyjętą w paragrafie 1 o parze równań (4.11), (4.10) mówimy, że opisuje funkcjonowanie gładkiego (jednowymiarowego, niestacjonarnego) systemu dynamicznego.

Interesować nas będzie taka praktycznie ciekawa sytuacja, kiedy efektywność majątku produkcyjnego jest wyżej od wskaźnika wycofywanej z eksploatacji części majątku (dopiero przy tym założeniu ietnieją dodatnie,

rosnące rozwiązania równania (4.11) z warunkiem początkowym (4.3), a więc możliwy jest równomierny wzrost majątku produkcyjnego z dodatnią stopą). Przy założeniu 4.1 warunek ten oznacza, że

▼ Zał o ż e n i e 4.2. $a^0 > \mu$. ▼

Weźmy trajektorię sterowań $s \in C^0[T]$. Przez rozwiązanie równania (4.11) z warunkiem początkowym (4.3) rozumieamy ciągłą, przedziałami różniczkowalną funkcję m_T spełniającą to równanie wszędzie na T poza punktami nieciągłości strowania s_T , przechodzącą przez stan m^0 w momencie początkowym t_0^6 . Równanie to spełnia warunki twierdzenia 1.2, zatem rozwiązanie takie istnieje i jest określone jednoznacznie.

Możemy teraz przejść do uzasadnienia warunku (ii) założenia 4.1. Rozwiązując równanie (4.11) z warunkiem początkowym (4.3) i zerowym udziałem inwestycji w dochodzie narodowym $s(t) = 0$ w każdym momencie czasu $t \in T$, otrzymamy malejącą funkcję m_T :

$$m(t) = m^0 e^{-\mu(t-t_0)}.$$

Gdyby stopa ν była wyższa od wskaźnika μ , wtedy przy założeniu 4.1 (i) z (4.2) otrzymalibyśmy rosnącą funkcję y_T w postaci

$$y(t) = y^0 e^{(\nu-\mu)(t-t_0)},$$

a więc bez warunku (ii) byłby możliwy wzrost dochodu narodowego przy zerowych inwestycjach, czego nie obserwuje się w realnej gospodarce. Oznaczmy przez

$$\Phi[(s, m)_T] = \int_T a(t)(1-s(t))m(t)dt$$

wielkość konsumpcji w horyzoncie T (por. (4.10)). Interesuje nas optymalny podział dochodu narodowego z punktu widzenia tego kryterium, tzn. rozwiązanie następującego zadania sterowania optymalnego:

$$\max \int_T a(t)(1-s(t))m(t)dt, \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt} m(t) = (a(t)s(t) - \mu)m(t),$$

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in C^0[T], \quad (4.13)$$

$$m(t_0) = m^0,$$

gdzie $m^0 > 0$ oraz efektywność majątku $a(t) = a^0 \exp\{\nu(t-t_0)\}$. Parę funkcji $(s, m)_T$ spełniających warunki (4.13) nazywamy dopuszczalnym procesem wzrostu w zadaniu (4.12) - (4.13). Funkcję s_T w dopuszczalnym procesie $(s, m)_T$ nazywamy sterowaniem 'do-

⁶ Por. uwagi o rozwiązaniach równań różniczkowych w paragrafie 1 punkt 1.3.

puszczalnym, funkcję m_T - dopuszczalną trajektorią majątku produkcyjnego, a odpowiadające im zgodnie z (4.2), (4.6), (4.10) funkcje y_T , i_T , c_T - dopuszczalnymi trajektoriami dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji. Proces wzrostu $(s^*, m^*)_T$ będący rozwiązaniem zadania (4.12) - (4.13) nazywamy optymalnym procesem wzrostu, s_T^* nazywamy sterowaniem optymalnym, m_T^* - optymalną trajektorią majątku produkcyjnego. Trajektorie y_T^* , i_T^* , c_T^* odpowiadające procesowi optymalnemu nazywamy optymalnymi trajektoriami dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji.

□ T w i e r d z e n i e 4.1.⁷ Rozwiązaniem zadania (4.12) - (4.13) przy założeniach 4.1, 4.2 jest proces $(s^*, m^*)_T$ następującej postaci:⁸

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0 e^{g(t)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m^*(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $g(t) = (a^0/\nu)(e^{\nu(t-t_0)} - 1) - \mu(t-t_0)$. Jeżeli horyzont T jest długi (wystarczy, by $|T| = t_1 - t_0 > \theta = (\nu - \mu)^{-1} \ln[1 + (\nu - \mu)/a^0]$, wówczas $\tau \in \text{int } T$. Jeżeli horyzont T jest krótki ($|T| \leq \theta$), wtedy $\tau = t_0$ i proces optymalny redukuje się do postaci:

$$s^*(t) = 0, \quad m^*(t) = e^{-\mu(t-t_0)}$$

w każdym momencie $t \in T$. ■

4.2.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

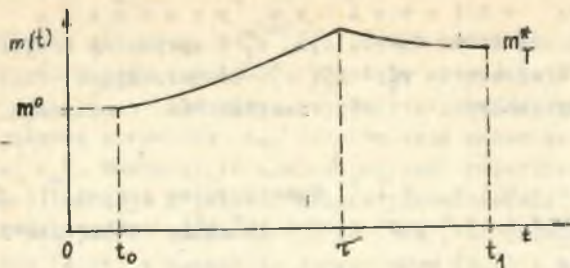
Trajektorie dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji odpowiadająca procesowi optymalnemu $(s^*, m^*)_T$ otrzymujemy z (4.2), (4.6), (4.10). Jeżeli horyzont T jest krótki, wtedy maksymalną wielkość konsumpcji uzyskujemy, wstrzymując całkowicie inwestycje. W rezultacie obserwujemy spadek wielkości majątku produkcyjnego. Przy założeniach 4.1, 4.2 maleje także dochód narodowy i konsumpcja.

W długim horyzoncie czasu pojawiają się dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej - inwestycyjnej - cały wytworzony dochód narodowy przeznaczony zostaje na inwestycje. Majątek produkcyjny i dochód narodowy w tym okresie szybko rosną. Konsumpcja utrzymuje się na zerowym poziomie.

⁷ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.1 s. 224.

⁸ Przyjmujemy, że $[t_0, \tau) = \emptyset$ (zbiór pusty), jeżeli $t_0 = \tau$.

W fazie drugiej - konsumpcyjnej - następuje gwałtowne wstrzymanie inwestycji, a dochód narodowy przeznaczony zostaje w całości na spożycie, wskutek czego majątek produkcyjny i dochód zaczynają maleć (rys.4.1).



Rys.4.1. Upryma trajektoria majątku produkcyjnego - rozwiązanie zadania (4.12) - (4.13) w długim horyzoncie czasu

Nierealność takiego rozwiązania jest oczywista. W rzeczywistości żadna gospodarka nie wytrzymałaby tak gwałtownego skoku inwestycyjnego (przejściu od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej towarzyszy gwałtowny spadek udziału inwestycji w dochodzie narodowym z 1 do 0), nie mówiąc już o tym, że w realnej gospodarce niemożliwe jest ani całkowite wstrzymanie inwestycji, ani konsumpcji.

Rozwiązanie jest naturalnie tylko wnioskiem płynącym z przyjętych założeń o mechanizmie funkcjonowania i wzrostu gospodarki. W punktach 4.3, 4.4 przyjrzymy się ponownie tym założeniom i pokażemy, że nierealne rozwiązanie zagadnienia optymalnego podziału dochodu narodowego jest wynikiem jego niepoprawnego - z ekonomicznego punktu widzenia - sformułowania. Wyjaśnimy także, przy jakich założeniach, nawiązując do warunków (4.1) - (4.5), można otrzymać rozwiązania tego zagadnienia „rozsądne” w świetle naszej wiedzy o wzroście. Przedtem zajmiemy się pewnymi asymptotycznymi właściwościami optymalnych procesów wzrostu w zadaniu (4.12) - (4.13) oraz krótko omówimy jego dwa przypadki szczególne.

4.2.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTIMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Stwierdziliśmy, że para równań (4.9) - (4.10) opisuje funkcjonowanie gładkiego systemu dynamicznego, którego stanem wewnętrznym w momencie czasu t jest wielkość trwałego majątku produkcyjnego $m(t)$, sterowaniem - wskaźnik $s(t)$ udziału inwestycji w dochodzie narodowym, stanem wyjścia - wielkość konsumpcji $c(t)$. W rozdziale I (paragraf 2) przedstawiliśmy pewną koncepcję matematycznego sformułowania pojęcia równowagi (dynamicznej) będącej uogólnieniem klasycznej definicji równowagi (statycznej) w takich systemach. Uznaliśmy bowiem, że wywodzące się z techniki tradycyjne pojęcie równowagi jako pewnego stanu „spoczynku” systemu, na który nie działają żadne bodźce zewnętrzne (zerowy impuls wejściowy) nie odzwierciedla istoty równowagi ekonomicznej. Można się o tym przekonać

nawet na przykładzie naszego prostego modelu wzrostu. Aby gospodarka znalazła się w równowadze w jej klasycznym rozumieniu, powinna osiągnąć taką wielkość majątku produkcyjnego \bar{m} (stan wewnętrzny systemu), by w każdym momencie czasu $t \in T$ spełniony był warunek

$$\dot{\bar{m}} = \bar{m}e^{-\mu(t-t_0)}$$

(zob. paragraf 2, punkt 2.1, wzór (2.1); przekształcenie stanów wewnętrznych φ ma postać (4.9)). Warunek ten zachodzi tylko dla $\bar{m} = 0$ (zerowy majątek, zatem zerowy dochód, konsumpcja i inwestycje). Tak rozumiany stan równowagi nie może się pojawić. Oznaczałoby to bowiem unicestwienie gospodarki.

Popatrzmy teraz, jaką postać będą miały procesy wzrostu gospodarki w σ -równowadze w sensie definicji 2.1 gdy przyjmiemy, że interesującą nas cechą gospodarki w takiej równowadze (σ -niezmiennikiem) jest stała stopa wzrostu konsumpcji⁹, zatem

$$\sigma(m, c) = \delta_c = \frac{d}{dt} c \cdot \frac{1}{c} = \text{const.}$$

Zgodnie z definicją 2.1 gospodarka z funkcją udziału inwestycji w dochodzie narodowym - sterowaniem \bar{s}_T , trajektorią majątku produkcyjnego \bar{m}_T i trajektorią konsumpcji \bar{c}_T będzie w takiej σ -równowadze (w horyzoncie czasu T), jeżeli: (i) sterowanie oraz trajektorie majątku produkcyjnego i konsumpcji będą gładkie tzn. $\bar{s}, \bar{m}, \bar{c} \in C^1[T]$ (warunek „regularności” procesu wzrostu), (ii) stopa wzrostu konsumpcji w całym horyzoncie czasu T będzie stała, $\delta_{\bar{c}}(t) = \text{const.}$ Umówimy się, że jeżeli trajektorie pewnej wielkości ekonomicznej, np. konsumpcji, będzie tożsamościowo równa zero w pewnym okresie, to stopa wzrostu tej wielkości też wyniesie zero w tym okresie. Formalnie oznacza to, że w takich przypadkach przyjmujemy: $\frac{0}{0} = 0$. Wskażemy dwa typy procesów wzrostu w takiej równowadze.

(A) Przez $(\bar{s}, \bar{m})_T, \bar{c}_T$ oznaczymy te procesy wzrostu i odpowiadające im trajektorie konsumpcji spełniające warunki (i), (ii), w których majątek produkcyjny rośnie z maksymalną stopą

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{m}}(t) &= \frac{d}{dt} \bar{m}(t) \cdot \frac{1}{\bar{m}(t)} = a(t)\bar{s}(t) - \mu = \max_{s \in [0,1]} (a(t)s - \mu) = \\ &= a^0 e^{\nu(t-t_0)} - \mu \end{aligned}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Są to procesy następującej postaci:

$$\bar{s}(t) = 1, \quad \bar{m}(t) = \bar{m}^0 \exp \left\{ (a^0/\nu)(e^{\nu(t-t_0)} - 1) - \mu(t-t_0) \right\}, \quad (4.14)$$

⁹ Por. paragraf 2 punkt 2.2. Mówiąc o stałej stopie wzrostu konsumpcji, nie przesądzamy jej znaku. Może ona być zarówno dodatnia, ujemna, jak i równa 0.

gdzie \bar{m}^0 jest dowolną dodatnią wielkością majątku produkcyjnego w momencie początkowym t_0 . Odpowiada im trajektoria konsumpcji \bar{c}_T ,

$$\bar{c}(t) = 0 \quad (4.15)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, a wobec tego $\delta \bar{c}(t) = 0$ na T . Jest to przypadek „zdegenerowanej” równowagi, w której zachodzi wzrost majątku przy zerowym poziomie konsumpcji. Choć sytuacja taka z ekonomicznego punktu widzenia jest nierealna, warto zauważyć, że zgodnie z założeniami modelu gospodarka może rozwijać się przy zerowej wielkości konsumpcji, a zatem równowaga taka jest dopuszczalna z punktu widzenia założeń modelu (co więcej, właśnie przy zerowej konsumpcji majątek i dochód w gospodarce takiej rosną najszybciej).

(B) Przez $(\bar{s}, \bar{m})_T$ oznaczymy te procesy w G -równowadze ze stałą stopą wzrostu konsumpcji, w których stopa wzrostu majątku produkcyjnego jest minimalna:

$$\delta \bar{m}(t) = \frac{d}{dt} \bar{m}(t) \cdot \frac{1}{\bar{m}(t)} = a(t)\bar{s}(t) - \mu = \min_{a \in [0,1]} (a(t)s - \mu) = -\mu$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Mają one postać następującą:

$$\bar{s}(t) = 0, \quad \bar{m}(t) = \bar{m}^0 e^{-\mu(t-t_0)}, \quad (4.16)$$

gdzie \bar{m}^0 jest dowolną dodatnią wielkością majątku produkcyjnego w momencie początkowym t_0 . Odpowiada im trajektoria konsumpcji \bar{c}_T ,

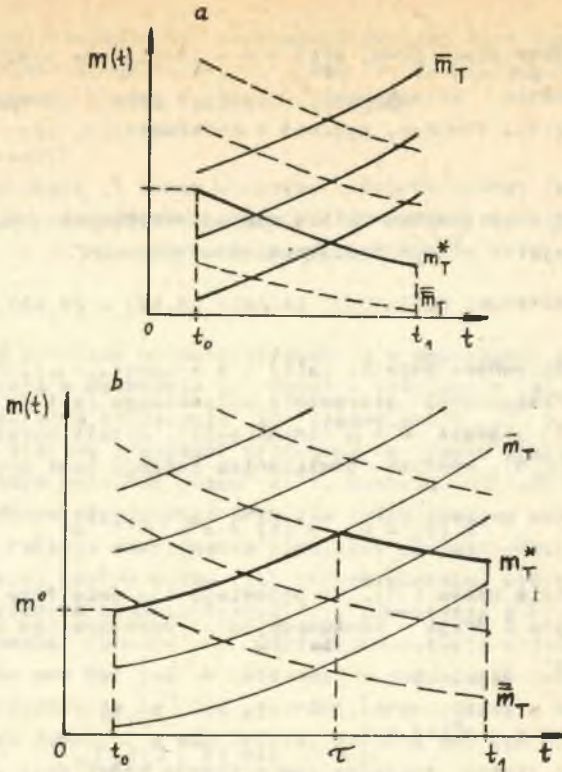
$$\bar{c}(t) = a^0 \bar{m}^0 e^{(\nu - \mu)(t-t_0)}, \quad (4.17)$$

ze stopą wzrostu $\delta \bar{c}(t) = \nu - \mu$ w każdym momencie czasu $t \in T$. W G -równowadze tej postaci następuje równomierny spadek wielkości majątku produkcyjnego na skutek wstrzymania inwestycji ($\bar{i}(t) = 0$).

Wróćmy do rozwiązania zadań (4.12) - (4.13). Widzimy, że w krótkim horyzoncie T optymalna trajektoria majątku produkcyjnego m_T^* jest jedną z trajektorii majątku w postaci (4.16) w G -równowadze typu (B). Jeżeli horyzont T jest długi, wtedy optymalna trajektoria majątku produkcyjnego w fazie pierwszej - inwestycyjnej - jest tożsama z jedną z trajektorii majątku w G -równowadze typu (A), a w fazie drugiej - konsumpcyjnej - z jedną z trajektorii w G -równowadze typu (B) (Rys.4.2.a,b). O nierealnej postaci zarówno procesu optymalnego, jak i procesów wzrostu w G -równowadze zdecydowały odbiegające od rzeczywistości założenia modelu. Do założeń tych wrócimy w punktach 4.3, 4.4.

Zdefiniujemy średnią stopę wzrostu majątku produkcyjnego (w horyzoncie czasu T) w optymalnym procesie $(s^*, m^*)_T$:

$$\delta m_T^* = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} m(t) \cdot \frac{1}{m(t)} dt \quad (4.18)$$



Rys.4.2. Trajektorie majątku produkcyjnego w G -równowagach oraz optymalna trajektoria (a) w krótkim horyzoncie czasu, (b) w długim horyzoncie czasu

oraz średnią stopę wzrostu majątku w procesie $(\bar{s}, \bar{m})_T$ w G -równowadze typu (A):

$$\delta \bar{m}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} \bar{m}(t) \cdot \frac{1}{\bar{m}(t)} dt. \quad (4.19)$$

□ **T w i e r d z e n i e 4.2.**¹⁰ Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to (i) długość fazy inwestycyjnej w procesie optymalnym $\tau - t_0 \rightarrow +\infty$, (ii) różnica $|\delta_{m_T^*} - \delta_{\bar{m}_T}|$ średnich stop wzrostu majątku produkcyjnego w procesie optymalnym i w G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera. ■

Jeżeli efektywność majątku produkcyjnego rośnie ($a(t) = a^0 \exp\{v(t-t_0)\}$, $v > 0$), to $\delta_{m_T^*}, \delta_{\bar{m}_T} \rightarrow +\infty$ przy $|T| \rightarrow +\infty$. Natomiast jeżeli efektyw-

¹⁰ Dowód.zob.Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.2 s. 227. Warunek (ii) spełniają także trajektorie dochodu narodowego y_T^*, \bar{y}_T . Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu konsumpcji w procesie optymalnym spada do zera (jest zbieżna do stopy wzrostu konsumpcji w G -równowadze typu (A)).

ność majątku będzie stała ($v=0$, $a(t) = a = \text{const}$; zob. p.4.2.4), wtedy $\delta_{m_T} = a - \mu > 0$. Będzie to maksymalna stopa, z jaką w gospodarce takiej może rosnąć majątek. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem, $\lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{m_T}^* = a - \mu$, czyli w miarę jak rośnie długość horyzontu czasu T , średnia stopa wzrostu majątku w procesie optymalnym zbliża się asymptotycznie do maksymalnej stopy, z jaką majątek może w ogóle rosnąć w gospodarce.

4.2.4. DWA PRZYPADKI SZCZEGÓLNE ZADANIA (4.12) - (4.13)

(A) Stała efektywność majątku ($a(t) = a = \text{const} > \mu$). Przy tym założeniu moment „przełączenia” sterowania optymalnego (z 1 na 0) $\tau = \max \{ 0, t_1 - \theta \}$, gdzie $\theta = \mu^{-1} \ln[a/(a-\mu)]$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki ($|T| \leq \theta$), wówczas rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, m^*)_T$,

$$s^*(t) = 0, \quad m^*(t) = m^0 e^{-\mu(t-t_0)}.$$

W długim horyzoncie czasu ($|T| > \theta$) pojawiają się dwie fazy wzrostu (pierwsza - inwestycyjna i druga - konsumpcyjna) i rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, m^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0 e^{(a-\mu)(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ m^*(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $\tau = t_1 - \theta > t_0$. W procesie tym długość fazy konsumpcyjnej nie zależy od długości horyzontu czasu T . Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy inwestycyjnej.

(B) Stała efektywność majątku; majątek nie zużywa się ($a(t) = a = \text{const} > 0, \mu = 0$)¹¹. Rozwiązaniem zadania (4.12) - (4.13) jest proces $(s^*, m^*)_T$ następującej postaci. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki ($|T| \leq 1/a$), to

$$s^*(t) = 0, \quad m^*(t) = m^0$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. W pozostałych przypadkach ($|T| > 1/a$):

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0 e^{a(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ m^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

¹¹ Por. np. R. Kulikowski [28] s.174-177.

gdzie $\tau = t_1 - 1/a$. Podobnie jak poprzednio długość fazy konsumpcyjnej nie zależy od długości całego horyzontu czasu T . Im dłuższy będzie horyzont czasu T , tym dłuższa będzie faza inwestycyjna.

4.3. Ciągłość trajektorii inwestycji i konsumpcji – drugie zadanie sterowania optymalnego¹²

W optymalnym procesie wzrostu otrzymanym w poprzednim punkcie funkcja udziału inwestycji w dochodzie narodowym – sterowanie s_T^* , a tym samym optymalna trajektoria inwestycji i_T^* i konsumpcji c_T^* , były nieciągłe, pomijając mało ciekawy przypadek krótkiego horyzontu czasu, kiedy $s^*(t) = 0$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Funkcja udziału inwestycji w dochodzie narodowym przyjmowała przy tym tylko skrajne wartości 0 lub 1. O nierealności takiego rozwiązania pisaliśmy na poprzednich stronach. Nie wątpliwie bardziej realny byłby taki proces wzrostu, który opisywałyby ciągle i dostatecznie gładkie trajektorie inwestycji i konsumpcji. Ciągłe byłyby wtedy również funkcje s_T udziału inwestycji w dochodzie narodowym. Nie mogłyby one być jednak „sterami” w rozumieniu teorii sterowania optymalnego. Przypisując im rolę „sterów”, przesadzamy o bardzo ważnej właściwości tych funkcji, a mianowicie, że mogą one być nie tylko funkcjami ciągłymi, lecz także przedziałami ciągłymi. Jeżeli z ekonomicznego punktu widzenia pożądaną jest jednak, aby udział inwestycji w dochodzie narodowym opisywały funkcje dostatecznie gładkie, np. ciągle i przedziałami różniczkovalne, to funkcję s_T należy potraktować jako kolejną współrzędną trajektorii stanów wewnętrznych systemu, przypisując rolę sterowania takim funkcjom, wprowadzonym dodatkowo i mającym określoną interpretację ekonomiczną, których ewentualna nieciągłość nie budziłaby zastrzeżeń. Można dokonać tego wieloma sposobami. Jeden z nich przedstawimy dalej, dokonując prostej modyfikacji układu warunków (4.1) – (4.5). Mówiąc o rozwiązaniu optymalnym, mamy na myśli proces optymalny z punktu widzenia pewnego ustalonego kryterium i spełniający dany układ założeń. Proces optymalny w zadaniu, w którym, dzięki dodatkowym założeniom, wszystkie dopuszczalne funkcje udziału inwestycji w dochodzie narodowym (a tym samym trajektorie inwestycji i konsumpcji) będą ciągle, nie będzie z reguły procesem optymalnym w zadaniu, w którym funkcje te mogą być przedziałami ciągłe. Procesy te wywodzą się bowiem z odmiennych założeń.

4.3.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Zależy nam na tym, aby w sposób możliwie prosty przedstawić ideę przejścia od zadania (4.12) – (4.13) do zadania z ciągłymi trajektoriami

¹² Prostsza wersja tego zadania była przedstawiona w artykule [37].

inwestycji i konsumpcji. Dlatego też dla prostoty będziemy dalej zakładać, że efektywność majątku produkcyjnego nie zmienia się w czasie.

▼ Z a ł o ż e n i e 4.1: $a(t) = a = \text{const.} > 0$. ▼

Wzrost majątku produkcyjnego opisuje równanie (por. 4.11)

$$\frac{d}{dt} m(t) = (as(t) - \mu)m(t), \quad (4.20)$$

którego rozwiązaniem, przy dodatniej wielkości majątku produkcyjnego m^0 w momencie początkowym t_0 i dowolnej całkowlanej funkcji s_T udziału inwestycji w dochodzie narodowym, jest dodatnia trajektoria majątku produkcyjnego m_T . Zgodnie z (4.2) odpowiada jej dodatnia trajektoria dochodu narodowego y_T .

W odróżnieniu od zadania (4.12) - (4.13), w którym funkcje udziału inwestycji w dochodzie narodowym, a więc także trajektorie inwestycji, mogły być przedziałami ciągle, ograniczymy się obecnie tylko do funkcji ciągłych i przynajmniej przedziałami różniczkowalnych (z klasy $\tilde{C}^1[T]$).

Różniczkując równanie (4.6) (wszędzie, poza co najwyżej skończoną liczbą punktów) i pamiętając, że $y(t) > 0$ we wszystkich momentach czasu $t \in T$, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} s(t) = \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} i(t) - as^2(t) + \mu s(t). \quad (4.21)$$

Z własności trajektorii i_T wynika, że funkcja $h_T = \{(t, h(t)), t \in T\}$ gdzie

$$h(t) = \frac{d}{dt} i(t), \quad (4.22)$$

jest przedziałami ciągła na T (dokładniej, z $i \in \tilde{C}^1[T]$ wynika, że $h \in \tilde{C}^0[T]$). Charakteryzuje ona przyrost wielkości inwestycji w momencie czasu t ¹³. Pamiętając, że $a(t) = a = \text{const.}$, z (4.2), (4.21) otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt} s(t) = \frac{1}{am(t)} h(t) - as^2(t) + \mu s(t), \quad (4.23)$$

którego prawa strona jest funkcją przedziałami ciągłą na T wszędzie, poza co najwyżej skończoną liczbą punktów nieciągłości funkcji h_T . Przyjmijmy, że funkcja h_T jest ograniczona,

$$h(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad (4.24)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest górną, natomiast $-\varepsilon$ - dolną granicą przyrostu inwestycji (dla prostoty zakładamy, że są one stałe w czasie i równe co do wartości bezwzględnej) i ustalmy początkowy udział inwestycji w dochodzie narodowym

¹³ Ścisłej: przyspieszenie prędkości narastania strumienia inwestycji. Ponieważ $i(t)$ ma wymiar: $z\dot{l}/R$, zatem $h(t)$ ma wymiar: $z\dot{l}/R^2$.

$$s(t_0) = s^0 \in (0,1) . \quad (4.25)$$

Pozostając przy kryterium maksymalizacji konsumpcji w horyzoncie czasu T , możemy obecnie zagadnienie optymalnego podziału dochodu narodowego zapisać w postaci następującego zadania sterowania optymalnego:¹⁴

$$\max \int_T a(1-s(t)) m(t) dt, \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dt} m(t) = (as(t) - \mu)m(t),$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \frac{1}{am(t)} h(t) - as'(t) + \mu s(t), \quad (4.27)$$

$$h(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] , \quad h \in \bar{C}^0[T] ,$$

$$(m(t_0), s(t_0)) = (m^0, s^0) .$$

($m^0 > 0, s^0 \in (0,1)$). Rolę sterowania w zadaniu tym pełni funkcja h_T . Zbiorem sterowań jest przedział $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Dopuszczalnymi trajektoriami sterowań są wszystkie funkcje skalarne h_T z klasy funkcji $\bar{C}^0[T]$ z wartościami w przedziale $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Funkcja udziału inwestycji w dochodzie narodowym s_T jest drugą, obok trajektorii majątku produkcyjnego m_T , współrzędną trajektorii stanów wewnętrznych. Przekształcenie stanów wewnętrznych opisuje para równań (4.20), (4.23). Przekształceniem wyjścia jest funkcja podcałkowa w (4.26), stanem wyjścia w momencie czasu t - wielkość konsumpcji $c(t)$. Dopuszczalny proces wzrostu tworzy trójka funkcji $(h, m, s)_T$ spełniająca warunki (4.27). Jeżeli $(h, m, s)_T$ jest procesem dopuszczalnym w zadaniu (4.26) - (4.27), to para $(m, s)_T$ jest procesem dopuszczalnym w zadaniu (4.12) - (4.13) (ale nie odwrotnie). Optymalnym jest proces dopuszczalny $(h^*, m^*, s^*)_T$ maksymalizujący wartość funkcjonału (4.26).

Za realne można uznać rozwiązania zadania (4.26) - (4.27) z dodatnim i mniejszym od jedności udziałem inwestycji w dochodzie narodowym. Warunki te zachodzą, gdy

∇ Z a ł o ż e n i e 4.3. Maksymalny przyrost inwestycji ε spełnia warunki: (i) $\varepsilon \leq dy(t)/dt \Big|_{t=t_0}$ (nie może przekraczać przyrostu dochodu narodowego w momencie początkowym t_0), (ii) $\varepsilon < \mu(a-\mu)s^0 m^0$. ∇

Jeżeli spełnione jest to założenie, wówczas spełnione jest także założenie 4.2. Zadanie (4.26) - (4.27) można rozwiązać bezpośrednio, korzystając z odpowiednich twierdzeń o warunkach optymalności przedstawionych w paragrafie 3. Znacznie łatwiej jednak otrzymać jego rozwiązanie po uprzednim sprowadzeniu go do następującej postaci równoważnej:

¹⁴ W układzie (4.27) wszystkie trajektorie majątku produkcyjnego są dodatnie, dlatego usprawiedliwione jest korzystanie z odpowiednich twierdzeń o warunkach optymalności przedstawionych w paragrafie 3, pomimo nieciągłości prawej strony układu równań (4.27) w punkcie $m=0$.

$$\max_T \int (am(t) - i(t)) dt, \quad (4.26')$$

$$\frac{d}{dt} m(t) = i(t) - \mu m(t),$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = h(t), \quad (4.27')$$

$$h(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad h \in \tilde{C}^0[T],$$

$$(m(t_0), i(t_0)) = (m^0, i^0),$$

gdzie $i^0 = am^0 s^0 > 0$, którą otrzymujemy zważywszy na (4.2), (4.5), (4.6). Trajektorią stanów wewnętrznych systemu w tym zadaniu jest funkcja wektorowa $(m, i)_T$. Jej pierwszą współrzędną jest trajektoria majątku produkcyjnego, drugą - trajektoria inwestycji. Sterowaniem, tak jak w zadaniu (4.26) - (4.27), jest funkcja h_T . Dopuszczalny proces wzrostu tworzy każda trójka funkcji $(h, m, i)_T$ spełniająca warunki (4.27'). Jeżeli proces $(h^*, m^*, i^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (4.26'), (4.27'), to proces $(h^*, m^*, s^*)_T$, w którym $s^*(t) = i^*(t)/am^*(t)$ będzie rozwiązaniem wyjściowego zadania (4.26) - (4.27).

Twierdzenie 4.3.¹⁵ Rozwiązaniem zadania (4.26') - (4.27') przy założeniu 4.3 jest proces $(h^*, m^*, i^*)_T$:

$$h^*(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ -\varepsilon & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$m^*(t) = \begin{cases} (m^0 - d^0)e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + d^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (m^*(\tau) - d(\tau))e^{-\mu(t-\tau)} - \frac{\varepsilon}{\mu}(t-\tau) + d(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$i^*(t) = \begin{cases} i^0 + \varepsilon(t-t_0) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ i^*(\tau) - \varepsilon(t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $d^0 = (i^0/\mu) - (\varepsilon/\mu^2) > 0$, $d(\tau) = (i^*(\tau)/\mu) + (\varepsilon/\mu^2) > 0$.

Jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi (wystarczy, by $|T| > \theta = \frac{\varepsilon}{\mu} / (a - \mu)$), wtedy $\tau \in \text{int } T$, $t_1 - \tau < \theta$. W krótkim horyzoncie czasu ($|T| \leq \theta$) moment $T = t_0$ i proces optymalny redukuje się do postaci

$$h^*(t) = -\varepsilon,$$

$$m^*(t) = (m^0 - d(t_0))e^{-\mu(t-t_0)} - \frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + d(t_0),$$

¹⁵ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.3
s. 228.

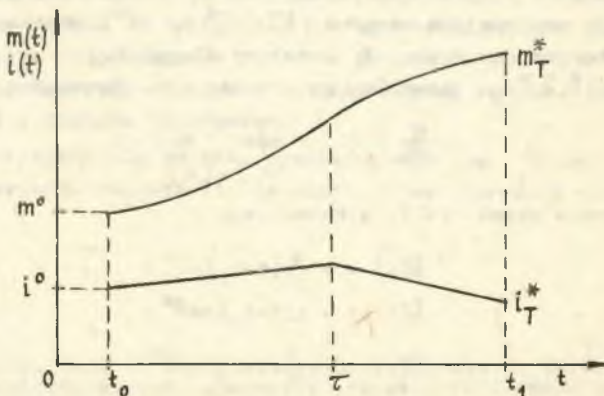
$$i^*(t) = i^0 - \xi(t - t_0)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $d(t_0) = d(\tau)$ dla $\tau = t_0$. ■

4.3.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie wyjściowego zadania (4.26) - (4.27) otrzymujemy, przyjmując $s^*(t) = i^*(t)/am^*(t)$. Można sprawdzić, że przy założeniu 4.3 $s^*(t) \in (0,1)$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Optymalną trajektorię dochodu narodowego y_T^* i konsumpcji c_T^* otrzymujemy z (4.2), (4.5) pamiętając, że w zadaniu (4.26) - (4.27) $a(t) = a = \text{const}$.

Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy maksymalną wielkość konsumpcji osiągniemy ograniczając inwestycje. Inwestycje w całym horyzoncie czasu maleją (liniowo), czemu towarzyszy gwałtowny wzrost majątku produkcyjnego, dochodu narodowego i konsumpcji. Zmniejsza się udział inwestycji w dochodzie. W długim horyzoncie czasu obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej, inwestycyjnej, ma miejsce (liniowy) wzrost inwestycji powodujący wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego. Inwestycje rosną wolniej niż dochód, a więc rośnie konsumpcja. Przy wysokim wyjściowym poziomie majątku produkcyjnego ($m^0 > d^0$) obserwujemy jego wzrost przyspieszony, a więc także przyspieszony wzrost dochodu, przy niskim - majątek i dochód rosną coraz wolniej. Jeżeli $m^0 = d^0$, wtedy majątek i dochód rosną w tej fazie liniowo. W fazie drugiej, konsumpcyjnej, następuje spadek inwestycji (liniowy), wskutek czego wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego jest coraz wolniejszy. Obserwujemy znaczny, choć malejący trend do wygasania pod koniec horyzontu wzrost konsumpcji. Długość fazy konsumpcyjnej jest zawsze ograniczona. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy inwestycyjnej. Trajektorie majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji są w horyzoncie czasu T ciągłe i wszędzie, poza momentem τ „przełączenia” sterowania h_T^* , gładkie (różniczkowalne, rys.4.3).



Rys.4.3. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego i inwestycji - rozwiązanie zadania (4.26') - (4.27') w długim horyzoncie czasu

To, że sterowanie optymalne jest w pewnym punkcie nieciągłe, nie powinno budzić tym razem zastrzeżeń. O ile rozwiązanie zadania (4.12) - (4.13) trudno uznać z ekonomicznego punktu widzenia za dopuszczalne, o tyle rozwiązanie tego zadania jest bardziej realne. Jednoczynnikowy model wzrostu jest jednak tak uproszczonym obrazem gospodarki, że możemy mówić tylko o pewnej jakościowej zgodności otrzymanego rozwiązania z przebiegiem procesów wzrostu w realnej gospodarce.

4.3.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy dwa typy procesów wzrostu spełniających warunki (4.27') z wyjątkiem warunku początkowego $m(t_0) = m^0$ w takiej \mathcal{G} -równowadze, w której stałe są przyrosty majątku produkcyjnego i inwestycji:

$$\mathcal{G}(m, i, c) = \left(\frac{d}{dt} m, \frac{d}{dt} i \right) = \text{const.}$$

(A) Przez $(\bar{h}, \bar{m}, \bar{I})_T$ oznaczymy procesy, w których

$$\frac{d}{dt} \bar{I}(t) = \bar{h}(t) = \max_{h \in [-\varepsilon, \varepsilon]} h = \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Zważywszy, że w procesach tych winien być ponadto spełniony warunek $d\bar{m}(t)/dt = \text{const.}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + \bar{m}^0, \\ \bar{I}(t) &= \varepsilon(t-t_0) + \bar{I}^0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

a ponadto

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \frac{a\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + a\bar{m}^0, \\ \bar{c}(t) &= \varepsilon\left(\frac{a}{\mu} - 1\right)(t-t_0) + a\bar{m}^0 - \bar{I}^0, \end{aligned}$$

gdzie \bar{m}^0 jest wielkością majątku produkcyjnego w momencie początkowym t_0 spełniającą warunek $\bar{m}^0 = (\bar{I}^0/\mu) - (\varepsilon/\mu^2) > 0$; \bar{I}^0 - dodatnia początkowa wielkość inwestycji spełniająca warunek $\bar{I}^0 < \bar{y}^0 (= a\bar{m}^0)$. Procesy takie są określone na horyzoncie czasu T dowolnej długości.

(B) Przez $(\bar{h}, \bar{m}, \bar{I})_T$ oznaczymy te procesy w \mathcal{G} -równowadze, w których

$$\frac{d}{dt} \bar{I}(t) = \min_{h \in [-\varepsilon, \varepsilon]} h = -\varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, a wobec tego

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= -\frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + \bar{m}^0, \\ \bar{I}(t) &= -\varepsilon(t-t_0) + \bar{I}^0, \\ \bar{y}(t) &= -\frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + a\bar{m}^0, \\ \bar{c}(t) &= -\varepsilon\left(\frac{a}{\mu} - 1\right)(t-t_0) + a\bar{m}^0 - \bar{I}^0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie \bar{m}^0 jest początkową wielkością majątku produkcyjnego spełniającą

warunek $\bar{m}^0 = (\bar{i}^0/\mu) + (\varepsilon/\mu^2) > 0$, \bar{i}^0 - początkową wielkością inwestycji ($0 < \bar{i}^0 < \bar{y}^0$; $\bar{y}^0 = a\bar{m}^0$), przy czym procesy te są określone w krótkich horyzontach czasu: $|T| < \bar{i}^0/\varepsilon$.

W obu przypadkach otrzymaliśmy procesy liniowe, co jest zrozumiałe zwłaszcza, że opisują one wzrost gospodarki w takiej równowadze, w której stałe są przyrosty (pochodne) opisujących ją zmiennych ekonomicznych. Jeżeli przyjrzymy się rozwiązaniu zadania (4.26') - (4.27'), to zauważymy, że optymalna trajektoria majątku m_T^* w pierwszej fazie wzrostu zbliża się do trajektorii majątku produkcyjnego \bar{m}_T postaci (4.28) w G -równowadze typu (A) wychodzącej w momencie początkowym t_0 ze stanu $\bar{m}^0 =$

$= (i^0/\mu) - (\varepsilon/\mu^2) > 0$, gdzie i^0 jest początkową wielkością inwestycji w zadaniu (4.26') - (4.27'). Zbieżność ta jest tym wyraźniejsza, im dłuższy jest horyzont czasu T (rys. 4.4). W całym horyzoncie czasu obserwujemy natomiast zbieżność średnich stóp wzrostu obu tych trajektorii. Dokładniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

□ T w i e r d z e n i e 4.4.¹⁶ (i) Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że dla każdego horyzontu czasu $T = [t_0, t_1]$ o długości $|T| > 2\theta_\varepsilon$

$$|m^*(t) - \bar{m}(t)| \leq \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie m_T^* jest optymalną trajektorią majątku produkcyjnego w zadaniu (4.26') - (4.27'), a \bar{m}_T - trajektorią majątku produkcyjnego w G -równowadze typu (A) z warunkiem początkowym $\bar{m}(t_0) = (i^0/\mu) - (\varepsilon/\mu^2)$ (i^0 - początkowa wielkość inwestycji w zadaniu (4.26') - (4.27')).

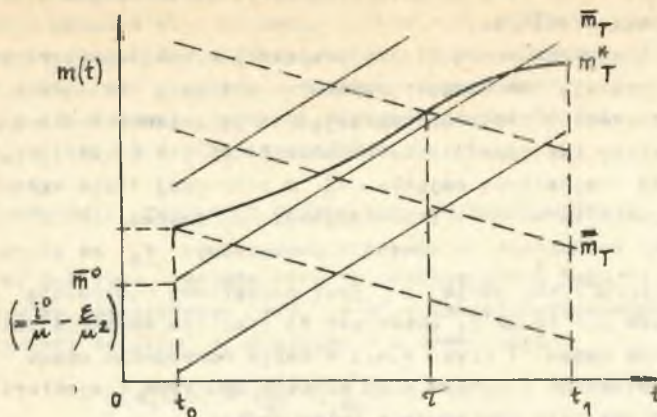
(ii) Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica $|\delta_{m_T}^* - \delta_{\bar{m}_T}|$ średnich stóp wzrostu majątku produkcyjnego w procesie optymalnym i w G -równowadze maleje asymptotycznie do zera. ■

W ekonomii matematycznej twierdzenia typu 4.4 (i) noszą nazwę twierdzeń „o magistrali”. W naszym przypadku magistralą, do której w środkowym okresie horyzontu T przybliża się optymalna trajektoria majątku produkcyjnego, jest trajektoria w jednym z procesów wzrostu w G -równowadze typu (A). W tym okresie w gospodarce obserwujemy szybki wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego.

Optymalna trajektoria majątku produkcyjnego tym dłużej pozostaje w bliskim otoczeniu magistrali, im dłuższy jest horyzont czasu T . W po-

¹⁶ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.4 s. 230. Analogiczne warunki spełniają trajektorie dochodu narodowego y_T^* , \bar{y}_T .

czątkowej fazie wzrostu następuje jej wejście w otoczenie magistrali, w końcowej - wyjście z otoczenia magistrali¹⁷.



Rys.4.4. Trajektorie majątku produkcyjnego w \mathcal{G} -równowagach oraz optymalna trajektoria majątku w długim horyzoncie czasu

4.4. Przypadek, kiedy wzrost inwestycji zależy od wzrostu dochodu narodowego

W zadaniu (4.12) - (4.13) zakładaliśmy tylko, że (nieujemne) inwestycje nie mogą przekraczać dochodu narodowego. Trajektorie inwestycji mogły być funkcjami przedziałami ciągłymi. W kolejnych zadaniach (4.26) - (4.27), (4.26') - (4.27') ograniczyliśmy klasę trajektorii do ciągłych, przedziałami różniczkowalnych funkcji o ograniczonej pochodnej (ograniczonym wahaniu), co w interpretacji ekonomicznej odpowiadało założeniu o ograniczonych przyrostach (spadkach) inwestycji we wszystkich momentach horyzontu czasu T . Zarówno maksymalny przyrost, jak i spadek inwestycji nie zmieniały się w czasie, ani nie zależały od wartości innych zmiennych. Obecnie zbadamy bliżej sytuację, kiedy (a) trajektorie inwestycji są funkcjami ciągłymi, przedziałami różniczkowalnymi na T , podobnie jak w dwóch poprzednich zadaniach, (b) inwestycje mogą rosnąć nie szybciej niż dochód narodowy i nie wolniej, niż część majątku produkcyjnego wycofywanego z eksploatacji, tzn.

¹⁷ W punkcie 4.2.3 faktycznie też obserwowaliśmy podobną „lokalną” zbieżność optymalnej trajektorii majątku m_T^* z trajektorią majątku \bar{m}_T w \mathcal{G} -równowadze: trajektorie te były po prostu tożsame w fazie inwestycyjnej (w fazie tej optymalna trajektoria majątku leżała na jednej z trajektorii majątku w \mathcal{G} -równowadze typu (A)).

W drugiej, konsumpcyjnej, fazie wzrostu optymalna trajektoria majątku wychodzi z otoczenia magistrali, wykazując tendencję do zbliżania się do jednej z trajektorii majątku w \mathcal{G} -równowadze typu (B). Nie jest to jednak zbieżność tego typu, o której mowa w twierdzeniu 4.4 (1), ponieważ długość drugiej fazy wzrostu jest zawsze ograniczona i niezależna od długości całego horyzontu T .

▼ Zał o ż e n i e 4.4. $\mu \frac{d}{dt} m(t) \leq \frac{d}{dt} i(t) \leq \frac{d}{dt} y(t)$ w każdym momencie czasu $t \in T$ ¹⁸. ▼

Zakładamy, podobnie jak w punkcie 4.3., że efektywność majątku produkcyjnego w horyzoncie czasu T jest stała. Wzrost majątku produkcyjnego, dochodu narodowego i konsumpcji opisuje układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(t) &= i(t) - \mu m(t), \\ y(t) &= a m(t), \\ c(t) &= y(t) - i(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Czytelnik zauważy, że założenie 4.4 można zastąpić warunkiem

$$0 \leq \frac{d}{dt} c(t) \leq \left(1 - \frac{\mu}{a}\right) \frac{d}{dt} y(t)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Jak więc w całym horyzoncie czasu T konsumpcja nie może maleć ani też rosnąć szybciej niż dochód narodowy pozostający po odliczeniu inwestycji niezbędnych dla odtworzenia zużytego majątku produkcyjnego ($(\mu/a)y(t) = \mu m(t)$ jest wielkością majątku produkcyjnego wycofywanego z eksploatacji w momencie czasu t). Zamiast założenia 4.3 wystarczy słabsze

▼ Zał o ż e n i e 4.3'. $i^0 > \mu m^0$ (i^0, m^0 - wielkość inwestycji i majątku produkcyjnego w momencie początkowym, $a m^0 > i^0 > 0$). ▼

Zakładamy tym samym, że w momencie początkowym inwestycje przekraczają wielkość wycofywanej z eksploatacji części majątku lub inaczej, że w momencie początkowym gospodarka dysponuje dodatnimi inwestycjami netto. Założenie 4.3' można zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$c^0 < \left(1 - \frac{\mu}{a}\right) y^0,$$

gdzie $c^0 = y^0 - i^0 > 0$. Założenie 4.3' pociąga za sobą założenie 4.2.

4.4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Uwzględniając układ równań (4.30) oraz założenie 4.4, otrzymujemy zadanie maksymalizacji konsumpcji w horyzoncie czasu T :

$$\max_T \int (a m(t) - i(t)) dt, \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} m(t) = i(t) - \mu m(t),$$

¹⁸ W punkcie τ , w którym pochodna trajektorii $i \in \tilde{C}^1 [T]$ jest nieokreślona przyjmujemy $di(t)/dt|_{t=\tau} = \lim_{t \rightarrow \tau+0} di(t)/dt$. Uwaga ta dotyczy

wszystkich funkcji z klasy $\tilde{C}^1 [T]$, o których będzie mowa dalej.

$$\mu \frac{d}{dt} m(t) \leq \frac{d}{dt} i(t) \leq a \frac{d}{dt} m(t), \quad i \in \tilde{C}^1 [T], \quad (4.32)$$

$$(m(t_0), i(t_0)) = (m^0, i^0).$$

($am^0 > i^0 > \mu m^0 > 0$). Po wprowadzeniu zmiennej $y(t)$ (zgodnie z (4.30)) otrzymujemy następujące zadanie równoważne:

$$\max_T \int (y(t) - i(t)) dt, \quad (4.31')$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = ai(t) - \mu y(t),$$

$$\frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) \leq \frac{d}{dt} i(t) \leq \frac{d}{dt} y(t), \quad i \in \tilde{C}^1 [T], \quad (4.32')$$

$$(y(t_0), i(t_0)) = (y^0, i^0)$$

($y^0 = am^0 > i^0 > (\mu/a)y^0 > 0$). Przy założeniu 4.3' układ warunków (4.32') jest niesprzeczny. Spełnia go np. para funkcji $(i, y)_T$:

$$i(t) = y(t) - c^0,$$

$$y(t) = [y^0 - ac^0 / (a - \mu)] e^{(a - \mu)(t - t_0)} + ac^0 / (a - \mu),$$

gdzie $c^0 = y^0 - i^0$. Zadanie (4.31') - (4.32') nie jest jednak zadaniem tej postaci, z jakimi zapoznaliśmy się w paragrafie 3. Trajektoria inwestycji spełnia w nim warunki typu nierówności i wobec tego nie stosują się do niego przedstawiane tam twierdzenia o optymalności. Aby móc zastosować odpowiednie twierdzenie musimy przedstawić je w postaci standardowej.

4.4.2. POSTAĆ STANDARDOWA ZADANIA (4.31') - (4.32')

W celu sformułowania zadania sterowania optymalnego w postaci standardowej równoważnego z (4.31') - (4.32'), skorzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.5.¹⁹ Przy założeniu (4.3'): (i) wszystkie procesy wzrostu $(i, y)_T$ w układzie (4.32') są rosnące, (ii) warunek

$$\frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) \leq \frac{d}{dt} i(t) \leq \frac{d}{dt} y(t)$$

jest równoważny z następującym:

$$\frac{d}{dt} i(t) = \alpha(t) [ai(t) - \mu y(t)],$$

$$\alpha(t) \in \left[\frac{\mu}{a}, 1 \right], \quad \alpha \in \tilde{C}^0 [T]. \blacksquare$$

¹⁹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.5 s. 231.

Na podstawie tego twierdzenia zadanie (4.31') - (4.32') jest równoważne z następującym zadaniem sterowania optymalnego:

$$\max_T \int (y(t) - i(t)) dt, \quad (4.31'')$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = ai(t) - \mu y(t),$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = \alpha(t) [ai(t) - \mu y(t)], \quad (4.32'')$$

$$\alpha(t) \in \left[\frac{\mu}{a}, 1 \right], \quad \alpha \in \tilde{C}^0[T],$$

$$(y(t_0), i(t_0)) = (y^0, i^0)$$

($y^0 > i^0 > (\mu/a)y^0 > 0$). Rolę sterowania w zadaniu tym pełni funkcja $\alpha_T = \{(t, \alpha(t)), t \in T\}$ ($\alpha(t)$ oznacza stosunek przyrostu inwestycji do przyrostu dochodu narodowego w momencie czasu t). Zbiorem sterowań dopuszczalnych jest przedział $[\mu/a, 1]$. Para równań różniczkowych w (4.32'') opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych (dochodu i inwestycji) gładkiego dwuwymiarowego systemu dynamicznego, funkcja podcałkowa w (4.31'') jest jego przekształceniem wyjścia (stanem wyjścia w momencie czasu t jest konsumpcja $c(t) = y(t) - i(t)$). Dopuszczalny proces wzrostu tworzy każda trójka $(\alpha, i, y)_T$ spełniająca warunki (4.32''). Optymalnym procesem wzrostu jest proces dopuszczalny dający maksymalną wielkość konsumpcji w horyzoncie czasu T . Zadania (4.31') - (4.32') i (4.31'') - (4.32'') są równoważne w tym sensie, że (a) jeżeli proces $(\alpha^*, i^*, y^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.31'') - (4.32''), to para $(y^*, i^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.31') - (4.32'), (b) jeżeli para $(y^*, i^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.31') - (4.32'), to znajdzie się (dokładnie jedna) taka funkcja $\alpha^*: T \rightarrow [\mu/a, 1]$, $\alpha^* \in \tilde{C}^0[T]$, że trójka $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (4.31'') - (4.32'').

Twierdzenie 4.6.²⁰ Rozwiązaniem zadania (4.31'') - (4.32'') przy założeniu 4.3' jest proces $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ \frac{\mu}{a} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$y^*(t) = \begin{cases} (y^0 - ad^0)e^{(a-\mu)(t-t_0)} + ad^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ y^*(\tau) + [(a-\mu)y^*(\tau) - ac^0](t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$i^*(t) = \begin{cases} (i^0 - \mu d^0)e^{(a-\mu)(t-t_0)} + d^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ i^*(\tau) + \frac{\mu}{a}[(a-\mu)i^*(\tau) - \mu c^0](t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

²⁰ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.6 s. 232.

gdzie $d^0 = c^0 / (a - \mu) > 0$, $c^0 = y^0 - i^0 > 0$ oraz $y^0 > ad^0$, $i^0 > ud^0$.

Jeżeli horyzont czasu T jest długi ($|T| > \theta = 2 / (a - \mu)$), wówczas $T = t_1 - \theta > t_0$. W krótkim horyzoncie czasu ($|T| \leq \theta$) $T = t_0$ i optymalny proces $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$ redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = \frac{\mu}{a},$$

$$y^*(t) = y^0 + [(a - \mu)y^0 - ac^0](t - t_0),$$

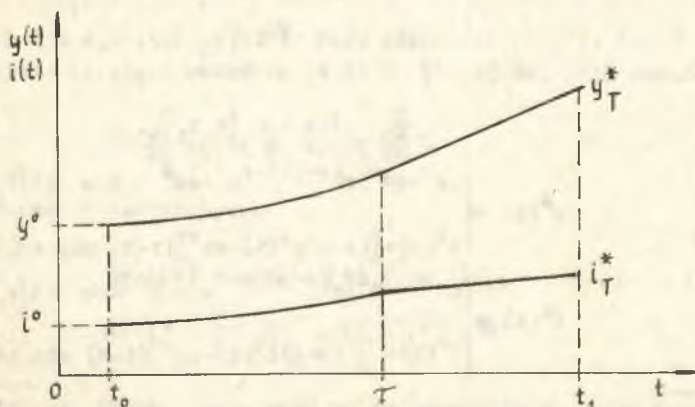
$$i^*(t) = i^0 + \frac{\mu}{a} [(a - \mu)i^0 - \mu c^0](t - t_0)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. ■

4.4.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego m_T^* i konsumpcji c_T^* otrzymujemy na podstawie (4.30). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy dochód narodowy, inwestycje, majątek produkcyjny i konsumpcja rosną liniowo. W długim horyzoncie czasu pojawiają się dwie fazy wzrostu. W pierwszej, inwestycyjnej, obserwujemy przyspieszony wzrost inwestycji powodujący szybki wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego. Konsumpcja utrzymuje się w tej fazie na wyjściowym poziomie c^0 . W fazie drugiej - konsumpcyjnej - zostaje znacznie zahamowany wzrost inwestycji (do liniowego). Towarzyszy mu liniowy (szybszy) wzrost majątku produkcyjnego oraz dochodu narodowego. Konsumpcja rośnie liniowo. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy inwestycyjnej (rys.4.5).

W całym horyzoncie czasu T majątek produkcyjny, dochód narodowy i inwestycje rosną. Optymalna trajektoria konsumpcji jest funkcją stałą w pierwszej - inwestycyjnej - fazie wzrostu i rosnącą liniowo w fazie konsumpcyjnej. Trajektorie majątku produkcyjnego i dochodu narodowego są



Rys.4.5. Optymalne trajektorie dochodu narodowego i inwestycji - rozwiązanie zadania (4.31'') - (4.32'') w długim horyzoncie czasu

funkcjami ciągłymi i wszędzie różniczkowalnymi. Trajektorie inwestycji i konsumpcji są funkcjami ciągłymi i przedziałami różniczkowalnymi. Łatwo zauważyć, że funkcja s_T^* udziału inwestycji w dochodzie narodowym jest także ciągła i przedziałami różniczkowalna. W pierwszej fazie udział ten rośnie, w drugiej - maleje. Otrzymany proces jest zasadniczo zgodny z naszym wyobrażeniem o wzroście, co należy przypisać dodatkowym założeniom o relacjach między inwestycjami i dochodem, których nie postulowaliśmy w zadaniu (4.12) - (4.13). Jest to kolejna modyfikacja wyjściowego układu (4.1) - (4.5) umożliwiająca otrzymanie rozwiązania zadania sterowania optymalnego wzrostem zgodnego z naszą wiedzą o wzroście gospodarczym.

4.4.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy dwa typy procesów wzrostu $(\bar{\alpha}, \bar{y}, \bar{i})_T$, $(\bar{\alpha}, \bar{y}, \bar{i})_T$ gospodarki w G-równowadze ze stałymi przyrostami konsumpcji (stanu wyjścia):

$$G(y, i, c) = \frac{d}{dt} c = \text{const.} \quad (= \frac{d}{dt} y - \frac{d}{dt} i).$$

(A) W procesie $(\bar{\alpha}, \bar{y}, \bar{i})_T$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{c}(t) &= \frac{d}{dt} \bar{y}(t) - \frac{d}{dt} \bar{i}(t) = (1 - \bar{\alpha}(t)) [a\bar{i}(t) - \mu\bar{y}(t)] = \\ &= \min (1 - \alpha) [a\bar{i}(t) - \mu\bar{y}(t)] = 0, \\ \alpha &\in \left[\frac{\mu}{a}, 1 \right] \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= [\bar{y}^0 - a\bar{c}^0/(a-\mu)] e^{(a-\mu)(t-t_0)} + a\bar{c}^0/(a-\mu), \\ \bar{i}(t) &= [\bar{i}^0 - \mu\bar{c}^0/(a-\mu)] e^{(a-\mu)(t-t_0)} + \mu\bar{c}^0/(a-\mu), \\ \bar{c}(t) &= \bar{c}^0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

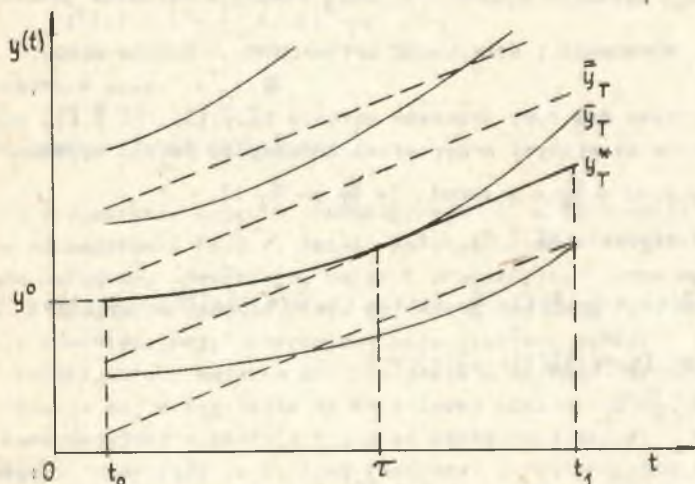
w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\bar{c}^0 = \bar{y}^0 - \bar{i}^0$; \bar{y}^0, \bar{i}^0 - dowolne początkowe wielkości dochodu narodowego i inwestycji spełniające warunki $\bar{y}^0 - \bar{i}^0 > 0$, $\bar{y}^0 > a\bar{c}^0/(a-\mu)$, $\bar{i}^0 > \mu\bar{c}^0/(a-\mu)$.

(B) W procesie $(\bar{\alpha}, \bar{y}, \bar{i})_T$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{c}(t) &= \frac{d}{dt} \bar{y}(t) - \frac{d}{dt} \bar{i}(t) = \\ &= (1 - \bar{\alpha}(t)) [a\bar{i}(t) - \mu\bar{y}(t)] = \max (1 - \alpha) [a\bar{i}(t) - \mu\bar{y}(t)] = \\ &\quad \alpha \in \left[\frac{\mu}{a}, 1 \right] \\ &= (1 - \frac{\mu}{a}) [a\bar{i}(t) - \mu\bar{y}(t)] = \text{const.}, \\ \bar{y}(t) &= \bar{y}^0 + [(a-\mu)\bar{y}^0 - a\bar{c}^0](t-t_0), \\ \bar{i}(t) &= \bar{i}^0 + \frac{\mu}{a} [(a-\mu)\bar{i}^0 - \mu\bar{c}^0](t-t_0), \\ \bar{c}(t) &= \bar{y}^0 - \bar{i}^0 + (1 - \frac{\mu}{a}) [(a-\mu)\bar{y}^0 - a\bar{c}^0](t-t_0) \end{aligned} \quad (4.34)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\bar{c}^0 = \bar{y}^0 - \bar{i}^0$; \bar{y}^0, \bar{i}^0 - początkowe wielkości dochodu narodowego i inwestycji spełniające warunki: $\bar{y}^0 - \bar{i}^0 > 0$, $\bar{y}^0 > \mu \bar{c}^0 / (a - \mu)$, $\bar{i}^0 > \mu \bar{c}^0 / (a - \mu)$.

Optymalna trajektoria dochodu narodowego w fazie inwestycyjnej leży na jednej z trajektorii postaci (4.33) w G -równowadze typu (A) - tym dłużej, im dłuższy jest horyzont czasu T . W fazie konsumpcyjnej przechodzi na jedną z trajektorii postaci (4.34) w G -równowadze typu (B) (zob. rys. 4.6). "Efekt magistrali" trywializuje się podobnie jak w zadaniu (4.12) - 4.13).



Rys.4.6. Trajektorie dochodu narodowego w G -równowagach oraz optymalna trajektoria dochodu w długim horyzoncie czasu

Obserwujemy ponadto zbieżność średnich stóp wzrostu dochodu narodowego w optymalnym procesie wzrostu i w G -równowadze typu (A) - ze stałym poziomem konsumpcji.

Twierdzenie 4.7.²¹ Jeżeli długości horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica średnich stóp wzrostu $|\delta_{y_T^*} - \delta_{\bar{y}_T^w}|$ dochodu narodowego w procesie optymalnym i w G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera. ■

²¹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 4, twierdzenie 4.7. Podobny warunek spełniają trajektorie majątku produkcyjnego m_T^*, \bar{m}_T ($m^*(t) = y^*(t)/a$, $\bar{m}(t) = \bar{y}(t)/a$).

§ 5. OPTIMALNY PODZIAŁ DOCHODU NARODOWEGO W JEDNOCZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU UWZGLĘDNIAJĄCYM LICZBĘ LUDNOSCI

5.1. Podstawowe założenia²²

W modelach przedstawionych w poprzednim paragrafie brak założeń o potrzebach społeczeństwa jako konsumenta wytwarzanych dóbr w oddzielnych momentach czasu $t \in T$. Kryterium wzrostu była wprawdzie maksymalizacja konsumpcji w horyzoncie czasu T , ale bez jakichkolwiek specjalnych założeń, które określałyby np. jej minimalny poziom w poszczególnych momentach czasu. Skazane na zagładę byłoby społeczeństwo gotowe przez jakiś czas zrezygnować z konsumpcji na rzecz jej, nawet znacznego, wzrostu w przyszłości, jak to np. sugeruje rozwiązanie zadania (4.12) - (4.13). Co prawda w rozwiązaniach następnych zadań otrzymaliśmy już dodatnią wielkość konsumpcji w całym horyzoncie czasu T , był to jednak tylko efekt „uboczny” pewnych warunków nałożonych na wzrost inwestycji, a nie wynik explicitie sformułowanych założeń o potrzebach konsumpcyjnych społeczeństwa w każdym momencie czasu. Lukę tę wypełnimy obecnie. Nawiązując do poprzedniego paragrafu, rozpatrzmy mianowicie trzy zadania sterowania optymalnego z pewnymi dodatkowymi warunkami dotyczącymi wzrostu konsumpcji w poszczególnych momentach horyzontu czasu T .

Podobnie jak w punkcie 4.4 zakładamy, że efektywność majątku produkcyjnego w całym horyzoncie czasu T jest stała, oraz, że wzrost majątku, dochodu narodowego i konsumpcji opisuje układ równań (por. (4.30))

$$\frac{d}{dt} m(t) = i(t) - \mu m(t), \quad (5.1)$$

$$y(t) = a m(t), \quad (5.2)$$

$$c(t) = y(t) - i(t), \quad (5.3)$$

z którego po przekształceniach otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt} y(t) = (a - \mu)y(t) - c(t) \quad (5.4)$$

uzależniające (przy ustalonych parametrach a, μ) wzrost dochodu narodowego od jego wielkości i wielkości konsumpcji. Wszędzie poza punktem 5.5 zakładamy, że trajektorie konsumpcji c_T są prawie wszędzie ciągłymi funkcjami o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na $\text{int } T$ (funkcjami z klasy $\tilde{C}^0 [T]$).

Założmy, że ludność kraju rośnie ze stopą $\lambda > 0$ (wymiar: $1/R$). Wzrost ludności opisuje wtedy funkcja wykładnicza $l_T = \{(t, l(t)), t \in T\}$:

²² w paragrafie tym nawiązujemy do pracy [38].

$$l(t) = l^0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

gdzie l^0 oznacza liczbę ludności w momencie początkowym t_0 ($l(t)$ - zasób, np. w milionach osób - L). Oznaczmy przez $\tilde{\gamma} > 0$ ustaloną minimalną „normę” konsumpcji na osobę (wymiar: $zł/R \cdot L$). Wówczas na konsumpcję w momencie czasu $t \in T$ należy przeznaczyć część dochodu narodowego nie mniejszą niż $\tilde{\gamma} l^0 \exp\{\lambda(t-t_0)\}$, tzn.

$$\tilde{\gamma} l^0 e^{\lambda(t-t_0)} \leq c(t) \leq y(t). \quad (5.5)$$

Warunki (5.4) - (5.5) wraz z warunkiem początkowym

$$y(t_0) = y^0 > 0 \quad (5.6)$$

tworzą podstawowy układ założeń o wzroście dochodu narodowego i konsumpcji we wszystkich formułowanych w tym paragrafie zadaniach optymalizacyjnych. W dwóch pierwszych zadaniach trajektorie konsumpcji należą do klasy $\tilde{C}^0[T]$ funkcji przedziałami ciągłych z tym, że w drugim zadaniu zakładamy dodatkowo, że stopa wzrostu dochodu narodowego nie może być niższa od stopy wzrostu ludności. W trzecim zadaniu przyjmujemy dodatkowe założenia, przy których trajektorie konsumpcji należą do klasy $\tilde{C}^1[T]$ funkcji ciągłych i przedziałami gładkich.

5.2. Pierwsze zadanie sterowania optymalnego

5.2.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Weźmy dowolną trajektorię konsumpcji c_T . Znając liczbę ludności l^0 w momencie początkowym t_0 oraz stopę jej wzrostu $\lambda > 0$, możemy obliczyć łączną wielkość konsumpcji przypadającej średnio na osobę $\Phi(c_T)$ w całym horyzoncie czasu T :

$$\Phi(c_T) = \frac{1}{l_0} \int_T c(t) e^{-\lambda(t-t_0)} dt. \quad (5.7)$$

Interesuje nas optymalny z punktu widzenia kryterium (5.7) wzrost konsumpcji w horyzoncie czasu T w klasie $\tilde{C}^0[T]$ trajektorii c_T , tzn. rozwiązanie zadania

$$\max \frac{1}{l_0} \int_T c(t) e^{-\lambda(t-t_0)} dt \quad (5.8)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = (a-\mu)y(t) - ac(t),$$

$$\tilde{\gamma} l^0 e^{\lambda(t-t_0)} \leq c(t) \leq y(t), \quad c \in \tilde{C}^0[T], \quad (5.9)$$

$$y(t_0) = y^0 .$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$q(t) = \frac{1}{l^0} e^{-\lambda(t-t_0)} y(t) \quad \text{- dochód narodowy na osobę (wymiar: zł/RL),}$$

$$(5.10)$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{l^0} e^{-\lambda(t-t_0)} c(t) \quad \text{- konsumpcja na osobę (wymiar: zł/RL).}$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych $q(t)$, $\gamma(t)$ do zadania (5.8) - (5.9) otrzymamy zadanie następujące:

$$\max \int_T \gamma(t) dt, \quad (5.8')$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a \gamma(t),$$

$$\bar{\gamma} \leq \gamma(t) \leq q(t), \quad \gamma \in \bar{C}^0[T],$$

$$q(t_0) = q^0 \quad (5.9')$$

($q^0 = y^0/l^0 > 0$). Dopuszczalny proces wzrostu tworzy w nim każda para trajektorii $(\gamma, q)_T$ ($\gamma_T = \{(t, \gamma(t)), t \in T\}$, $q_T = \{(t, q(t)), t \in T\}$) spełniająca warunki (5.9'). Zadania (5.8) - (5.9), (5.8') - (5.9') są równoważne w tym sensie, że proces $(c^*, y^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (5.8) - (5.9) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (5.8') - (5.9') będzie proces $(\gamma^*, q^*)_T$, zdefiniowany w (5.10).

Równanie

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a \gamma(t)$$

z daną funkcją γ_T , $\gamma(t) \geq \bar{\gamma}$, nie będzie miało rozwiązania niemalejącego, jeżeli efektywność majątku a będzie niższa od sumy wskaźników wycofywanej z eksploatacji części majątku, i wzrostu liczny ludności $\mu + \lambda$. Sytuacja taka byłaby zresztą rażąco sprzeczna z rzeczywistością. Przyjmijemy wobec tego, że

▼ **Z a ł o ż e n i e 5.1.** $a - \mu - \lambda > 0$. ▼

Założenie to obowiązuje w całym paragrafie 5. Nie zapewnia jednak istnienia procesu dopuszczalnego w zadaniu (5.8') - (5.9'). Wyjaśnia to następujące twierdzenie.

□ **T w i e r d z e n i e 5.1.**²³ Przy założeniu 5.1: (1) warunki (5.9') są niesprzeczne dla pewnego horyzontu czasu T wtedy i tylko wtedy, gdy

²³ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.1 a. 235.

$q^0 > \bar{\gamma}$, (ii) jeżeli $q^0 \geq a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$, to warunki (5.9') są niesprzeczne dla horyzontu czasu T dowolnej długości. ■

W związku z tym twierdzeniem w kolejnych dwóch punktach 5.1, 5.2 przyjmujemy, że spełnione jest

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e } 5.2. \quad q^0 > \frac{a\bar{\gamma}}{a-\mu-\lambda} \quad \blacktriangledown$$

Warunek ten zapewnia istnienie dopuszczalnego procesu wzrostu w (zadaniu (5.8') - 5.9')) z dodatnią stopą wzrostu dochodu narodowego na osobę. Aby wzrost taki był możliwy, potrzebny jest odpowiednio wysoki początkowy poziom dochodu narodowego w stosunku do konsumpcji umożliwiający podjęcie niezbędnych inwestycji w okresie „wyjściowym”.

Zwazywszy na (5.10) warunek ten można zapisać w równoważnej postaci

$$y^0 > \frac{a\bar{\gamma}l^0}{a-\mu-\lambda} \quad (5.11)$$

5.2.2. ZADANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO W POSTACI STANDARDOWEJ

Zadanie (5.8') - (5.9') nie jest zadaniem sterowania optymalnego tego typu, z jakimi mieliśmy do czynienia w paragrafie 3²⁴. Aby móc zastosować przedstawione tam twierdzenia o procesach optymalnych, musimy więc zadanie to doprowadzić do postaci standardowej. W tym celu zauważmy, że

Twierdzenie 5.2.²⁵ Każdemu procesowi dopuszczalnemu $(\gamma, q)_T$ w zadaniu (5.8') - (5.9') odpowiada dokładnie jedna taka funkcja $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in C^0[T]$, że

$$\gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{\gamma})$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. ■

Ogólnie jednak nie każdej funkcji $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in C^0[T]$ odpowiada taki dopuszczalny proces wzrostu $(\gamma, q)_T$, że $\gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{\gamma})$ na T . Na przykład, jeżeli $\alpha(t) = 1$ na T , to para takich funkcji $(\gamma, q)_T$, że $\gamma(t) = q(t)$ w każdym momencie czasu $t \in T$, nie będzie dopuszczalnym procesem wzrostu, jeżeli długość horyzontu czasu $|T| > (\mu + \lambda)^{-1} \ln(q^0/\bar{\gamma})$. Do sprawy tej powrócimy w twierdzeniu 5.4. Podstawiając

$$\gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{\gamma}) \quad (5.12)$$

do zadania (5.8') - (5.9'), otrzymamy zadanie

$$\max \int_T [\bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{\gamma})] dt, \quad (5.13)$$

²⁴ Występują w nim nietypowe ograniczenia w postaci nierówności.

²⁵ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.2

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a\alpha(t)(q(t) - \bar{\gamma}) - a\bar{\gamma},$$

$$\alpha(t) \in [0, 1], \quad \alpha \in \tilde{C}^0[T], \quad (5.14)$$

$$q(t_0) = q^0$$

($q^0 > a\bar{\gamma}/(a - \mu - \lambda)$). Równanie różniczkowe w (5.14) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (jednowymiarowego) systemu dynamicznego. Przekształceniem wyjścia jest funkcja podcałkowa w (5.13). Sterowaniem jest funkcja α_T udziału nadwyżki konsumpcji ponad jej ustalony minimalny poziom $\bar{\gamma} e^{-\lambda(t-t_0)}$ w części dochodu narodowego pozostającej po odliczeniu wydatków na zaspokojenie minimalnych potrzeb konsumpcyjnych. Stanem wewnętrznym w momencie t jest wielkość dochodu narodowego na osobę, stanem wyjścia - wielkość konsumpcji na osobę. Dopuszczalny proces wzrostu tworzy para $(\alpha, q)_T$ spełniająca warunki (5.14), optymalny proces wzrostu - para $(\alpha^*, q^*)_T$ maksymalizująca wielkość konsumpcji na osobę w horyzoncie czasu T (funkcjonał (5.13)). Rozwiązanie tego zadania jest następujące.

□ **T w i e r d z e n i e 5.3.**²⁶ Rozwiązanie zadania (5.13) - (5.14) przy założeniach 5.1, 5.2 jest proces $(\alpha^*, q^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d\bar{\gamma})e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d\bar{\gamma} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ q^*(\tau)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a - \mu - \lambda) > 1$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta = (\mu + \lambda)^{-1} \ln d$, wówczas $\tau = t_1 - \theta > t_0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \theta$, wtedy $\tau = t_0$ i optymalny proces wzrostu redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = 1, \quad q^*(t) = q^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. ■

Ustalimy, jak rozwiązanie tego zadania ma się do rozwiązania zadania (5.8') - 5.9').

²⁶ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.3 s. 236.

□ T w i e r d z e n i e 5.4.²⁷ Jeżeli zadanie (5.13) - (5.14) ma takie rozwiązanie optymalne $(\alpha^*, q^*)_T$, że para $(\gamma^*, q^*)_T$ jest dopuszczalnym procesem wzrostu w zadaniu (5.8') - (5.9'), gdzie

$$\gamma^*(t) = \bar{\gamma} + \alpha^*(t)(q^*(t) - \bar{\gamma}),$$

to proces $(\gamma^*, q^*)_T$ jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania (5.8') - (5.9'). ■

Łatwo sprawdzić, że para trajektorii $(\gamma^*, q^*)_T$ odpowiadająca procesowi $(\alpha^*, q^*)_T$ jest procesem dopuszczalnym w zadaniu (5.8') - (5.9'). Zgodnie z twierdzeniem 5.4 jest więc rozwiązaniem tego zadania.

5.2.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

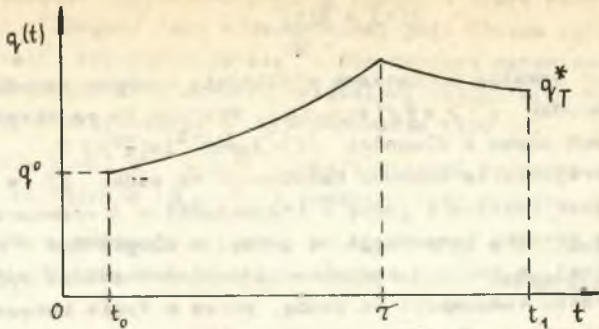
Optymalne trajektorie dochodu narodowego y_T^* , konsumpcji c_T^* , majątku produkcyjnego m_T^* i inwestycji i_T^* otrzymujemy z (5.10), (5.2), (5.3).

Maksymalną wielkość konsumpcji na osobę w krótkim horyzoncie czasu T uzyskujemy, wstrzymując całkowicie inwestycje i przeznaczając cały dochód narodowy na konsumpcję. Majątek produkcyjny i dochód narodowy maleją wówczas ze stopą $-\mu$, dochód narodowy i konsumpcja w przeliczeniu na osobę - maleją ze stopą $-(\mu + \lambda)$.

W długim horyzoncie czasu proces wzrostu dzieli się na dwie fazy. W pierwszej fazie, inwestycyjnej, całą „nadwyżkę” dochodu narodowego ponad jego część przeznaczoną na zaspokojenie minimalnych potrzeb konsumpcyjnych $\bar{\gamma} l^0 \exp\{\lambda(t-t_0)\}$ należy skierować na cele inwestycyjne. Wywołuje to szybki wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego. Rośnie także dochód narodowy na osobę. Konsumpcja rośnie bardzo wolno (ze stopą równą stopie wzrostu ludności) o tyle tylko, żeby zapewniony był minimalny poziom konsumpcji na osobę. W drugiej fazie, konsumpcyjnej, wstrzymane zostają inwestycje, konsumpcja gwałtownie wzrasta. Powoduje to spadek majątku produkcyjnego i dochodu narodowego (rys.5.1). W rezultacie zaczyna maleć konsumpcja.

W okresie przejściowym od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej trajektorie inwestycji i konsumpcji zachowują się bardzo nieregularnie. Inwestycje osiągają najpierw wysoki poziom, a następnie gwałtownie spadają do zera. Konsumpcja początkowo kształtuje się na minimalnym poziomie $\bar{\gamma} l^0 e^{\lambda(t-t_0)}$, następnie - w fazie konsumpcyjnej - momentalnie wzrasta.

²⁷ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.4 s. 238.



Rys.5.1. Optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę - rozwiązanie zadania (5.13) - (5.14) w długim horyzoncie czasu

5.2.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Interesują nas procesy wzrostu, którym odpowiada stała stopa wzrostu konsumpcji na osobę, a więc te procesy $(\alpha, q)_T$ i odpowiadające im trajektorie konsumpcji na osobę $\bar{\gamma}_T$, w których

$$\sigma(q, \gamma) = \delta_\gamma = \frac{d}{dt} \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} = \text{const.}$$

(A) Przez $(\bar{\alpha}, \bar{q})_T, \bar{\gamma}_T$ oznaczymy te procesy wzrostu i odpowiadające im trajektorie konsumpcji na osobę, w których

$$\delta_{\bar{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \bar{\gamma}(t) \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}(t)} = 0$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Są to procesy następującej postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= 0, \\ \bar{q}(t) &= [\bar{q}^0 - a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)] e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma},$$

gdzie \bar{q}^0 jest dowolną dodatnią wielkością dochodu narodowego na osobę spełniającą warunek $\bar{q}^0 > a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$. Procesy te są określane na horyzontach czasu T dowolnej długości.

(B) Przez $(\bar{\alpha}, \bar{q})_T, \bar{\gamma}_T$ oznaczymy procesy i odpowiadające im trajektorie konsumpcji na osobę spełniające warunek

$$\delta_{\bar{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \bar{\gamma}(t) \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}(t)} = -(\mu+\lambda)$$

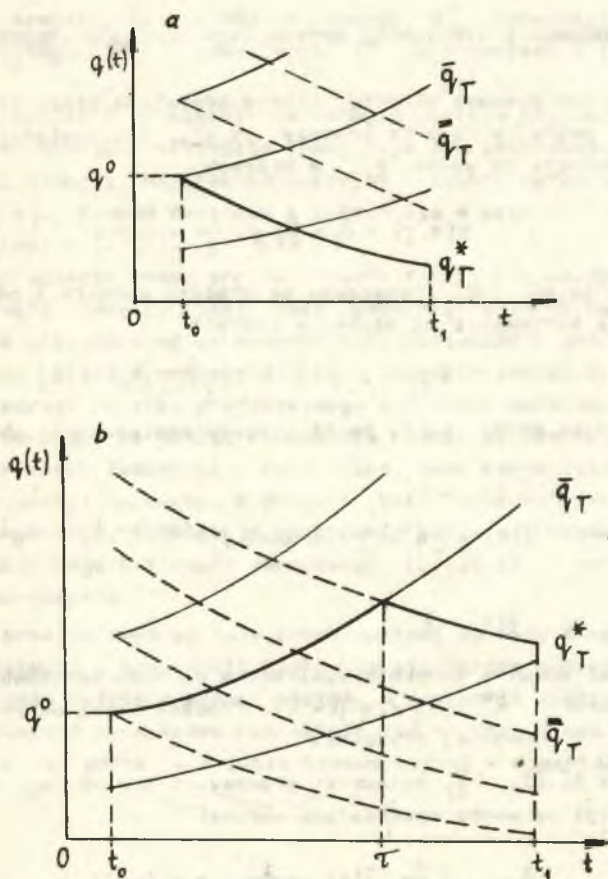
w każdym momencie czasu $t \in T$. Ich postać jest następująca:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= 1, \\ \bar{q}(t) &= \bar{q}^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{q}(t) ,$$

gdzie \bar{q}^0 jest dowolną początkową wielkością dochodu narodowego na osobę spełniającą warunek $\bar{q}^0 > a\bar{y}/(a-\mu-\lambda)$. Procesy te są określone na krótkich horyzontach czasu o długości $|T| < (\mu+\lambda)^{-1} \ln(\bar{q}^0/\bar{y})$.

Optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę q_T^* w krótkim horyzoncie czasu jest tożsama z jedną z trajektorii w σ -równowadze typu (B) z ujemną stopą wzrostu konsumpcji na osobę, w długim zaś - najpierw, w fazie inwestycyjnej, z jedną z trajektorii w σ -równowadze typu (A) z zerową stopą wzrostu konsumpcji na osobę, potem w fazie konsumpcyjnej - z jedną z trajektorii w σ -równowadze typu (B) ze stopą ujemną (rys.5.2.a,



Rys.5.2. Trajektorie dochodu narodowego na osobę w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria (a) w krótkim horyzoncie czasu, (b) w długim horyzoncie czasu

b). Ponieważ długość fazy inwestycyjnej rośnie w miarę wydłużania horyzontu czasu T (długość fazy konsumpcyjnej jest zawsze ograniczona), więc „efekt magistrali” trywializuje się²⁸. Obserwujemy natomiast asymptotyczną zbieżność średnich stóp wzrostu optymalnej trajektorii dochodu narodowego na osobę i trajektorii w G -równowadze typu (A).

□ T w i e r d z e n i e 5.5.²⁹ Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica $|\delta_{q_T^*} - \delta_{q_T^-}|$ średnich stóp wzrostu optymalnej trajektorii dochodu narodowego na osobę i trajektorii w G -równowadze typu (A) ze stałą wielkością konsumpcji na osobę maleje asymptotycznie do zera. ■

5.3. Drugie zadanie sterowania optymalnego

5.3.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

W poprzednim punkcie otrzymaliśmy trajektorie dochodu narodowego, konsumpcji i majątku produkcyjnego z ujemnymi stopami wzrostu w fazie konsumpcyjnej. Wykluczamy tę sytuację, żądając, by stopa wzrostu dochodu narodowego w całym horyzoncie czasu T nie była niższa od stopy wzrostu ludności³⁰:

$$\frac{d}{dt} y(t) \cdot \frac{1}{y(t)} \geq \lambda \quad (5.17)$$

(tym samym stopa wzrostu dochodu narodowego na osobę będzie nieujemna w horyzoncie czasu T).

Zakładając, że na konsumpcję w momencie czasu t należy przeznaczyć nie mniej niż $\bar{y} \exp\{\lambda(t-t_0)\}$ dochodu narodowego, otrzymujemy zadanie maksymalizacji konsumpcji w horyzoncie czasu T :

$$\max \int_{t_0}^T e^{-\lambda(t-t_0)} c(t) dt, \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = (a - \mu)y(t) - ac(t),$$

$$\frac{d}{dt} y(t) \cdot \frac{1}{y(t)} \geq \lambda.$$

²⁸ Magistralę jest jedna z trajektorii dochodu narodowego na osobę w G -równowadze z zerową stopą wzrostu konsumpcji, na której w fazie inwestycyjnej pozostaje optymalna trajektoria q_T^* .

²⁹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.5 s. 239. Podobny warunek spełniają trajektorie dochodu narodowego y_T^* , \bar{y}_T ($y^*(t) = l(t)q^*(t)$, $\bar{y}(t) = l(t)\bar{q}(t)$) oraz majątku produkcyjnego m_T^* , \bar{m}_T ($m^*(t) = a^{-1}l(t)q^*(t)$, $\bar{m}(t) = a^{-1}l(t)\bar{q}(t)$).

³⁰ Por. ods.18 do założenia 4.4, s. 69.

$$c(t) \geq \tilde{\gamma} l^0 e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad c \in \tilde{C}^0 [T], \quad (5.19)$$

$$y(t_0) = y^0,$$

gdzie $y^0 > a \tilde{\gamma} l^0 / (a - \mu - \lambda)$. Warunek (5.17) w układzie (5.19) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy³¹

$$c(t) \leq \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) y(t), \quad (5.17')$$

zatem zadanie (5.16) - (5.17) można zapisać w następującej postaci

$$\max \frac{1}{l^0} \int_T e^{-\lambda(t-t_0)} c(t) dt, \quad (5.18')$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = (a - \mu) y(t) - a c(t),$$

$$\tilde{\gamma} l^0 e^{-\lambda(t-t_0)} \leq c(t) \leq \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) y(t), \quad c \in \tilde{C}^0 [T], \quad (5.19'')$$

$$y(t_0) = y^0.$$

Po podstawieniu zmiennych $q(t)$, $\gamma(t)$ zgodnie z (5.10), otrzymujemy zadanie

$$\max \int_T \gamma(t) dt, \quad (5.18'')$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda) q(t) - a \gamma(t),$$

$$\tilde{\gamma} \leq \gamma(t) \leq \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q(t), \quad \gamma \in \tilde{C}^0 [T], \quad (5.19''')$$

$$q(t_0) = q^0,$$

gdzie $q^0 > a \tilde{\gamma} / (a - \mu - \lambda)$. Przy założeniach 5.1, 5.2 zadanie to jest niesprzeczne. Warunki (5.19''') spełnia na przykład proces $(\gamma, q)_T$:

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma},$$

$$q(t) = [q^0 - a \tilde{\gamma} / (a - \mu - \lambda)] e^{(a - \mu - \lambda)(t - t_0)} + a \tilde{\gamma} / (a - \mu - \lambda).$$

5.3.2. POSTAĆ STANDARDOWA ZADANIA STEROWANIA OPTIMALNEGO

w celu sformułowania zadania w postaci standardowej posłużymy się następującym twierdzeniem:

³¹ Rzeczywiście, z (5.17) otrzymujemy $[(a - \mu) y(t) - a c(t)] / y(t) \geq \lambda$ i po przekształceniach: $c(t) \leq [1 - (\mu + \lambda) / a] y(t)$. Odwrotnie, jeżeli zachodzi warunek (5.17') to $(a - \mu) y(t) - a c(t) \geq \lambda y(t)$, tzn. $dy(t) / dt \geq \lambda y(t)$. Warunek (5.17) otrzymujemy zważywszy, że $y(t) > 0$ na T .

□ T w i e r d z e n i e 5.6.³² Niech spełnione będą założenia 5.1, 5.2. (1) Jeżeli proces $(\gamma, q)_T$ spełnia warunki (5.19''), to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in \mathcal{C}^0[T]$, że

$$\gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q(t) - \bar{\gamma} \right] \quad (*)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. (11) Dla dowolnej funkcji $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in \mathcal{C}^0[T]$, para $(\gamma, q)_T$ spełniająca warunek (*) i równanie

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda) q(t) - a \gamma(t)$$

z warunkiem początkowym $q(t_0) = q^0 > a \bar{\gamma} / (a - \mu - \lambda)$ jest procesem dopuszczalnym w (5.19''). ■

Na podstawie tego twierdzenia zadanie (5.18'') - (5.19'') jest równoważne z następującym zadaniem sterowania optymalnego:

$$\max_T \int \left\{ \alpha(t) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q(t) - \bar{\gamma} \right] + \bar{\gamma} \right\} dt, \quad (5.18''')$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = (1 - \alpha(t)) \left[(a - \mu - \lambda) q(t) - a \bar{\gamma} \right],$$

$$\alpha(t) \in [0, 1], \quad \alpha \in \mathcal{C}^0[T], \quad (5.19''')$$

$$q(t_0) = q^0.$$

Rolę sterowania w zadaniu tym pełni funkcja α_T udziału nadwyżki konsumpcji ponad jej ustaloną minimalną wielkość $\bar{\gamma} e^{\lambda(t-t_0)}$ ($t \in T$) w dochodzie narodowym, który pozostaje po odliczeniu „minimum” konsumpcyjnego oraz inwestycji umożliwiających wzrost dochodu ze stopę λ . Równanie różniczkowe w (5.19''') opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (jednowymiarowego) systemu dynamicznego, funkcja podczątkowa w (5.18''') - przekształcenie wyjścia. Zbiorem sterowań jest przedział $[0, 1]$, stanem wewnętrznym - dochód narodowy na osobę, stanem wyjścia - konsumpcja na osobę. Dopuszczalny proces wzrostu tworzy para trajektorii $(\alpha, q)_T$ spełniająca warunki (5.19'''), optymalny - para $(\alpha^*, q^*)_T$, której odpowiada maksymalna wielkość konsumpcji na osobę w horyzoncie czasu T .

□ T w i e r d z e n i e 5.7.³³ Rozwiązaniem zadania (5.18''') - (5.19''') przy założeniach 5.1, 5.2 jest proces $(\alpha^*, q^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

³² Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.6 s. 240.

³³ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.7 s. 241.

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d\bar{\gamma})e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d\bar{\gamma} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ q^*(\tau) = \text{const.} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta = 1/(a-\mu-\lambda)$, wtedy $\tau = t_1 - \theta > t_0$. Jeżeli horyzont jest krótki, $|T| \leq \theta$, wtedy $\tau = t_0$ i proces $(\alpha^*, q^*)_T$ redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = 1, \quad q^*(t) = q^0$$

w każdym momencie czasu $t \in T$.

5.3.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

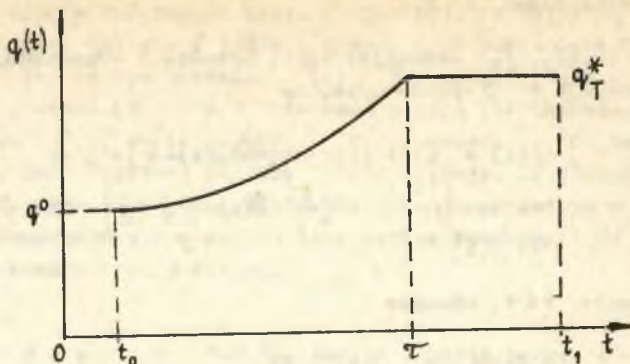
Optymalną trajektorię konsumpcji na osobę δ_T^* można wyznaczyć z równania (zob. twierdzenie 5.6)

$$\delta^*(t) = \bar{\gamma} + \alpha^*(t) \left[\left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) q^*(t) - \bar{\gamma} \right].$$

Optymalną trajektorię dochodu narodowego y_T^* , majątku produkcyjnego m_T^* , konsumpcji c_T^* i inwestycji i_T^* otrzymujemy z (5.10), (5.2), (5.3). Wszystkie optymalne trajektorie, z wyjątkiem trajektorii inwestycji i_T^* w długim horyzoncie czasu T , są niemalejące. W krótkim horyzoncie czasu inwestycje umożliwiają jedynie wzrost majątku ze stopą równą stopie wzrostu ludności λ . Cała pozostała część dochodu narodowego przeznaczona zostaje na konsumpcję. Dochód narodowy i konsumpcja wolno rosną (ze stopą λ), dochód narodowy na osobę i konsumpcja na osobę utrzymują się na wyjściowym poziomie.

Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy pojawiają się dwie fazy wzrostu. Szybki wzrost inwestycji w fazie pierwszej powoduje znaczny wzrost majątku produkcyjnego, dochodu narodowego i dochodu narodowego na osobę. Konsumpcja rośnie tylko o tyle, aby zapewniony był minimalny poziom konsumpcji na osobę $\bar{\gamma}$. Faza druga rozpoczyna się od gwałtownego spadku inwestycji do poziomu zapewniającego tylko nieznaczny wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego (ze stopą λ). Dochód narodowy na osobę stabilizuje się na poziomie, który gospodarka osiąga pod koniec fazy inwestycyjnej (rys.5.3). Konsumpcja na osobę gwałtownie wzrasta w stosunku do jej wielkości w fazie inwestycyjnej i w całej fazie konsumpcyjnej utrzymuje się na tym samym, wysokim poziomie.

Pod niektórymi względami rozwiązanie to jest poprawniejsze od rozwiązania otrzymanego w poprzednim punkcie. Majątek produkcyjny, dochód narodowy i konsumpcja w całym horyzoncie czasu T rosną, dochód narodowy na osobę i konsumpcja na osobę - nie maleją, osiągając wysoki poziom w drugiej fazie wzrostu. Podobnie jak poprzednio jednak przejściu od fazy



Rys.5.3. Optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę - rozwiązanie zadania (5.18''') - (5.19''') w długim horyzoncie czasu

inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej towarzyszy gwałtowny skok: spadek inwestycji i wzrost konsumpcji.

5.3.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W poszczególnych fazach wzrostu optymalna trajektoria konsumpcji $\bar{\gamma}_T^*$ jest funkcją stałą co nasuwa myśl, aby rozpatrzyć trajektorie wzrostu gospodarki w σ -równowadze ze stałą wielkością konsumpcji na osobę:

$$\sigma(q, \gamma) = \gamma = \text{const.}$$

(A) Przez $(\bar{\alpha}, \bar{q})_T$, $\bar{\gamma}_T$ oznaczymy te procesy wzrostu i odpowiadające im trajektorie konsumpcji na osobę w σ -równowadze, dla których

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(t) &= \bar{\alpha}(t) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}(t) - \bar{\gamma} \right] + \bar{\gamma} = \\ &= \min \left\{ \alpha \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}(t) - \bar{\gamma} \right] + \bar{\gamma} \right\} = \bar{\gamma} \\ \alpha &\in [0, 1] \end{aligned}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Procesy te są następującej postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= 0, \\ \bar{q}(t) &= \left[\bar{q}^0 - a \bar{\gamma} / (a - \mu - \lambda) \right] e^{(a - \mu - \lambda)(t - t_0)} + a \bar{\gamma} / (a - \mu - \lambda), \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdzie \bar{q}^0 jest dowolną początkową wielkością dochodu narodowego na osobę spełniającą warunek $\bar{q}^0 > a \bar{\gamma} / (a - \mu - \lambda)$. Odpowiada im trajektoria konsumpcji na osobę $\bar{\gamma}_T$ z wartościami

$$\bar{y}(t) = \bar{y}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$.

(B) Przez $(\bar{\alpha}, \bar{q})_T, \bar{\delta}_T$ oznaczmy takie procesy i odpowiadające im trajektorie konsumpcji w σ -równowadze, że

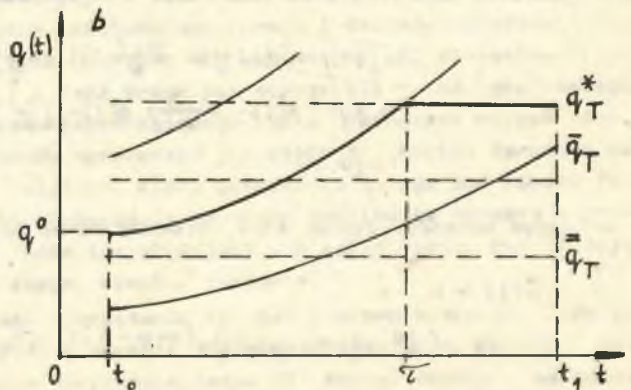
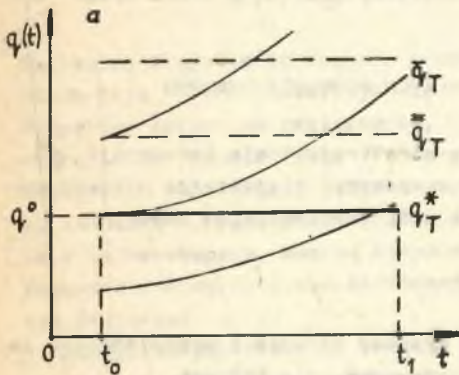
$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{\alpha}(t) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}(t) - \bar{\delta} \right] + \bar{y} = \\ &= \max \left\{ \alpha \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}(t) - \bar{\delta} \right] + \bar{y} \right\} = \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}(t) \\ \alpha &\in [0, 1] \end{aligned}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Wówczas

$$\bar{\alpha}(t) = 1, \quad \bar{q}(t) = \bar{q}^0 \quad (5.21)$$

$$\bar{y}(t) = \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \bar{q}^0 = \text{const.} > \bar{y},$$

gdzie \bar{q}^0 jest dowolną początkową wielkością dochodu narodowego na osobę spełniającą warunek $\bar{q}^0 > a\bar{y}/(a - \mu - \lambda)$.



Rys.5.4. Trajektorie dochodu narodowego na osobę w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria (a) w krótkim horyzoncie czasu, (b) w długim horyzoncie czasu

Optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę w krótkim horyzoncie czasu jest tożsama z jedną z trajektorii postaci (5.21) w G -równowadze typu (B). W długim horyzoncie czasu trajektoria ta najpierw (w fazie inwestycyjnej) jest tożsama z jedną z trajektorii postaci (5.20) w G -równowadze typu (A) (w tym okresie $y^*(t) = \bar{y} = \text{const.}$), potem - z jedną z trajektorii postaci (5.21) w G -równowadze typu (B) (konsumpcja na osobę osiąga poziom $y^*(t) = [1 - (\mu + \lambda)/a] q^*(\tau) = \text{const.}$; τ - moment przejścia od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej). Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłużej optymalna trajektoria pozostaje w G -równowadze typu (A). Równocześnie tym wyższy jest poziom konsumpcji na osobę w drugiej fazie wzrostu (rys.5.4.a,b).

Twierdzenie 5.8.³⁴ Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica $|\delta_{q_T}^* - \delta_{q_T}|$ średnich stóp wzrostu optymalnej trajektorii dochodu narodowego na osobę i trajektorii w G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera. ■

5.4. Procesy wzrostu z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji - trzecie zadanie sterowania optymalnego

5.4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Dotychczas trajektorie konsumpcji były funkcjami przedziałami ciągłymi na T (należały do klasy $\tilde{C}^0[T]$). Taką samą właściwość miały trajektorie inwestycji i konsumpcji na osobę. W tym punkcie zażędamy, aby trajektorie konsumpcji na osobę były funkcjami ciągłymi, prawie wszędzie na T różniczkowalnymi (z klasy $\tilde{C}^1[T]$) i spełniały warunek:³⁵

$$0 \leq \frac{d}{dt} \delta(t) \leq \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) \frac{d}{dt} q(t).$$

Zędamy więc, aby: (a) w całym horyzoncie czasu T konsumpcja na osobę nie malała, (b) nie rosła szybciej niż dochód narodowy na osobę po odli-

³⁴ Dowód pomijamy - przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 5.5. Podobny warunek spełniają trajektorie majątku produkcyjnego m_T^* , \bar{m}_T oraz dochodu narodowego y_T^* , \bar{y}_T .

³⁵ Zob. ods. 18 do założenia 4.4 na s. 69. Ponieważ $\delta \in \tilde{C}^1[T]$, zatem trajektoria q_T jest wszędzie na T różniczkowalna.

czeniu inwestycji niezbędnych, aby nie nastąpił spadek dochodu narodowego na osobę ($(\mu+\lambda)/a$ jest wskaźnikiem minimalnego udziału inwestycji w dochodzie, przy którym nie nastąpi spadek dochodu narodowego na osobę).

Niech γ^0 będzie taką początkową wielkością konsumpcji na osobę (w momencie t_0), że

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e } 5.2'. \quad \bar{\gamma} \leq \gamma^0 < \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) q^0. \quad \nabla$$

Podobnie jak poprzednio, $\bar{\gamma}$ oznacza minimalną „normę” konsumpcji na osobę; $\left[1 - (\mu+\lambda)/a\right] q^0$ jest maksymalną wielkością konsumpcji na osobę

w momencie t_0 , która nie spowoduje spadku dochodu narodowego na osobę w przyszłości. Założenie 5.2' pociąga za sobą założenie 5.2. Niech wzrost dochodu narodowego na osobę opisuje, podobnie jak dotychczas, równanie

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t). \quad (5.22)$$

Rozpatrzmy następnie zadanie maksymalizacji konsumpcji na osobę w horyzoncie czasu T :

$$\max \int_T \gamma(t) dt, \quad (5.23)$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t),$$

$$0 \leq \frac{d}{dt} \gamma(t) < \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) \frac{d}{dt} q(t), \gamma \in \tilde{C}^1[T], \quad (5.24)$$

$$(q(t_0), \gamma(t_0)) = (q^0, \gamma^0),$$

gdzie $\left[1 - (\mu+\lambda)/a\right] q^0 > \gamma^0 \geq \bar{\gamma}$. Przy założeniach 5.1, 5.2' zadanie to jest niesprzeczne. Warunki (5.24) spełnia na przykład para trajektorii $(\gamma, q)_T$:

$$\gamma(t) = \gamma^0 = \text{const}, \quad (5.25)$$

$$q(t) = \left[q^0 - a\gamma^0 / (a - \mu - \lambda) \right] e^{(a - \mu - \lambda)(t - t_0)} + a\gamma^0 / (a - \mu - \lambda).$$

5.4.2. ZADANIE RÓWNOWAŻNE

□ T w i e r d z e n i e 5.9.³⁶ Przy założeniach 5.1, 5.2' warunek

$$0 \leq \frac{d}{dt} \gamma(t) < \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) \frac{d}{dt} q(t)$$

³⁶ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.9 s. 242.

można zastąpić następującym:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma(t) &= \beta(t) [(a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t)] , \\ \beta(t) &\in \left[0, 1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right] , \quad \beta \in \tilde{C}^0[T] . \blacksquare \end{aligned} \quad (5.26)$$

Zatem zadanie (5.23) - (5.24) jest równoważne z zadaniem

$$\begin{aligned} \max \int_T \gamma(t) dt , \\ \frac{d}{dt} q(t) &= (a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t) , \\ \frac{d}{dt} \gamma(t) &= \beta(t) [(a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t)] , \\ \beta(t) &\in \left[0, 1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right] , \quad \beta \in \tilde{C}^0[T] , \\ (q(t_0), \gamma(t_0)) &= (q^0, \gamma^0) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Jeżeli proces $(\beta^*, q^*, \gamma^*)_T$ jest rozwiązaniem tego zadania, to proces $(q^*, \gamma^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.23) - (5.24). Na odwrót, jeżeli para $(q^*, \gamma^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.23) - (5.24), to znajdzie się taka funkcja $\beta^*: T \rightarrow [0, 1 - (\mu + \lambda)/a]$, że proces $(\beta^*, q^*, \gamma^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (5.27) - (5.28).

Para równań różniczkowych w (5.28) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (dwuwymiarowego) stacjonarnego systemu dynamicznego. Sterowaniem jest wskaźnik udziału konsumpcji w dodatkowej jednostce dochodu narodowego. Stanem wewnętrznym jest dochód narodowy na osobę i konsumpcja na osobę. Druga współrzędna wektora stanu wewnętrznego $(q(t), \gamma(t))$ jest równocześnie stanem wyjścia.

□ T w i e r d z e n i e 5.10.³⁷ Rozwiązaniem zadania (5.27) - (5.28) przy założeniach 5.1, 5.2, jest proces $(\beta^*, q^*, \gamma^*)_T$:

$$\begin{aligned} \beta^*(t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ 1 - \frac{\mu + \lambda}{a} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases} \\ q^*(t) &= \begin{cases} (q^0 - d\gamma^0)e^{(a - \mu - \lambda)(t - t_0)} + d\gamma^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ [(a - \mu - \lambda)q^*(\tau) - a\gamma^0](t - \tau) + q^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases} \\ \gamma^*(t) &= \begin{cases} \gamma^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ (a - \mu - \lambda) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q^*(\tau) - \gamma^0 \right] (t - \tau) + \gamma^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] . \end{cases} \end{aligned}$$

³⁷ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 5, twierdzenie 5.10 a. 243.

gdzie $d = a/(a - \mu - \lambda)$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta = 2/(a - \mu - \lambda)$, to $\tau = t_1 - \theta > t_0$. Jeżeli horyzont czasu jest krótki, $|T| \leq \theta$, to $\tau = t_0$ i proces $(\beta^*, q^*, \chi^*)_T$ redukuje się do postaci:

$$\beta^*(t) = 1 - \frac{\mu + \lambda}{a},$$

$$q^*(t) = [(a - \mu - \lambda)q^0 - a \chi^0] (t - t_0) + q^0,$$

$$\chi^*(t) = (a - \mu - \lambda) \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right)q^0 - \chi^0 \right] (t - t_0) + \chi^0$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. ■

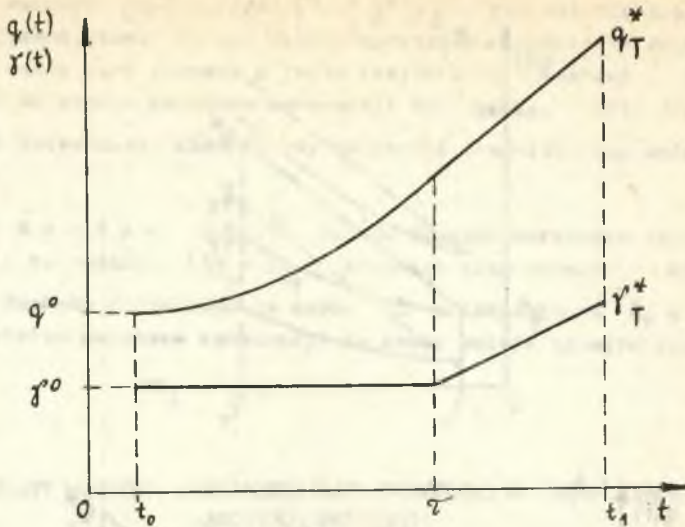
5.4.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalne trajektorie dochodu narodowego, konsumpcji i inwestycji otrzymujemy z (5.10), (5.2), (5.3). Obserwujemy regularny wzrost wszystkich optymalnych trajektorii, zarówno kiedy horyzont czasu T jest krótki, jak i w przypadku długiego horyzontu czasu. W krótkim horyzoncie czasu inwestycje umożliwiają taki wzrost majątku produkcyjnego i dochodu narodowego, dzięki którym możliwy jest liniowy wzrost dochodu narodowego na osobę oraz nieco wolniejszy wzrost konsumpcji na osobę.

Jeżeli horyzont jest długi, wtedy w pierwszej fazie-inwestycyjnej-obsługujemy szybki wzrost inwestycji, choć wolniejszy niż w dwóch poprzednich rozwiązaniach, wskutek czego pod koniec tej fazy znacznie wzrasta majątek produkcyjny i dochód narodowy (oraz dochód narodowy na osobę, rys. 5.5). Konsumpcja utrzymuje się na wyjściowym poziomie χ^0 . Przeznaczona na konsumpcję część dochodu narodowego rośnie ze stopą równą stopie wzrostu ludności. W drugiej fazie - konsumpcyjnej - inwestycje rosną wolniej. Wskutek tego wolniej niż w fazie inwestycyjnej rośnie majątek produkcyjny, dochód narodowy oraz dochód narodowy na osobę, szybciej - konsumpcja i konsumpcja na osobę. Wzrost dochodu narodowego na osobę i konsumpcji na osobę opisują funkcje liniowe, przy czym konsumpcja rośnie nieco wolniej niż dochód.

Wszystkie optymalne trajektorie są ciągłe, przedziałami gładkie. Wszystkie, poza trajektorią konsumpcji na osobę, są silnie rosnące. Wzrost konsumpcji na osobę opisuje funkcja niemalejąca, przedziałami liniowa, rosnąca w fazie konsumpcyjnej. W okresie przejściowym od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej nie następuje załamania ani „skok” żadnej trajektorii. Inwestycje regularnie rosną w całym horyzoncie czasu, z wyższą stopą w fazie pierwszej niż w drugiej.

Otrzymaliśmy proces wzrostu, za którym przemawia zarówno nasza ogólna wiedza o wzroście gospodarczym, jak i obserwacja procesów zachodzących w rzeczywistej gospodarce. Oczywiście, możemy mówić tylko o pewnym jakościowym podobieństwie tego procesu i rzeczywistych procesów wzrostu. W ce-



Rys.5.5. Optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę oraz konsumpcji na osobę - rozwiązanie zadania (5.27) - (5.28) w długim horyzoncie czasu

lu otrzymania ilościowej zbieżności potrzebny jest opis gospodarki dużo dokładniejszy od przedstawionego.

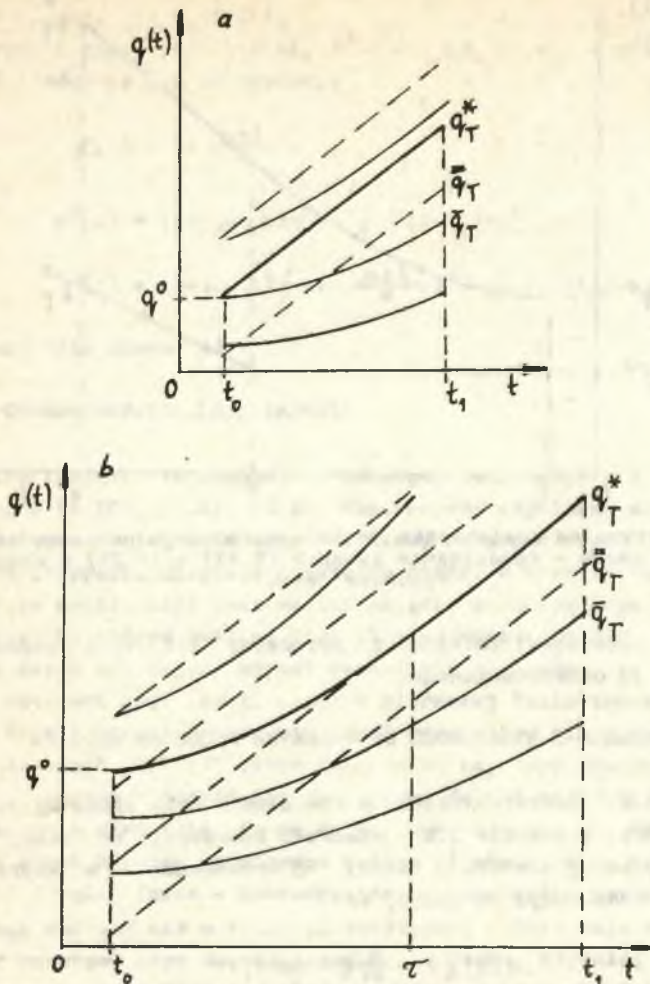
5.4.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W punkcie 5.2. „niezmiennikiem” w równowadze była stopa wzrostu konsumpcji na osobę, w punkcie 5.3 - wielkość konsumpcji na osobę. Obecnie prześledzimy procesy wzrostu w takiej σ -równowadze, w której stały jest przyrost konsumpcji na osobę, tzn.

$$\sigma(q, \gamma) = \frac{d}{dt} \gamma = \text{const.}$$

Z analizy trajektorii dochodu narodowego na osobę w takiej σ -równowadze wynika, że w krótkim horyzoncie czasu optymalna trajektoria q_T^* jest tożsama z jedną z trajektorii w σ -równowadze z maksymalnym (stałym) przyrostem konsumpcji. W długim horyzoncie czasu, podobnie jak w dwóch poprzednich punktach, optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę najpierw, w fazie inwestycyjnej, jest tożsama z jedną z trajektorii \bar{q}_T w σ -równowadze z minimalnym (zerowym) przyrostem konsumpcji na osobę postaci

$$\bar{q}(t) = [q^0 - a \bar{\gamma}^0 / (a - \mu - \lambda)] e^{(a - \mu - \lambda)(t - t_0)} + a \bar{\gamma}^0 / (a - \mu - \lambda) \quad (5.29)$$



Rys.5.6. Trajektorie dochodu narodowego na osobę w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria (a) w krótkim horyzoncie czasu, (b) w długim horyzoncie czasu

($\bar{q}^0, \bar{\delta}^0$ - dowolne wielkości początkowe dochodu narodowego i konsumpcji na osobę spełniające warunek $[1-(\mu+\lambda)/a] \bar{q}^0 > \bar{\delta}^0 \geq \tilde{\delta}$). Następnie, w fazie konsumpcyjnej, optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę „przechodzi” na jedną z trajektorii \bar{q}_T w σ -równowadze z maksymalnym, stałym przyrostem konsumpcji. Trajektorie te są funkcjami liniowymi postaci

$$\bar{q}(t) = [(a-\mu-\lambda)\bar{q}^0 - a\bar{\delta}^0](t-t_0) + \bar{q}^0 \quad (5.30)$$

($\bar{q}^0, \bar{\delta}^0$ - początkowe wielkości dochodu narodowego i konsumpcji na osobę

spełniające warunek $[1-(\mu+\lambda)/a] \bar{q}^0 > \bar{y}^0 > \bar{y}$, zob. rys. 5.6.a, b). Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłużej optymalna trajektoria dochodu narodowego na osobę jest tożsama z jedną trajektorii postaci (5.29) w G -równowadze ze stałym poziomem konsumpcji na osobę. Przy $|T| \rightarrow +\infty$, podobnie jak dotychczas, obserwujemy zbieżność średnich stóp wzrostu tych trajektorii.

Twierdzenie 5.11.³⁸ Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica $|\delta_{q_T}^* - \delta_{\bar{q}_T}|$ średnich stóp wzrostu optymalnej trajektorii dochodu narodowego na osobę q_T^* i trajektorii \bar{q}_T w G -równowadze ze stałym poziomem konsumpcji na osobę maleje asymptotycznie do zera. ■

§ 6. OPTIMALNY PODZIAŁ DOCHODU NARODOWEGO W DWUCZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU

6.1. Podstawowe wiadomości o funkcji produkcji Cobba-Douglassa

W jednoczynnikowych modelach wzrostu, którymi zajmowaliśmy się w poprzednich dwóch paragrafach, wielkość wytwarzanego dochodu narodowego zależała wyłącznie od rozmiarów trwałego majątku produkcyjnego. Zakładaliśmy milcząco, że zasoby pracy w gospodarce są tak obfite, iż wystarczają na uruchomienie majątku produkcyjnego każdej wielkości oraz, że warunki techniczne produkcji jednoznacznie wyznaczają właściwe proporcje między rozmiarami zatrudnienia i wielkością majątku produkcyjnego. W rzeczywistości zasoby pracy nie są nieograniczone, nie ma też jednoznacznej reguły łączenia majątku produkcyjnego i pracy w procesie produkcji, a wielkość wytwarzanego dochodu narodowego zależy od kombinacji obu tych podstawowych czynników produkcji. Funkcje opisujące współdziałanie majątku produkcyjnego i pracy w tworzeniu dochodu narodowego nazywamy dwuczynnikowymi (dwuargumentowymi) funkcjami produkcji. Poniżej przedstawiamy jedną z najbardziej znanych - funkcję produkcji Cobba-Douglassa³⁹.

³⁸ Dowód pomijamy - przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 5.5. Podobny warunek spełniają trajektorie majątku produkcyjnego m_T^* , \bar{m}_T oraz dochodu narodowego y_T^* , \bar{y}_T .

³⁹ Podstawowe wiadomości o funkcji produkcji Cobba-Douglassa można znaleźć w książce Z. Czerwińskiego [12] rozdz. 3, paragrafy 3.1, 3.2, zob. także N.B. Barkałow [4], S.W. Dubowska-kij i in. [18] rozdz. 3, B.N. Michalewski [32] rozdz. 4.6, L. Stoleru [46] rozdz. 11.

Przyjmijmy, że miarą ilości pracy zaangażowanej w procesie produkcji jest zatrudnienie, przez które rozumiemy liczbę pracujących w sferze produkcyjnej gospodarki⁴⁰.

Niech $T = [t_0, t_1]$ oznacza, podobnie jak dotychczas, ustalony horyzont czasu. Weźmy moment czasu $t \in T$ i oznaczmy przez $m(t)$ wielkość majątku produkcyjnego oraz przez $z(t)$ - zatrudnienie w momencie czasu t (zasób, np. w milionach osób - L). Postać funkcji produkcji Cobba-Douglaesa ustalającej związek między wielkością majątku produkcyjnego $m(t)$, rozmiarami zatrudnienia $z(t)$ i wielkością dochodu narodowego $y(t) = f(m(t), z(t), t)$ wytwarzanego w momencie czasu t wyprowadzimy, przyjmując kilka hipotez.

(H 1) Funkcja produkcji f zmiennych $m \in E_+^1$, $z \in E_+^1$, $t \in T$ jest ciągła wraz z wszystkimi pochodnymi cząstkowymi:⁴¹

$$f \in C^1 [E_+^1 \times E_+^1 \times T].$$

Dowolnym dodatnim wielkościom majątku produkcyjnego i zatrudnienia odpowiada zawsze dodatnia wielkość wytworzonego dochodu narodowego:

$$f(m(t), z(t), t) > 0,$$

jeżeli $m(t) > 0$, $z(t) > 0$, $t \in T$.

Brak któregośkolwiek z czynników produkcji powoduje wstrzymanie produkcji (hipoteza o tzw. braku „rogu obfitości“):

$$f(0, z(t), t) = f(m(t), 0, t) = 0$$

dla dowolnych $m(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$, $t \in T$.

(H 2) Równoczesne λ -krotne zwiększenie majątku produkcyjnego i zatrudnienia ($\lambda > 0$) powoduje λ -krotny wzrost dochodu narodowego (tzw. prawo proporcjonalnych przychodów):⁴²

$$f(\lambda m(t), \lambda z(t), t) = \lambda f(m(t), z(t), t)$$

dla dowolnych $m(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$, $\lambda > 0$, $t \in T$.

⁴⁰ Zakładamy, że w rozpatrywanym okresie długość dnia roboczego nie zmienia się.

⁴¹ Przez E_+^1 oznaczamy podzbiór nieujemnych liczb rzeczywistych, $E_+^1 = \{x \in E^1 : x \geq 0\}$. Ogólnie: E_+^n - nieujemny orthant przestrzeni E^n , $E_+^n = \{x \in E^n : x \geq 0\}$.

⁴² Warunek ogólniejszy $f(\lambda m(t), \lambda z(t), t) = \lambda^k f(m(t), z(t), t)$ ($\lambda, k > 0$) nazywany bywa prawem rosnących przychodów, jeżeli $k > 1$ i prawem malejących przychodów, jeżeli $k < 1$, por. np. L. Stolera [46] s. 308-309.

(H 3) Zwiększenie któregośkolwiek z czynników produkcji powoduje wzrost dochodu narodowego:

$$\begin{aligned} f(m(t)+\Delta m(t), z(t), t) &> f(m(t), z(t), t), \\ f(m(t), z(t)+\Delta z(t), t) &> f(m(t), z(t), t) \end{aligned}$$

dla dowolnych $m(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$, $\Delta m(t) > 0$, $\Delta z(t) > 0$, $t \in T$ (w nieco innej postaci warunek ten znany jest jako tzw. prawo wielkiej skali)⁴³.

(H 4) Dochód narodowy wytwarzany przy niezmiennym poziomie majątku i zatrudnienia rośnie z upływem czasu z dodatnią stopą v dzięki postępowi techniczno-organizacyjnemu: jeżeli $m(t) = m = \text{const.} > 0$, $z(t) = z = \text{const.} > 0$ na $[t', t''] \subset T$, to

$$\frac{d}{dt} f(m, z, t) \cdot \frac{1}{f(m, z, t)} = v > 0$$

w każdym momencie $t \in [t', t'']$.

Zanim sformułujemy ostatnią hipotezę, wprowadzimy kilka niezbędnych pojęć.

Definicja 6.1. Pochodne cząstkowe $[\partial f(m, z(t), t) / \partial m]_{m=m(t)}$, $[\partial f(m(t), z, t) / \partial z]_{z=z(t)}$ nazywamy krańcową wydajnością - cię majątku i pracy, a iloraz $u(t) = m(t)/z(t)$ - technicznym uzbrojeniem pracy w momencie czasu t . ▲

Rozpatrzmy wszystkie kombinacje majątku i zatrudnienia dające w momencie czasu t tę samą wielkość dochodu narodowego $y(t) = y = \text{const.} > 0$ i oznaczmy przez G_t zbiór wszystkich (dodatnich) par $(z(t), m(t))$ spełniających warunek:

$$f(m(t), z(t), t) = y = \text{const.} > 0. \quad (6.1)$$

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że jeżeli prawdziwe są hipotezy (H 1), (H 3), to dla każdej pary $(m, z) > 0$ spełniającej warunek (6.1) istnieje takie otoczenie w E^2 , w którym relacja G_t jest funkcją. Oznaczmy przez $G_t(z)$ wartość tej funkcji w punkcie z (będzie to wielkość majątku w momencie czasu t dająca w kombinacji z zatrudnieniem dochód $y = \text{const.}$). Jeżeli prawdziwe są hipotezy (H 1), (H 3), to funkcja $G_t(\cdot)$ w pewnym otoczeniu punktu z jest ciągła i różniczkowalna. Ze wzoru na pochodną funkcji uwikłanej (6.1) otrzymujemy

$$\frac{d}{dz} G_t(z) \Big|_{z=z(t)} = - \left[\frac{\partial f(m(t), z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z(t)} \right] / \left[\frac{\partial f(m, z(t), t)}{\partial m} \Big|_{m=m(t)} \right].$$

⁴³ Por. L. Stolera [46] s.307-308.

Jeżeli prawdziwa jest hipoteza (H 3), to krańcowe wydajności pracy i majątku są nieujemne i wobec tego

$$\frac{d}{dz} G_t(z) \Big|_{z=z(t)} \leq 0.$$

Definicja 6.2. Pochodną

$$- \frac{d}{dz} G_t(z) \Big|_{z=z(t)} = \left[\frac{\partial f(m(t), z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z(t)} \right] / \left[\frac{\partial f(m, z(t), t)}{\partial m} \Big|_{m=m(t)} \right]$$

a więc granicę takiego stosunku przyrostu majątku do spadku (przyrostu ujemnego) zatrudnienia, przy których nie zmienia się wielkość wytwarzanego dochodu narodowego nazywamy **krańcową stopą substytucji** (pracy przez majątek produkcyjny)⁴⁴. ▲

Krańcowa stopa substytucji wskazuje, jakim majątkiem należy „zastąpić” jednostkowy spadek nakładów pracy, aby nie zmniejszyła się przy tym wielkość wytwarzanego dochodu narodowego.

(H 5) Krańcowa stopa substytucji (a) zależy tylko od technicznego uzbrojenia pracy, (b) rośnie liniowo wraz ze wzrostem technicznego uzbrojenia pracy.

Warunek (a) jest hipotezą o tzw. neutralnym postępie technicznym według Hickea: jeżeli nie zmienia się techniczne uzbrojenie pracy, to nie zmienia się także krańcowa stopa substytucji. Warunek (b) znany jest jako tzw. prawo rosnącej stopy substytucji⁴⁵. Oznaczmy przez $s(m(t)/z(t))$ krańcową stopę substytucji w gospodarce z majątkiem produkcyjnym $m(t)$ i zatrudnieniem $z(t)$ w momencie czasu $t \in T$:

$$s\left(\frac{m(t)}{z(t)}\right) = \left[\frac{\partial f(m(t), z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z(t)} \right] / \left[\frac{\partial f(m, z(t), t)}{\partial m} \Big|_{m=m(t)} \right].$$

Z definicji krańcowej stopy substytucji, zważywszy na (H 2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} s\left(\frac{m(t)}{z(t)}\right) &= s(u(t)) = \\ &= \left[f(u(t), 1, t) - u(t) \frac{\partial f(u, 1, t)}{\partial u} \Big|_{u=u(t)} \right] / \frac{\partial f(u, 1, t)}{\partial u} \Big|_{u=u(t)}. \end{aligned}$$

a stąd

$$\frac{\partial f(u, 1, t)}{\partial u} \Big|_{u=u(t)} = \frac{f(u(t), 1, t)}{u(t) + s(u(t))}. \quad (6.2)$$

⁴⁴ Krańcowa stopa substytucji pracy przez majątek jest więc równa stosunkowi krańcowej wydajności pracy do krańcowej wydajności majątku.

⁴⁵ Por. L. Stoleru [46] s.320-322, Z. Czerwiński [12] s.80-81.

Rozwiązaniem równania (6.2) jest funkcja f następującej postaci:

$$f(u(t), 1, t) = b(t) \exp \int \frac{du(t)}{u(t) + \varepsilon(u(t))}. \quad (6.3)$$

Z powyższego wzoru wynika, że aby funkcja produkcji była zgodna z hipotezami (H 1) - (H 5), musi mieć postać

$$f(m(t), z(t), t) = b(t)g(m(t), z(t)). \quad (6.4)$$

gdzie funkcja $b: T \rightarrow E_+^1$ jest dodatnia i rosnąca (zgodnie z (H 4)), a funkcja $g: E_+^1 \times E_+^1 \rightarrow E_+^1$ - nieujemna, rosnąca i dodatnio jednorodna stopnia pierwszego (zgodnie z (H 1), (H 2), (H 3)). Równocześnie w myśl (H 4), (H 5)

$$g\left(\frac{m(t)}{z(t)}\right) = \alpha \frac{m(t)}{z(t)}, \\ b(t) = e^{\nu(t-t_0)},$$

gdzie $\alpha, \nu > 0$. Wtedy z (6.3) otrzymujemy

$$f(m(t), z(t), t) = z(t)e^{\nu(t-t_0)} \exp \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \int \frac{z(t)}{m(t)} d\left(\frac{m(t)}{z(t)}\right) \right\} = \\ = \alpha z(t)e^{\nu(t-t_0)} \exp \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \ln \frac{m(t)}{z(t)} \right\} = \alpha m^\xi(t) z^{1-\xi}(t) e^{\nu(t-t_0)},$$

gdzie $\xi = 1/(1+\alpha)$, α - jest stałą dodatnią. Funkcja $f: E_+^1 \times E_+^1 \times T \rightarrow E_+^1$ postaci

$$f(m(t), z(t), t) = \alpha m^\xi(t) z^{1-\xi}(t) e^{\nu(t-t_0)} \quad (6.5)$$

($\alpha > 0$, $0 < \xi < 1$, $\nu > 0$) nosi nazwę dynamicznej funkcji produkcji Cobba - Douglasa (jednorodnej stopnia 1). Parametr

$$\xi = \left[\frac{\partial f(m, z(t), t)}{\partial m} \Big|_{m=m(t)} \right] / \left[\frac{f(m(t), z(t), t)}{m(t)} \right]$$

oznacza tzw. elastyczność dochodu narodowego względem majątku produkcyjnego (wielkość niemianowana), parametr

$$1-\xi = \left[\frac{\partial f(m(t), z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z(t)} \right] / \left[\frac{f(m(t), z(t), t)}{z(t)} \right]$$

- elastyczność dochodu narodowego względem pracy. Parametr ν nazywamy wskaźnikiem (czystego) postępu techniczno-organizacyjnego (wymiar: $1/R$). Jeżeli $\nu = 0$, wtedy otrzymujemy tzw. statycz

ną funkcję produkcji Cobba - Douglasa (nie uwzględniającą postępu techniczno-organizacyjnego) $g: E_+^1 \times E_+^1 \rightarrow E_+^1$,

$$q(m(t), z(t)) = am^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t), \quad (6.6)$$

parametr a ma wymiar $1/R \cdot L$, gdzie R - ustalona jednostka czasu, np. $R = \text{rok}$, L - ustalona jednostka zatrudnienia, np. $L = 1$ milion zatrudnionych).

Lista dwuczynnikowych funkcji produkcji wyprowadzanych przy różnych hipotezach, mniej lub bardziej odbiegających od hipotez (H 1) - (H 5) jest pokaźna, jednak na podstawie dotychczasowych badań trudno jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie, które z nich lepiej opisują powiązania między majątkiem, pracą i produkcją w realnej gospodarce⁴⁶. W dalszym ciągu powiązania te opisujemy za pomocą funkcji produkcji Cobba-Douglasa

6.2. Optymalny podział dochodu narodowego w dwuczynnikowym modelu wzrostu z przedziałami ciągłą trajektorią inwestycji

6.2.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA MODELU⁴⁷

Odrzucając jednoczynnikową funkcję produkcji (5.2) w warunkach (5.1) - (5.3) i zastępując ją dwuczynnikową, dynamiczną (jednorodną stopnia 1) funkcją produkcji Cobba-Douglasa (6.5), otrzymujemy następujący układ warunków wzrostu majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji w horyzoncie czasu T :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(t) &= i(t) - \mu m(t), \\ y(t) &= am^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t)e^{\nu(t-t_0)}, \\ c(t) &= y(t) - i(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie

$$m(t_0) = m^0 \geq 0$$

jest początkową wielkością majątku produkcyjnego.

Trajektorie inwestycji z założenia są funkcjami przynajmniej przedziałami ciągłymi na T ($i \in C^0[T]$).

Założmy, podobnie jak w paragrafie 5, że ludność rośnie ze stałą stopą $\lambda > 0$, tzn. wzrost ludności opisuje funkcja l_T ,

$$l(t) = l^0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

⁴⁶ Obszerny przegląd funkcji produkcji zawiera praca N.B. Barkałow a [4].

⁴⁷ Modele wzrostu omawiane w tym paragrafie nawiązują do modelu R.M. Solowa [45] rozwiniętego m.in. przez K. Shella [44], por. także D. Cass [9], [10], O. Gedymin [19] s.174-188, L. Stoleru [46] rozdz.12.

gdzie l^0 jest liczbą ludności w momencie początkowym t_0 . Oznaczmy przez $\rho \in (0,1)$ wskaźnik aktywności zawodowej ludności (stosunek liczby pracujących w sferze produkcyjnej do liczby ludności ogółem, wielkość niemianowana). Wzrost zatrudnienia w horyzoncie czasu T opisuje zatem funkcja z_T ,

$$z(t) = z^0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (6.8)$$

gdzie $z^0 = \rho l^0$ oznacza zatrudnienie w momencie początkowym t_0 . Wprowadźmy oznaczenia:

$u(t) = m(t)/z(t)$ - techniczne uzbrojenie pracy w momencie t

(wymiar: $z\dot{l}/L$, L - ustalona jednostka zatrudnienia, np. w mln.osób), (6.9)

$w(t) = y(t)/z(t)$ - dochód narodowy na jednego zatrudnionego (średnia wydajność pracy, wymiar: $z\dot{l}/R \cdot L$). (6.10)

$r(t) = i(t)/z(t)$ - inwestycje na jednego zatrudnionego (wymiar: $z\dot{l}/R \cdot L$), (6.11)

$\chi(t) = c(t)/l(t)$ - konsumpcja na osobę (wymiar: $z\dot{l}/R \cdot L$). (6.12)

Po podstawieniu nowych zmiennych do (6.7), uwzględniając (6.8), otrzymujemy następujący równoważny układ warunków:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= r(t) - (\mu + \lambda)u(t), \\ w(t) &= \alpha u^\xi(t) e^{\nu(t-t_0)}, \\ r(t) &\in [0, w(t)], \\ u(t_0) &= u^0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

gdzie $u^0 = m^0/\rho l^0 > 0$.

6.2.2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA STEROWANIA OPTYMALNEGO

W układzie (6.13) warunek $r(t) \in [0, w(t)]$ można zastąpić warunkiem

$$r(t) = s(t)w(t), \quad s(t) \in [0, 1].$$

Przy tym $s \in \tilde{C}^0 [T]$, jeżeli $r \in \tilde{C}^0 [T]$. Dowód przebiega analogicznie jak dowód równoważności warunków (4.4) i (4.6) - (4.7) w punkcie 4.1. Z równania określającego wielkość konsumpcji w (6.7) po elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$\chi(t) = \alpha \rho (1-s(t)) u^\xi(t) e^{\nu(t-t_0)}, \quad (6.14)$$

a wobec tego zadanie maksymalizacji konsumpcji na osobę w horyzoncie czasu T przy warunkach (6.13) można zapisać w następującej postaci:

$$\max \int_T a_T (1-s(t)) u^E(t) e^{\nu(t-t_0)} dt, \quad (6.15)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = a_T (t) u^E(t) e^{\nu(t-t_0)} - (\mu+\lambda) u(t),$$

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in C^0[T], \quad (6.16)$$

$$u(t_0) = u^0,$$

gdzie $u^0 > 0$. Rolę sterowania w zadaniu tym pełni funkcja s_T udziału inwestycji w dochodzie narodowym. Równanie różniczkowe w (6.16) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (jednowymiarowego) systemu dynamicznego). Przekształceniem wyjścia jest funkcja podcałkowa w (6.15). Stanem wewnętrznym jest techniczne uzbrojenie pracy, stanem wyjścia - wielkość konsumpcji na osobę. Dopuszczalny proces wzrostu tworzy każda para trajektorii $(s, u)_T$ - udziału inwestycji w dochodzie narodowym i technicznego uzbrojenia pracy spełniająca warunki (6.16). Procesem optymalnym jest proces dopuszczalny $(s^*, u^*)_T$ maksymalizujący wielkość konsumpcji na osobę w horyzoncie czasu T .

Będziemy ponadto zakładać, że (a) elastyczność dochodu narodowego względem majątku produkcyjnego jest niższa od elastyczności dochodu narodowego względem pracy,⁴⁸ (b) wstrzymanie inwestycji w gospodarce powoduje spadek (ujemną stopę wzrostu) średniej wydajności pracy. Na gruncie naszego modelu warunki (a), (b) są równoważne z warunkiem następującym:

∇ Z a ł o ż e n i e 6.1. Elastyczność dochodu narodowego względem majątku spełnia warunek

$$\frac{1}{2} > \varepsilon > \frac{\nu}{\mu + \lambda}, \quad \nabla$$

Rzeczywiście, pierwsza część nierówności oznacza, że $\varepsilon < 1 - \varepsilon$, co odpowiada warunkowi (a). Jeżeli $s(t) = 0$ na $[\tau_1, \tau_2] \subset T$ oraz $\varepsilon > \nu / (\mu + \lambda)$, wtedy $u(t) = u(\tau_1) \exp\{- (\mu + \lambda)(t - \tau_1)\}$, $w(t) = a^E(\tau_1) \exp\{\nu(\tau_1 - t_0) + [\nu - \varepsilon(\mu + \lambda)](t - \tau_1)\}$, zatem

$$\frac{d}{dt} w(t) \cdot \frac{1}{w(t)} = \nu - \varepsilon(\mu + \lambda) < 0$$

na $[\tau_1, \tau_2]$, co odpowiada warunkowi (b).

Przy założeniu 6.1 rozwiązanie zadania (6.15) - (6.16) jest następujące.

⁴⁸ Zjawisko takie jest charakterystyczne dla rozwiniętej gospodarki, „czulszej” na zmiany zasobów pracy niż majątku.

□ T w i e r d z e n i e 6.1.⁴⁹ (1) Jeżeli wyjściowe techniczne uzbrojenie pracy jest wysokie, $u^0 > [a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, to rozwiązaniem zadania (6.15) - (6.16) jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1), \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1), \end{cases}$$

gdzie $s = \varepsilon [1 + \nu / (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] \in (0, 1)$.

Przedziały $[t_0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$, $[\tau_2, t_1)$ będziemy dalej nazywać fazami wzrostu: początkową, środkową i końcową. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, to znika faza środkowa ($\tau_1 = \tau_2$) i proces redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 0, \\ u^*(t) &= u^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} \end{aligned} \quad (*)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Jeżeli horyzont jest długi, $|T| > \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, wtedy pojawiają się wszystkie trzy fazy wzrostu, przy czym

$$\tau_1 = t_0 + \varphi_1 \ln d_1, \quad \tau_2 = \tau_1 - \varphi_2 \ln d_2 \quad (t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1),$$

gdzie $\varphi_1 = (1-\varepsilon) / [\nu + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]$, $\varphi_2 = [\varepsilon(\mu+\lambda) - \nu]^{-1}$,

$$d_1 = u^0 [(\mu+\lambda)/a\varepsilon]^{1/(1-\varepsilon)}, \quad d_2 = (\mu+\lambda) / [\nu + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]$$

(przy założeniu 6.1: $\varphi_2 > 0$ oraz $d_1, d_2 > 1$).

(ii) Niech $u^0 = [a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1), \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1), \end{cases}$$

⁴⁹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 6, twierdzenie 6.1 s. 245.

Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \varphi_2 \ln d_2$, to znika faza pierwsza ($\tau = t_0$) i proces przyjmuje postać (*). Jeżeli horyzont jest długi, $|T| > \varphi_2 \ln d_2$, wtedy pojawiają się obie fazy wzrostu, przy czym

$$\tau = t_1 - \varphi_2 \ln d_2 > t_0.$$

Oceny wskaźnika udziału inwestycji w dochodzie narodowym ε i parametrów φ_2, d_2 nie zmieniają się.

(iii) Niech $u^0 < [a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ \varepsilon & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{ [(u^0)^{1-\varepsilon} - a\varphi_1] e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + a\varphi_1 e^{\nu(t-t_0)} \right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1). \end{cases}$$

Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| < \varphi_3 \ln d_3$, to znikają pierwsze dwie fazy ($\tau_1 = \tau_2 = t_0$) i proces redukuje się do postaci (*). Jeżeli horyzont jest średniej długości, $\varphi_3 \ln d_3 < |T| < \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, wówczas znika faza środkowa ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$) i proces redukuje się do postaci:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{ [(u^0)^{1-\varepsilon} - a\varphi_1] e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + a\varphi_1 e^{\nu(t-t_0)} \right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie moment τ jest pierwiastkiem równania

$$1 + d(\tau) e^{-\nu(\tau-t_0)} = \varepsilon \varphi_2^{-1} (\tau-t_1),$$

w którym $d(\tau) = [\nu - \varepsilon(\mu + \lambda)] (u^*(\tau))^{1-\varepsilon} / a\varepsilon > 0$, $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w momencie τ w procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $s^*(t) = 1$ na przedziale $[t_0, \tau)$ i warunkiem początkowym $u^*(t_0) = u^0$. Jeżeli hory-

zont jest długi, $|T| > \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, wtedy pojawiają się wszystkie trzy fazy wzrostu, przy czym

$$\tau_1 = t_0 + \varphi_4 \ln d_4, \quad \tau_2 = t_1 - \varphi_2 \ln d_2 \quad (t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1),$$

gdzie $\varphi_3 = [\varepsilon(\mu + \lambda) - \nu]^{-1}$, $\varphi_4 = [\nu + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]^{-1}$, $d_3 = a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} / [a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} - \varepsilon(\mu + \lambda) + \nu]$, $d_4 = [c - (u^0)^{1-\varepsilon}] / [c - a\varepsilon / (\mu + \lambda)]$, $c = a(1 - \varepsilon) / [\nu + (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)]$

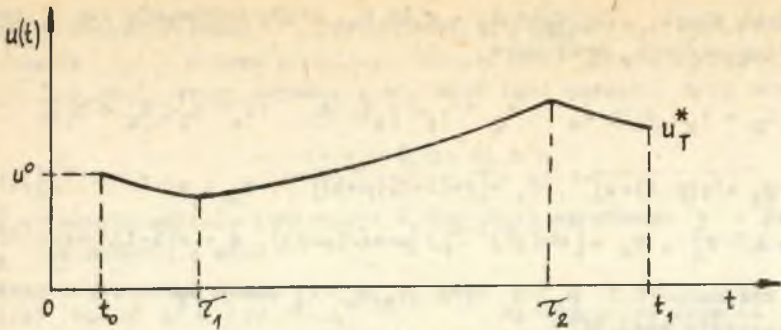
(przy założeniu 6.1: $\varphi_3 > 0$ oraz $d_3, d_4 > 1$; oceny pozostałych parametrów nie zmieniają się). ■

6.2.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalną trajektorię konsumpcji na osobę δ_T^* , dochodu narodowego na jednego zatrudnionego (wydajności pracy) w_T^* , a także konsumpcji c_T^* , dochodu narodowego y_T^* , majątku produkcyjnego m_T^* i inwestycji i_T^* otrzymujemy na podstawie (6.7) - (6.14). Postać rozwiązania zależy zarówno od długości horyzontu czasu T , jak i od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 . Przy wysokim wyjściowym technicznym uzbrojeniu pracy, w krótkim horyzoncie czasu, ⁵⁰ maksymalną wielkość konsumpcji na osobę daje proces wzrostu z zerowymi inwestycjami. Majątek produkcyjny kurczy się, obserwujemy spadek konsumpcji na osobę, technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy. Dochód narodowy rośnie (ze stopą niższą od stopy wzrostu ludności) lub maleje w zależności od tego, czy wyrażenie $\nu + \lambda - \varepsilon(\mu + \lambda)$ jest dodatnie, czy ujemne (jeżeli $\nu + \lambda - \varepsilon(\mu + \lambda) = 0$, to dochód narodowy w fazie tej utrzymuje się na stałym poziomie). Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy pojawia się środkowa faza równomiernego wzrostu wszystkich trajektorii. Poprzedza ją i kończy początkowa i końcowa faza konsumpcyjna z malejącymi trajektoriami majątku, konsumpcji na osobę, technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy (rys.6.1). W miarę wydłużania horyzontu czasu T , rośnie długość fazy środkowej. Długości pozostałych faz są ograniczone.

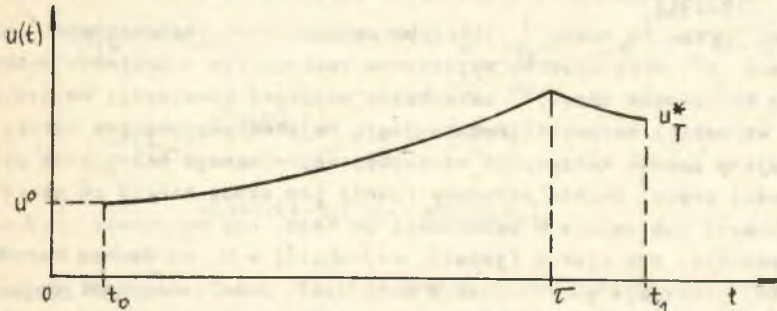
Jeżeli w momencie początkowym t_0 techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = [a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$ i horyzont czasu jest krótki, wtedy, podobnie jak poprzednio, maksymalną wielkość konsumpcji na osobę daje proces wzrostu z zerowymi inwestycjami, czemu towarzyszy spadek majątku produkcyjnego konsumpcji na osobę, technicznego uzbrojenia pracy itd. W długim horyzoncie czasu T obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej ma miejsce równomierny wzrost majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, inwestycji, konsumpcji a także technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy i konsumpcji na osobę. W fazie drugiej wstrzymane zostają inwestycje,

⁵⁰ Ocenę poziomu wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy i długości horyzontu czasu T we wszystkich wariantach rozwiązania podaje twierdzenie 6.1.



Rys.6.1. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.15) - (6.16) w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest wysokie i horyzont czasu jest długi

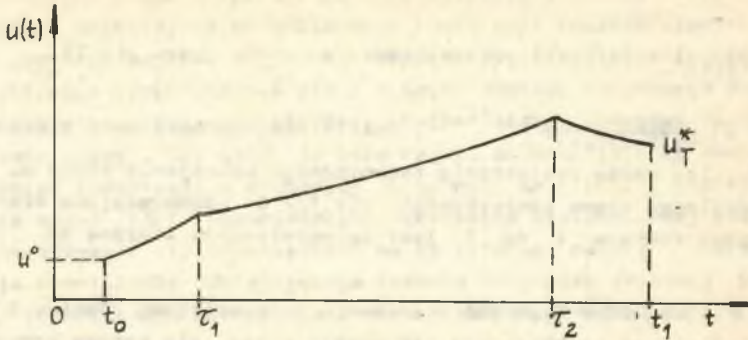
wzrasta konsumpcja, co powoduje spadek wielkości majątku produkcyjnego, technicznego uzbrojenia pracy itd. (rys.6.2). Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłuższa jest faza początkowa równomiernego wzrostu.



Rys.6.2. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.15) - (6.16) w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = [a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$ i horyzont czasu jest długi

Przy niskim wyjściowym technicznym uzbrojeniu pracy obserwujemy trzy typy procesów wzrostu. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy optymalny proces wzrostu charakteryzuje się zerowymi inwestycjami. Jeżeli horyzont czasu T jest średniej długości, wtedy pojawia się, jako pierwsza, faza inwestycyjna, po której dopiero następuje faza konsumpcyjna. W fazie inwestycyjnej cały dochód narodowy przeznaczony zostaje na inwestycje (zarówno konsumpcja), szybko rośnie majątek produkcyjny, dochód narodowy, techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy. W fazie konsumpcyjnej wstrzymane zostają inwestycje, cały dochód przeznaczony zostaje na konsumpcję, majątek produkcyjny maleje. Wreszcie, jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy pojawiają się trzy fazy wzrostu: początkowa - inwestycyjna, środkowa - równomiernego wzrostu i końcowa - konsumpcyjna (rys. 6.3). W fazie środkowej obserwujemy umiarkowany, równomierny wzrost ma-

jątku produkcyjnego, dochodu narodowego i konsumpcji, a także technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy oraz konsumpcji na osobę. Faza ta jest tym dłuższa, im dłuższy jest horyzont czasu T . Długości pozostałych faz są ograniczone.



Rys.6.3. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.15) - (6.16) w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest niskie i horyzont czasu jest długi

Jak pamiętamy, w optymalnych procesach wzrostu w modelach jednoczynnikowych wraz ze wzrostem długości całego horyzontu czasu T rosła długość fazy inwestycyjnej. Obecnie - we wszystkich wariantach zadania (6.15) - (6.16) z dwuczynnikową funkcją produkcji - długość fazy inwestycyjnej jest ograniczona. Co więcej, faza ta pojawia się tylko przy niskim początkowym technicznym uzbrojeniu pracy. Rola fazy inwestycyjnej ulega swoistej degradacji, a kluczowego znaczenia nabiera faza równomiernego wzrostu.

6.2.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Przyjrzyjmy się procesom wzrostu w G -równowadze (w sensie definicji 2.1) ze stałymi stopami wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę, a więc procesom, w których

$$\sigma(u, \delta) = (\delta_u, \delta_\delta) = \left(\frac{d}{dt} u \cdot \frac{1}{u}, \frac{d}{dt} \delta \cdot \frac{1}{\delta} \right) = \text{const.}$$

Rozpatrzmy trzy typy takich procesów różniące się sterowaniami $s \in C^1[T]$.

(A) Sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = 0$ na T odpowiadają w takiej G -równowadze trajektorie $\bar{u}_T, \bar{\delta}_T$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \bar{u}^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)}, \\ \bar{\delta}(t) &= a \varrho (\bar{u}^0)^{\varepsilon} e^{[-\varepsilon(\mu+\lambda)+\nu](t-t_0)}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$((\delta_{\bar{u}}(t), \delta_{\bar{\delta}}(t)) = (-(\mu+\lambda), -\varepsilon(\mu+\lambda)+\nu) < 0$ w każdym momencie czasu $t \in T$)
gdzie \bar{u}^0 oznacza dowolne dodatnie początkowe techniczne uzbrojenie pracy.

(B) Sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = 1$ na T odpowiada w σ -równowadze tylko jedna para trajektorii $\bar{u}_T, \bar{\delta}_T$:

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= \bar{u}^0 e^{\frac{1}{1-\varepsilon}(t-t_0)}, \\ \bar{\delta}(t) &= 0,\end{aligned}\tag{6.18}$$

$(\delta \bar{u}(t), \delta \bar{\delta}(t)) = (v/(1-\varepsilon), 0)$ w każdym momencie czasu $t \in T$,

gdzie $\bar{u}^0 = \left[\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{v+(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)} \right]^{1/(1-\varepsilon)}$. Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to każda trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T wychodząca z dowolnego stanu początkowego $u(t_0) > 0$ odpowiadająca sterowaniu tożsamościowo równemu 1 na T jest asymptotycznie zbieżna do trajektorii \bar{u}_T .

(C) W σ -równowadze typu (B) sterowaniu tożsamościowo równemu 1 odpowiada szybki wzrost technicznego uzbrojenia pracy, ale zerowa konsumpcja. Przy zerowym sterowaniu, w σ -równowadze typu (A), mamy co prawda dodatnią konsumpcję, lecz zarówno konsumpcja na osobę, jak i techniczne uzbrojenie pracy maleją (ujemne stopy wzrostu). Spróbujmy ustalić, czy istnieją procesy wzrostu ze stałymi, dodatnimi stopami wzrostu zarówno technicznego uzbrojenia pracy, jak i konsumpcji na osobę? Odpowiedź na to pytanie nie jest trudna. Chodzi o to, czy istnieją takie funkcje u_T, δ_T, s_T spełniające układ równań

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} u(t) &= as(t)u^\varepsilon(t)e^{v(t-t_0)} - (\mu+\lambda)u(t), \\ \dot{\chi}(t) &= a\varrho(1-s(t))u^\varepsilon(t)e^{v(t-t_0)},\end{aligned}$$

ze

$$\begin{aligned}u(t) &= u^0 e^{\alpha(t-t_0)}, \\ \chi(t) &= \chi^0 e^{\beta(t-t_0)}, \\ s: T &\rightarrow [0, 1],\end{aligned}$$

$s \in C^1[T]$, gdzie $u^0, \chi^0, \alpha, \beta > 0$.

Rozwiązań takich jest nieskończenie wiele, przy czym okazuje się, że (a) w każdym rozwiązaniu stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę $\alpha = \beta = v/(1-\varepsilon)$, (b) rozwiązania związane są zależnościami:

$$\chi^0 = a\varrho(u^0)^\varepsilon - \varrho\left(\frac{v}{1-\varepsilon} + \mu + \lambda\right)u^0,$$

$$s(t) = \sum(u^0) = \left(\frac{v}{1-\varepsilon} + \mu + \lambda\right)(u^0)^{1-\varepsilon}/a = \text{const.} \in (0, 1).$$

Procesy spełniające warunki (a), (b) nazywamy procesami równomiernego (zrównoważonego) wzrostu. Widzimy, że różne strategie akumulacji prowadzą do równomiernego wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji ze stałą stopą $v/(1-\varepsilon)$ (lecz na różnych poziomach). Majątek produkcyjny, dochód narodowy i konsumpcja rosną odpowiednio ze stopą $v/(1-\varepsilon)+\lambda$. Z tą samą stopą rośnie część dochodu narodowego, pozostająca po odliczeniu inwestycji umożliwiających odtworzenie zużytego majątku i jego wzrost ze stopą równą stopie wzrostu ludności: $y(t) - (\mu + \lambda)m(t)$ (innymi słowy - część dochodu narodowego po odliczeniu inwestycji, które są niezbędne, aby nie nastąpił spadek technicznego uzbrojenia pracy). Czy istnieje taka reguła akumulacji (czy można ustalić taki udział inwestycji w dochodzie narodowym $\bar{u} = \sum (\bar{u}^0)$), której w każdym momencie czasu $t \in T$ odpowiadałaby maksymalna wielkość owej nadwyżki dochodu narodowego? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy ustalić, czy istnieje rozwiązanie następującego zadania (względem zmiennej u^0 - wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy, w każdym momencie $t \in T$):

$$\max \{ y(t) - (\mu + \lambda)m(t) \}$$

przy założeniach:

$$y(t) = au^\varepsilon(t)z(t)e^{v(t-t_0)}$$

$$m(t) = u(t)z(t), \quad z(t) = z^0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

$$u(t) = u^0 \exp \left\{ \frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0) \right\},$$

$$\bar{y}(t) = \bar{y}^0 \exp \left\{ \frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0) \right\},$$

$$\bar{y}^0 = a\varrho(u^0)^\varepsilon - \varrho\left(\frac{v}{1-\varepsilon} + \mu + \lambda\right)u^0 > 0,$$

$$\sum (u^0) = \left[\left(\frac{v}{1-\varepsilon} + \mu + \lambda \right) (u^0)^{1-\varepsilon} / a \right] \in (0, 1).$$

Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do ustalenia wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy

$$\bar{u}^0 = \arg \max_{u^0 \in (0, \bar{u}^0)} \left\{ a(u^0)^\varepsilon - (\mu + \lambda)u^0 \right\}, \quad (6.19)$$

gdzie $\bar{u}^0 = \left[\frac{a(1-\varepsilon)}{v + (1-\varepsilon)(\mu + \lambda)} \right]^{1/(1-\varepsilon)}$. Funkcja $a(u^0)^\varepsilon - (\mu + \lambda)u^0$ zmiennej u^0 jest ściśle wypukła do góry na półosi $(0, +\infty)$. Przyrównując jej pochodną do zera, otrzymujemy (przy założeniu 6.1)

$$\bar{u}^0 = \left(\frac{a}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon)} \in (0, \bar{u}^0),$$

zatem

$$\bar{y}^0 = a\varrho \left\{ 1 - \varepsilon \left[1 + v / (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda) \right] \right\} \left(\frac{a\varepsilon}{\mu + \lambda} \right)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$$

ORAZ

$$\bar{s}(t) = \varepsilon [1 + \nu / (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] \in (0, 1) ,$$

$$u(t) = \bar{u}^0 \exp \left\{ \frac{\nu}{1 - \varepsilon} (t - t_0) \right\} , \quad (6.19')$$

$$\bar{y}(t) = \bar{y}^0 \exp \left\{ \frac{\nu}{1 - \varepsilon} (t - t_0) \right\}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Proces $(\bar{s}, \bar{u})_T$ nazywamy procesem maksymalnego zrównoważonego wzrostu.

Interesującą interpretacją na proces maksymalnego zrównoważonego wzrostu w przypadku statycznej funkcji produkcji (6.6) (ze wskaźnikiem postępu technicznego $\nu = 0$). Techniczne uzbrojenie pracy i konsumpcja na osobę w takim procesie „rosną” z zerową stopą ,

$$\bar{s}(t) = \varepsilon ,$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}^0 = [a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)} ,$$

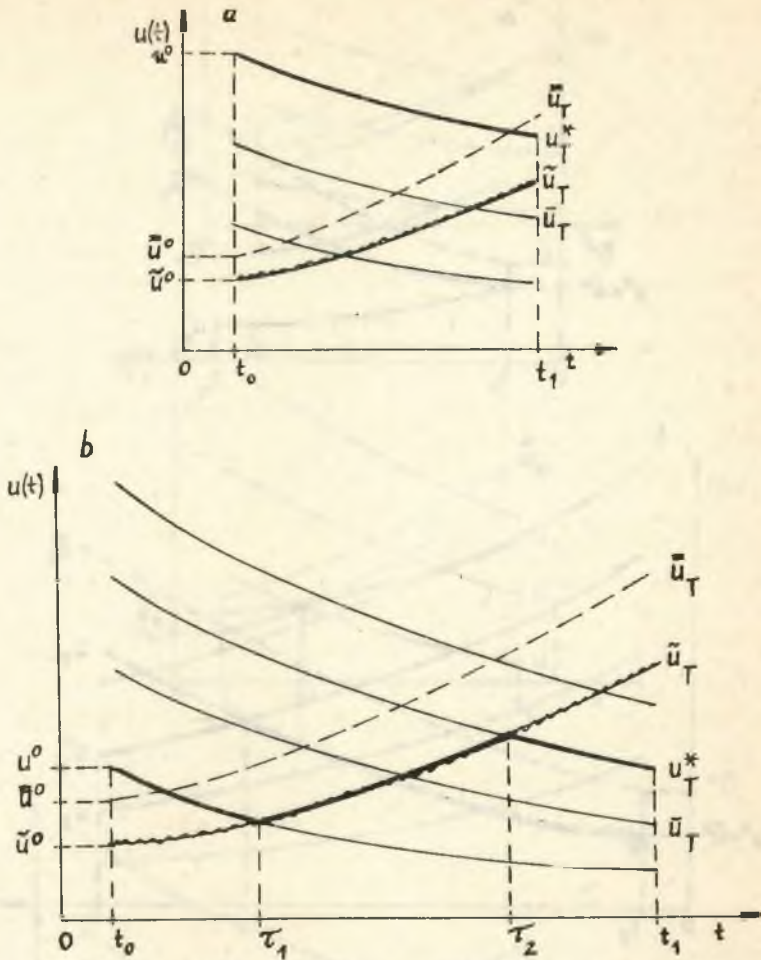
$$\bar{y}(t) = \bar{y}^0 = aq(1-\varepsilon)(\bar{u}^0)^\varepsilon = aq(1-\varepsilon)[a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ (majątek produkcyjny, dochód narodowy i konsumpcja rosną ze stopą λ równą stopie wzrostu ludności), a cała nadwyżka dochodu narodowego ponad tę jego część, która skierowana zostaje na inwestycje w celu utrzymania technicznego uzbrojenia pracy na stałym poziomie \bar{u}^0 , przeznaczona zostaje na konsumpcję: $\bar{y}(t) - (\mu + \lambda)\bar{u}(t) = \bar{c}(t)$. Reguła akumulacji w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu prowadzi zatem do maksymalizacji konsumpcji (tym samym konsumpcji na osobę) w każdym momencie czasu $t \in T$ ⁵¹.

Wróćmy do rozwiązania zadania (6.15) - (6.16) i prześledźmy przebieg optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy u_T^* .

(i) $u^0 > [a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$, tzn. $u^0 > \bar{u}^0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, to optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* jest tożsama z jedną z trajektorii \bar{u}_T postaci (6.17) w \mathcal{G} -równowadze typu (A) (rys.6.4.a). Jeżeli horyzont jest długi, wówczas trajektoria u_T^* przecina się w pewnym momencie z trajektorią \bar{u}_T postaci (6.19') w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu (w \mathcal{G} -równowadze typu (C)), przez pewien czas jest tożsama z nią, a następnie oddala się od niej po jednej z trajektorii \bar{u}_T w \mathcal{G} -równowadze typu (A) (rys.6.4.b). Im dłuższy jest horyzont tym dłuższa jest faza środkowa, w której optymalna trajektoria u_T^* jest tożsama z trajektorią \bar{u}_T w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu.

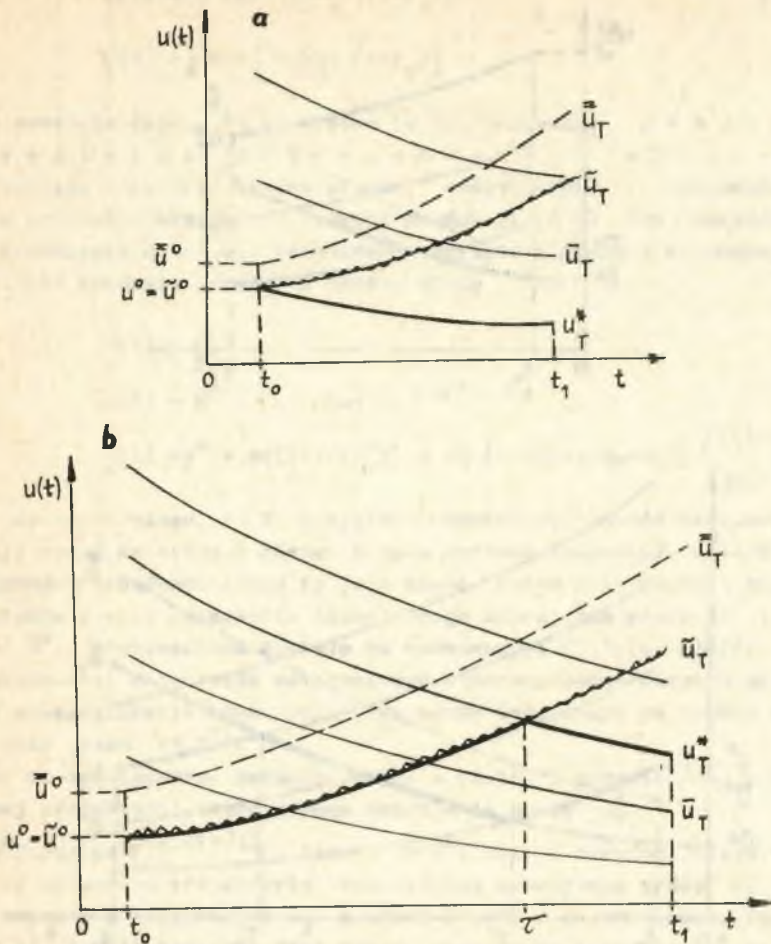
⁵¹ E. P h e l p s [40] regułę tę nazywa z ł o t ą r e g u ł ą a k u m u l a c j i, por. także O. G e d y m i n [19], L. S t o - l e r u [46] rozdz.12 oraz pracę [34] rozdz.13. Stopa $\bar{s} = \varepsilon$ nazywana była z ł o t ą s t o p ą a k u m u l a c j i.



Rys.6.4. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i (a) krótkiego horyzontu czasu, (b) długiego horyzontu czasu

(ii) $u^0 = [\alpha\epsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\epsilon)}$, tzn. $u^0 = \tilde{u}^0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wówczas następuje natychmiastowe „zejście” optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy u_T^* z trajektorii \tilde{u}_T w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu po jednej z trajektorii \tilde{u}_T w G -równowadze typu (A) (rys.6.5.a). Jeżeli horyzont jest długi, wtedy w fazie początkowej optymalna trajektoria u_T^* jest tożsama z trajektorią \tilde{u}_T w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu, następnie oddala się

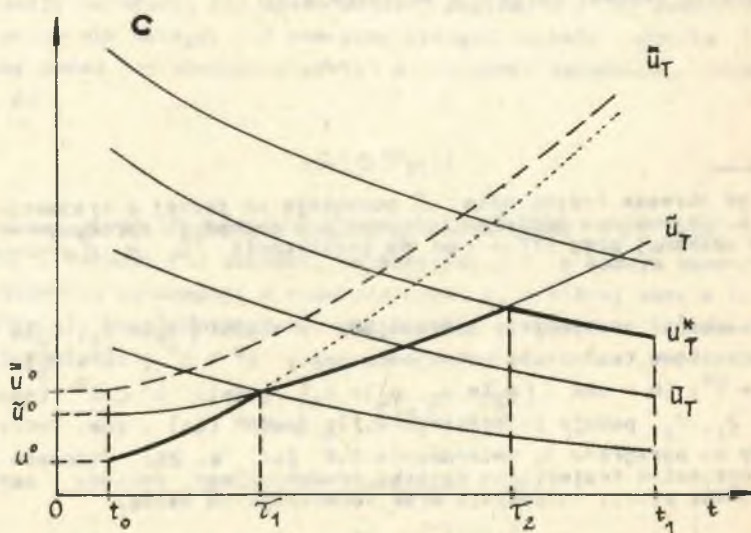
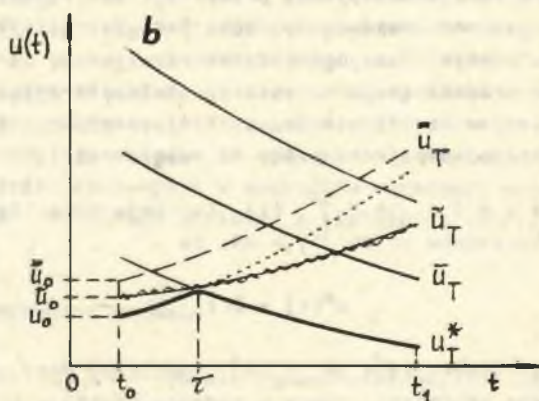
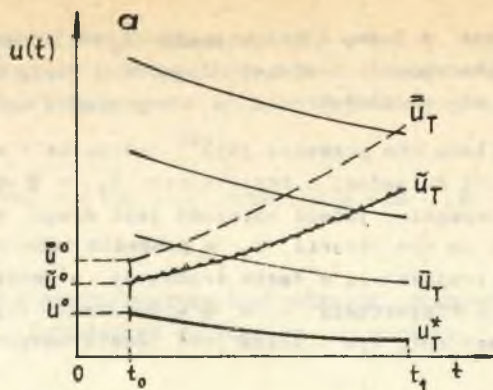
od niej po jednej z trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (A) (rys.6.5.b). W miarę wydłużania horyzontu czasu T rośnie długość fazy pierwszej.



Rys.6.5. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = \tilde{u}^0 = [a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$ i (a) horyzont czasu jest krótki, (b) horyzont czasu jest długi

(iii) $u^0 < [a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, tzn. $u^0 < \tilde{u}^0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wówczas optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pra-

Rys.6.6. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i (a) krótkiego horyzontu czasu, (b) horyzontu czasu średniej długości, (c) długiego horyzontu czasu



cy u_T^* jest tożsama z jedną z trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (A) (rys.6.6.a). Przy horyzoncie średniej długości w fazie pierwszej trajektoria u_T^* zbliża się do trajektorii \bar{u}_T w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu (lecz nie przecina jej)⁵² następnie - w fazie drugiej - oddala się od niej po jednej z trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (A) (rys.6.6.b). Wreszcie, jeżeli horyzont jest długi, wtedy w fazie początkowej dochodzi do trajektorii \bar{u}_T w procesie zrównoważonego wzrostu, jest tożsama z tą trajektorią w fazie środkowej, a następnie oddala się od niej po jednej z trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (A) (rys.6.6.c). Im dłuższy jest horyzont, tym dłuższa jest faza środkowa.

We wszystkich rozwiązaniach obserwujemy przybliżanie się optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy u_T^* do trajektorii \bar{u}_T w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu (magistrali): im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłużej gospodarka rozwija się na magistrali. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy w horyzoncie czasu T jest zbieżna do stopy wzrostu $v/(1-\varepsilon)$ technicznego uzbrojenia pracy na magistrali.

Twierdzenie 6.2.⁵³ (1) Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli długość horyzontu czasu $|T| > 2\theta$, to

$$u^*(t) = \bar{u}(t)$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta, t_1 - \theta]$, gdzie u_T^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w zadaniu (6.15) - (6.16), \bar{u}_T - trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w procesie maksymalnego, zrównoważonego wzrostu postaci (6.19') (magistralę).

⁵² W tym okresie trajektoria u^* pozostaje na jednej z trajektorii - w procesie z maksymalnym udziałem inwestycji w dochodzie narodowym - asymptotycznie zbieżnej przy $|T| \rightarrow +\infty$ do trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (B).

⁵³ Warunek (1) otrzymujemy przyjmując: $\theta = \max \{ \varphi_1 \ln d_1, \varphi_2 \ln d_2 \}$, jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 > \bar{u}^0$; $\theta = \varphi_2 \ln d_2$, jeżeli $u^0 = \bar{u}^0$; $\theta = \max \{ \varphi_2 \ln d_2, \varphi_4 \ln d_4 \}$ jeżeli $u^0 < \bar{u}^0$ (oceny parametrów φ_1, d_1 podaje twierdzenie 6.1). Dowód (ii) - zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 6, twierdzenie 6.2 (ii) s. 252. Podobnie zachowują się optymalne trajektorie majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, wydajności pracy, konsumpcji oraz konsumpcji na osobę.

(11) Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to średnia stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w procesie optymalnym jest asymptotycznie zbliżona do stopy wzrostu $v/(1-\varepsilon)$ technicznego uzbrojenia pracy na magietrali :

$$\delta u_T^* \rightarrow v/(1-\varepsilon) \text{ przy } |T| \rightarrow +\infty . \blacksquare$$

6.3. Model z niemalejącym technicznym uzbrojeniem pracy i dodatnim poziomem konsumpcji

W realnej gospodarce niemożliwe jest ani całkowite wstrzymanie konsumpcji, ani inwestycji. Tymczasem w rozwiązaniu zadania (6.15) - 6.16) przynajmniej jedna z tych ewentualności zachodzi zawsze, niezależnie od długości horyzontu czasu T i początkowego technicznego uzbrojenia pracy. Obserwujemy poza tym spadek technicznego uzbrojenia i wydajności pracy w konsumpcyjnej fazie wzrostu, który - choć możliwy - w praktyce jest niepożądany. Wyeliminujemy obecnie te zjawiska i prześledzimy procesy wzrostu, w których udział konsumpcji w dochodzie narodowym nigdy nie spada poniżej ustalonego minimalnego poziomu, a techniczne uzbrojenie pracy nie maleje.

6.3.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Oznaczmy przez $\delta^0 > 0$ ustalony minimalny udział konsumpcji w dochodzie narodowym (wielkość niemianowana). Interesuje nas taki podział dochodu narodowego w horyzoncie czasu T , przy którym (a) udział konsumpcji w dochodzie narodowym nie spada poniżej poziomu δ^0 , (b) techniczne uzbrojenie pracy nie maleje, (c) zmaksymalizowana zostaje nadwyżka konsumpcji na osobę ponad jej minimalny udział w dochodzie narodowym. Warunek (a) oznacza, że

$$c(t) \geq \delta^0 y(t) ,$$

a tym samym $\chi(t) \geq \delta^0 \varphi w(t)$ w każdym momencie czasu $t \in T$ (zob.(6.8) - (6.12)). Warunek (b) oznacza, że $du(t)/dt \geq 0$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Nadwyżka konsumpcji w momencie czasu t , o której mowa w (c), wynosi $\chi(t) - \delta^0 \varphi w(t)$. Uwzględniając warunki (6.13), otrzymujemy zadanie w następującej postaci:

$$\max \int [\chi(t) - \delta^0 \varphi w(t)] dt , \quad (6.20)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = r(t) - (\mu + \lambda) u(t) ,$$

$$w(t) = au^\varepsilon(t) e^{v(t-t_0)} ,$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varrho(w(t) - r(t)), \\ r(t) &\in [0, w(t)], \quad r \in \tilde{C}^0 [T], \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &\geq 0, \quad \gamma(t) \geq \delta^0 \varrho w(t), \\ u(t_0) &= u^0 \end{aligned}$$

($u^0 > 0$). W punkcie tym nadal obowiązuje założenie 6.1. Aby nieco uprościć dalsze wywody założymy ponadto, że istnieje rozwiązanie $(u, w, \gamma, r)_T$ układu (6.21), któremu odpowiada dodatnia stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w momencie początkowym t_0 . W układzie (6.21) warunek ten spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione jest

$$\nabla \text{Z a łoż e n i e 6.2.}^{54} \quad u^0 < \left(\frac{s(1-\delta^0)}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon)}. \quad \blacktriangledown$$

6.3.2. ZADANIE RÓWNOWAŻNE

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

\square T w i e r d z e n i e 6.3.⁵⁵ Przy założeniu 6.2. warunki

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= r(t) - (\mu + \lambda)u(t), \\ r(t) &\in [0, w(t)], \\ \frac{d}{dt} u(t) &\geq 0, \quad \gamma(t) \geq \delta^0 \varrho w(t) \end{aligned}$$

w układzie (6.21) są równoważne z następującymi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= s(t) [(1-\delta^0)w(t) - (\mu + \lambda)u(t)], \\ \gamma(t) &= \varrho [s(t)\delta^0 w(t) + (1-s(t))(w(t) - (\mu + \lambda)u(t))], \\ s(t) &\in [0, 1], \quad s \in \tilde{C}^0 [T]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Na podstawie tego twierdzenia zadanie (6.20) - (6.21) jest równoważne z następującym zadaniem sterowania optymalnego:

$$\begin{aligned} \max \int \varrho(1-s(t)) [(1-\delta^0)au^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)} - (\mu + \lambda)u(t)] dt, \quad (6.20') \\ \frac{d}{dt} u(t) &= s(t) [(1-\delta^0)au^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)} - (\mu + \lambda)u(t)], \end{aligned}$$

⁵⁴ Podobne założenie występuje w twierdzeniu 6.1 (iii).

⁵⁵ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 6, twierdzenie 6.3 a. 253.

$$\begin{aligned} s(t) \in [0, 1], \quad s \in \bar{C}^0[T], \\ u(t_0) = u^0. \end{aligned} \quad (6.21')$$

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (6.20') - (6.21'), to rozwiązaniem zadania (6.20) - (6.21) jest proces $(u^*, w^*, \gamma^*, r^*)_T$, gdzie:

$$\begin{aligned} w^*(t) &= au^*(t)^\varepsilon \exp\{\nu(t-t_0)\}, \\ \gamma^*(t) &= \rho[s^*(t)\delta^0 w^*(t) + (1-s^*(t))(w^*(t) - (\mu+\lambda)u^*(t))], \\ r^*(t) &= w^*(t) - \frac{1}{\rho} \gamma^*(t). \end{aligned}$$

Odwrotnie, jeżeli czwórka $(u^*, w^*, \gamma^*, r^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (6.20) - (6.21), to znajdzie się taka funkcja $s^*: T \rightarrow [0, 1]$, $s^* \in \bar{C}^0[T]$, że para $(s^*, u^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (6.20') - (6.21'). Równanie różniczkowe w (6.21') opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (jednowymiarowego, niestacjonarnego) systemu dynamicznego (w sensie definicji 1.1 - 1.3). Sterowaniem jest funkcja s_T udziału inwestycji w części dochodu narodowego pozostającej po odliczeniu „minimum konsumpcyjnego” oraz nakładów uniemożliwiających spadek technicznego uzbrojenia pracy. Stanem wewnętrznym jest techniczne uzbrojenie pracy, stanem wyjścia - konsumpcja na osobę:

$$\gamma(t) = \rho [s(t) \delta^0 au^\varepsilon(t) e^{\nu(t-t_0)} + (1-s(t))(au^\varepsilon(t) e^{\nu(t-t_0)} - (\mu+\lambda)u(t))]. \quad (6.22)$$

Przy założeniach 6.1, 6.2 rozwiązanie zadania (6.20') - (6.21') jest następujące.

Twierdzenie 6.4.⁵⁶ (i) Niech $u^0 \in (u, u_{\max})$, gdzie

$$u = [a\varepsilon(1-\delta^0)/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}, \quad u_{\max} = u\varepsilon^{1/(\varepsilon-1)}.$$

Wtedy rozwiązaniem zadania (6.20') - (6.21') jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

⁵⁶ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 6, twierdzenie 6.4 s. 254.

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1) , \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2) , \\ u^*(\tau_2) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1] . \end{cases}$$

gdzie $s = \nu\varepsilon/(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)^2 \in (0,1)$ (przy założeniu 6.1). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \nu^{-1} \ln d_1 + d_2$, to $\tau_1 = \tau_2$ (wtedy $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0$ w każdym momencie czasu $t \in T$). Jeżeli horyzont jest długi, $|T| > \nu^{-1} \ln d_1 + d_2$, to $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \nu^{-1} \ln d_1$, τ_2 jest pierwiastkiem równania

$$1 + \frac{\nu}{\mu+\lambda} + \nu(t_1 - \tau_2) = e^{\nu(t_1 - \tau_2)} , \quad (*)$$

gdzie $d_1 = (u^0)^{1-\varepsilon}(\mu+\lambda)/\alpha\varepsilon(1-\delta^0)$, $d_2 = t_1 - \tau_2$ (przy założeniach 6.1,

6.2: $d_1 > 0$, $d_2 > 0$).

(ii) Niech $u^0 = u$. Wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ u^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

przy czym $\tau = t_0$, jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq d_2$, oraz $t_0 < \tau < t_1$, τ - pierwiastek równania (*) (po podstawieniu τ zamiast τ_2), jeżeli horyzont jest długi, tzn. $|T| > d_2$. Oceny wskaźnika udziału inwestycji w dochodzie s i parametru d_2 nie zmieniają się.

(iii) Jeżeli $u^0 < u$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_2) , \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2) , \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1] , \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{ (1-\delta^0) \left[\left(\frac{u^0}{1-\delta^0} \right)^{1-\varepsilon} - c \right] e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + c e^{\nu(t-t_0)} \right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $c = a(1-\varepsilon) / [\nu + (\mu + \lambda)(1-\varepsilon)]$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq d_3$, to $\tau_1 = \tau_2 = t_0$ (wtedy $e^*(t) = 0, u^*(t) = u^0$ w każdym momencie czasu $t \in T$), gdzie $d_3 = \tau - t_0$, moment τ jest pierwiastkiem równania

$$\varphi_1 + \frac{\nu}{\mu + \lambda} + \nu(\tau - t_0) = \varphi_1 e^{\nu(\tau - t_0)}$$

w którym $\varphi_1 = a\varepsilon(1-\delta^0)(u^0)^{\varepsilon-1} / (\mu + \lambda)$. Jeżeli horyzont jest średniej długości $d_3 < |T| \leq d_2 + \varphi_2 \ln d_4$, wtedy $\tau_1 = \tau_2 = \tau \in \text{int } T$, gdzie moment τ jest pierwiastkiem równania

$$\frac{\nu}{a\varepsilon} [1 + (\mu + \lambda)(t_1 - \tau)] (u^*(\tau))^{1-\varepsilon} = (e^{\nu(t_1 - t_0)} - e^{\nu(\tau - t_0)})(1 - \delta^0),$$

w którym $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w momencie τ w procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $e^*(t) = 1$ na przedziale $[t_0, \tau]$ i warunkiem początkowym $u^*(t_0) = u^0$.

$$\varphi_2 = [\nu + (\mu + \lambda)(1-\varepsilon)]^{-1}, d_4 = [c - (u^0)^{1-\varepsilon}(1-\delta^0)^{-1}] / [c - a\varepsilon(\mu + \lambda)^{-1}]$$

Jeżeli horyzont jest długi, $|T| > d_2 + \varphi_2 \ln d_4$, wówczas $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \varphi_2 \ln d_4$, τ_2 jest pierwiastkiem równania (*) (oceny pozostałych parametrów nie zmieniają się). ■

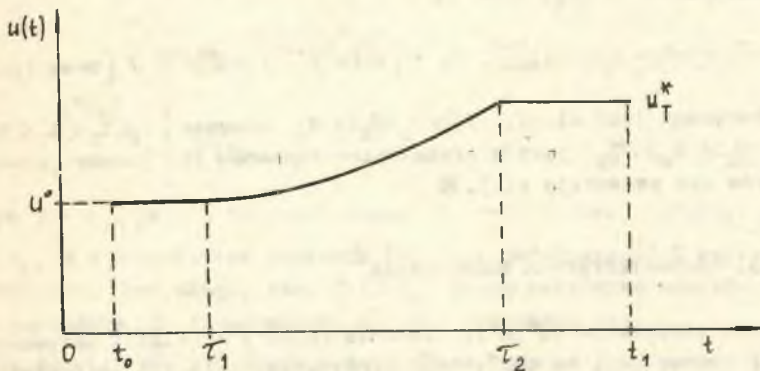
6.3.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Znając rozwiązanie $(s^*, u^*)_T$ zadania (6.20') - (6.21') optymalną trajektorię konsumpcji na osobę δ_T^* , otrzymujemy z (6.22), a trajektorie wydajności pracy w_T^* , konsumpcji c_T^* , dochodu narodowego y_T^* , majątku produkcyjnego m_T^* i inwestycji i_T^* na podstawie (6.7) - (6.12) pamiętając, że $w(t) = a\varepsilon^t \exp\{\nu(t-t_0)\}$. Podobnie jak w zadaniu (6.15) - (6.16), również obecnie postać optymalnego procesu wzrostu zależy od wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy i długości horyzontu czasu T . W odróżnieniu od zadania (6.15) - 6.16) wszystkie trajektorie poza trajektoriami inwestycji, konsumpcji oraz konsumpcji na osobę są przynajmniej słabo rosnące. Konsumpcja i inwestycje rosną przedziałami.

Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest wysokie ($u^0 \in (u, u_{\max})$), a horyzont czasu T krótki⁵⁷ wtedy w całym horyzoncie

⁵⁷ Ocenę poziomu wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy i długości horyzontu czasu T podaje twierdzenie 6.4.

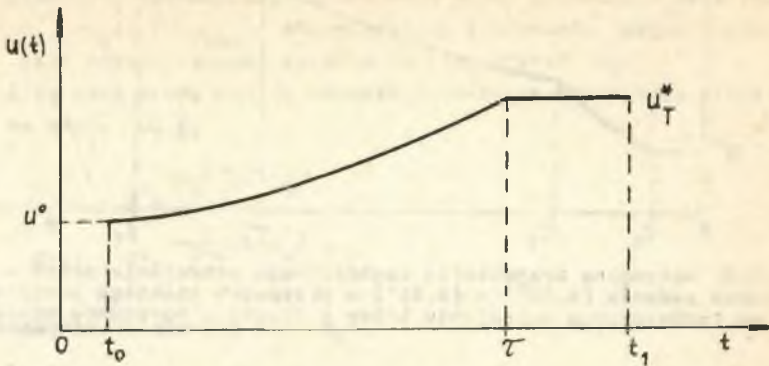
czasu techniczne uzbrojenie pracy utrzymuje się na wyjściowym poziomie u^0 , majątek produkcyjny i inwestycje rosną ze stopą λ równą stopie wzrostu ludności, wydajność pracy rośnie ze stopą ψ dzięki postępowi techniczno-organizacyjnemu, dochód narodowy - ze stopą $\psi + \lambda$. Konsumpcja na osobę rośnie z dodatnią stopą, szybciej niż wydajność pracy. W długim horyzoncie czasu obserwujemy trzy fazy wzrostu. W fazie początkowej - konsumpcyjnej - przebieg trajektorii jest podobny jak w krótkim horyzoncie czasu. W fazie środkowej - równomiernego wzrostu - rośnie udział inwestycji w dochodzie narodowym, co powoduje szybszy wzrost majątku produkcyjnego, dochodu narodowego i konsumpcji, a także konsumpcji na osobę i wydajności pracy. Techniczne uzbrojenie pracy zaczyna rosnąć z dodatnią stopą. Konsumpcja oraz konsumpcja na osobę rosną szybciej niż w fazie początkowej, lecz „startują” z poziomu niższego od poziomu osiągniętego pod koniec tej fazy. W fazie końcowej, znowu konsumpcyjnej, przebieg trajektorii jest podobny jak w fazie początkowej (stabilizacja technicznego uzbrojenia pracy na poziomie osiągniętym pod koniec fazy środkowej, wzrost wydajności pracy ze stopą ψ itd., rys.6.7). Konsumpcja oraz konsumpcja na osobę rosną wolniej, „startują” jednak z poziomu wyższego od poziomu osiągniętego pod koniec fazy drugiej. W miarę wydłużania horyzontu czasu T rośnie długość fazy środkowej - równomiernego wzrostu. Długości pozostałych faz są ograniczone.



Rys.6.7. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.20') - (6.21') w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i długiego horyzontu czasu

Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = u$ i horyzont czasu T jest krótki, wówczas mamy sytuację podobną do opisanej uprzednio (w przypadku krótkiego horyzontu czasu T i wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy), tzn. utrzymywanie się technicznego uzbrojenia pracy na wyjściowym poziomie u^0 , wolny wzrost wydajności pracy i konsumpcji na osobę, nieco szybszy wzrost dochodu narodowego i konsumpcji (majątek produkcyjny i inwestycje rosną ze stopą λ). W długim horyzoncie czasu T pojawiają się dwie fazy wzrostu odpowiadające fazie środkowej i końcowej

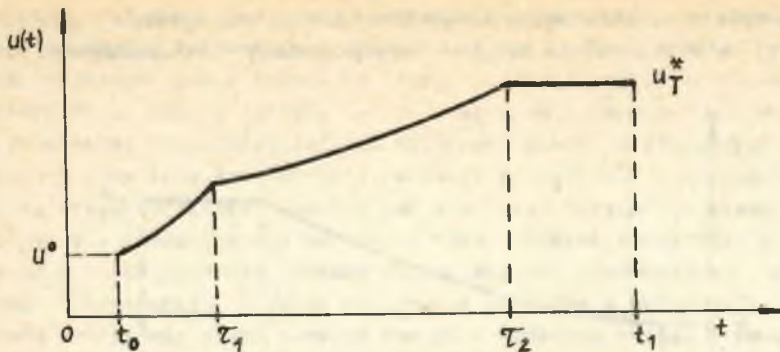
w wariancie z wysokim początkowym technicznym uzbrojeniem pracy (rys.6.8).
Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy pierwszej - równomiernego wzrostu.



Rys.6.8. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.20') - (6.21') w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = u$ i horyzont czasu jest długi

Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest niskie i horyzont czasu T jest krótki, to przebieg optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy u_T^* jest podobny do jej przebiegu w krótkim horyzoncie czasu w poprzednich wariantach rozwiązań. Jeżeli horyzont czasu T jest średniej długości, wtedy pojawiają się dwie fazy wzrostu. W pierwszej - inwestycyjnej - cały dochód pozostający po odliczeniu jego δ^0 -części na konsumpcję przeznaczony zostaje na inwestycje. Szybko rośnie majątek produkcyjny, dochód narodowy, konsumpcja, techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy (konsumpcja „startuje” jednak z niskiego poziomu). W fazie drugiej, konsumpcyjnej, mamy sytuację podobną jak w krótkim horyzoncie czasu, tzn. techniczne uzbrojenie pracy utrzymuje się na poziomie osiągniętym pod koniec fazy inwestycyjnej, wydajność pracy i konsumpcja na osobę rosną wolno (przy tym konsumpcja na osobę „startuje” z poziomu wyższego od poziomu osiągniętego pod koniec fazy pierwszej) itd. Wreszcie jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy obserwujemy trzy fazy wzrostu: początkową - inwestycyjną, środkową - równomiernego wzrostu i końcową - konsumpcyjną (rys.6.9). Długość fazy środkowej - równomiernego wzrostu - rośnie w miarę wydłużania horyzontu czasu T . Długości pozostałych faz są ograniczone.

Otrzymane rozwiązanie pod wieloma względami przypomina rozwiązanie zadania (6.15)- (6.16). Jego postać zależy, podobnie jak poprzednio, od początkowego technicznego uzbrojenia pracy i długości horyzontu czasu T . Podobny jest także przebieg faz wzrostu. Zmieniają się co prawda oceny długości poszczególnych faz, jednak, podobnie jak uprzednio przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie tylko długość fazy środkowej - równomiernego wzrostu. Obecne rozwiązanie jest jednak pod dwoma względami poprawniejsze: konsumpcja nigdy nie spada do zera (w rozwiązaniu zadania (6.15) - (6.16)



Rys.6.9. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązanie zadania (6.20') - (6.21') w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i długiego horyzontu czasu

zjawisko takie obserwowaliśmy w inwestycyjnej fazie wzrostu - przy niskim początkowym technicznym uzbrojeniu pracy), a wszystkie trajektorie z wyjątkiem trajektorii konsumpcji i inwestycji są przynajmniej słabo rosnące. Trajektorie konsumpcji i inwestycji są funkcjami przedziałami rosnącymi.

6.3.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy następujące trzy typy procesów wzrostu w G -równowadze ze stałą stopą wzrostu technicznego uzbrojenia pracy:

$$\sigma(u, \delta) = \delta_u = \frac{d}{dt} u \cdot \frac{1}{u} = \text{const.}$$

(A) Sterowaniu \bar{s}_T tożsamościowo równemu zero na T odpowiadają w takiej G -równowadze trajektorie $\bar{u}_T, \bar{\delta}_T$,

$$\bar{u}(t) = \bar{u}^0, \quad (6.23)$$

$$\bar{\delta}(t) = \rho \left[a(\bar{u}^0)^\varepsilon e^{\nu(t-t_0)} - (\mu + \lambda) \bar{u}^0 \right],$$

($\delta \bar{u}(t) = 0$ na T), \bar{u}^0 - dowolne początkowe techniczne uzbrojenie pracy spełniające założenie 6.2, tzn.

$$\bar{u}^0 \in (0, u_{\max}), \text{ gdzie } u_{\max} = [a(1-\delta^0)/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}.$$

(B) Sterowaniu \bar{s}_T tożsamościowo równemu jedności na T odpowiada w G -równowadze dokładnie jedna para trajektorii $\bar{u}_T, \bar{\delta}_T$,

$$\bar{u}(t) = \bar{u}^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)}$$

$$\bar{\delta}(t) = \bar{\delta}^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)}. \quad (6.24)$$

($\delta \bar{u}(t) = v/(1-\varepsilon)$ w każdym momencie czasu $t \in T$), gdzie $\bar{u}^0 = [a(1-\varepsilon)(1-\delta^0)]/[v+(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, $\bar{\gamma}^0 = a\varrho \delta^0 (\bar{u}^0)^\varepsilon$. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ każda trajektoria technicznego uzbrojenia wychodząca ze stanu początkowego $u(t_0) \in (0, u_{\max})$ odpowiadająca sterowaniu tożsamościowo równemu 1 jest asymptotycznie zbieżna do trajektorii \bar{u}_T .

(C) Z tą samą stopą rośnie również techniczne uzbrojenie pracy i konsumpcja na osobę $\bar{u}_T, \bar{\gamma}_T$.

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= \bar{u}^0 e^{\frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0)}, \\ \bar{\gamma}(t) &= \bar{\gamma}^0 e^{\frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0)}.\end{aligned}\quad (6.25)$$

w \mathcal{G} -równowadze ze sterowaniem \bar{s}_T ,

$$\bar{s}(t) = s = \frac{v\varepsilon}{(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)} \in (0,1)$$

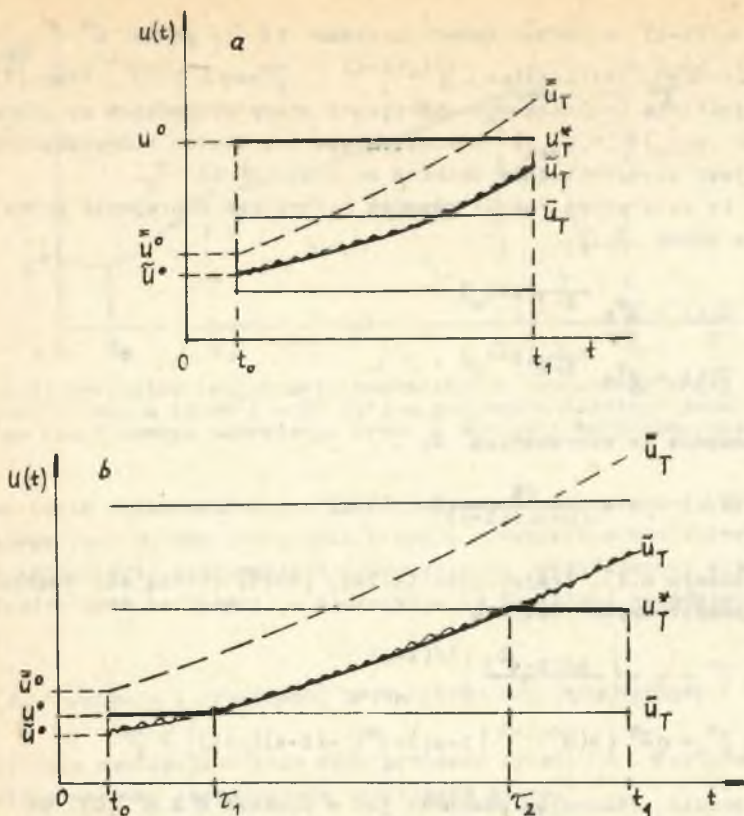
(przy założeniu 6.1). Trajektorie (6.24), (6.25) różnią się jednak wartościami początkowymi. Obecnie

$$\begin{aligned}\bar{u}^0 &= u = \left(\frac{a\varepsilon(1-\delta^0)}{\mu+\lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon)} \\ \bar{\gamma}^0 &= \varrho \bar{u}^0 \left\{ a(\bar{u}^0)^{\varepsilon-1} [1-s(1-\delta^0)] - (1-s)(\mu+\lambda) \right\} > \bar{\gamma}^0.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, rozumując podobnie jak w punkcie 6.2.4^o (C), że proces $(\bar{s}, \bar{u})_T$ odpowiada takiej regule akumulacji, przy której w każdym momencie czasu $t \in T$ otrzymujemy maksymalną nadwyżkę dochodu narodowego pozostającą po odliczeniu minimum konsumpcyjnego $\delta^0 \gamma(t)$ i inwestycji na odtworzenie majątku produkcyjnego i jego wzrost ze stopą równą λ . Nazywamy go procesem maksymalnego zrównoważonego wzrostu w zadaniu w zadaniu (6.20') - (6.21').

Wróćmy do rozwiązania zadania (6.20') - (6.21').

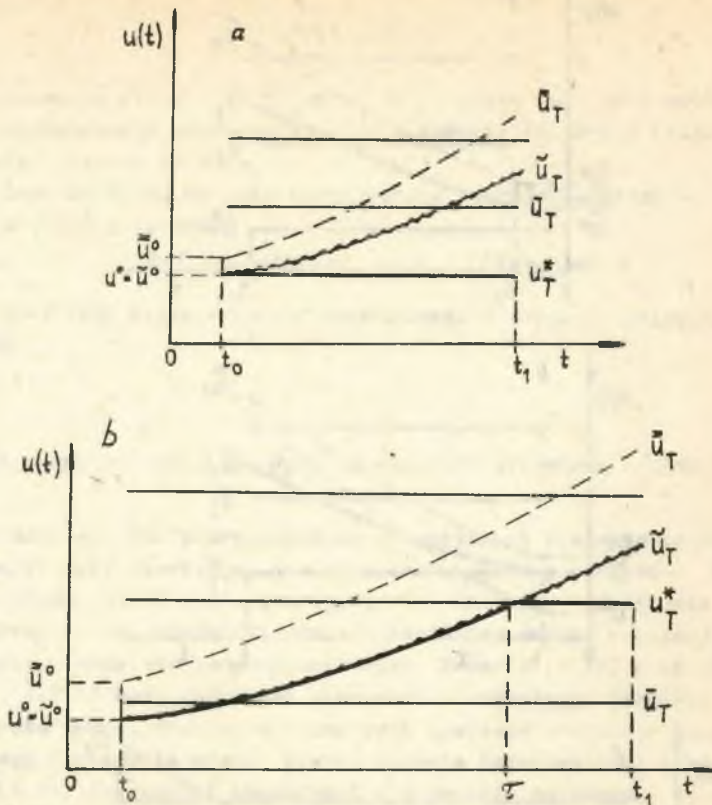
(i) Początkowe techniczne uzbrojenie pracy - wysokie: $u^0 \in (u, u_{\max})$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, to optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* jest tożsama z jedną z trajektorii \bar{u}_T postaci (6.23) w \mathcal{G} -równowadze typu (A) (techniczne uzbrojenie pracy utrzymuje się na wyjściowym poziomie u^0 , rys. 6.10.a). Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wówczas optymalna trajektoria u_T^* najpierw - w fazie początkowej - jest tożsama z jedną z trajektorii \bar{u}_T w \mathcal{G} -równowadze typu (A), następnie, po przecięciu się z trajektoria \tilde{u}_T postaci (6.25) w procesie maksymalnego zrównoważonego wzrostu (magistralą) pozostaje na niej w fazie środkowej, by następnie - w fazie końcowej - oddalić się od magistrali po jednej z trajektorii w \mathcal{G} -równowadze typu (A) (rys. 6.10.b). Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy środkowej, w której optymalna trajektoria u_T^* pozostaje na magistrali. Długości pozostałych faz są ograniczone.



Rys.6.10. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i (a) krótkiego horyzontu czasu, (b) długiego horyzontu czasu

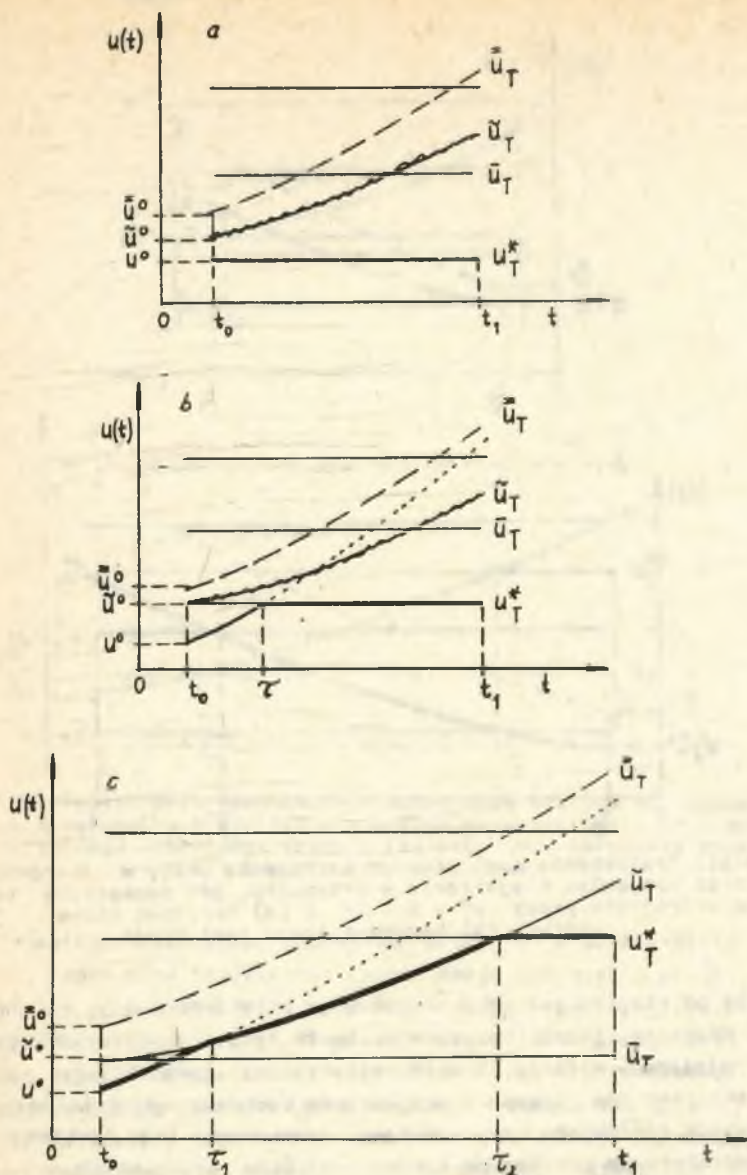
(ii) Początkowe techniczne uzbrojenie pracy: $u^0 = u$. W krótkim horyzontie czasu optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* pozostaje na jednej z trajektorii w σ -równowadze typu (A). (rys.6.11.a). Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wówczas w fazie początkowej trajektoria u_T^* jest tożsama z trajektorią maksymalnego zrównoważonego wzrostu \bar{u}_T (magistralą), następnie - w fazie końcowej - oddala się od niej po jednej z trajektorii w σ -równowadze typu (A) (rys.6.11.b). Im dłuższy jest horyzont, tym dłuższy jest okres pobytu optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy na magistrali.

(iii) Początkowe techniczne uzbrojenie pracy - niskie: $u^0 < u$. Podobnie jak w dwóch poprzednich przypadkach optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* w krótkim horyzontie czasu pozostaje na jednej z trajektorii w σ -równowadze typu (A) (rys.6.12.a). Jeżeli horyzont czasu T jest średniej długości, wówczas trajektoria u_T^* w fazie początkowej zbliża się do magistrali, lecz jej nie przecina, następnie



Rys.6.11. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = u = \bar{u}^0$ i (a) horyzont czasu jest krótki, (b) horyzont czasu jest długi

oddala się od niej po jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) (rys. 6.12.b). Wreszcie, jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy trajektoria u_T^* najpierw - w fazie początkowej - zbliża się do magistrali (w tym okresie jest ona tożsama z trajekcją technicznego uzbrojenia pracy odpowiadającą sterowaniu tożsamościowo równemu 1, która przy $|T| \rightarrow +\infty$ jest asymptotycznie zbliżona do trajektorii \bar{u}_T w G -równowadze typu (B)). Po przecięciu się z magistralą pozostaje na niej w fazie środkowej - tym dłużej, im dłuższy jest horyzont, a następnie - w fazie końcowej - oddala się od niej po jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) (rys. 6.12.c). Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w procesie optymalnym u_T^* jest asymptotycznie zbliżona do stopy wzrostu $v/(1-\varepsilon)$ technicznego uzbrojenia pracy na magistrali.



Rys.6.12. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i (a) krótkiego horyzontu czasu, (b) horyzontu czasu średniej długości, (c) długiego horyzontu czasu

□ T w e r d z e n i e 6.5.⁵⁸ (i) Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli długość horyzontu $|T| > 2\theta$, to

$$u^*(t) = \bar{u}(t)$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta, t_1 - \theta]$, gdzie u_T^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w zadaniu (6.20') - (6.21'), \bar{u}_T - magistralą postaci (6.25).

(ii) Średnia stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w procesie optymalnym spełnia warunek

$$\delta u_T^* \rightarrow \nu / (1 - \xi) \quad \text{przy} \quad |T| \rightarrow +\infty$$

gdzie $\nu / (1 - \xi)$ jest stopą wzrostu technicznego uzbrojenia pracy na magistrali. ■

6.4. Procesy wzrostu z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji

W rozwiązaniach obu poprzednich zadań optymalne trajektorie inwestycji i konsumpcji były nieciągłe, pomijając mało ciekawy przypadek krótkiego horyzontu czasu T . Z ekonomicznego punktu widzenia rozwiązania takie są nierealne, na co niejednokrotnie zwracaliśmy uwagę, analizując procesy wzrostu w modelach jednoczynnikowych. Zadania (6.15) - (6.16), (6.20') - (6.21') były zadaniami sterowania optymalnego gładkimi systemami jednowymiarowymi. Stan wewnętrzny tych systemów charakteryzował poziom technicznego uzbrojenia pracy, stanem wejścia (sterowaniem) w zadaniu (6.15) - (6.16) był udział inwestycji w dochodzie narodowym, natomiast w zadaniu (6.20') - (6.21') - udział inwestycji w części dochodu narodowego pozostającej po odliczeniu pewnego „minimum konsumpcyjnego” oraz nakładów na odtworzenie zużytego majątku i jego wzrost ze stopą równą stopie wzrostu ludności. W celu sformułowania zadania sterowania optymalnego z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji rozpatrzmy gładki dwuwymiarowy system, w którym jedną współrzędną trajektorii stanów wewnętrznych będzie kapitałochłonność produkcji, drugą - udział inwestycji w dochodzie narodowym (stopa inwestycji). Zatem przekształcenie stanów wewnętrznych takiego systemu opisywać będzie układ dwóch równań - równanie wzrostu kapitałochłonności i równanie wzrostu udziału inwestycji w dochodzie narodowym.

⁵⁸ Warunek (i) otrzymujemy, przyjmując: $\theta = \max \{ \nu^{-1} \ln d_1, d_2 \}$, jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 \in (u, u_{\max})$; $\theta = d_2$, jeżeli $u^0 = u$; $\theta = \max \{ d_2, \varphi_2 \ln d_4 \}$, jeżeli $u^0 < u$ (oceny parametrów $\varphi_1, d_1, u, u_{\max}$ podaje twierdzenie 6.4). Dowód (ii) pomijamy - przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 6.2 (ii). Podobnie zachowują się optymalne trajektorie majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, wydajności pracy, konsumpcji i konsumpcji na osobę.

6.4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Założmy, że wzrost majątku opisuje równanie (zob.(6.7))

$$\frac{d}{dt} m(t) = i(t) - \mu m(t),$$

a współdziałanie majątku i pracy w tworzeniu dochodu narodowego - statyczna funkcja produkcji postaci (6.6), tzn. (przy założeniu, że ludność rośnie ze stopą λ):

$$y(t) = m^\xi(t) [\rho l^0 e^{\lambda(t-t_0)}]^{1-\xi}$$

(ρ - wskaźnik aktywności zawodowej ludności w sferze produkcyjnej).

Wprowadźmy oznaczenie:

$$k(t) = m(t)/y(t) - \text{kapitałochłonność produkcji w momencie czasu } t \quad (\text{wymiar: } R). \quad (6.26)$$

Po wprowadzeniu tej zmiennej do wyjściowego równania wzrostu majątku otrzymujemy równanie wzrostu kapitałochłonności

$$\frac{d}{dt} k(t) = (\xi-1)(\mu+\lambda)k(t) + (1-\xi)s(t), \quad (6.27)$$

gdzie $s(t)$ jest wskaźnikiem udziału inwestycji w dochodzie narodowym w momencie czasu t . Niech T oznacza horyzont czasu z ustalonym momentem początkowym t_0 i dowolnie wybranym momentem końcowym $t_1 \leq \infty$. Przez $\alpha^0 > 0$ oznaczmy minimalny, a przez $\alpha^1 > \alpha^0$ - maksymalnie dopuszczalny udział inwestycji w dochodzie narodowym, $[\alpha^0, \alpha^1] \subset [0, 1]$. Interesują nas ciągle, przedziałami gładkie funkcje s_T z wartościami w $[\alpha^0, \alpha^1]$. Warunki te spełnia na przykład rozwiązanie równania

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)) \quad (6.28)$$

($\omega > 0$) z dowolnym warunkiem początkowym $s(t_0) \in [\alpha^0, \alpha^1]$ i funkcją $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, z wartościami w $[\alpha^0, \alpha^1]$ w każdym momencie czasu $t \in T$.⁵⁹ Jeżeli $\alpha(t) > s(t)$ ($<$), to $ds(t)/dt > 0$ ($<$) i udział inwestycji w dochodzie rośnie (maleje). Jeżeli $\alpha(t) = s(t)$ w pewnym okresie, wtedy udział inwestycji w dochodzie narodowym utrzymuje się w tym okresie czasu na stałym poziomie. Funkcje α_T z klasy $\tilde{C}^0[T]$ grają rolę sterowań. Trajektorie s_T z rozwiązania równania (6.28) są ich „przybliżeniami” w klasie funkcji $\tilde{C}^1[T]$. Równanie (6.28) określa reguły „nadażania” (śledzenia) trajektorii udziału inwestycji w dochodzie narodowym s_T za trajektorią (sterowaniem) α_T .

⁵⁹ Parametr ω ma wymiar $1/R$, współczynnik $\alpha(t)$, podobnie jak $s(t)$, jest wielkością niemiarowaną.

Przyjmijmy, podobnie jak dotychczas, że stanem wyjścia systemu jest konsumpcja na osobę. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\gamma(t) = \varrho(1-s(t))a^{1/(1-\varepsilon)}k^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}(t) \quad (6.29)$$

Fara równań (6.27) - (6.28) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego, dwuwymiarowego systemu dynamicznego. Współrzędnymi wektora jego stanu wewnętrznego są: kapitałochłonność produkcji $k(t)$ i udział inwestycji w dochodzie $s(t)$ (stopa inwestycji). Sterowaniem jest funkcja α_T udziału inwestycji w dochodzie narodowym z klasy funkcji $\tilde{C}^0[\tau]$, za którą „nadąża” zgodnie z (6.28) ciągła trajektoria udziału inwestycji w dochodzie narodowym s_T . Zbiorem sterowań jest przedział $[\alpha^0, \alpha^1]$. Równanie (6.29) jest przekształceniem wyjścia systemu. Uznaczymy przez $k^0 > 0$ początkową kapitałochłonność produkcji, przez $s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1]$ - początkowy udział inwestycji w dochodzie narodowym i założymy, że horyzont czasu $T = [t_0, +\infty)$. Wszystkie rozwiązania $(s, k)[t_0, +\infty)$ układu równań (6.27) - (6.28) z warunkiem początkowym $(k(t_0), s(t_0)) = (k^0, s^0)$ i sterowaniem $\alpha[t_0, +\infty)$ z wartościami w $[\alpha^0, \alpha^1]$ są równomiernie ograniczone na całej półosi czasu $[t_0, +\infty)$: $s(t) \in [\alpha^0, \alpha^1]$ oraz $0 < k(t) \leq \max\{k^0, \alpha^1/(\mu + \lambda)\}$ w każdym momencie czasu $t \in [t_0, +\infty)$. Innymi słowy przy czasie $t \rightarrow +\infty$ kapitałochłonność produkcji nie może rosnąć nieograniczenie. Podobnie równomiernie ograniczone są trajektorie konsumpcji na osobę $\delta[t_0, +\infty)$.

Uznaczymy przez γ^1 docelową wielkość konsumpcji na osobę,

$$\gamma^1 > \gamma^0 = \varrho(1-s^0)a^{1/(1-\varepsilon)}(k^0)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$$

Interesuje nas proces wzrostu spełniający warunki (6.27), (6.28) i prowadzący w najkrótszym czasie do docelowego poziomu konsumpcji γ^1 , tzn. rozwiązanie zadania:

$$\min t_1 \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k(t) &= (\varepsilon-1)(\mu+\lambda)k(t) + (1-\varepsilon)s(t), \\ \frac{d}{dt} s(t) &= \omega(\alpha(t)-s(t)), \\ \alpha(t) &\in [\alpha^0, \alpha^1], \quad \alpha \in \tilde{C}^0[t_0, t_1], \\ (k(t_0), s(t_0)) &= (k^0, s^0), \\ (k(t_1), s(t_1)) &\in X^1 = \{(k, s) : \varrho(1-s)a^{1/(1-\varepsilon)}k^{\varepsilon/(1-\varepsilon)} = \gamma^1\} \end{aligned} \quad (6.31)$$

($k^0 > 0$; $s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1]$). Ze względu na równomierną ograniczonosc wszystkich trajektorii konsumpcji warunki (6.31) mogą okazać się sprzeczne, jeżeli ustalimy zbyt „ambitny” docelowy poziom konsumpcji γ^1 . Założymy, że wiel-

kość tej konsumpcji została tak ustalona, iż zadanie jest niesprzeczne, a parametry zadania spełniają warunki

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e } 6.3. \alpha^0 < \varepsilon, \omega > (1-\varepsilon)(\mu+\lambda). \blacktriangledown$$

Wtedy rozwiązanie zadania jest następujące.

□ T w i e r d z e n i e 6.6.⁶⁰ Rozwiązaniem zadania (6.30) - (6.31) przy założeniu 6.3. jest proces $(\alpha^*, s^*, k^*)_{T^*}$ następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$s^*(t) = \begin{cases} (s^0 - \alpha^1) e^{-\omega(t-t_0)} + \alpha^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (s^*(\tau) - \alpha^0) e^{-\omega(t-\tau)} + \alpha^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$k^*(t) = \begin{cases} (k^0 - d_1 - d_2) e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_0)} + d_1 e^{-\omega(t-t_0)} + d_2 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (k^*(\tau) - d_3(\tau) - d_4) e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-\tau)} + d_3(\tau) e^{-\omega(t-\tau)} + d_4 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

gdzie $d_1 = (s^0 - \alpha^1)/(\mu+\lambda) - \frac{\omega}{1-\varepsilon}$, $d_2 = \alpha^1/(\mu+\lambda)$,

$d_3(\tau) = (s^*(\tau) - \alpha^0)/(\mu+\lambda) - \frac{\omega}{1-\varepsilon}$, $d_4 = \alpha^0/(\mu+\lambda)$,

$T^* = [t_0, t_1^*]$, t_1^* - wartość kryterium (6.30) (najwcześniejszy moment dojścia do poziomu konsumpcji y^1).

Jeżeli docelowy poziom konsumpcji y^1 można osiągnąć w krótkim czasie (krótki horyzont czasu T^*), to $\tau = t_0$ i proces $(\alpha^*, s^*, k^*)_{T^*}$ redukuje się do postaci

$$\alpha^*(t) = \alpha^0,$$

$$s^*(t) = (s^0 - \alpha^0) e^{-\omega(t-t_0)} + \alpha^0,$$

⁶⁰ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 6, twierdzenie 6.6 s. 259. Zadanie (6.30) - (6.31) ma rozwiązanie również bez założenia 6.3, które można otrzymać, rozpatrując kolejno wszystkie kombinacje

$\alpha^0 \geq \varepsilon$, $\omega \geq (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)$. We wszystkich przypadkach sterowanie optymalne ma taką samą postać, jak w twierdzeniu 6.6. Rozwiązania różnią się tylko momentami przełączenia sterowania optymalnego i postaciami trajektorii $s_{T^*}^*$, $k_{T^*}^*$.

$$k^*(t) = (k^0 - d_3(t_0) - d_4)e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_0)} + d_3(t_0)e^{-\omega(t-t_0)} + d_4$$

w każdym momencie czasu $t \in T^*$, gdzie $d_3(t_0) = d_3(\tau)$ dla $\tau = t_0$. Jeżeli na osiągnięcie docelowego poziomu konsumpcji potrzebny jest długi okres czasu (długi horyzont czasu T^*), wtedy następuje „przełączenie” sterowania $\alpha_{T^*}^*$ z α^1 na α^0 w momencie $\tau \in \text{int } T$, przy czym długość przedziału $[t_0, \tau]$ rośnie przy $t_1^* \rightarrow +\infty$. Długość przedziału $[\tau, t_1^*]$ jest ograniczona, tzn. istnieje taka liczba $\theta' > 0$, że $t_1^* - \tau \leq \theta'$ dla horyzontu T^* dowolnej długości. ■

6.4.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA ZADANIA (6.30) - (6.31) W JEDNYM PRZYPADKU SZCZEGÓLNYM ($s^0 = \alpha^1$, $k^0 < \alpha^0/(\mu+\lambda)$, HORYZONT CZASU T^* - DŁUGI)

Optymalną trajektorię konsumpcji na osobę $\gamma_{T^*}^*$ odpowiadającą procesowi $(\alpha^*, s^*, k^*)_{T^*}$ otrzymujemy z (6.29), a trajektorię technicznego uzbrojenia pracy $u_{T^*}^*$ na podstawie (6.26). W celu otrzymania pozostałych trajektorii wystarczy skorzystać z warunków (6.8) - (6.11) pamiętając, że tym razem funkcja produkcji ma postać (6.6) - tym samym $w(t) = a u^\varepsilon(t)$.

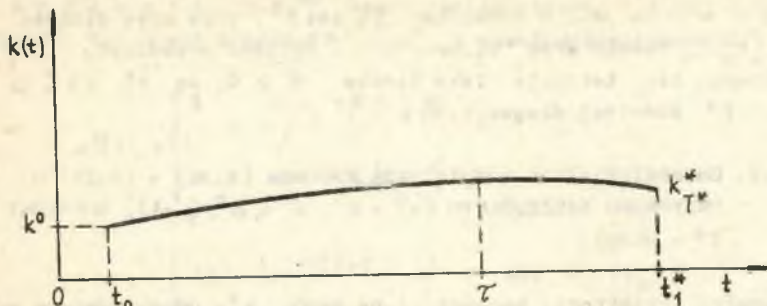
Postać optymalnych trajektorii zależy m.in. od początkowej kapitałochłonności produkcji i początkowego udziału inwestycji w dochodzie narodowym, tzn. od stanu wyjściowego gospodarki (k^0, e^0) , oraz docelowego poziomu konsumpcji γ^1 . Dla przykładu prześledźmy przebieg optymalnych trajektorii w przypadku, kiedy początkowa kapitałochłonność produkcji jest niska, $k^0 < \alpha^0/(\mu+\lambda)$, początkowy udział inwestycji w dochodzie jest maksymalny, $s^0 = \alpha^1$, a docelowy poziom konsumpcji na osobę na tyle wysoki, że można go osiągnąć dopiero po upływie dłuższego czasu w dwóch fazach wzrostu: podtrzymując maksymalny udział inwestycji w dochodzie narodowym w fazie pierwszej - zwiększając tym samym dochód narodowy - i zmniejszając udział inwestycji w dochodzie narodowym w fazie drugiej, czyli zwiększając udział konsumpcji.

Maksymalnemu udziałowi inwestycji w dochodzie narodowym w fazie pierwszej towarzyszy monotoniczny (gasnący) wzrost kapitałochłonności produkcji, która w tym okresie zbliża się do poziomu $\alpha^1/(\mu+\lambda)$, ale nie osiąga go. Podobnie rośnie techniczne uzbrojenie pracy, zbliżając się do poziomu $[a\alpha^1/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$ i wydajność pracy, która zbliża się do poziomu $a[a\alpha^1/(\mu+\lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$. W pierwszej fazie powoli rośnie także konsumpcja na osobę. Przebieg optymalnych trajektorii majątku produkcyjnego, dochodu narodowego, inwestycji i konsumpcji jest podobny z tym, że rosną one odpowiednio szybciej⁶¹.

W fazie drugiej następuje zmniejszenie udziału inwestycji w dochodzie narodowym. Kapitałochłonność produkcji, techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy przez pewien czas jeszcze rosną, potem zaczynają powoli ma-

⁶¹ Szybciej - o wielkość równą stopie wzrostu ludności λ .

leć. Na skutek zmniejszania się udziału inwestycji w dochodzie narodowym obserwujemy szybszy niż w fazie pierwszej wzrost konsumpcji i konsumpcji na osobę. Majątek produkcyjny i dochód narodowy rosną (choć może się zdarzyć, że przy bardzo niskiej stopie wzrostu zatrudnienia zaczną nieznacznie maleć pod koniec horyzontu czasu T^* , rys.6.13).



Rys.6.13. Optymalna trajektoria kapitałochłonności produkcji - rozwiązanie zadania (6.30) - (6.31) w przypadku, gdy początkowa kapitałochłonność produkcji jest niska, początkowa stopa inwestycji jest maksymalna i horyzont T - długi

6.4.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Z analizy optymalnej trajektorii k_T^* wynika, że w pierwszej fazie wzrostu kapitałochłonność produkcji zbliża się do poziomu $\alpha^1/(\mu+\lambda)$.

Konsumpcja na osobę zbliża się wtedy do poziomu

$\bar{y} = \varphi(1-\alpha^1)a^{1/(1-\varepsilon)}[\alpha^1/(\mu+\lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$. Rozpatrzmy procesy wzrostu $(\bar{\alpha}, \bar{s}, \bar{k})$ $[t_0, +\infty)$ na półosi czasu $[t_0, +\infty)$ którym odpowiadają trajektorie konsumpcji \bar{y} $[t_0, +\infty)$ z wartościami

$$\bar{y}(t) = \text{const.}$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0, +\infty)$. Innymi słowy interesują nas procesy wzrostu w σ -równowadze ze stałym poziomem konsumpcji na osobę. Procesy te mają bardzo prostą postać:

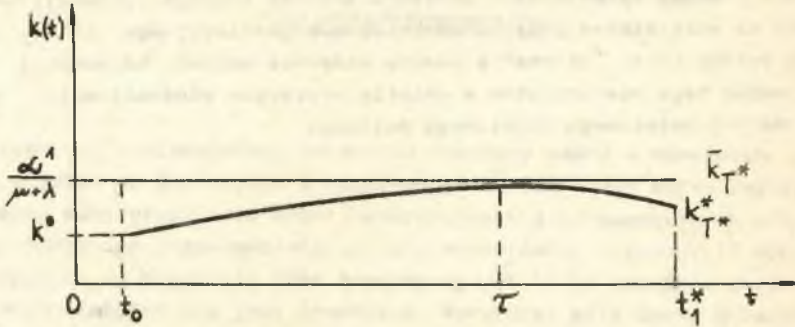
$$\bar{s}(t) = \bar{s} = \text{const.},$$

$$\bar{k}(t) = \bar{k} = \bar{s}/(\mu+\lambda) = \text{const.}, \quad (6.32)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{y} = \varphi(1-\bar{\alpha})a^{1/(1-\varepsilon)}[\bar{s}/(\mu+\lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)} = \text{const.}$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0, +\infty)$, gdzie \bar{s} oznacza dowolny udział inwestycji w dochodzie narodowym, $\bar{s} \in [\alpha^0, \alpha^1]$. Z twierdzenia 6.6 wiadomo, że im dłuższy jest horyzont czasu T^* , tym dłuższa jest pierwsza faza wzrostu, w której kapitałochłonność produkcji $k^*(t)$ zbliża się do poziomu $\alpha^1/(\mu+\lambda)$, tzn. do poziomu kapitałochłonności produkcji w σ -równo-

wadze z maksymalnym udziałem inwestycji w dochodzie $\bar{s} = \alpha^1$. Obserwujemy więc swoistą zbieżność optymalnej trajektorii kapitałochłonności do poziomu kapitałochłonności w \bar{G} -równowadze z maksymalnym udziałem inwestycji w dochodzie: im dłuższy jest horyzont czasu T^* , tym dłużej optymalna trajektoria kapitałochłonności $k_{T^*}^*$ przebiega w otoczeniu trajektorii kapitałochłonności w \bar{G} -równowadze z maksymalnym udziałem inwestycji w dochodzie narodowym (w otoczeniu magistrali, rys.6.14).



Rys.6.14. Trajektoria kapitałochłonności produkcji w \bar{G} -równowadze ze stałym maksymalnym udziałem inwestycji w dochodzie i optymalna trajektoria w przypadku niskiej początkowej kapitałochłonności produkcji i długiego horyzontu T^*

□ T w i e r d z e n i e 6.7.⁶² (i) Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeżeli długość optymalnego horyzontu czasu $T^* = [t_0, t_1^*]$ w zadaniu (6.30) - (6.31) spełnia warunek $|T^*| > 2\theta_\varepsilon$, to

$$|k^*(t) - \bar{k}_{\max}| \leq \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1^* - \theta_\varepsilon]$, gdzie $\bar{k}_{\max} = \bar{k}(t) = \alpha^1 / (\mu + \lambda)$ jest maksymalną kapitałochłonnością produkcji w \bar{G} -równowadze (magistralą), $k_{T^*}^*$ - optymalną trajektorią kapitałochłonności produkcji (rozwiązaniem zadania (6.30) - (6.31)).

⁶² Warunek (i) otrzymujemy, zważywszy na postać optymalnej trajektorii kapitałochłonności $k_{T^*}^*$. Wystarczy przyjąć $\theta_\varepsilon = \max \{ \varphi_2^{-1} \ln(2\varphi_1/\varepsilon), \theta \}$, gdzie $\varphi_1 = \max \{ d_1, |k^0 - d_1 - d_2| \}$, $\varphi_2 = \min \{ (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda), \omega \}$. Oceny parametrów d_1, d_2 podaje twierdzenie 6.6, θ jest oceną długości drugiej - konsumpcyjnej - fazy wzrostu; jeżeli $\varphi_1 = 0$, wtedy przyjmujemy $\theta_\varepsilon = \theta$. Warunek (ii) otrzymujemy natychmiast zważywszy na równomierną ograniczoną wszystkich dopuszczalnych trajektorii kapitałochłonności produkcji na półosi czasu $[t_0, +\infty)$. Podobne warunki spełniają optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy i konsumpcji na osobę, z tym, że majątek produkcyjny, dochód narodowy i konsumpcja w \bar{G} -równowadze rosną ze stopą równą stopie wzrostu ludności i wobec tego przy $\delta_{k_{T^*}^*} \rightarrow 0$ średnie stopy wzrostu tych wielkości zbliżają się do λ .

(ii) Przy $|T^*| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu kapitałochłonności produkcji δ_{kT^*} w horyzoncie czasu T^* maleje do zera. ■

W rozwiązaniu zadania (6.30) - (6.31) nie pojawia się środkowa faza równomiernego wzrostu, która występowała w rozwiązaniach dwóch poprzednich zadań (6.15) - (6.16), (6.20') - (6.21'). W poprzednich rozwiązaniach wydajności pracy i techniczne uzbrojenie pracy oraz konsumpcja na osobę rosły w fazie środkowej ze stopą $v/(1-\varepsilon)$, a zatem teraz rosłyby one z zerową stopą (przyjeliśmy bowiem statyczną funkcję produkcji Cobb-Douglasa ze wskaźnikiem postępu techniczno-organizacyjnego $v = 0$). Faza środkowa byłaby zatem „martwa” z punktu widzenia wzrostu konsumpcji na osobę i wobec tego niekorzystna w świetle kryterium minimalizacji czasu dojścia do jej ustalonego docelowego poziomu.

Rozdział III

OPTYMALNE TRAJEKTORIE WZROSTU W MODELACH DWUSEKTOROWYCH

Dotychczas zakładaliśmy, że dochód narodowy można w dowolnych proporcjach dzielić na inwestycje i konsumpcję. Zakładaliśmy zatem *implicite* m. in. pełną substytucyjność dóbr inwestycyjnych i konsumpcyjnych oraz możliwość dowolnego przestawiania aparatu wytwórczego z produkcji dóbr inwestycyjnych na produkcję dóbr konsumpcyjnych (i na odwrót). Żadne z wymienionych założeń nie jest prawdziwe. Wprawdzie przy danym układzie cen dochód narodowy ostatecznie wyraża się określoną kwotą złotych, ale złotych pochodzących z różnych źródeł. Te różne źródła pochodzenia dochodu, to sektory gospodarki z określonym majątkiem produkcyjnym i zasobami pracy¹.

Dwusektorowe modele wzrostu są najprostszymi modelami, w których uwzględnia się niepełną substytucyjność dóbr inwestycyjnych i konsumpcyjnych ograniczone możliwości przestawiania aparatu wytwórczego z produkcji jednych dóbr na produkcję drugich oraz ograniczony przepływ siły roboczej między sektorami gospodarki. Zakłada się w nich, że gospodarka jest podzielona na dwa sektory (działy): sektor 1 wytwarzający dobra inwestycyjne (umownie będziemy nazywać go sektorem inwestycyjnym) i sektor 2 wytwarzający dobra konsumpcyjne. Ze społecznego punktu widzenia decydujące znaczenie ma produkcja sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne. Istnienie i działalność sektora 1 są o tyle konieczne, że jest on producentem dóbr inwestycyjnych niezbędnych dla zwiększenia potencjału wytwórczego w sektorze 2.

Kluczowym zagadnieniem tego rozdziału jest optymalny podział inwestycji między sektory. W modelach, którymi zajmujemy się w paragrafie 7 jedynym czynnikiem produkcji jest trwały majątek produkcyjny (w podziale na sektory). Zasoby pracy nie są limitowane. Nie są też uwzględniane potrzeby konsumpcyjne społeczeństwa w oddzielnych momentach czasu, choć kryterium wzrostu, podobnie jak dotychczas, jest maksymalizacja konsumpcji w pewnym okresie czasu. „Lokalne” potrzeby społeczeństwa w poszczególnych momentach czasu w postaci pewnych „norm” konsumpcyjnych uwzględniamy w pa-

¹ Oczywiście, jest to dopiero pierwszy szczebel dezagregacji źródeł tworzenia dochodu narodowego. Idąc dalej, dochodzimy do przedsiębiorstw, warsztatów pracy itd., a więc do podstawowych komórek tworzenia dochodu.

ragrafie 8. W paragrafie 9 zajmujemy się zagađnieniem podziału inwestycji między sektory w modelach dwuczynnikowych, w których praca (w podziale na sektory) stanowi drugi, obok majątku produkcyjnego, podstawowy czynnik produkcji. Przedmiotem paragrafu 10 jest podział inwestycji między sektory w dwusektorowym modelu wzrostu wywodzącym się z dynamicznego modelu Leontiewa.

§ 7. OPTIMALNY PODZIAŁ INWESTYCJI MIĘDZY DWA SEKTORY W JEDNO CZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU

7.1. Podstawowe założenia²

Ustalmy horyzont czasu $T = [t_0, t_1]$. Zmiennymi modelu są następujące nieujemne, rzeczywiste funkcje czasu $t \in T$: trwały majątek produkcyjny $m_j(t)$ w j -tym sektorze (zasób, wymiar: zł), dochód narodowy $y_j(t)$ wytworzony w j -tym sektorze (produkcja końcowa sektora), inwestycje produkcyjne (brutto) $i_j(t)$ ponoszone w j -tym sektorze i konsumpcja $c(t)$ (strumienie, wymiar: zł/R; $j = 1, 2$). Ponadto w modelu występują dodatnie parametry: wskaźnik a_j efektywności majątku produkcyjnego w j -tym sektorze oraz wskaźnik μ wycofywanej z eksploatacji części majątku produkcyjnego³.

O parametrach a_j, μ zakładamy, że

▼ Zał o ż e n i e 7.1. $a_j > \mu > 0$ ($j = 1, 2$). ▼

Uzasadnienie tego założenia jest podobne jak uzasadnienie założenia 2 na s. 54. Wzrost trwałego majątku produkcyjnego w j -tym sektorze pisuje równanie całkowe (por. równanie (4.1) na s. 51):⁴

$$m_j(t) = m_j(\tau) + \int_{\tau}^t (i_j(\theta) - \mu m_j(\theta)) d\theta \quad (7.1)$$

$t, \tau \in T; \tau \leq t; j = 1, 2$). Czynnikiem, od którego zależy wielkość dochodu narodowego (produkcji końcowej) w j -tym sektorze, jest majątek produkcyjny w tym sektorze. Dochód narodowy w całej gospodarce jest sumą dochodów wytwarzanych w obu sektorach. Dochody te są funkcjami (liniowymi) majątku:

² Model, który przedstawiamy poniżej stanowi dwusektorową wersję modelu z paragrafu 4 punkt 4.1, por. także np. R. Stone [47] rozdz. punkt 3, Z. Czerwiński [12] rozdz. 4, punkt 4.2.

³ Dla prostoty będziemy zakładać, że w obu sektorach gospodarki wskaźnik ten jest taki sam.

⁴ Zakładamy, że funkcje i_j są takie, iż równanie to jest określone dla wszystkich momentów $\tau, t \in T$. Warunki które spełniają te funkcje spreżujemy dalej.

$$y_j(t) = a_j m_j(t) \quad (7.2)$$

($j = 1, 2$). Sektor 1 wytwarza tylko dobra inwestycyjne. Jego produkcja przeznaczona jest na inwestycje w obu sektorach:

$$y_1(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (7.3)$$

($i_1(t), i_2(t) \geq 0$). Produkcja końcowa sektora 2 w całości kierowana jest na spożycie,

$$c(t) = y_2(t). \quad (7.4)$$

Oznaczmy przez $m^0 = (m_1^0, m_2^0)$ wektor majątku produkcyjnego w sektorach w momencie początkowym t_0 ,

$$m(t_0) = m^0 > 0, \quad (7.5)$$

($m(t_0) = (m_1(t_0), m_2(t_0))$) i wprowadźmy wskaźnik

$$s(t) = \frac{i_1(t)}{i_1(t) + i_2(t)} \quad (7.6)$$

podziału inwestycji między sektory (struktury sektorowej nakładów inwestycyjnych; wielkość niemianowana). W układzie (7.1) - (7.5) warunek (7.3) można zastąpić następującymi:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= s(t)y_1(t), \\ i_2(t) &= (1-s(t))y_1(t), \\ s(t) &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

przy czym jeżeli $s \in \tilde{C}^0[T]$, wtedy $i = (i_1, i_2) \in \tilde{C}^0[T]$ (i na odwrót).

Pokażemy najpierw, że dla dowolnej trójki $(m, y, i)_T$, gdzie $m = (m_1, m_2)$, $i = (i_1, i_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $i \in \tilde{C}^0[T]$, spełniającej warunki (7.1) - (7.5) wyrażenie (7.6) jest określone wszędzie na T . Rozwiązanie równania (7.1) z warunkiem początkowym (7.5)

$$m_j(t) = m_j^0 e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\mu(t-\theta)} i_j(\theta) d\theta$$

($j = 1, 2$) jest dodatnie na T (zgodnie z (7.3) inwestycje i_j są nieujemne), a wobec tego na podstawie (7.2) oba sektory zawsze - w każdym momencie czasu - wytwarzają dodatnią wielkość dochodu narodowego. W szczególności $y_1(t) > 0$ na T i wobec tego wyrażenie (7.6) jest określone w każdym momencie czasu $t \in T$.

Jeżeli trójka $(m, y, i)_T$ spełnia warunki (7.1) - (7.5) i przy tym $i \in \tilde{C}^0[T]$, wtedy $m, y \in \tilde{C}^1[T]$, zatem $s \in \tilde{C}^0[T]$ i czwórka $(m, y, i, s)_T$ speł-

nia warunki (7.1), (7.2), (7.4), (7.5), (7.7). Odwrotnie, jeżeli czwórka $(m, y, i, s)_T$ spełnia ten układ oraz $s \in \tilde{C}^0[T]$, wtedy rozwiązaniem równania

$$m_1(t) = m_1(\tau) + \int_{\tau}^t (a_1 s(\theta) - \mu) m_1(\theta) d\theta$$

jest funkcja m_{1T} następującej postaci:

$$m_1(t) = m_1^0 \exp \int_{t_0}^t (a_1 s(\theta) - \mu) d\theta > 0.$$

Zatem $y_1 \in \tilde{C}^1[T]$, $y_1(t) = i_1(t) + i_2(t) > 0$ ($i_1(t), i_2(t) \geq 0$) w każdym momencie czasu $t \in T$. Tzn. zachodzi warunek (7.3) oraz $i = (i_1, i_2) \in \tilde{C}^0[T]$.

W kolejnych punktach tego paragrafu nawiązujemy do warunków (7.1), (7.2), (7.4), (7.5), (7.7)⁵.

7.2. Wzrost optymalny w modelu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji

7.2.1. SFORMULOWANIE ZADANIA

Z równania (7.1) zważywszy na warunki (7.7) otrzymujemy następujący układ równań wzrostu majątku produkcyjnego w obu sektorach gospodarki:

$$m_1(t) = m_1(\tau) + \int_{\tau}^t (a_1 s(\theta) - \mu) m_1(\theta) d\theta, \quad (7.8)$$

$$m_2(t) = m_2(\tau) + \int_{\tau}^t [a_1(1-s(\theta))m_1(\theta) - \mu m_2(\theta)] d\theta$$

($\tau \leq t$; $\tau, t \in T$). Równocześnie z (7.2), (7.4) otrzymujemy

$$c(t) = a_2 m_2(t) \quad (7.9)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$.

Założmy, że funkcja podziału inwestycji między sektory $s \in \tilde{C}^0[T]$. Wtedy układ równań (7.8) jest równoważny z następującym układem równań różniczkowych:

⁵ Przynajmniej przejścia od układu warunków (7.1) - (7.5) do układu (7.1), (7.2), (7.4), (7.5), (7.7) są podobne do tych, które skłoniły nas do przejścia od układu (4.1) - (4.5) do układu (4.1) - (4.3), (4.5) - (4.7) (zob. paragraf 4, punkt 4.1).

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = (a_1 s(t) - \mu) m_1(t) , \quad (7.10)$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = a_1 (1-s(t)) m_1(t) - \mu m_2(t) ,$$

Układ ten spełnia warunki twierdzenia 1.2, zatem przy ustalonym etapie początkowym $m^0 = (m_1^0, m_2^0)$ każdej funkcji $s \in \tilde{C}^0[T]$ odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie $m_T = (m_1, m_2)_T$ tego układu wychodzące w momencie początkowym t_0 ze stanu m^0 .

Układ równań (7.10) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (dwuwymiarowego, stacjonarnego) systemu dynamicznego w sensie definicji 1.1 - 1.3. Jego stanem wewnętrznym w momencie czasu t jest wielkość majątku produkcyjnego $m(t) = (m_1(t), m_2(t))$ w sektorach gospodarki, stanem wejścia (sterowaniem) - wskaźnik podziału inwestycji między sektory $s(t)$, stanem wyjścia - konsumpcja $c(t)$. Przekształcenie wyjścia ma postać (7.9).

Rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji konsumpcji w ustalonym horyzoncie czasu T :

$$\max \int_T a_2 m_2(t) dt , \quad (7.11)$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = (a_1 s(t) - \mu) m_1(t) ,$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = a_1 (1-s(t)) m_1(t) - \mu m_2(t) , \quad (7.12)$$

$$s(t) \in [0, 1] , \quad s \in \tilde{C}^0[T] ,$$

$$(m_1(t_0), m_2(t_0)) = (m_1^0, m_2^0) ,$$

gdzie $m_1^0, m_2^0 > 0$. Parę funkcji $(s, m)_T$, gdzie $m_T = (m_1, m_2)_T$, spełniającą warunki (7.12) tradycyjnie nazywamy **dopuszczalnym procesem wzrostu**, s_T - sterowaniem dopuszczalnym, m_T - dopuszczalną trajektorią majątku produkcyjnego w sektorach, a odpowiadające im zgodnie z (7.2), (7.7), (7.9) funkcje y_T, i_T, c_T (gdzie $y_T = (y_1, y_2)_T$, $i_T = (i_1, i_2)_T$) - dopuszczalnymi trajektoriami dochodu i inwestycji (w sektorach) oraz konsumpcji. Podobnie parę $(s^*, m^*)_T$ będącą rozwiązaniem tego zadania nazywamy **optymalnym procesem wzrostu**, s_T^* - sterowaniem optymalnym, m_T^* - optymalną trajektorią majątku produkcyjnego w sektorach itd.

Twierdzenie 7.1.⁷ Rozwiązaniem zadania (7.11) - (7.12) przy założeniu 7.1 jest proces $(s^*, m^*)_T$ następującej postaci:

⁶ Przypominamy, że rozwiązanie równania różniczkowego pojmujemy w sensie całkowym, zob. uwagi o rozwiązaniach równań różniczkowych w paragrafie 1 punkt 1.3.

⁷ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.1 s. 262.

$$e^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} m_1^0 e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ m_1^*(\tau) e^{-\mu(t - \tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 e^{-\mu(t - t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ [m_2^*(\tau) + a_1 m_1^*(\tau)(t - \tau)] e^{-\mu(t - \tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wtedy $\tau = t_1 - \theta > t_0$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 + d\theta = e^{\mu\theta} ,$$

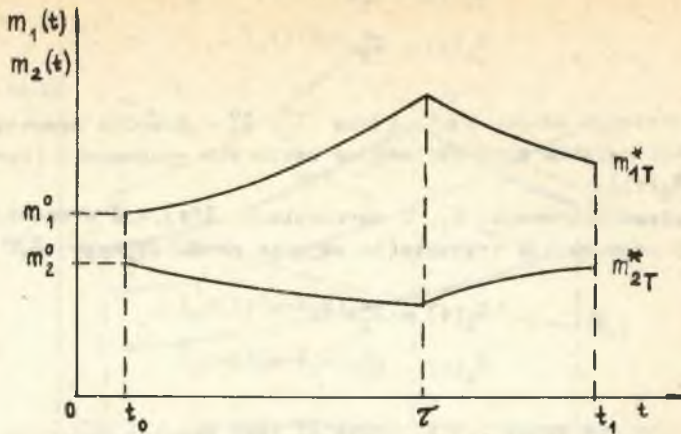
w którym $d = a_1\mu / (a_1 - \mu) > 0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \theta$, wówczas $\tau = t_0$. ■

7.2.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalne trajektorie dochodu (produkcji końcowej sektorów) y_T^* i inwestycji i_T^* otrzymujemy z (7.2), (7.7). Konsumpcja $c^*(t) = y_2^*(t)$.

W krótkim okresie maksymalną wielkość konsumpcji otrzymujemy przeznaczając cały dochód sektora 1 na inwestycje w sektorze 2, wytwarzającym dobra konsumpcyjne. Majątek produkcyjny i dochód w sektorze 1 maleją ze stopą $-\mu$, w sektorze 2 - rosną gwałtownie. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wtedy obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej - inwestycyjnej - dochód sektora 1 zostaje skierowany na inwestycje w tym sektorze. Przy założeniu 7.1 majątek produkcyjny i dochód tego sektora rosną z dodatnią stopą $a_1 - \mu$. Majątek produkcyjny i dochód sektora 2 (a zatem także konsumpcja) maleją ze stopą $-\mu$. W fazie drugiej - konsumpcyjnej - cały dochód sektora 1 skierowany zostaje na inwestycje w sektorze 2. Majątek produkcyjny oraz dochód tego sektora (konsumpcja) zaczynają rosnąć gwałtownie - z coraz niższą stopą w miarę zbliżania się do końca horyzontu czasu T . Majątek produkcyjny i dochód sektora 1 maleją (rys.7.1). Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłuższa jest pierwsza, inwestycyjna, faza wzrostu.

Z ekonomicznego punktu widzenia rozwiązanie takie jest, oczywiście, nierealne. Praktycznie niemożliwe jest wstrzymanie inwestycji w żadnym sektorze. Niemożliwa jest także tak gwałtowna zmiana w strukturze inwestycji (spadek udziału inwestycji z 1 do 0 w sektorze 1 i wzrost



Rys.7.1. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach - rozwiązanie zadania (7.11) - (7.12) w długim horyzoncie czasu

z 0 do 1 w sektorze 2), jaką sugeruje rozwiązanie zadania.

Fakt, iż otrzymaliśmy nierealne rozwiązanie zagadnienia podziału inwestycji między sektory jest konsekwencją jego niepoprawnego - z ekonomicznego punktu widzenia - sformułowania. Warunki (7.12) dopuszczają bowiem zarówno nieciągłość funkcji podziału inwestycji między sektory, a w rezultacie nieciągłość trajektorii inwestycji, jak i jej zerowanie się, co jest równoznaczne z całkowitym wstrzymaniem inwestycji w sektorze 1. Drugi możliwy skrajny przypadek $s(t) = 1$ oznacza z kolei wstrzymanie inwestycji w sektorze 2.

7.2.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Interesują nas procesy ze stałymi stopami wzrostu dochodu, a zatem i majątku produkcyjnego w sektorach. Ponieważ cały dochód sektora 2 przeznaczony jest na konsumpcję, więc procesom tym odpowiada równocześnie wzrost konsumpcji ze stałą stopą. Innymi słowy, zwrócimy uwagę na procesy wzrostu spełniające warunek

$$G(m, c) = (\delta_m, \delta_c) = \text{const.},$$

gdzie

$$\delta_m = \left(\frac{d}{dt} m_1 \cdot \frac{1}{m_1}, \frac{d}{dt} m_2 \cdot \frac{1}{m_2} \right),$$

$$\delta_c = \frac{d}{dt} c \cdot \frac{1}{c} = \frac{d}{dt} m_2 \cdot \frac{1}{m_2}.$$

Łatwo sprawdzić, że procesy w G -równowadze mają jedną z dwóch następujących postaci (pomijając trywialny przypadek zerowej trajektorii majątku).

(A) Sterowaniu \bar{s}_T tożsamościowo równemu jedności odpowiada trajektoria majątku produkcyjnego w sektorach \bar{m}_T ,

$$\begin{aligned}\bar{m}_1(t) &= \bar{m}_1^0 e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)}, \\ \bar{m}_2(t) &= \bar{m}_2^0 e^{-\mu(t - t_0)}\end{aligned}\quad (7.13)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{m}_1^0, \bar{m}_2^0 - dowolne dodatnie początkowe wielkości majątku produkcyjnego w sektorach gospodarki (konsumpcja $\bar{c}(t) = a_2 \bar{m}_2(t)$).

(B) Stałemu sterowaniu \bar{s}_T , z wartościami $\bar{s}(t) = \bar{s} = \text{const.} < 1$, odpowiada w G -równowadze trajektoria majątku produkcyjnego \bar{m}_T .

$$\begin{aligned}\bar{m}_1(t) &= \bar{m}_1^0 e^{(a_1 \bar{s} - \mu)(t - t_0)}, \\ \bar{m}_2(t) &= \bar{m}_2^0 e^{(a_1 \bar{s} - \mu)(t - t_0)}\end{aligned}\quad (7.14)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{m}_2^0 jest dowolną dodatnią początkową wielkością majątku produkcyjnego w sektorze 2, $\bar{m}_1^0 = [\bar{s}/(1-\bar{s})] \bar{m}_2^0$ (konsumpcja $\bar{c}(t) = a_2 \bar{m}_2(t)$).

Optymalna trajektoria majątku produkcyjnego m_T^* jest tożsama w pierwszej fazie wzrostu z jedną z trajektorii majątku w G -równowadze typu (A) postaci (7.13) - tym dłużej, im dłuższy jest horyzont czasu T (rys.7.2.a, b). W fazie drugiej następuje wyjście z G -równowagi⁸.

Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu majątku produkcyjnego w sektorze 1 w procesie optymalnym jest zbieżna do stopy wzrostu majątku w tym sektorze w G -równowadze typu (A).

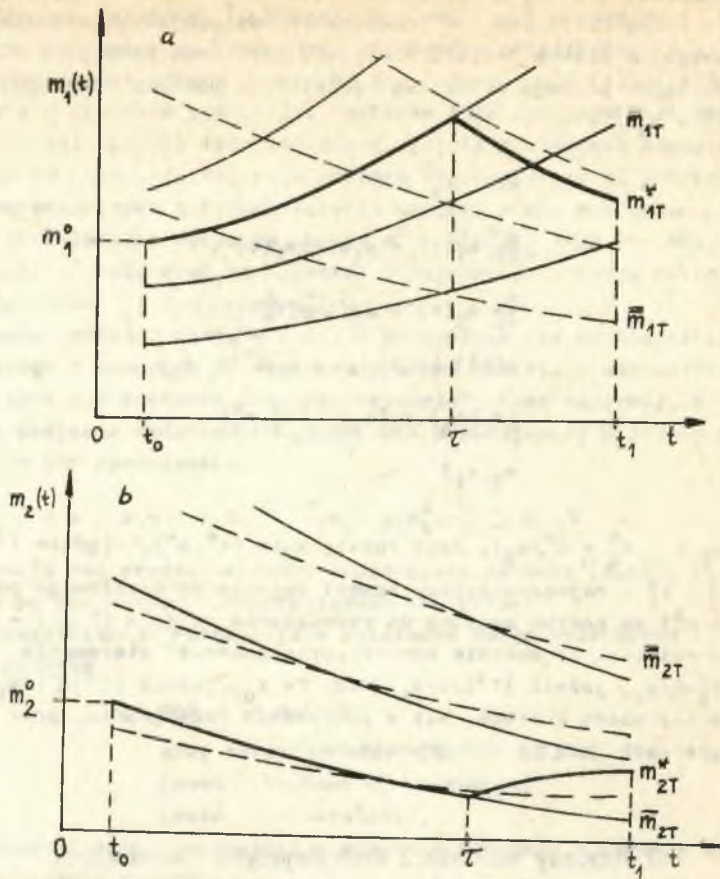
□ T w i e r d z e n i e 7.2.⁹ Jeżeli $|T| \rightarrow +\infty$, wówczas

$$\delta_{m_{1T}^*} \rightarrow a_1 - \mu.$$

gdzie $\delta_{m_{1T}^*}$ jest średnią stopą wzrostu majątku produkcyjnego w sektorze 1 w procesie optymalnym w zadaniu (7.11) - (7.12), $(a_1 - \mu)$ - stopą wzrostu majątku w tym sektorze w G -równowadze typu (A) (zob.(7.13)). ■

⁸ Gdyby w procesie optymalnym wraz ze wzrostem długości horyzontu T rosła długość fazy konsumpcyjnej, wówczas z upływem czasu trajektoria majątku m_T^* zbliżałaby się do każdej trajektorii \bar{m}_T w G -równowadze typu (B) postaci (7.14) odpowiadającej sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = \text{const.} \in [0, \mu/a)$. W rozwiązaniu nie obserwujemy jednak w tej fazie wzrostu zbieżności trajektorii m_T^* do trajektorii \bar{m}_T w G -równowadze typu (B), ponieważ długość fazy konsumpcyjnej jest ograniczona.

⁹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.2 s.263. Ponieważ w modelu naszym stopa wzrostu dochodu w sektorach jest równa stopie wzrostu majątku, więc do tej samej granicy zbieżna jest przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu dochodu $\delta_{y_{1T}^*}$.



Rys.7.2. Trajektorie majątku produkcyjnego w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria majątku w długim horyzoncie czasu (a) w sektorze 1, (b) w sektorze 2

Średnia stopa wzrostu majątku produkcyjnego w sektorze 1 w σ -równowadze typu (A) $\delta_{\bar{m}_{1T}} = \delta_{m_1(t)} = \sigma_1 - \mu = \text{const}$. Innymi słowy twierdzenie głosi, że różnica $|\delta_{m_{1T}^*} - \delta_{\bar{m}_{1T}}|$ średnich stóp wzrostu majątku w sektorze 1 w procesie optymalnym i w σ -równowadze typu (A) maleje do zera przy $|T| \rightarrow +\infty$. Warunku tego nie spełnia optymalna trajektoria majątku produkcyjnego w sektorze 2.

7.2.4. JEDEN PRZYPADK SZCZEGÓLNY ($\mu = 0$)

Przy założeniu, że majątek produkcyjny nie zużywa się ($\mu = 0$) moment „przełączenia” sterowania optymalnego s_T^* w zadaniu (7.11) - (7.12) można

określić explicite: $\tau = t_1 - 2/a_1$, jeżeli $|T| > 2/a_1$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T| < 2/a_1$. Łatwo także znaleźć rozwiązanie następującego zadania minimalnoczynowego, w którym kryterium wzrostu jest czas niezbędny dla dojścia gospodarki do pewnego założonego docelowego poziomu konsumpcji $c^1 = a_2 m_2^1 > c^0 = a_2 m_2^0$:

$$\min t_1,$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = a_1 s(t) m_1(t),$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = a_1 (1-s(t)) m_1(t),$$

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in C^0[t_0, t_1],$$

$$(m_1(t_0), m_2(t_0)) = (m_1^0, m_2^0),$$

$$m_2(t_1) = m_2^1$$

($m_2^1 = c^1/a_2 > m_2^0 = c^0/a_2$). Jego rozwiązanie $(s^*, m^*)_{T^*}$ (gdzie $T^* = [t_0, t_1^*]$, t_1^* - najwcześniejszy moment dojścia do docelowego poziomu konsumpcji c^1) ma postać podobną do rozwiązania zadania (7.11) - (7.12), z tą tylko różnicą, że obecnie moment „przełączenia” sterowania optymalnego $\tau = t_1^* - 1/a_1$, jeżeli $|T^*| > 1/a_1$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T^*| \leq 1/a_1$. Druga faza staje się nieco krótsza, niż w poprzednim rozwiązaniu, przy czym w obu rozwiązaniach fazy te są ograniczone.

7.3. Procesy wzrostu z niemalejącymi trajektoriami majątku produkcyjnego w sektorach

7.3.1. TRZY ZADANIA STEROWANIA

W modelu przedstawionym w punkcie 7.1 niemalenie majątku produkcyjnego w sektorach oznacza równocześnie niemalenie wytwarzanego w nim dochodu, a więc także niemalenie konsumpcji (produkcji końcowej sektora 2).

Z matematycznego punktu widzenia problem sprowadza się do dodania do warunków (7.12) jeszcze jednego:

$$\frac{d}{dt} m_j(t) \geq 0 \quad (7.15)$$

($j = 1, 2$; podobnie jak dotychczas przyjmujemy, że $dm_j(t)/dt|_{t=\tau} = \lim_{t \rightarrow \tau+0} dm_j(t)/dt$ w każdym punkcie $\tau \in \text{int } T$, w którym pochodna trajektorii majątku produkcyjnego jest nieokreślona, por. ods. 18 na s. 69).

W pewnych szczególnych przypadkach warunki (7.12), (7.15) mogą okazać się sprzeczne. Wyjaśnimy to bliżej. Aby majątek produkcyjny w sektorach nie malał, potrzebne są (począwszy od momentu początkowego t_0) inwestycje na odtwarzanie przynajmniej tej jego części $\mu(m_1(t)+m_2(t))$, która zużywa się w procesie produkcji. Sektorem inwestycyjnym jest sektor 1. Warunki (7.12), (7.15) będą sprzeczne, jeżeli w momencie początkowym t_0 dochód (produkcja końcowa) tego sektora nie wystarczy na pokrycie potrzeb inwestycyjnych z tytułu zużycia majątku w obu sektorach, tzn. jeżeli zaistnieje taka sytuacja, że $a_1 m_1^0 - \mu(m_1^0 + m_2^0) < 0$. Aby uniknąć sprzeczności należy mieć co najmniej nieujemne inwestycje netto w momencie początkowym t_0 : $a_1 m_1^0 - \mu(m_1^0 + m_2^0) \geq 0$.

Będziemy zakładać nieco więcej, a mianowicie, że dochód sektora inwestycyjnego w momencie początkowym pokrywa nie tylko minimalne potrzeby inwestycyjne obu sektorów (na „podtrzymanie” stanu majątku) lecz pozwala także na podjęcie dodatkowych inwestycji przynajmniej w jednym z sektorów (lub w obu równocześnie).

∇ Z a ł o ż e n i e 7.2.¹⁰ $a_1 m_1^0 - \mu(m_1^0 + m_2^0) > 0$ \blacktriangledown

Interesują nas procesy wzrostu spełniające warunki (7.12), (7.15) optymalne z punktu widzenia następujących kryteriów:

(a) maksymalizacji konsumpcji w ustalonym horyzoncie czasu T , tzn. rozwiązanie zadania

$$\max_T \int_T a_2 m_2(t) dt \quad (7.16)$$

przy ograniczeniach (7.12), (7.15)

(moment końcowy t_1 horyzontu czasu T - ustalony), (7.17)

(b) maksymalizacji konsumpcji w momencie końcowym horyzontu czasu T ; czyli rozwiązanie zadania

$$\max a_2 m_2(t_1), \quad (7.18)$$

przy ograniczeniach (7.12), (7.15)

(moment końcowy t_1 - ustalony), (7.19)

(c) minimalizacji czasu dojścia do założonego docelowego poziomu konsumpcji $c^1 = a_2 m_2^1 > c^0 = a_2 m_2^0$, a więc rozwiązanie zadania

$$\min t_1, \quad (7.20)$$

przy ograniczeniach (7.12), (7.15)

i dodatkowym warunkiem: $a_2 m_2(t_1) \geq c^1$ (7.21)
(moment końcowy t_1 - nie ustalony).

¹⁰ Ponieważ $m^0 = (m_1^0, m_2^0) > 0$, zatem jeżeli spełnione jest to założenie, wtedy spełnione jest także założenie 7.1.

7.3.2. ZADANIA RÓWNOWAŻNE

Sformułowane zadania nie są standardowymi zadaniami sterowania, które przedstawiliśmy w paragrafie 3, ze względu na nierówność (7.15). Nie stosują się do nich wobec tego także podane tam warunki optymalności. W celu przedstawienia zadań (7.16) - (7.17), (7.18) - (7.19), (7.20) - (7.21) w postaci standardowej skorzystamy z następującego twierdzenia.

□ **T w i e r d z e n i e 7.3.¹¹** Przy założeniu 7.2: (i) jeżeli proces $(s, m)_T$ spełnia warunki (7.12), (7.15), to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\alpha: T \rightarrow [0, 1], \alpha \in \tilde{C}^0[T]$, że

$$s(t) = \mu/a_1 + \alpha(t) \varphi(m(t))/a_1 m_1(t),$$

gdzie $\varphi(m(t)) = (a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)$,

(ii) proces $(s, m)_T$ spełnia warunki (7.12), (7.15) wtedy i tylko wtedy, gdy para $(\alpha, m)_T$ spełnia układ równań

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = \alpha(t) \varphi(m(t)),$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = (1 - \alpha(t)) \varphi(m(t)),$$

gdzie $\alpha(t) \in [0, 1], \alpha \in \tilde{C}^0[T]$. ■

Układ równań (*) opisuje przekształcanie stanów wewnętrznych gładkiego, dwuwymiarowego, stacjonarnego systemu dynamicznego, którego stanem wewnętrznym w momencie czasu t jest wektor $m(t) = (m_1(t), m_2(t))$ majątku produkcyjnego w sektorach, sterowaniem - wskaźnik $\alpha(t)$ podziału inwestycji (netto) między sektory, stanem wyjścia - konsumpcja $c(t)$ (produkcja końcowa sektora 2). Przekształcenie wyjścia ma postać (7.9). Zbiorem sterowań jest przedział $[0, 1]$.

Zadanie (7.16) - (7.17) jest równoważne z następującym zadaniem sterowania optymalnego z ustalonym momentem końcowym t_1 :

$$\max \int_T a_2 m_2(t) dt, \quad (7.16')$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = \alpha(t) [(a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)],$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = (1 - \alpha(t)) [(a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)], \quad (7.17')$$

$$\alpha(t) \in [0, 1], \alpha \in \tilde{C}^0[T],$$

$$(m_1(t_0), m_2(t_0)) = (m_1^0, m_2^0)$$

¹¹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.3 a. 264.

($m_1^0, m_2^0 > 0$). Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(\alpha^*, m^*)_T$ będzie rozwiązaniem tego zadania wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (7.16) - (7.17) będzie proces $(s^*, m^*)_T$, w którym $s^*(t) = \mu/a_1 + \alpha^*(t) [(a_1 - \mu)m_1^*(t) - \mu m_2^*(t)] / a_1 m_1^*(t)$. W tym samym sensie zadanie (7.18) - (7.19) jest równoważne z zadaniem

$$\max a_2 m_2(t_1) \quad (7.18')$$

przy ograniczeniach (7.17')
(moment końcowy t_1 - ustalony), (7.19')

a zadanie (7.20) - (7.21) - z zadaniem

$$\min t_1, \quad (7.20')$$

przy ograniczeniach (7.17')
i dodatkowym warunku:

$$a_2 m_2(t_1) \geq c^1 (> a_2 m_2^0 = c^0) \quad (7.21')$$

(moment końcowy t_1 - nie ustalony, zmienna decyzyjna zadania).

□ **T w i e r d z e n i e 7.4.¹²** (i) Rozwiązaniem zadania (7.16') - (7.17') przy założeniu 7.2 jest proces $(\alpha^*, m^*)_T$ następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} (m_1^0 - d m_2^0) e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)} + d m_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (m_2^0 - d^{-1} m_1^*(\tau)) e^{-\mu(t - \tau)} + d^{-1} m_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $d = \mu / (a_1 - \mu)$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wówczas $\tau = t_1 - \theta > t_0$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

¹² Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.4 s. 265.

$$1 - \mu \left(1 - \frac{\mu}{a_1}\right) \theta = e^{-\mu \theta}.$$

Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \theta$, to $\tau = t_0$.

(ii) Rozwiązaniem zadania (7.18') - (7.19') jest proces tej samej postaci, lecz różniący się momentem „przełączenia” sterowania α_T^* (z 1 na 0), a wobec tego i oceną długości horyzontu czasu T : przez krótki w zadaniu (7.18'), (7.19') rozumiemy horyzont, którego długość $|T| \leq \theta = \mu^{-1} \ln [1 + \mu/a_2(a_1 - \mu)]$, przez długi - horyzont, którego długość $|T| > \theta$. Jeżeli $|T| \leq \theta$, to $\tau = t_0$, inaczej

$$\tau = t_1 - \theta > t_0. \blacksquare$$

W zadaniu (7.20') - (7.21') warunek końcowy $a_2 m_2(t_1) \geq c^1$ jest wiążący, tzn. w optymalnym procesie (α^*, m^*) $[t_0, t_1^*]$ spełniony jest z równością¹³. Jest to więc typowe zadanie minimalnoczasowe z ustalonym prawym krańcem trajektorii. Nie będziemy jednak powtarzać całej procedury dochodzenia do rozwiązania tego zadania. Interesujące nas właściwości rozwiązania wynikają bowiem z rozwiązania zadania poprzedniego. Zadania (7.18') - (7.19') i (7.20') - (7.21') są dualne w tym sensie, że jeżeli proces $(\alpha^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (7.18') - (7.19') (z ustalonym horyzontem czasu), to jest on równocześnie rozwiązaniem zadania (7.20') - (7.21'), z docelowym poziomem konsumpcji c^1 równym poziomowi konsumpcji $c^*(t_1)$ osiągniętemu w optymalnym procesie w zadaniu (7.18') - (7.19'). Odwrotnie, jeżeli proces (α^*, m^*) $[t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (7.20') - (7.21') (t_1^* - najwcześniejszy moment dojścia do docelowego poziomu konsumpcji c^1), a w zadaniu (7.18') - (7.19') przyjmiemy horyzont czasu $T = T^* = [t_0, t_1^*]$, to proces ten będzie równocześnie rozwiązaniem tego zadania. Innymi słowy, jeżeli optymalny horyzont czasu $T^* = [t_0, t_1^*]$ potrzebny na dojście do docelowego poziomu konsumpcji c^1 w zadaniu (7.20') - (7.21') jest krótki, $|T^*| \leq \theta = \mu^{-1} \ln [1 + \mu/a_2(a_1 - \mu)]$, to rozwiązaniem tego zadania jest proces $(\alpha^*, m^*)_{T^*}$, w którym

$$\alpha^*(t) = 0,$$

$$m_1^*(t) = m_1^0, \quad m_2^*(t) = (m_2^0 - d^{-1} m_1^0) e^{-\mu(t-t_0)} + d^{-1} m_1^0$$

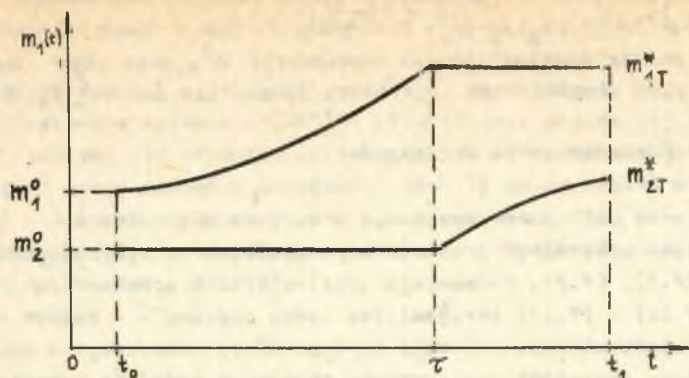
w każdym momencie czasu $t \in T^*$. Jeżeli optymalny horyzont czasu T^* jest długi, $|T^*| > \theta$, to rozwiązaniem zadania jest proces $(\alpha^*, m^*)_{T^*}$ takiej samej

¹³ Ponieważ $m^* \in C^0[t_0, t_1^*]$, zatem gdyby zachodziła nierówność $a_2 m_2^*(t_1^*) > c^1$, wtedy znalazłaby się taka liczba $\varepsilon > 0$, że prawdziwa byłaby także nierówność $a_2 m_2^*(t_1^* - \varepsilon) > c^1$, co jest niemożliwe.

postaci jak proces w (1) z momentem „przełączenia” sterowania $\tau = t_1 - \theta$, gdzie $\theta = \mu^{-1} \ln[1 + \mu/a_2(a_1 - \mu)]$. Optymalny horyzont czasu T^* wydłuża się w miarę jak rośnie docelowy poziom konsumpcji c^1 , przy czym zmienia się (rośnie) tylko długość fazy pierwszej (przedział czasu $[t_0, \tau)$).

7.3.3. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZAŃ

Trajektorie dochodu wytwarzanego w sektorach gospodarki i inwestycji odpowiadające optymalnym procesom we wszystkich trzech zadaniach otrzymujemy z (7.2), (7.7). Konsumpcja $c^*(t) = y_2^*(t)$. W stosunku do rozwiązania zadania (7.11) - (7.12) otrzymaliśmy pewną poprawę - w żadnym rozwiązaniu nie obserwujemy obecnie zjawiska zerowania się inwestycji w sektorach. Nie wykluczaliśmy natomiast gwałtownych „skoków” w podziale inwestycji między sektory w momentach „przełączenia” sterowania. Tak jak poprzednio, w krótkim horyzoncie czasu (a w zadaniu minimalnoczasowym - przy niskim docelowym poziomie konsumpcji c^1) cała nadwyżka inwestycji ponad tę ich wielkość, która jest niezbędna dla „podtrzymania” na wyjściowym poziomie m_1^0 stanu majątku produkcyjnego w sektorze 1 kierowana jest na zwiększenie zasobu majątku produkcyjnego w sektorze 2. Dochód sektora 1 utrzymuje się na stałym, wyjściowym poziomie, dochód sektora 2 (konsumpcja) rośnie gasnąco. W długim horyzoncie czasu (a w zadaniu minimalnoczasowym - przy wysokim docelowym poziomie konsumpcji) obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej - inwestycyjnej - szybko rośnie majątek i produkcja sektora 1 wytwarzającego dobra inwestycyjne. Produkcja sektora 2 (konsumpcja) utrzymuje się w tym czasie na wyjściowym poziomie. Zdecydowanie większa część inwestycji kierowana jest do sektora 1. Inwestycje w sektorze 2 umożliwiają jedynie „podtrzymanie” majątku na stałym wyjściowym poziomie (zerowe inwestycje netto). Można by rzec, że sektor ten czeka na dogodne warunki „startu”, które przygotowuje sektor inwestycyjny. W fazie drugiej - konsumpcyjnej - zostają zredukowane do minimum inwestycje w sektorze 1 (do poziomu wystarczającego jedynie na podtrzymanie tego stanu majątku, do którego sektor dochodzi pod koniec fazy pierwszej), natomiast rosną inwestycje w sektorze 2. Majątek tego sektora oraz dochód (konsumpcja) rosną - jednak gasnąco. Warto zauważyć, że na stopę wzrostu dochodu w sektorze 2 w fazie drugiej nie ma wpływu efektywność majątku w tym sektorze natomiast ma wpływ efektywność majątku w sektorze 1. Od efektywności majątku w sektorze 1 zależy bowiem m.in. wielkość inwestycji ponoszonych w sektorze 2 w drugiej fazie wzrostu, a więc pośrednio wzrost produkcji tego sektora. Przejściu od inwestycyjnej fazy wzrostu do fazy konsumpcyjnej towarzyszy jednak, podobnie jak w rozwiązaniu zadania (7.11) - (7.12), natychmiastowy spadek inwestycji w sektorze 1 i ich wzrost w sektorze 2, choć już nie tak znaczny (zob. rys. 7.3).



Rys.7.3. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach -
- rozwiązanie zadania (7.16') - (7.17') w długim horyzoncie
czasu

7.3.4. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy procesy wzrostu $(\alpha, m)_T$, którym odpowiada stała wielkość konsumpcji tzn. takie procesy, dla których

$$G(m, c) = c (= a_2 m_2) = \text{const.}$$

Mozna wskazać dwa typy takich procesów.

(A) Sterowaniu $\bar{\alpha}_T$ tożsamosciowo równemu jedności odpowiadają trajektorie majątku produkcyjnego \bar{m}_T i konsumpcji \bar{c}_T ,

$$\begin{aligned} \bar{m}_1(t) &= (\bar{m}_1^0 - d\bar{m}_2^0) e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)} + d\bar{m}_2^0, \\ \bar{m}_2(t) &= \bar{m}_2^0, \\ \bar{c}(t) &= a_2 \bar{m}_2^0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

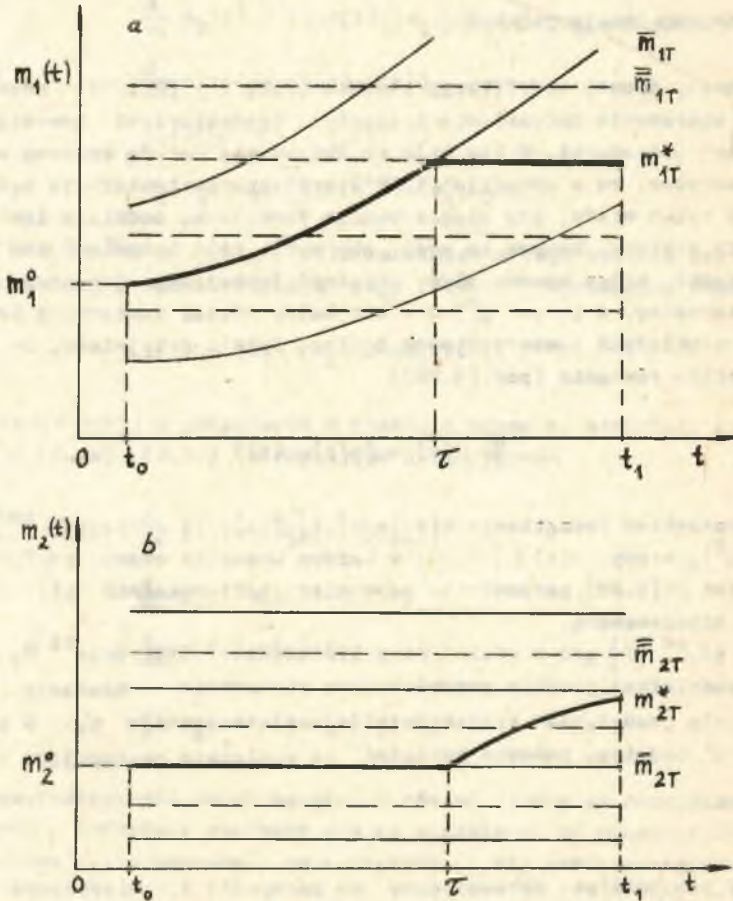
w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{m}_1^0, \bar{m}_2^0 - dodatnie początkowe zasoby majątku w sektorach spełniające warunek $\bar{m}_1^0 - d\bar{m}_2^0 > 0$; $d = \mu(a_1 - \mu)$.

(B) Dowolnemu innemu sterowaniu $\bar{\alpha}_T$ odpowiadają w G -równowadze trajektorie majątku \bar{m}_T i konsumpcji \bar{c}_T ,

$$\bar{m}_1(t) = \bar{m}_1^0, \quad \bar{m}_2(t) = \bar{m}_2^0, \quad \bar{c}(t) = a_2 \bar{m}_2^0 \quad (7.23)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{m}_1^0 jest dowolną dodatnią początkową wielkością majątku produkcyjnego w sektorze 1, $\bar{m}_2^0 = d^{-1} \bar{m}_1^0$ (jest to stan klasycznej równowagi „statycznej”, por. rozdz. I, paragraf 2).

Uptymalne trajektorie majątku produkcyjnego, rozwiązania zadań (7.16') - (7.17'), (7.18') - (7.19'), (7.20') - (7.21'), w fazie pierwszej - inwestycyjnej - są tożsame z jedną z trajektorii majątku w σ -równowadze typu (A) - tym dłużej, im dłuższy jest horyzont czasu T (w zadaniu minimalnym - tym dłużej, im wyższy jest założony docelowy poziom konsumpcji c_1^1 , rys.7.4.a,b). W fazie drugiej - konsumpcyjnej - następuje wyjście gospodarki z σ -równowagi¹⁴. Ponadto, po pierwszej współrzędnej obserwujemy zbieżność średniej stopy wzrostu optymalnej trajektorii majątku produkcyjnego do średniej stopy wzrostu trajektorii majątku w σ -równowadze typu (A).



Rys.7.4. Trajektorie majątku produkcyjnego w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria majątku w długim horyzoncie czasu (a) w sektorze 1, (b) w sektorze 2

¹⁴ Gdyby w procesie optymalnym wraz ze wzrostem długości horyzontu T rosła długość fazy konsumpcyjnej, wtedy w fazie tej z upływem czasu po drugiej współrzędnej obserwowalibyśmy zbliżanie się trajektorii m_T^* do trajektorii \bar{m}_T w σ -równowadze typu (B) z wartościami $\bar{m}(t) = (m_1^*(\tau), d^{-1}m_1^*(\tau))$, gdzie $m_1^*(\tau)$ jest wielkością majątku produkcyjnego w sektorze 1 w konsumpcyjnej fazie wzrostu, $d = \mu/(a_1 - \mu)$.

□ T w i e r d z e n i e 7.5.¹⁵ Jeżeli w zadaniach (7.16') - (7.17'), (7.18') - (7.19'), (7.20') - (7.21') długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, to różnica $|\delta_{m1T}^* - \delta_{m1T}^-|$ średnich etóp wzrostu majątku produkcyjnego w sektorze 1 w procesie optymalnym i w G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera (w zadaniu minimalnoczasowym (7.20') - (7.21') należy horyzont czasu T zastąpić optymalnym horyzontem T^*). ■

7.4. Przykład optymalnego procesu wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji

7.4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Przedstawimy prostą modyfikację zadania (7.16') - (7.17') prowadzącą do zadania sterowania optymalnego z ciągłymi trajektoriami inwestycji w obu sektorach gospodarki. W tym celu posłużymy się metodą opisaną w punkcie 6.4. Zauważmy, że w układzie (7.17') trajektorie inwestycji będą ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy ciągła będzie funkcja α_T podziału inwestycji netto między sektory. Nasuwa to myśl, aby wobec tego uzupełnić ten układ o takie warunki, które zapewniłyby ciągłość funkcji α_T . Oznaczmy przez $\beta^1 < 1$ - maksymalny, a przez $\beta^0 > 0$ - minimalny udział inwestycji (netto) w sektorze 1 w układach inwestycyjnych ogółem. Jeżeli przyjmiemy, że funkcja α_T spełnia równanie (por.(6.28))

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \quad (7.24)$$

($\omega > 0$) z warunkiem początkowym $\alpha(t_0) = \alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1]$ i funkcją $\beta \in \mathcal{C}^0[T]$, $\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1]$, wtedy $\alpha(t) \in [\beta^0, \beta^1]$ w każdym momencie czasu $t \in T$, $\alpha \in \mathcal{C}^1[T]$. Podobnie jak w (6.28), parametr ω ma wymiar $1/R$; wskaźnik $\beta(t)$ jest wielkością niemianowaną.

Funkcja $\beta \in \mathcal{C}^0[T]$ gra w (7.24) rolę sterowania. Trajektorija¹⁶ α_T jest ciągłym, przedziałami gładkim przybliżeniem sterowania. Równanie (7.24) określa reguły „nadążania” trajektorii α_T za sterowaniem β_T . O parametrach β^0, β^1 będziemy ponadto zakładać, że spełniają następujące warunki¹⁷:

¹⁵ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.5, s. 267.

¹⁶ Funkcję α_T traktujemy jako kolejną współrzedną trajektorii stanów wewnętrznych systemu, obok trajektorii majątku produkcyjnego w sektorach.

¹⁷ W realnej gospodarce warunki te są w praktyce spełnione. Omawiane zadania sterowania optymalnego można rozwiązać również bez tego założenia z tym, że należałoby wówczas kolejno rozpatrywać przypadki:

$$\beta^0 \geq \mu/a_1, \quad \omega \geq a_1 - \mu.$$

Wz a ł o ż a n i e 7.3. $\beta^0 > \frac{\mu}{a_1}$, $\omega > a_1 \beta^1 - \mu$. ▽

Uzupełniając warunki (7.17') o dodatkowy warunek (7.24) zapewniający ciągłość funkcji podziału inwestycji netto między sektory gospodarki (przy założeniu, że w momencie początkowym t_0 podział ten jest ustalony), otrzymamy następujące zadanie sterowania docelowego:

$$\max m_2(t_1) \quad (7.25)$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = \alpha(t) [(a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)] \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = (1 - \alpha(t)) [(a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)] \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \quad , \quad (7.26)$$

$$\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1] \quad , \quad \beta \in \tilde{C}^0 [T] \quad ,$$

$$(m_1(t_0), m_2(t_0), \alpha(t_0)) = (m_1^0, m_2^0, \alpha^0)$$

($m_1^0, m_2^0 > 0$, $\alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1]$). W celu rozwiązania tego zadania przedstawiemy je w prostszej postaci redukując jego rozmiary. Wprowadźmy nową zmienną

$$j(t) = (a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t) \quad (7.27)$$

(inwestycje netto w gospodarce w momencie czasu t , strumień, wymiar: zł/R). Z (7.26), (7.27) otrzymujemy układ równań

$$\frac{d}{dt} j(t) = (a_1 \alpha(t) - \mu)j(t) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = \alpha(t)j(t) \quad , \quad (7.28)$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = (1 - \alpha(t))j(t) \quad ,$$

w którym rozwiązania dwóch ostatnich równań zależą od rozwiązań dwóch pierwszych, natomiast pierwsze dwa są niezależne od pozostałych. Wystarczy jeszcze tylko zauważyć, że kryterium (7.25) można zastąpić następującym:

$$\max \int_T a_2(1 - \alpha(t))j(t)dt \quad (7.29)$$

i dochodzimy do zadania sterowania optymalnego

$$\max \int_T a_2(1 - \alpha(t))j(t)dt \quad (7.25')$$

$$\frac{d}{dt} j(t) = (a_1 \alpha(t) - \mu) j(t),$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)),$$

(7.26')

$$\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1], \quad \beta \in \bar{C}^0[T],$$

$$(j(t_0), \alpha(t_0)) = (j^0, \alpha^0)$$

($j^0 > 0, \alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1]$). Warunek $j^0 > 0$ (dodatnie inwestycje netto w momencie początkowy t_0) odpowiada założeniu 7.2. Rolę sterowania w zadaniu tym gra funkcja $\beta \in \bar{C}^0[T]$ z wartościami w $[\beta^0, \beta^1] \subset [0, 1]$. Para równań różniczkowych w (7.26') opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego, dwuwymiarowego systemu stacjonarnego (inwestycji netto i wskaźnika ich podziału między sektory). Stanem wyjścia jest produkcja końcowa sektora 2 (konsumpcja). Przekształceniem wyjścia jest funkcja podcałkowa w (7.25'). Zadania (7.25) - (7.26) i (7.25') - (7.26') są równoważne w tym sensie, że proces $(\beta^*, m^*, \alpha^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (7.25) - (7.26) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (7.25') - (7.26') będzie proces $(\beta^*, j^*, \alpha^*)_T$, gdzie związek trajektorii majątku produkcyjnego m_T^* z trajektorią globalnych inwestycji netto j_T^* ustalają równania (7.27) - (7.28).

□ T w i e r d z e n i e 7.6.¹⁸ Rozwiązaniem zadania (7.25') - (7.26') przy założeniach 7.2, 7.3 jest proces $(\beta^*, j^*, \alpha^*)_T$ następującej treści:

$$\beta^*(t) = \begin{cases} \beta^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ \beta^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$j^*(t) = \begin{cases} j^0 e^{g(t)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ j^*(\tau) e^{g(\tau; t)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} (\alpha^0 - \beta^1) e^{-\omega(t-t_0)} + \beta^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (\alpha^*(\tau) - \beta^0) e^{-\omega(t-\tau)} + \beta^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $g(t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^0 - \beta^1) (1 - e^{-\omega(t-t_0)}) + (a_1 \beta^1 - \mu)(t - t_0)$,

$g(\tau; t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^*(\tau) - \beta^0) (1 - e^{-\omega(t-\tau)}) + (a_1 \beta^0 - \mu)(t - \tau)$.

Istnieje taka liczba $\Theta > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \Theta$, to moment „przełączenia” sterowania $\tau \in [t_1 - \Theta, t_1]$. Jeżeli horyzont czasu jest krótki, $|T| < \Theta$, wówczas $\tau = t_0$ i proces optymalny redukuje się do postaci:

¹⁸ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.6 s. 268.

$$\beta^*(t) = \beta^0, \quad j^*(t) = j^0 e^{\omega(t-t_0)},$$

$$\alpha^*(t) = (\alpha^0 - \beta^0) e^{-\omega(t-t_0)} + \beta^0$$

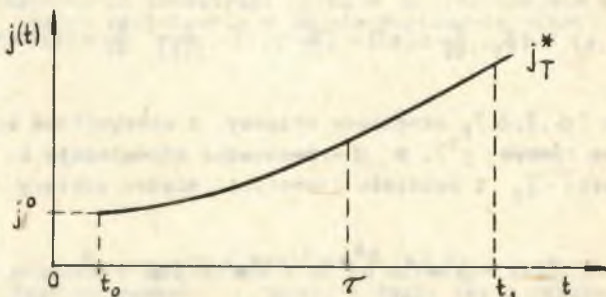
w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $d_1 = (a_1 \beta^1 - \mu) / (a_1 \beta^0 - \mu) - (1 - \beta^1) / (1 - \beta^0)$, $d_2 = a_1 (\beta^1 - \beta^0) / (a_1 \beta^0 - \mu)$, $g(\tau_0; t) = g(\tau; t)$ dla $\tau = t_0$. ■

Optymalną trajektorię majątku produkcyjnego w sektorach otrzymujemy z rozwiązania dwóch ostatnich równań w (7.28), optymalną trajektorię dochodu $y_T^* = (y_1^*, y_2^*)_T$ - z podstawienia $y_j^*(t) = a_j m_j^*(t)$ ($j=1,2$). Trajektorie konsumpcji $c_T^* = y_T^*$.

7.4.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Postać rozwiązania zależy m.in. od początkowego podziału inwestycji między sektory. Możliwe są trzy przypadki.

(i) $\alpha^0 \in (\beta^0, \beta^1)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wówczas trajektoria α_T^* optymalnego podziału inwestycji między sektory maleje (w globalnych nakładach inwestycyjnych netto rośnie udział inwestycji przeznaczonych dla sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne). W długim horyzoncie czasu obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej - inwestycyjnej - rośnie udział inwestycji netto kierowanych do sektora 1 wytwarzającego środki produkcji. W fazie drugiej - konsumpcyjnej, podobnie jak w krótkim horyzoncie czasu - zaczyna się zwiężkać udział inwestycji netto przeznaczonych dla sektora 2. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego m_T^* i dochodu wytwarzanego w sektorach y_T^* , konsumpcji c_T^* i globalnych inwestycji j_T^* są funkcjami rosnącymi, niezależnie od długości horyzontu czasu T (rys.7.5).



Rys.7.5. Optymalna trajektoria inwestycji netto - rozwiązanie zadania (7.25') - (7.26') w długim horyzoncie czasu

(ii) Początkowy podział inwestycji „korzystny” dla sektora 2 ($\alpha^0 = \beta^0$). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy w optymalnym procesie wzrostu

podział ten utrzymuje się na wyjściowym poziomie w całym horyzoncie czasu ($\alpha^*(t) = \beta^0$ w każdym momencie $t \in T$). W długim horyzoncie czasu obserwujemy, podobnie jak poprzednio, obie fazy wzrostu: najpierw inwestycyjną, w której w globalnych inwestycjach netto rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 1, potem konsumpcyjną, w której zwiększa się udział inwestycji przeznaczonych dla sektora 2. Majątek produkcyjny w sektorze 1 i wytwarzany w nim dochód oraz globalne inwestycje netto rosną wolniej, natomiast majątek produkcyjny i dochód sektora 2 (konsumpcja) - szybciej niż w (i). Jednak, podobnie jak poprzednio, wszystkie trajektorie są funkcjami rosnącymi niezależnie od długości horyzontu czasu T.

(iii) Początkowy podział inwestycji „korzystny” dla sektora 1 ($\alpha^0 = \beta^1$). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wówczas w globalnych inwestycjach netto maleje udział inwestycji kierowanych do sektora 1 - rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2. W długim horyzoncie czasu pojawiają się dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej, inwestycyjnej, udział inwestycji kierowanych do sektora 1 utrzymuje się na maksymalnym poziomie ($\alpha^*(t) = \beta^1$). W fazie drugiej, konsumpcyjnej, udział ten zaczyna maleć na rzecz inwestycji w sektorze 2. Majątek produkcyjny w sektorach oraz dochód, konsumpcja i globalne inwestycje netto rosną, niezależnie od długości horyzontu czasu T: majątek i dochód sektora 1 oraz inwestycje - szybciej, natomiast majątek i dochód sektora 2 (konsumpcja) wolniej niż w (i). Wszystkie trajektorie - rozwiązania zadania (7.25') - (7.26') - są funkcjami ciągłymi, przedziałami gładkimi.

7.4.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy następujące dwa typy procesów wzrostu $(\beta, j, \alpha)_T$ ze stałą stopą wzrostu globalnych inwestycji netto i stałym ich podziałem między sektory, tzn. procesy, dla których

$$G(j, \alpha, c) = (\delta_j, \frac{d}{dt} \alpha(t)) = (\frac{d}{dt} j(t) \cdot \frac{1}{j(t)} \cdot \frac{d}{dt} \alpha(t)) = \text{const.}$$

(A) Przez $(\beta, \bar{j}, \bar{\alpha})_T$ oznaczamy procesy z maksymalnym sterowaniem $\bar{\beta}_T$ (tożsamościowo równym β^1). W G -równowadze odpowiadają im trajektorie inwestycji netto \bar{j}_T i podziału inwestycji między sektory $\bar{\alpha}_T$:

$$j(t) = j^0 \cdot (a_1 \beta^{1-\mu})^{(t-t_0)}, \bar{\alpha}(t) = \beta^1 \quad (7.30)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie j^0 - dowolna dodatnia wielkość początkowa inwestycji netto w gospodarce.

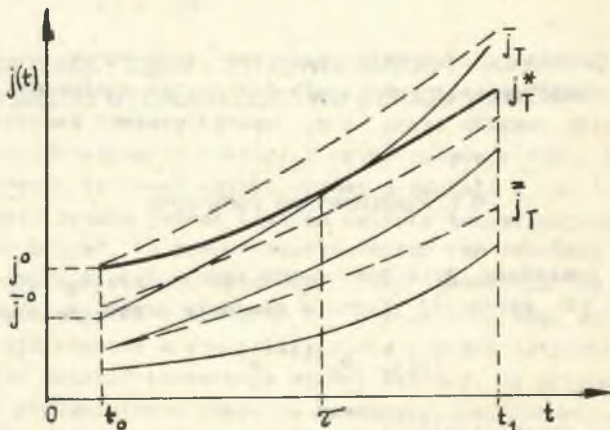
(B) Przez $(\bar{\beta}, \bar{j}, \bar{\alpha})_T$ oznaczamy procesy z minimalnym sterowaniem $\bar{\beta}_T$ (tożsamościowo równym β^0), którym odpowiadają w G -równowadze trajektorie $\bar{j}_T, \bar{\alpha}_T$:

$$\bar{j}(t) = \bar{j}^0 e^{(a_1 \beta^0 - \mu)(t-t_0)}, \quad \bar{\alpha}(t) = \beta^0 \quad (7.31)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ ($\bar{j}^0 > 0$).

Nietrudno zauważyć, że im dłuższy jest horyzont czasu T , tym bardziej optymalna trajektoria inwestycji netto j_T^* zbliża się w jego środkowym okresie do trajektorii \bar{j}_T w G -równowadze typu (A) postaci (7.30) z początkową wielkością inwestycji netto $\bar{j}^0 = j^0 \exp\{a_1 \omega^{-1}(\alpha^0 - \beta^1)\}$, gdzie j^0 - początkowa wielkość inwestycji netto w zadaniu (7.25') - (7.26'). Trajektoria \bar{j}_T gra tutaj rolę magistrali. W miarę jak rośnie długość horyzontu czasu T , obserwujemy zbliżanie się optymalnej trajektorii j_T^* do magistrali - tym wyraźniejsze, im dłuższy jest horyzont T (rys.7.6).

Pod koniec horyzontu czasu T , w fazie konsumpcyjnej, następuje ponowne wyjście optymalnej trajektorii z otoczenia magistrali ¹⁹.



Rys.7.6. Trajektorie inwestycji netto w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w długim horyzoncie czasu

¹⁹ Gdyby w procesie optymalnym wraz ze wzrostem długości horyzontu T rosła długość fazy konsumpcyjnej, wtedy w fazie tej z czasem obserwowalibyśmy zbliżanie się trajektorii \bar{j}_T do trajektorii \bar{j}_T w G -równowadze typu (B) postaci (7.31) z warunkiem początkowym $\bar{j}^0 = j^0 \exp\{a_1 \omega^{-1}(\alpha^0 - \beta^0) + a_1(\beta^1 - \beta^0)(\tau - t_0)\}$, gdzie j^0 jest początkową wielkością inwestycji netto w gospodarce w zadaniu (7.25') - (7.26'), τ - jest momentem „przełączenia” sterowania optymalnego.

□ **T w i e r d z e n i e 7.7.**²⁰ (i) Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi, $|T| > 2\theta_\varepsilon$, to

$$|j^*(t) - \bar{j}(t)| \leq \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie j^* jest optymalną trajektorią inwestycji netto - rozwiązaniem zadania (7.25') - (7.26'), \bar{j}_T - trajektorią inwestycji netto w G -równowadze postaci (7.30) z warunkiem początkowym $\bar{j}(t_0) = j^0 \exp\{a_1 \omega^{-1}(\alpha \theta \beta^1)\}$ (magistralą); j^0 - początkowa wielkość inwestycji netto w zadaniu (7.25') - (7.26').

(ii) Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, wtedy średnia stopa inwestycji netto $\delta_{j_T}^*$ w procesie optymalnym jest asymptotycznie zbieżna od stopy wzrostu $a_1 \beta^1 - \mu$ inwestycji netto w G -równowadze typu (A). ■

§ 8. OPTIMALNY PODZIAŁ INWESTYCJI MIĘDZY SEKTORY W JEDNOCZYNNIKOWYM MODELU UWZGLĘDNIAJĄCYM LICZBĘ LUDNOŚCI

8.1. Podstawowe założenia

Tradycyjnie zakładamy, że w horyzoncie czasu $T = [t_0, t_1]$ ludność rośnie ze stopę $\lambda > 0$, zatem jej liczba w momencie czasu t wynosi

$$l(t) = l^0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (8.1)$$

gdzie l^0 oznacza liczbę ludności w momencie początkowym t_0 . Niech, podobnie jak w punkcie 7.2, wzrost majątku produkcyjnego w sektorach i opisuje para równań (por.(7.10))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1(t) &= (a_1 s(t) - \mu) m_1(t), \\ \frac{d}{dt} m_2(t) &= a_1 (1-s(t)) m_1(t) - \mu m_2(t) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$(m_1(t_0), m_2(t_0)) = (m_1^0, m_2^0) > 0$, $s(t) \in [0, 1]$, $s \in C^0[T]$, gdzie $m_1(t)$, $m_2(t)$ - wielkość trwałego majątku produkcyjnego w sektorach 1, 2; $s(t)$ oznacza udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w nakładach inwestycyjnych ogółem w momencie czasu t . Podobnie jak w poprzednim paragrafie zakładamy, że wytworzony dochód narodowy jest liniową funkcją majątku produkcyjnego w sektorach,

²⁰ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 7, twierdzenie 7.7 s. 270.

$$y_j(t) = a_j m_j(t), \quad (8.3)$$

($j = 1, 2$), a cały dochód (produkcja końcowa) sektora 2 przeznaczony zostaje na konsumpcję: $c(t) = y_2(t)$. W paragrafie tym interesować nas będą tylko takie procesy wzrostu, którym odpowiadają niemalejące trajektorie konsumpcji w przeliczeniu na osobę. Innymi słowy, będą to procesy, w których stopa wzrostu dochodu wytworzonego w sektorze 2 będzie nie niższa od stopy wzrostu ludności:

$$\frac{d}{dt} y_1(t) \cdot \frac{1}{y_2(t)} \geq \lambda. \quad (8.4)$$

W warunkach (8.4), (8.5) w ewentualnym punkcie $t \in \text{int } T$ nieokreśloności pochodnej trajektorii dochodu wytworzanego w sektorach gospodarki przyjmujemy $dy_j(t)/dt|_{t=\tau} = \lim_{t \rightarrow \tau+0} dy_j(t)/dt$, $j = 1, 2$ (por. rozdz. 2, ods. 18 na s. 69).

Warunek (8.4) jednak tylko pozornie sprzyja konsumentom. Nie wyklucza on takiej maksymalnie korzystnej dla nich sytuacji, kiedy cała produkcja końcowa sektora inwestycyjnego będzie przez dłuższy okres kierowana wyłącznie na doinwestowanie sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne. Na początku wywoła to nawet szybki wzrost produkcji w tym sektorze. Wzrost ten odbywać się będzie jednak kosztem sektora inwestycyjnego, którego produkcja zacznie spadać. Po pewnym czasie sektor ten zubożeje do tego stopnia, że nie będzie w stanie dostarczyć nawet inwestycji na odtworzenie zużywającego się majątku w sektorze 2, co uwidoczni się, oczywiście, w spadku produkcji również w tym sektorze. Nie poprawi istotnie sytuacji postulat, aby tak dzielić inwestycje między sektory, by przynajmniej nie malał majątek produkcyjny w sektorze inwestycyjnym. Odsunęliśmy tylko nieco krytyczny moment, od którego zacznie się spadek produkcji w sektorze 2. Na dłuższą metę wzrost produkcji końcowej (dochodu) w sektorze 2 ze stopą $\geq \lambda$ zapewni dopiero taki podział inwestycji między sektory, przy którym także produkcja końcowa sektora inwestycyjnego będzie mogła rosnąć przynajmniej ze stopą λ . Nawet skrajnie prokonsumpcyjna polityka wzrostu preferująca w całym horyzoncie czasu T maksymalne doinwestowanie sektora 2 nie spowoduje wtedy nigdy spadku stopy wzrostu produkcji końcowej w sektorze 2 poniżej λ .

W i e d z e n i e 8.1.²¹ Jeżeli w procesie wzrostu spełniającym warunki (8.2) - (8.3) stopa wzrostu produkcji końcowej w sektorze inwestycyjnym będzie niższa od stopy wzrostu ludności, $\delta y_1(t) \leq \lambda - \varepsilon$, gdzie ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią, wtedy w dłuższym okresie czasu nie możliwy będzie wzrost produkcji dóbr konsumpcyjnych ze stopą $\geq \lambda$, tzn. począwszy od pewnego momentu nie będzie spełniony warunek (8.4). ■

²¹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 8, twierdzenie 8.1. s. 271.

Dalej interesować nas będą tylko takie procesy, które umożliwiają wzrost dochodu, a tym samym wzrost majątku produkcyjnego w obu sektorach przynajmniej ze stopą λ , a więc procesy spełniające warunki (8.2) - (8.4) i warunek

$$\frac{d}{dt} y_1(t) \cdot \frac{1}{y_1(t)} \geq \lambda. \quad (8.5)$$

Warunki (8.2) - (8.5) mogą okazać się jednak sprzeczne. Wyjaśnimy to bliżej.

Aby były spełnione warunki (8.2) - (8.5), muszą być zapewnione inwestycje na odtworzenie zużywającego się majątku i wzrost produkcji w sektorach ze stopą $\geq \lambda$, a zatem w każdym momencie czasu $t \in T$ powinien zachodzić warunek $a_1 m_1(t) \geq (\mu + \lambda)(m_1(t) + m_2(t))$. W szczególności, w momencie początkowym:

$$(a_1 - \mu - \lambda)m_1^0 - (\mu + \lambda)m_2^0 \geq 0$$

ponieważ $m_1^0, m_2^0 > 0$, zatem aby warunek ten był spełniony, musi zachodzić nierówność $a_1 - \mu - \lambda > 0$. Jest to nie tylko konieczny, ale i wystarczający warunek niesprzeczności układu (8.2) - (8.5). Jeżeli bowiem zachodzi powyższy warunek, wówczas warunki (8.2) - (8.5) spełniają na przykład trajektorie m_T, y_T .

$$m_1(t) = m_1^0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad m_2(t) = (m_2^0 - d)e^{-\mu(t-t_0)} + d e^{\lambda(t-t_0)},$$

$$y_1(t) = a_1 m_1(t), \quad y_2(t) = a_2 m_2(t),$$

gdzie $d = m_1^0(a_1 - \mu - \lambda)/(\mu + \lambda)$, odpowiadające sterowaniu s_T z wartościami $s(t) = (\mu + \lambda)/a_1$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Jeżeli warunek $(a_1 - \mu - \lambda)m_1^0 - (\mu + \lambda)m_2^0 \geq 0$ spełniany jest z równością, wtedy powyższy proces jest jedynym procesem spełniającym warunki (8.2) - (8.5), przy czym $d = m_2^0$. W tym szczególnym przypadku warunki początkowe determinują podział inwestycji między sektory w całym horyzoncie czasu. Ponieważ jest to sytuacja nietypowa dla realnej gospodarki, będziemy zakładać, że w momencie początkowym t_0 istnieje „rezerwa” inwestycyjna umożliwiająca wzrost produkcji w sektorach ze stopą $> \lambda$.

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e 8.1.}^{22} \quad (a_1 - \mu - \lambda)m_1^0 - (\mu + \lambda)m_2^0 > 0. \quad \nabla$$

W dalszym ciągu wygodne będzie wprowadzenie zmiennych

$$f_j(t) = \frac{1}{1^0} e^{-\lambda(t-t_0)} m_j(t), \quad \text{majątek w sektorach w przeliczeniu na osobę} \\ (j = 1, 2; \text{wymiar: } z\$/L). \quad (8.6)$$

²² Warunek $a_1 - \mu - \lambda > 0$ wynika z tego założenia.

Po podstawianiu nowych zmiennych do (8.2) - (8.5) otrzymamy następujący układ równoważny:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_1(t) &= (a_1 e(t) - \mu - \lambda) f_1(t), \\ \frac{d}{dt} f_2(t) &= a_1 (1 - e(t)) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t), \\ \frac{d}{dt} f_1(t) &\geq 0, \quad \frac{d}{dt} f_2(t) \geq 0, \\ e(t) &\in [0, 1], \quad e \in \bar{C}^0 [T], \\ (f_1(t_0), f_2(t_0)) &= (f_1^0, f_2^0), \end{aligned} \tag{8.7}$$

gdzie $(f_1^0, f_2^0) = (m_1^0/l^0, m_2^0/l^0) > 0$. Równoważność rozumiemy w tym sensie, że trajektorie f_T, e_T (gdzie $f_T = (f_1, f_2)_T$; $f_{jT} = \{(t, f_j(t)), t \in T\}$, $j = 1, 2$) wtedy i tylko wtedy spełnią warunki (8.7), gdy warunki (8.2) - (8.5) spełnia trajektoria m_T, y_T, e_T :

$$\begin{aligned} m_j(t) &= f_j(t) l^0 e^{\lambda(t-t_0)}, \\ y_j(t) &= a_j f_j(t) l^0 e^{\lambda(t-t_0)} \end{aligned}$$

($j = 1, 2$). Warunki (8.7) mają taką samą postać jak warunki (7.12), (7.15) z poprzedniego paragrafu. Funkcjom m_j odpowiadają obecnie funkcje f_j , zamiast parametru μ mamy teraz $\mu + \lambda$. Założeniu 7.2 odpowiada obecnie założenie 8.1.

8.2. Procesy wzrostu z niemalejącymi trajektoriami konsumpcji na osobę

8.2.1. TRZY ZADANIA STEROWANIA OPTYMALNEGO

Rozpatrzmy następujące trzy zadania sterowania optymalnego wzrostem:

(a) maksymalizacji konsumpcji (produkcji końcowej sektora 2) na osobę w ustalonym horyzoncie czasu T ,

$$\max_T \int a_2 f_2(t) dt$$

przy ograniczeniach (8.7);

(b) maksymalizacji konsumpcji w końcowym momencie t_1 ustalonego horyzontu czasu T ,

$$\max a_2 f_2(t_1),$$

przy ograniczeniach (8.7);

(c) minimalizacji czasu dojścia gospodarki do ustalonego docelowego poziomu γ^1 produkcji dóbr konsumpcyjnych na osobę,

$$\min t_1,$$

przy ograniczeniach (8.7)

i dodatkowym warunku

$$a_2 f_2(t_1) \geq \gamma^1 (> \gamma^0 = a_2 f_2^0),$$

W zadaniu (c) moment końcowy horyzontu czasu $T = [t_0, t_1]$ nie jest ustalony - jest zmienną decyzyjną zadania. W sensie matematycznym są to zadania analogiczne do zadań (a) - (c) z punktu 7.3. Prawdziwe pozostaje także twierdzenie 7.3, jeżeli tylko założenie 7.2 zastąpimy założeniem 8.1, zamiast parametru μ weźmiemy $\mu + \lambda$ i zamiast majątku produkcyjnego w sektorach - majątek w przeliczeniu na osobę. Innymi słowy, warunki (8.7) są równoważne z następującymi:

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t) [(a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t)],$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = (1 - \alpha(t)) [(a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t)],$$

(8.7')

$$\alpha(t) \in [0, 1], \alpha \in \bar{C}^0[T],$$

$$(f_1(t_0), f_2(t_0)) = (f_1^0, f_2^0),$$

gdzie $(f_1^0, f_2^0) > 0$, a zadania (a) - (c) z zadaniami

$$(a') \max \int_T a_2 f_2(t) dt \quad (8.8)$$

przy ograniczeniach (8.7'), (8.9)

$$(b') \max a_2 f_2(t_1), \quad (8.10)$$

przy ograniczeniach (8.7'), (8.11)

$$(c') \min t_1, \quad (8.12)$$

przy ograniczeniach (8.7')

i dodatkowym warunku:

$$a_2 f_2(t_1) \geq \gamma^1 (> \gamma^0) \quad (8.13)$$

(moment t_1 - nie ustalony).

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(\alpha^*, f^*)_T$ będzie rozwiązaniem któregośkolwiek z zadań (a') - (c') wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem odpowiadającego mu zadania (a) - (c) będzie proces $(s^*, f^*)_T$, w którym $s^*(t) = \mu/a_1 + \alpha^*(t) [(a_1 - \mu) f_1^*(t) - \mu f_2^*(t)] / a_1 f_1^*(t)$, por. twierdzenie 7.3; w zadaniach minimalnoczasowych (c), (c') horyzont $T = T^* = [t_0, t_1^*]$, gdzie t_1^* - najwcześniejszy moment dojścia do poziomu konsumpcyjnego

cji na osobę γ^1 . Sterowaniem w zadaniach (a') - (c') jest funkcja α_T podziału między sektory nadwyżki inwestycyjnej ponad tę ich wielkość, która jest niezbędna, aby majątek produkcyjny w sektorach mógł rosnąć ze stopą λ . Para równań różniczkowych w (8.7') opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (stacjonarnego, dwuwymiarowego) systemu dynamicznego. Jego stanem wewnętrznym w momencie czasu t jest wielkość majątku produkcyjnego w przeliczeniu na osobę w sektorach gospodarki, stanem wyjścia - konsumpcja na osobę $\gamma(t) = a_2 f_2(t)$.

Znając rozwiązanie zadań (a) - (c) z punktu 7.3, możemy podać natychmiast rozwiązania sformułowanych wyżej zadań (a') - (c') (por. twierdzenie 7.4). I tak rozwiązaniem zadania (a) jest proces $(\alpha^*, f^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

$$f_1^*(t) = \begin{cases} (f_1^0 - d_1) e^{(a_1 - \mu - \lambda)(t - t_0)} + d_1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ f_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

$$f_2^*(t) = \begin{cases} f_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ (f_2^0 - d_2(\tau)) e^{-(\mu + \lambda)(t - \tau)} + d_2(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

gdzie $d_1 = (\mu + \lambda) f_2^0 / (a_1 - \mu - \lambda)$, $d_2(\tau) = (a_1 - \mu - \lambda) f_1^*(\tau) / (\mu + \lambda)$.

Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 - (\mu + \lambda) \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a_1}\right) \theta = e^{-(\mu + \lambda)\theta} ,$$

wtedy moment „przełączenia” sterowania optymalnego $\tau = t_1 - \theta > t_0$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \theta$, wtedy $\tau = t_0$ i proces optymalny redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = 0, \quad f_1^*(t) = f_1^0, \quad f_2^*(t) = (f_2^0 - d_2(t_0)) e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)} + d_2(t_0)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ ($d_2(t_0) = d_2(\tau)$ dla $\tau = t_0$).

Rozwiązanie zadania (b') różni się od poprzedniego tylko momentem „przełączenia” sterowania α_T^* . W rozwiązaniu tym $\tau = t_1 - \theta > t_0$, jeżeli $|T| > \theta = (\mu + \lambda)^{-1} \ln[1 + (\mu + \lambda)/e_2(a_1 - \mu - \lambda)]$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T| \leq \theta$.

Analogicznie wygląda rozwiązanie zadania (c'), jeżeli tylko zamiast ustalonego horyzontu czasu T weźmiemy optymalny horyzont $T^* = [t_0, t_1^*]$, gdzie t_1^* oznacza najwcześniejszy moment osiągnięcia docelowego poziomu konsumpcji γ^1 (produkcji końcowej sektora 2 w przeliczeniu na osobę, por.

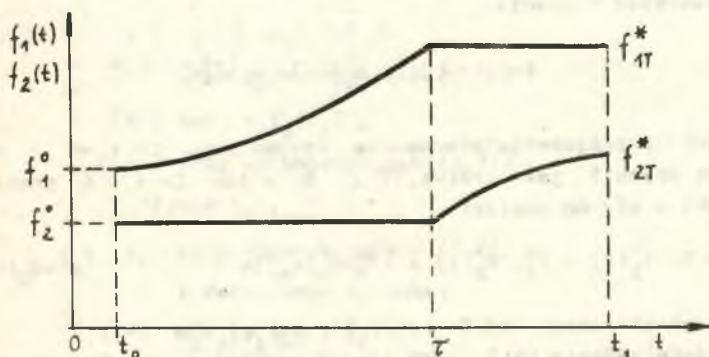
uwagi na temat rozwiązania zadania minimalnoczasowego w punkcie 7.3).

Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach 1 i dochodu otrzymujemy na podstawie (8.6), (8.3).

8.2.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZAŃ

W krótkim horyzoncie czasu, a w zadaniu (c') - przy niskim docelowym poziomie konsumpcji na osobę γ^1 , cała nadwyżka inwestycji ponad ich wielkość niezbędną dla zapewnienia wzrostu dochodu w obu sektorach ze stopą λ skierowana zostaje do sektora 2. Majątek produkcyjny i dochód tego sektora rosną ze stopą λ . Konsumpcja na osobę rośnie gwałtownie. Majątek produkcyjny i dochód sektora inwestycyjnego rosną ze stopą λ .

W długim horyzoncie czasu, a w zadaniu minimalnoczasowym (c') - przy wysokim docelowym poziomie konsumpcji na osobę, pojawiają się dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej - inwestycyjnej - szybko rośnie majątek i dochód sektora inwestycyjnego (ze stopą $a_1 - \mu > \lambda$). Majątek i dochód sektora 2 rosną tylko ze stopą λ , konsumpcja na osobę utrzymuje się na wyjściowym poziomie γ^0 . W fazie drugiej - konsumpcyjnej - następuje zahamowanie szybkiego wzrostu majątku w sektorze inwestycyjnym. Majątek i dochód w tym sektorze rosną w tej fazie tylko ze stopą λ . Wzrastają inwestycje w sektorze 2, rośnie szybko majątek i dochód tego sektora, z upływem czasu jednak coraz wolniej. Konsumpcja na osobę rośnie gwałtownie. Im dłuższy jest horyzont czasu T (w zadaniu minimalnoczasowym - im wyższy jest zakładany docelowy poziom konsumpcji na osobę), tym dłuższa jest faza inwestycyjna. W momencie przejścia od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej obserwujemy gwałtowny spadek inwestycji w sektorze 1 i ich wzrost w sektorze 2 (rys.8.1).



Rys.8.1. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach 1 i 2 na osobę - rozwiązania zadań (8.8) - (8.9), (8.10) - (8.11), (8.12) - (8.13) w długim horyzoncie czasu (w zadaniu minimalnoczasowym horyzont $T = T^*$)

8.2.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W punkcie 7.3.4 interesowała nas gospodarka ze stałym poziomem produkcji dóbr konsumpcyjnych. Obecnie rozpatrzmy procesy w G -równowadze ze stałym poziomem konsumpcji na osobę, tzn. procesy dla których

$$G(f, \delta) = \frac{d}{dt} \delta = \text{const.},$$

gdzie $\delta(t) = a_2 f_2(t)$. Istnieją dwa typy takich procesów.

(A) Sterowaniu $\bar{\alpha}_T$ tożsamościowo równemu jedności odpowiadają w takim procesie trajektorie \bar{f}_T majątku produkcyjnego w sektorach na osobę:

$$\bar{f}_1(t) = (\bar{f}_1^0 - \bar{d}_1) e^{(a_1 - \mu - \lambda)(t - t_0)} + \bar{d}_1, \quad \bar{f}_2(t) = \bar{f}_2^0 \quad (8.14)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ ($\bar{\delta}(t) = a_2 \bar{f}_2(t)$), gdzie $\bar{d}_1 = (\mu + \lambda) \bar{f}_2^0 / (a_1 - \mu - \lambda)$, oraz \bar{f}_1^0, \bar{f}_2^0 - dodatnie początkowe wielkości majątku produkcyjnego w przeliczeniu na osobę w sektorach gospodarki spełniające warunek $a_1 \bar{f}_1^0 > (\mu + \lambda)(\bar{f}_1^0 + \bar{f}_2^0)$.

(B) Drugi typ tworzą procesy $(\bar{s}, \bar{f})_T$ z dowolnym innym sterowaniem \bar{s}_T i trajektorią \bar{f}_T .

$$\bar{f}_1(t) = \bar{f}_1^0, \quad \bar{f}_2(t) = (a_1 - \mu - \lambda) \bar{f}_1^0 / (\mu + \lambda) \quad (8.15)$$

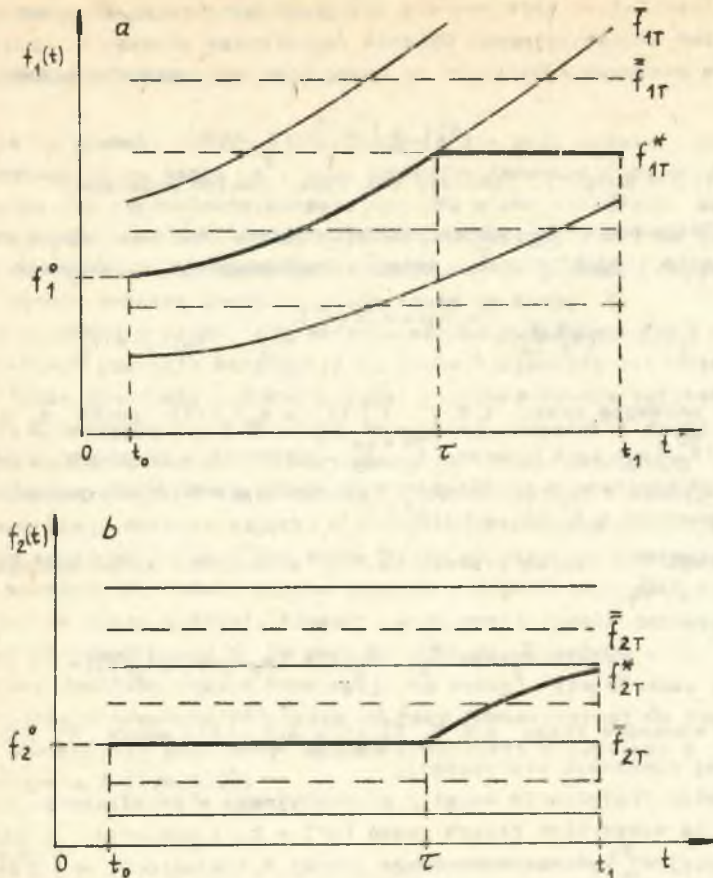
w każdym momencie czasu $t \in T$ ($\bar{\delta}(t) = a_2 \bar{f}_2(t)$), gdzie $\bar{f}_1^0 > 0$ (stan klasycznej równowagi statycznej).

Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w przeliczeniu na osobę - rozwiązania wszystkich trzech zadań (a') - (c') pozostają w pierwszej - inwestycyjnej - fazie wzrostu na jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) postaci (8.14). W drugiej - konsumpcyjnej - fazie wzrostu następuje wyjęcie gospodarki z G -równowagi (ryc.8.2.a,b)²³.

Im dłuższy jest horyzont czasu T (w zadaniu minimalnoczasowym - im wyższy jest docelowy poziom konsumpcji na osobę), tym dłużej optymalne trajektorie pozostają na jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A).

²³ Gdyby w procesie optymalnym wraz ze wzrostem długości horyzontu czasu T rosła długość fazy konsumpcyjnej, wtedy w fazie tej z upływem czasu obserwowalibyśmy zbliżanie się trajektorii majątku w przeliczeniu na osobę f_1^* do trajektorii w G -równowadze typu (B) postaci (8.15) z

wartościami $\bar{f}(t) = (f_1^*(t), (a_1 - \mu - \lambda) f_1^*(t) / (\mu + \lambda))$, gdzie $f_1^*(t)$ oznacza wartość majątku na osobę w procesie optymalnym w konsumpcyjnej fazie wzrostu



Rys.8.2. Trajektorie majątku produkcyjnego na osobę w G -równowagach oraz optymalna trajektoria w długim horyzoncie czasu (a) w sektorze 1, (b) w sektorze 2 (w zadaniu minimalnoczesowym horyzont $T = T^*$)

□ T w i e r d z e n i e 8.2.²⁴ Jeżeli długość horyzontu czasu $|T| \rightarrow +\infty$, wówczas różnica $|\delta_{f_{1T}}^* - \delta_{f_{1T}}^-|$ średnich stóp wzrostu majątku produkcyjnego w przeliczeniu na osobę w sektorze 1 w procesach optymalnych - rozwiązaniach zadań (a') - (c') - i w G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera (w zadaniu minimalnoczesowym (c') należy horyzont czasu T zastąpić optymalnym horyzontem T^*). ■

²⁴ Dowód pomijamy, przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 7.2.

8.3. Wzrost optymalny z ciągłą trajektorią inwestycji

8.3.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Postąpimy analogicznie jak w punkcie 7.4, tzn. przyjmiemy, że funkcja α_T podziału nadwyżki inwestycyjnej między sektory gospodarki ponad tę wielkość inwestycji, która jest niezbędna dla zapewnienia wzrostu dochodu w obu sektorach ze stopą λ spełnia - jako druga współrzędna trajektorii stanów wewnętrznych systemu - równanie

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t))$$

z warunkiem początkowym $\alpha(t_0) = \alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1] \subset [0, 1]$, gdzie ω - parametr dodatni; β^0, β^1 - graniczne, dopuszczalne wartości funkcji α_T ; β_T - sterowanie z wartościami $\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1]$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Uzupełniając o te warunki zadanie (8.10) - (8.11), otrzymamy następujące zadanie sterowania docelowego (maksymalizacji konsumpcji na osobę w momencie końcowym t_1 ustalonego horyzontu czasu T):²⁵

$$\max a_2 f_2(t_1), \quad (8.16)$$

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t) [(a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t)],$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = (1 - \alpha(t)) [(a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t)],$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)), \quad (8.17)$$

$$\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1], \quad \beta \in \mathcal{C}^0[T],$$

$$(f_1(t_0), f_2(t_0), \alpha(t_0)) = (f_1^0, f_2^0, \alpha^0)$$

$(f_1^0, f_2^0 > 0; \alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1])$. Założeniu 7.3 odpowiada obecnie

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e 8.2. } \beta^0 > \frac{\mu + \lambda}{a_1}, \omega > a_1 \beta^1 - \mu - \lambda. \nabla$$

Postępując analogicznie jak w punkcie 7.4. 1, tzn. wprowadzając zmienną

$$g(t) = (a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu + \lambda) f_2(t) \quad (8.18)$$

(inwestycje w przeliczeniu na osobę pozostające po odliczeniu tej ich części, która jest niezbędna dla zapewnienia wzrostu majątku w sektorach ze stopą λ ; wymiar: $z\dot{1}/R \cdot L$), otrzymamy zadanie

²⁵ Por. zadanie (7.25) - (7.26) w punkcie 7.4.

$$\max \int_T a_2(1-\alpha(t))g(t)dt, \quad (8.16')$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = (a_1 \alpha(t) - \mu - \lambda)g(t),$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)),$$

$$\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1], \quad \beta \in \mathcal{C}^0[T], \quad (8.17')$$

$$(g(t_0), \alpha(t_0)) = (g^0, \alpha^0),$$

gdzie $\alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1]$, $g^0 = (a_1 - \mu - \lambda)f_1^0 - (\mu + \lambda)f_2^0 > 0$ (przy założeniu 8.1). Zadania (8.16) - (8.17) i (8.16') - (8.17') są równoważne w tym sensie, że proces $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (8.16') - (8.17') wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (8.16) - (8.17) będzie proces $(\beta^*, f^*, \alpha^*)_T$, gdzie związek trajektorii f_T^* i g_T^* określa równanie (8.18) oraz para równań:

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t) g(t), \quad (8.19)$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = (1 - \alpha(t))g(t),$$

Zadanie (8.16') - (8.17') ma postać analogiczną jak zadanie (7.25') - (7.26') (zamiast parametru μ mamy teraz $\mu + \lambda$), a jego rozwiązanie ustala twierdzenie 7.6 (założeniom 7.2, 7.3 odpowiadają obecnie założenia 8.1, 8.2): Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wtedy rozwiązaniem zadania (8.16') - (8.17') przy założeniach 8.1, 8.2 jest proces $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$:

$$\beta^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$g^*(t) = \begin{cases} g^0 e^{\omega t} \varphi(t) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ g^*(\tau) e^{\omega(\tau-t)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} (\alpha^0 - \beta^1) e^{-\omega(t-t_0)} + \beta^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (\alpha^*(\tau) - \beta^0) e^{-\omega(t-\tau)} + \beta^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $\tau \in [t_1 - \theta, t_1)$.

$$\varphi(t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^0 - \beta^1) (1 - e^{-\omega(t-\tau_0)}) + (a_1 \beta^1 - \mu - \lambda)(t - \tau_0).$$

$$\varphi(\tau; t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^*(\tau) - \beta^0) (1 - e^{-\omega(t-\tau)}) + (a_1 \beta^0 - \mu - \lambda)(t - \tau).$$

W krótkim horyzoncie czasu ($|T| \ll \theta$) proces optymalny redukuje się do postaci:

$$\beta^*(t) = \beta^0, \quad g^*(t) = g^0 e^{\varphi(\tau_0; t)},$$

$$\alpha^*(t) = (\alpha^0 - \beta^0) e^{-\omega(t-\tau_0)} + \beta^0$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ ($\varphi(t_0; t) = \varphi(\tau; t)$ dla $\tau = t_0$).

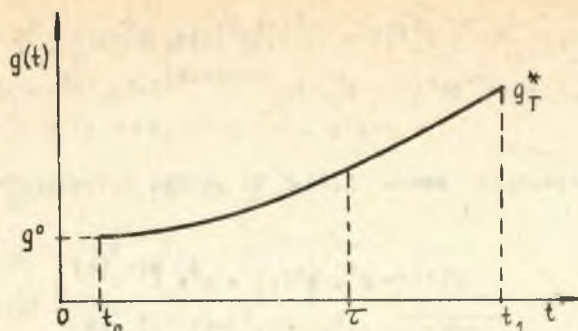
Optymalną trajektorię majątku produkcyjnego na osobę w sektorach otrzymujemy z rozwiązania układu równań (8.19). Trajektorie majątku produkcyjnego m_T^* i dochodu y_T^* w sektorach otrzymujemy z (8.6), (8.3).

8.3.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Niezależnie od długości horyzontu czasu T obserwujemy monotoniczny wzrost wszystkich trajektorii z wyjątkiem trajektorii α_T^* (m.in. trajektorii majątku produkcyjnego i dochodu w sektorach, konsumpcji i konsumpcji na osobę). Postać trajektorii α_T^* podziału inwestycji między sektory zależy od stanu początkowego α^0 i długości horyzontu.

(i) $\alpha^0 \in (\beta^0, \beta^1)$. Jeżeli horyzont jest krótki, wtedy stale rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne (α_T^* maleje). Z czasem majątek produkcyjny i dochód sektora 2 (konsumpcja) zaczynają rosnąć szybciej niż w sektorze 1. W długim horyzoncie czasu, w fazie pierwszej - inwestycyjnej - rośnie udział inwestycji w sektorze 1 wytwarzającym dobra inwestycyjne. Majątek produkcyjny i dochód w tym sektorze rosną coraz szybciej. W fazie drugiej - konsumpcyjnej - zaczyna wzrastać udział inwestycji w sektorze 2, co powoduje przyspieszenie wzrostu majątku produkcyjnego i dochodu w tym sektorze (konsumpcji). Majątek i dochód w sektorze inwestycyjnym rosną wolniej niż w fazie pierwszej (rys. 8.3).

(ii) $\alpha^0 = \beta^0$ (podział inwestycji „korzystny” dla sektora 2). Jeżeli horyzont jest krótki, wtedy w całym horyzoncie zachowany zostaje wyjściowy podział α^0 . Majątek produkcyjny i dochód w sektorze 2 (konsumpcja) rosną szybciej niż w sektorze inwestycyjnym. W długim horyzoncie czasu, w pierwszej fazie, rośnie udział inwestycji w sektorze 1, co wywołuje najpierw powolny, potem coraz szybszy wzrost jego majątku produkcyjnego i dochodu. Majątek produkcyjny i dochód (konsumpcja) w sektorze 2 rosną najpierw szybko, potem nieco wolniej. W drugiej fazie zaczyna rosnąć udział inwestycji w sektorze 2, co powoduje szybszy wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w tym sektorze (konsumpcji). Wzrost majątku i dochodu w sektorze inwestycyjnym staje się wolniejszy niż w fazie pierwszej.



Rys. 8.3. Optymalna trajektoria inwestycji na osobę po odliczeniu części zapewniającej wzrost majątku produkcyjnego w sektorach ze stopą λ - rozwiązanie zadania (8.16') - (8.17') w przypadku, gdy początkowy udział inwestycji w dochodzie $\alpha^0 \in (\beta^0, \beta^1)$ i horyzont czasu jest długi

(iii) $\alpha^0 = \beta^1$ (podział inwestycji „korzystny” dla sektora inwestycyjnego). W krótkim horyzoncie czasu rośnie udział inwestycji w sektorze 2. Majątek produkcyjny i dochód w tym sektorze (konsumpcja) rosną - najpierw wolno, potem coraz szybciej. W sektorze inwestycyjnym, odwrotnie, przyspieszony wzrost majątku i dochodu na początku zostaje nieco zahamowany pod koniec horyzontu czasu T . W długim horyzoncie czasu, w pierwszej fazie, dynamicznie rośnie majątek produkcyjny i dochód w sektorze inwestycyjnym, wolniej - w sektorze 2 wytwarzającym dobra konsumpcyjne. W fazie tej zachowany zostaje wyjściowy, korzystny dla tego sektora podział inwestycji. W drugiej fazie rośnie udział inwestycji w sektorze 2. Najpierw wolno, potem coraz szybciej rośnie majątek produkcyjny i dochód w sektorze 2 (konsumpcja). Majątek i dochód w sektorze inwestycyjnym rosną wolniej niż w fazie pierwszej.

Trajektorie majątku produkcyjnego, dochodu i konsumpcji są zawsze gładkie (różniczkowalne), trajektoria inwestycji jest wszędzie ciągła i przedziałami różniczkowalna.

8.3.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W punkcie 7.4.3 wskazaliśmy na magistralne właściwości procesów wzrostu w σ -równowadze ze stałą stopą wzrostu globalnych inwestycji netto i stałym ich podziałem między sektory gospodarki. Postępując analogicznie, rozpatrzmy obecnie procesy ze stałą stopą wzrostu inwestycji, w przeliczeniu na osobę, pozostających po odliczeniu nakładów zapewniających wzrost majątku produkcyjnego w sektorach ze stopą równą stopie wzrostu ludności i stałym ich podziałem między sektory:

$$G(g, \alpha, \gamma) = \left(\delta_g \cdot \frac{d}{dt} \alpha \right) = \left(\frac{d}{dt} g \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{d}{dt} \alpha \right) = \text{const.}$$

(A) Przez $(\bar{\beta}, \bar{g}, \bar{\alpha})_T$ oznaczymy procesy ze sterowaniem $\bar{\beta}_T$ tożsamościowo równym β^1 . Odpowiadają im w G -równowadze trajektorie $\bar{g}_T, \bar{\alpha}_T$,

$$\bar{g}(t) = \bar{g}^0 e^{(a_1 \beta^1 - \mu - \lambda)(t-t_0)}, \bar{\alpha}(t) = \beta^1 \quad (8.20)$$

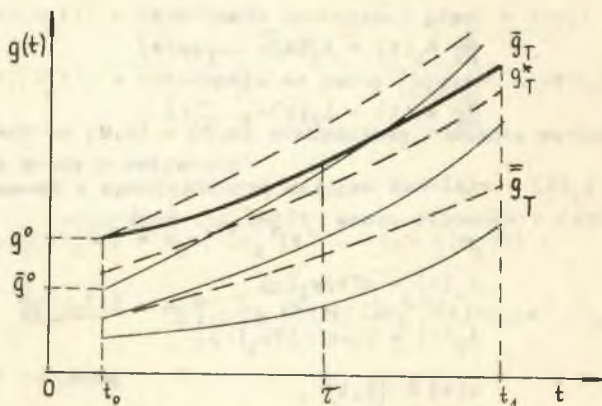
w każdym momencie czasu $t \in T$ z dowolnym warunkiem początkowym $\bar{g}^0 > 0$.

(B) Przez $(\beta^0, \bar{g}, \bar{\alpha})_T$ oznaczymy procesy ze sterowaniem $\bar{\beta}_T$ tożsamościowo równym β^0 , któremu odpowiadają w G -równowadze trajektorie $\bar{g}_T, \bar{\alpha}_T$,

$$\bar{g}(t) = \bar{g}^0 e^{(a_1 \beta^0 - \mu - \lambda)(t-t_0)}, \bar{\alpha}(t) = \beta^0 \quad (8.21)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ z warunkiem początkowym $\bar{g}^0 > 0$.

Zważywszy, że w optymalnym procesie przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy inwestycyjnej, widzimy, iż im dłuższy jest horyzont czasu T , tym bardziej optymalna trajektoria g_T^* zbliża się w jego środkowym okresie do trajektorii \bar{g}_T w G -równowadze typu (A) postaci (8.20) z warunkiem początkowym $\bar{g}^0 = g^0 \exp \{a_1 \omega^{-1}(\alpha^0 - \beta^1)\}$ (magistrali), gdzie g^0 jest początkowym „zapasem” inwestycji na osobę ponad tę ich wielkość, która umożliwia wzrost majątku produkcyjnego w sektorach gospodarki ze stopę równą stopie wzrostu ludności. Pod koniec horyzontu (w fazie konsumpcyjnej) optymalna trajektoria g_T^* wychodzi z otoczenia magistrali (rys.8.4)²⁶.



Rys.8.4. Trajektorie inwestycji na osobę po odliczeniu nakładów zapewniających wzrost majątku w sektorach ze stopę λ w G -równowadgach oraz optymalna trajektoria w długim horyzoncie czasu

²⁶ Gdyby w procesie optymalnym wraz ze wzrostem długości horyzontu czasu T rosła długość fazy konsumpcyjnej, wtedy obserwowalibyśmy z czasem zbliżanie się trajektorii g_T^* do trajektorii \bar{g}_T w G -równowadze typu (B) z warunkiem początkowym $\bar{g}^0 = g^0 \exp \{a_1 \omega^{-1}(\alpha^0 - \beta^0) + a_1(\beta^1 - \beta^0)\} \times (\tau - t_0)$, gdzie τ jest momentem przełączenia sterowania β_T^* w zadaniu (8.16') - (8.17') (momentem przejścia od inwestycyjnej, do konsumpcyjnej fazy wzrostu).

□ T w i e r d z e n i e 8.3.²⁷ Weźmy proces $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$ - rozwiązanie zadania (8.16') - (8.17'). (i) Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi, $|T| > 2\theta_\varepsilon$, to

$$|g^*(t) - \bar{g}(t)| \leq \varepsilon$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie \bar{g}_T jest magistralą - trajektorią postaci (8.20) z warunkiem początkowym $\bar{g}^0 = g^0 \exp \{ a_1 \omega^{-1} (\alpha^0 - \beta^1) \}$.

(ii) Przy $|T| \rightarrow +\infty$ różnica średnich stóp wzrostu $|\delta_{g_T^*} - \delta_{\bar{g}_T}|$ maleje asymptotycznie do zera. ■

§ 9. OPTIMALNY PODZIAŁ INWESTYCJI MIĘDZY SEKTORY W DWUCZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU

9.1. Podstawowe założenia²⁸

Wzorem poprzednich dwóch paragrafów zakładamy, że wzrost trwałego majątku produkcyjnego w sektorach opisuje para równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1(t) &= i_1(t) - \mu m_1(t), \\ \frac{d}{dt} m_2(t) &= i_2(t) - \mu m_2(t), \end{aligned} \quad (9.1)$$

gdzie $m_j(t)$, $i_j(t)$ - wielkość majątku produkcyjnego i inwestycji w sektorach gospodarki w momencie czasu t ($j=1,2$), przy czym

$$\begin{aligned} i_1(t) &= s(t)y_1(t), \\ i_2(t) &= (1-s(t))y_1(t), \\ s(t) &\in [0,1], \end{aligned} \quad (9.2)$$

gdzie $y_1(t)$ jest wielkością dochodu narodowego wytwarzanego w momencie czasu t w sektorze inwestycyjnym - produkcją końcową sektora 1, s -funkcją podziału inwestycji między sektory (udział inwestycji w sektorze 1 w jego produkcji końcowej, zob. punkt 7.1).

²⁷ Dowód pomijamy, przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 7.7.

²⁸ Modele omawiane w tym paragrafie stanowią naturalne uogólnienie modeli z paragrafu 7, zob. także np. Z. C z e r w i ń s k i [12] rozdz. 4 punkt 4.3, G. H a d l e y, M.C. K e m p [22] rozdz.6, H. U z a w a [50].

Jednoczynnikowe funkcja produkcji (7.2) zastąpimy obecnie dwuczynnikowymi statycznymi funkcjami Cobba-Douglasa (jednorodnymi stopnia 1):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1 a_1^{\varepsilon_1(t)} z_1^{1-\varepsilon_1(t)}, \\ y_2(t) &= a_2 a_2^{\varepsilon_2(t)} z_2^{1-\varepsilon_2(t)}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

gdzie $y_2(t)$ jest wielkością dochodu narodowego wytwarzanego w momencie czasu t w sektorze 2 - w całości przeznaczonego na konsumpcję, $z_j(t)$ - zatrudnieniem w j -tym sektorze ($j=1,2$),

$$z_j(t) = \varphi_j l^{\varrho_j} e^{\lambda(t-t_0)} \quad (9.4)$$

$\varphi_1, \varphi_2 > 0$; $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$ (udziały zatrudnionych w sektorach w ogólnej liczbie ludności $l^{\varrho_j} \exp\{\lambda(t-t_0)\}$, λ - stopa wzrostu ludności).

9.2. Optymalny proces wzrostu z przedziałami ciągłą trajektorią inwestycji

9.2.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Wprowadźmy oznaczenia:

$$u_j(t) = a_j(t)/z_j(t) \text{ - techniczne uzbrojenie pracy w } j\text{-tym sektorze} \\ \text{(wymiar: } z\dot{L}/L) \quad (9.5)$$

$$\gamma(t) = y_2(t)/l(t) \text{ - konsumpcja na osobę (wymiar: } z\dot{L}/R \cdot L).$$

Z (9.1) zważywszy na (9.2) - (9.5) otrzymujemy równania wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w sektorach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_1(t) &= a_1 s(t) u_1^{\varepsilon_1(t)} - (\mu + \lambda) u_1(t), \\ \frac{d}{dt} u_2(t) &= a_1 \varphi_1 \varphi_2^{-1} (1-s(t)) u_1^{\varepsilon_1(t)} - (\mu + \lambda) u_2(t) \end{aligned} \quad (9.6)$$

oraz konsumpcji na osobę

$$\gamma(t) = a_2 \varphi_2 u_2^{\varepsilon_2(t)}. \quad (9.7)$$

Równania (9.6) - (9.7) opisują funkcjonowanie gładkiego, stacjonarnego systemu dwuwymiarowego. Stanem wewnętrznym w momencie czasu t jest wektor $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ technicznego uzbrojenia pracy, stanem wyjścia - konsumpcja na osobę $\gamma(t)$. Rolę sterowania gra funkcja a podziału inwestycji między sektory. Oznaczmy przez $u^0 = (u_1^0, u_2^0) > 0$ początkowe techniczne uzbrojenie pracy i postawmy zadanie maksymalizacji konsumpcji na

osobę w momencie końcowym ustalonego horyzontu czasu $T = [t_0, t_1]$ (w klasie $\tilde{C}^0 [T]$ funkcji podziału inwestycji między sektory):

$$\max \delta(t_1) \quad (9.8)$$

przy ograniczeniach (9.6),

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in \tilde{C}^0 [T], \quad (9.9)$$

$$(u_1(t_0), u_2(t_0)) = (u_0^1, u_0^2).$$

gdzie $(u_1^0, u_2^0) = (m_1^0/z_1^0, m_2^0/z_2^0) > 0$, a funkcja δ ma postać (9.7). W procesach wzrostu $(s, u)_T$ spełniających warunki (9.9) trajektorie technicznego uzbrojenia pracy $u_T = (u_1, u_2)_T$, gdzie: $u_{jT} = \{(t, u_j(t)), t \in T, \{j = 1, 2\}$ są dodatnie i równomiernie ograniczone, niezależnie od długości horyzontu.

W punkcie tym rozpatrzmy sytuację, kiedy możliwy jest wzrost technicznego uzbrojenia pracy w sektorach gospodarki w momencie początkowym t_0 . W warunkach (9.9) oznacza to, że²⁹

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e 9.1. } u_1^0 < \left(\frac{s_1}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon_1)}, \quad u_2^0 < \frac{s_1}{\mu + \lambda} \varrho_1 \varrho_2^{-1} (u_1^0)^{\varepsilon_1}. \quad \nabla$$

W optymalnych procesach wzrostu w modelach jednoczynnikowych, zarówno jedno- jak i dwusektorowych, w długich okresach czasu obserwowaliśmy zawsze - niezależnie od kryterium wzrostu - dwie fazy wzrostu: początkową - inwestycyjną i końcową - konsumpcyjną. W modelach dwuczynnikowych jednosektorowych stwierdziliśmy istnienie jeszcze jednej fazy - środkowej - powolnego, równomiernego wzrostu majątku produkcyjnego, dochodu narodowego i konsumpcji. Faza ta wystąpiła, gdy postulowaliśmy maksymalizację konsumpcji na osobę w ustalonym horyzontie czasu T (zadania (6.15) - (6.16), (6.20) - (6.21)), lecz „zniknęła” w rozwiązaniu zadania minimalnoczasowego (6.30) - (6.31). Nie pojawia się także w rozwiązaniu zadania (9.8) - (9.9).

□ **T w i e r d z e n i e 9.1**³⁰ (1) Rozwiązaniem zadania (9.8) - (9.9) przy założeniu 9.1 jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

$$u_1^*(t) = \begin{cases} [d_1^0 e^{-(1-\varepsilon_1)(\mu+\lambda)(t-t_0)} + d_1]^{1/(1-\varepsilon_1)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ u_1^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

²⁹ Por. założenie 6.2 w punkcie 6.3.

³⁰ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 9, twierdzenie 9.1, s. 272.

$$u_2^*(t) = \begin{cases} u_2^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) , \\ d_2(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} + d_3(\tau) e^{-\varepsilon_1(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] , \end{cases}$$

gdzie $d_1 = a_1/(\mu+\lambda)$, $d_1^0 = (u_1^0)^{1-\varepsilon_1}$ $-d_1 < 0$ (przy założeniu 9.1),

$$d_3(\tau) = a_1 \varphi_1 \varphi_2^{-1} (u_1^*(\tau))^{\varepsilon_1 / (1-\varepsilon_1)(\mu+\lambda)}, \quad d_2(\tau) = u_2^*(\tau) - d_3(\tau).$$

(ii) Istnieje taka liczba $\theta_1 > 0$, że $\tau \in \text{int } T$, jeżeli horyzont czasu T spełnia warunek $|T| > \theta_1$. Jeżeli $|T| \leq \theta_1$, wówczas $\tau = t_0$ i proces optymalny redukuje się do postaci:

$$e^*(t) = 0, \quad u_1^*(t) = u_1^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)}$$

$$u_2^*(t) = d_2(t_0) e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} + d_3(t_0) e^{-\varepsilon_1(t-t_0)}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ (tutaj: $d_j(t_0) = d_j(\tau)$ dla $\tau = t_0$).

(iii) Długość fazy konsumpcyjnej (przedział czasu $[\tau, t_1]$) jest zawsze ograniczona, tzn. istnieje taka liczba $\theta_2 > 0$, że $t_1 - \tau \leq \theta_2$ dla horyzontu czasu T dowolnej długości. ■

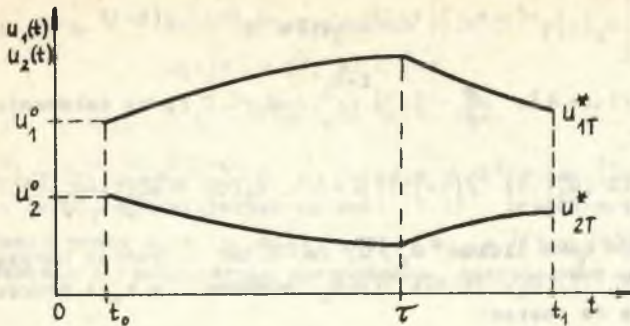
9.2.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalną trajektorię konsumpcji na osobę, majątku produkcyjnego, dochodu i inwestycji produkcyjnych w sektorach otrzymujemy z (9.7), (9.5), (9.3), (9.2).

W krótkim horyzoncie czasu techniczne uzbrojenie pracy, majątek produkcyjny i dochód sektora inwestycyjnego maleją. Produkcja końcowa tego sektora kierowana jest wyłącznie na doinwestowanie sektora 2. Techniczne uzbrojenie pracy, majątek produkcyjny oraz dochód sektora 2 (konsumpcja) rosną - najpierw szybko, potem coraz wolniej.

Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wówczas optymalny proces wzrostu dzieli się na dwie fazy. W fazie początkowej - inwestycyjnej - rośnie majątek produkcyjny, dochód i techniczne uzbrojenie pracy w sektorze 1. Cała jego produkcja końcowa przeznaczona zostaje na inwestycje wyłącznie w tym sektorze. Wskutek tego maleje majątek produkcyjny, dochód i techniczne uzbrojenie pracy w sektorze 2. W fazie drugiej - konsumpcyjnej - produkcja końcowa sektora inwestycyjnego skierowana zostaje w całości na inwestycje w sektorze 2. Szybko zaczyna rosnąć jego majątek produkcyjny, dochód (konsumpcja) oraz techniczne uzbrojenie pracy. Z upływem czasu wzrost ten staje się jednak coraz wolniejszy. Kurczy się majątek produk-

cyjny w sektorze inwestycyjnym. Zmniejsza się jego dochód, spada techniczne uzbrojenie pracy (rys.9.1).



Rys.9.1. Optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w sektorach - rozwiązanie zadania (9.8) - (9.9) w długim horyzoncie czasu

9.2.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

Rozpatrzmy procesy, którym odpowiada stała stopa wzrostu konsumpcji na osobę:

$$G(u, \delta) = \delta_{\bar{y}} = \frac{d}{dt} \bar{y} \cdot \frac{1}{\bar{y}} = \text{const.}$$

(A) Przy $|T| \rightarrow +\infty$, w inwestycyjnej fazie wzrostu, optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy jest asymptotycznie zbliżona do trajektorii \bar{u}_T w następującym procesie $(\bar{s}, \bar{u})_T$ w G -równowadze:

$$\bar{s}(t) = 1, \quad \bar{u}_1(t) = \left(\frac{a_1}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon_1)}, \quad \bar{u}_2(t) = u_2^0 e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)} \quad (9.10)$$

($\bar{y}(t) = a_2 \varrho_2 (u_2^0)^{\varepsilon_2} \exp\{-\varepsilon_2(\mu + \lambda)(t - t_0)\}$) w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie u_2^0 oznacza początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze 2 w zadaniu (9.8) - (9.9); po drugiej współrzędnej trajektoria u_T^* w fazie inwestycyjnej jest tożsama z trajektorią \bar{u}_T w G -równowadze.

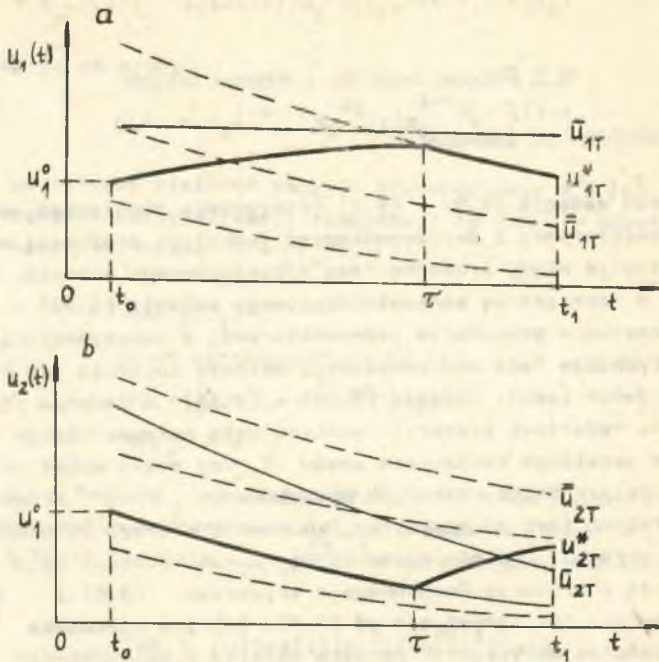
(B) W drugiej, konsumpcyjnej, fazie wzrostu po pierwszej współrzędnej optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* jest tożsama z trajektorią \bar{u}_T w następującym procesie $(\bar{s}, \bar{u})_T$ w G -równowadze:

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= 0, \quad \bar{u}_1(t) = \bar{u}_1^0 e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)} \\ \bar{u}_2(t) &= \bar{u}_2^0 e^{\varepsilon_1(\mu + \lambda)(t - t_0)} \end{aligned} \quad (9.11)$$

($\bar{y}(t) = a_2 \varrho_2 (\bar{u}_2^0)^{\varepsilon_2} \exp\{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\mu + \lambda)(t - t_0)\}$) w każdym momencie czasu $t \in T$,

gdzie $\bar{u}_1^0 = u_1^*(\tau) \exp \{ (\mu + \lambda)(\tau - t_0) \}$, τ - moment „przełączenia” sterowania

optymalnego. $\bar{u}_2^0 = a_1 \varphi_1 \varphi_2 (u_1^*)^{-1} / (1 - \varepsilon_1)(\mu + \lambda)$. Po drugiej współrzędnej obserwujemy tendencję do zbliżania się optymalnej trajektorii u_2^* do \bar{u}_T (nie zachodzi asymptotyczna zbieżność, ponieważ długość fazy konsumpcyjnej jest ograniczona, rys.9.2.a,b).



Rys.9.2. Trajektorie technicznego uzbrojenia pracy w σ -równowagach oraz optymalna trajektoria w długim horyzoncie czasu (a) w sektorze 1, (b) w sektorze 2

□ T w i e r d z e n i e 9.2.³¹ (i) Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi, $|T| > 2\theta_\varepsilon$, to

$$|u_1^*(t) - \bar{u}_1(t)| \leq \varepsilon, \quad u_2^*(t) = \bar{u}_2(t)$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie u_1^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązaniem zadania (9.8) - (9.9), \bar{u}_T - trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w σ -równowadze typu (A) postaci (9.10) (magistralą).

³¹ Dowód, zob. Dodatek matematyczny do paragrafu 9, twierdzenie 9.2. Podobne własności mają trajektorie konsumpcji na osobę δ_T^* , $\bar{\delta}_T$.

(ii) Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnie stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w sektorach w procesie optymalnym są zbieżne do średnich stóp wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w G -równowadze typu (A):

$$\lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{u_1}^* = 0, \quad \lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{u_2}^* = -(\mu + \lambda). \blacksquare$$

9.3. Proces wzrostu z trzema fazami

9.3.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

W rozwiązaniu zadania (9.8) - (9.9) (sterowania docelowego wzrostem w gospodarce dwusektorowej z dwuczynnikowymi funkcjami produkcji w sektorach) nie występuje nigdy środkowa faza zrównoważonego wzrostu. Nie pojawia się także w rozwiązaniu minimalnoczasowego zadania (6.30) - (6.31) sterowania wzrostem w gospodarce jednosektorowej z dwuczynnikową funkcją produkcji. Dotychczas faza zrównoważonego wzrostu pojawiła się tylko w rozwiązaniach dwóch zadań: zadania (6.15) - (6.16) i zadania (6.20) - (6.21). W obu zadaniach kryterium wzrostu była maksymalizacja konsumpcji na osobę w ustalonym horyzoncie czasu T . Czy można wobec tego wnioskować, że w modelach dwuczynnikowych występowanie fazy zrównoważonego wzrostu uzależnione jest od kryterium, za pomocą którego oceniana jest jakość procesów wzrostu? Ogólnie rzecz biorąc - nie. Dowodzi tego poniższy przykład zadania sterowania docelowego z kryterium (9.8) i warunkami wzrostu nieznacznie różniącymi się od (9.9). Różnica sprowadza się do zmiany dwóch założeń dotyczących wzrostu majątku i zatrudnienia w sektorze 2. Będziemy mianowicie zakładać, że

- (i) majątek produkcyjny w sektorze 2 nie zużywa się, oraz
- (ii) zatrudnienie w tym sektorze utrzymuje się na stałym poziomie, $z_2(t) = z_2 = \text{const.} > 0$.

Nie obowiązuje natomiast założenie 9.1. Równania (9.1), (9.4) wzrostu majątku produkcyjnego i zatrudnienia w sektorach przyjmą obecnie postać następującą:

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = i_1(t) - \mu_1 m_1(t), \quad (9.1')$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = i_2(t),$$

$$z_1(t) = \varphi_1 l_0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (9.4')$$

$$z_2(t) = z_2 = \text{const.} > 0,$$

gdzie $\mu_1 > 0$ - wskaźnik wycofywanej z eksploatacji części majątku pro-

dukcyjnego w sektorze inwestycyjnym, z_2 - stałe zatrudnienie w sektorze 2. Interpretacja pozostałych zmiennych i parametrów nie zmienia się. Z (9.1'), (9.2), (9.3), (9.4') otrzymujemy równania wzrostu majątku w sektorach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1(t) &= a_1(\rho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1} s(t) m_1^{\varepsilon_1}(t) e^{\lambda(1-\varepsilon_1)(t-t_0)} - \mu_1 m_1(t), \\ \frac{d}{dt} m_2(t) &= a_1(\rho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1} (1-s(t)) m_1^{\varepsilon_1}(t) e^{\lambda(1-\varepsilon_1)(t-t_0)} \end{aligned} \quad (9.12)$$

oraz konsumpcji na osobę

$$\gamma(t) = a_1(l^0)^{-1} m_2^{\varepsilon_2}(t) z_2^{1-\varepsilon_2} e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (9.13)$$

Ustalmy początkową wielkość majątku produkcyjnego $m^0 = (m_1^0, m_2^0) > 0$ i rozpatrzmy zadanie maksymalizacji konsumpcji na osobę w momencie końcowym ustalonego horyzontu czasu $T = [t_0, t_1]$:

$$\max \gamma(t_1), \quad (9.14)$$

przy ograniczeniach (9.12),

$$s(t) \in [0, 1], \quad s \in \bar{C}^0 [T], \quad (9.15)$$

$$m(t_0) = m^0,$$

gdzie $m^0 > 0$, a funkcja γ ma postać (9.13). Ponieważ moment końcowy t_1 jest ustalony, zatem kryterium $\max \gamma(t_1)$ w zadaniu (9.14) - (9.15) jest równoważne z kryterium $\max m_2(t_1)$ ³². To ostatnie jest zaś równoważne z kryterium

$$\max \int_T b_1(1-s(t)) m_1^{\varepsilon_1}(t) e^{\beta_1(t-t_0)} dt, \quad (9.14')$$

gdzie $b_1 = a_1(\rho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1}$, $\beta_1 = \lambda(1-\varepsilon_1)$. Innymi słowy, zadanie (9.14) - (9.15) jest równoważne z zadaniem (9.14') - (9.15). Zauważmy, że drugie równanie - (wzrostu majątku w sektorze 2 - niczego do zadania (9.14') - (9.15) nie wnosi. Cała niezbędna informacja o warunkach wzrostu majątku w sektorze 2 implicite zawarta została bowiem teraz w kryterium (9.14'). W zadaniu (9.14') - (9.15) równanie to staje się „zbyteczne”. Po rozwiązaniu zadania umożliwia natomiast odtworzenie optymalnej trajektorii majątku produkcyjnego w sektorze 2. Ostatecznie więc otrzymujemy następujące zadanie sterowania (maksymalizacji przyrostu wielkości trwałego majątku produkcyjnego w sektorze 2 w ustalonym horyzontie czasu T) równoważne z zadaniem (9.14) - (9.15) (maksymalizacji konsumpcji na osobę w momencie końcowym t_1):

$$\max \int_T b_1(1-s(t)) m_1^{\varepsilon_1}(t) e^{\beta_1(t-t_0)} dt, \quad (9.16)$$

³² Równoważność kryteriów A, B rozumiemy w tym sensie, że proces $(s^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania z kryterium A wtedy i tylko wtedy, gdy jest on równocześnie jego rozwiązaniem z kryterium B.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1(t) &= b_1 s(t) m_1^{-1}(t) e^{\beta_1(t-t_0)} - \mu_1 m_1(t), \\ s(t) &\in [0,1], s \in \mathcal{C}^0[\tau], \\ m_1(t_0) &= m_1^0 \end{aligned} \quad (9.17)$$

($m_1^0 > 0$, $b_1 = a_1(\varrho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1}$, $\beta_1 = \lambda(1-\varepsilon_1)$). Z matematycznego punktu widzenia zadanie to nie różni się od zadania (6.15) - (6.16)³³. Założeniu 6.1 odpowiada

▼ **Z a ł o ż e n i e 9.2.** Elastyczność dochodu narodowego względem majątku w sektorze inwestycyjnym spełnia warunek

$$\frac{1}{2} > \varepsilon_1 > \frac{\beta_1}{\mu_1}. \quad \blacktriangledown$$

Przy tym założeniu rozwiązanie zadania (9.16) - (9.17) podaje twierdzenie 6.1 (twierdzenie jest słuszne bez założenia 9.1).

(i) Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym $u_1^0 = m_1^0/\varrho_1 l^0$ jest wysokie, $u_1^0 > (a_1 \varepsilon_1 / \mu_1)^{1/(1-\varepsilon_1)}$, wówczas rozwiązaniem zadania jest następujący proces $(s^*, m_1^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases} \quad (9.18)$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} m_1^0 e^{-\mu_1(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ m_1^*(\tau_1) e^{\lambda(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ m_1^*(\tau_2) e^{-\mu_1(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $s = \varepsilon_1(1 + \lambda/\mu_1) \in (0,1)$ (przy założeniu 9.2). Odpowiada mu trajektoria m_{2T}^* majątku produkcyjnego w sektorze 2:

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 + d_1^0 (e^{(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(t-t_0)} - 1) & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ m_2^*(\tau_1) + d_2(\tau_1) (e^{\lambda(t-\tau_1)} - 1) & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ m_2^*(\tau_2) + d_1(\tau_2) (e^{(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(t-\tau_2)} - 1) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d_1^0 = b_1(m_1^0)^{\varepsilon_1}/(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)$, $d_2(\tau_1) = b_1 \lambda (1-s)(m_1^*(\tau_1))^{\varepsilon_1}$,

³³ Jeżeli w zadaniu (6.15) - (6.16) przyjmiemy $\varrho = 1$, parametry a , ϱ , ε , $\mu + \lambda$ zastąpimy parametrami b , β_1 , ε_1 , μ_1 , a zmienną $u(t)$ - zmienną $m_1(t)$, to otrzymamy zadanie (9.16) - (9.17).

$d_1(\tau_2) = b_1 m_1^*(\tau_2) / (\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)$, $b_1 = a_1 (\varrho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1}$, $\beta_1 = \lambda(1-\varepsilon_1)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki,³⁴ wtedy znika faza środkowa (przedział czasu $[\tau_1, \tau_2]$), w którym $s^*(t) = s$ i proces optymalny redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 0, \quad m_1^*(t) = m_1^0 e^{-\mu_1(t-t_0)}, \\ m_2^*(\tau) &= m_2^0 + d_1^0 (e^{(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(\tau - t_0)} - 1) \end{aligned} \quad (9.19)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, wówczas pojawiają się trzy fazy wzrostu ($\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$, $\tau_1 < \tau_2$). Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłuższa jest faza środkowa. Długość początkowej i końcowej fazy wzrostu (przedziały $[t_0, \tau_1]$, $[\tau_2, t_1]$) jest zawsze ograniczona, tzn. istnieją takie liczby θ_1, θ_2 , że $\tau_1 - t_0 \leq \theta_1$, $t_1 - \tau_2 \leq \theta_2$ niezależnie od długości horyzontu czasu T .

(ii) Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym $u_1^0 = (a_1 \varepsilon_1 / \mu_1)^{1/(1-\varepsilon_1)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, m_1^*)_T$:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\ m_1^*(t) &= \begin{cases} m_1^0 e^{\lambda(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m_1^*(\tau) e^{-\mu_1(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \end{aligned} \quad (9.20)$$

któremu odpowiada trajektoria m_2^* ,

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 + d_2(t_0) (e^{\lambda(t-t_0)} - 1) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m_2^*(\tau) + d_1(\tau) (e^{(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(t-\tau)} - 1) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d_2(t_0) = d_2(\tau_1)$ dla $\tau_1 = t_0$, $d_1(\tau) = d_1(\tau_2)$ dla $\tau_2 = \tau$.

³⁴ Oceny długości horyzontu czasu T pozostają takie same jak w twierdzeniu 6.1, jeżeli tylko dokonamy podstawień, o których mowa w ods. 33.

W krótkim horyzoncie czasu znika faza pierweza (przedział czasu $[t_0, \tau]$) i proces redukuje się do postaci (9.19). W długim horyzoncie czasu pojawiają się dwie fazy wzrostu ($\tau \in \text{int } T$). Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy pierwezej. Długość fazy drugiej (przedział $[\tau, t_1]$) jest zawsze ograniczona, tzn. istnieje taka liczba $\theta > 0$, że $t_1 - \tau \leq \theta$ dla horyzontu czasu T dowolnej długości.

(iii) Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenia pracy w sektorze inwestycyjnym jest niskie, $u^0 < (a_1 \varepsilon_1 / \mu_1)^{1/(1-\varepsilon_1)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, m_1^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases} \quad (9.21)$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} [(b_0 - d_3)e^{-\mu_1(1-\varepsilon_1)(t-t_0)} + d_3 e^{\beta_1(t-t_0)}]^{1/(1-\varepsilon_1)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ m_1^*(\tau_1)e^{\lambda(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ m_1^*(\tau_2)e^{-\mu_1(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

któremu odpowiada trajektoria m_2^* ,

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ m_2^0 + d_2(\tau_1)(e^{\lambda(t-\tau_1)} - 1) & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ m_2^*(\tau_2) + d_1(\tau_2)(e^{(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(t-\tau_2)} - 1) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

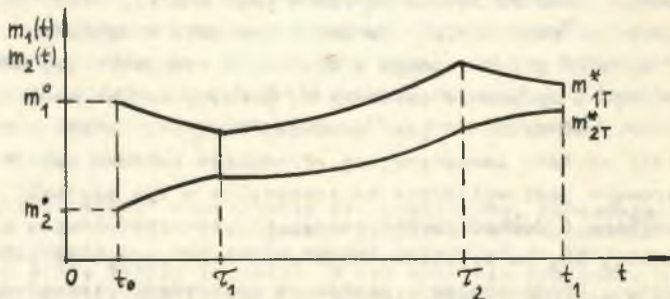
gdzie $b_1 = (m_1^0)^{1-\varepsilon_1}$, $d_3 = b_1 / (\lambda + \mu_1)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy proces redukuje się do postaci (9.19). Jeżeli horyzont czasu jest średniej długości, wówczas znika faza środkowa (przedział czasu $[\tau_1, \tau_2)$). W długim horyzoncie czasu pojawiają się trzy fazy wzrostu ($\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$, $\tau_1 < \tau_2$), przy czym przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy środkowej. Długość początkowej i końcowej fazy wzrostu jest zawsze ograniczona, tzn. istnieją takie liczby $\theta_1, \theta_2 > 0$, że $\tau_1 - t_0 \leq \theta_1$, $t_1 - \tau_2 \leq \theta_2$, niezależnie od długości horyzontu czasu T .

9.3.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZANIA

Optymalną trajektorię dochodu wytwarzanego w sektorze 2 (konsumpcji) otrzymujemy z (9.3) pamiętając, że zatrudnienie w sektorze 2: $z_2(t) = z_2 = \text{const.}$, optymalną trajektorię konsumpcji na osobę - z (9.5). Postać rozwiązania zależy od początkowego technicznego uzbrojenia pracy w sektorze inwestycyjnym i długości horyzontu czasu T .

(i) Przy wysokim początkowym technicznym uzbrojeniu pracy w tym sektorze, w krótkim horyzoncie czasu T , maksymalną wielkość konsumpcji na osobę w momencie końcowym t_1 otrzymujemy, wstrzymując całkowicie inwestycje w sektorze 1. Majątek produkcyjny i dochód tego sektora maleją. Przeznaczenie produkcji końcowej sektora inwestycyjnego w całości na inwestycje w sektorze 2 powoduje wolny wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w tym sektorze - zawsze z dodatnią, choć malejącą stopą (z założenia majątek produkcyjny w sektorze 2 nie zużywa się i wobec tego nie maleje nawet przy zerowych inwestycjach). Praktycznie rośnie również powoli konsumpcja na osobę³⁵. W długim horyzoncie czasu, po pierwszej fazie - konsumpcyjnej - jak wyżej, pojawia się środkowa faza równomiernego wzrostu majątku produkcyjnego i dochodu w sektorze inwestycyjnym.

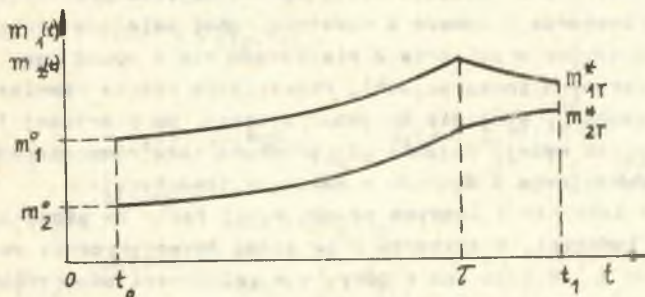
Majątek w sektorze 1 zaczyna rosnąć w tej fazie ze stopą λ równą stopie wzrostu ludności, w sektorze 2 ze stopą asymptotycznie zbliżoną przy $|T| \rightarrow +\infty$ do λ (od dołu lub z góry - w zależności od wartości parametrów zadania). Utrzymuje się stały podział inwestycji między sektory $e^*(t) = \varepsilon_1(1 + \lambda/\mu_1)$. Wobec stałego zatrudnienia w sektorze 2 jego produkcja „nie nadąza” w tej fazie za wzrostem ludności, co uwidacznia się z czasem w spadku konsumpcji na osobę. W końcowej fazie wzrostu - ponownie konsumpcyjnej - wstrzymana zostają inwestycje w sektorze 1. Ich zwiększenie w sektorze 2 powoduje początkowo szybki, potem coraz wolniejszy wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w tym sektorze oraz (wolniejszy) wzrost konsumpcji na osobę w tej fazie (rys.9.3).



Rys.9.3. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach -
- rozwiązanie zadania (9.16) - (9.17) w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy w sektorze inwestycyjnym i długiego horyzontu czasu

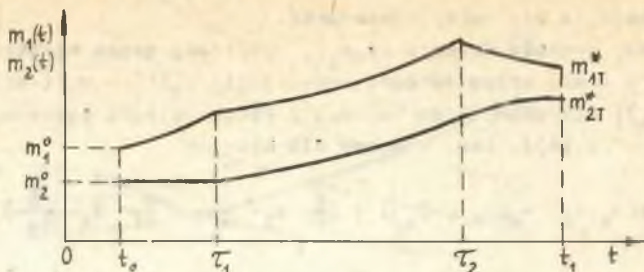
³⁵ Praktycznie - ponieważ można „złośliwie” ustalić takie wartości parametrów (np. wziąć nienaturalnie wysoką stopę wzrostu ludności), przy których konsumpcja na osobę zacznie z czasem maleć.

(ii) Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym $u_1^0 = (a_1 \varepsilon_1 / \mu_1)^{1/(1-\varepsilon_1)}$, wówczas w krótkim horyzoncie czasu mamy znowu sytuację podobną do poprzednio opisaną (wstrzymanie inwestycji w sektorze 1, spadek majątku produkcyjnego w tym sektorze, wolny wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w sektorze 2, oraz konsumpcji na osobę). W długim horyzoncie czasu T pojawiają się dwie fazy wzrostu: pierwsza - faza równomiernego wzrostu majątku produkcyjnego i dochodu w sektorach, w której obserwujemy jednak z czasem spadek konsumpcji na osobę (wobec zamrożenia zatrudnienia w sektorze 2), po niej - faza konsumpcyjna, w której rośnie majątek produkcyjny i dochód sektora 2 oraz konsumpcja na osobę, natomiast maleje majątek produkcyjny i dochód sektora 1 (wobec braku inwestycji w tym sektorze, rys.9.4).



Rys.9.4. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach - rozwiązanie zadania (9.16) - (9.17) w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym $u_1^0 = [a_1 \varepsilon_1 / \mu_1]^{1/(1-\varepsilon_1)}$ i horyzont czasu jest długi

(iii) przy niskim wyjściowym technicznym uzbrojeniu pracy w sektorze inwestycyjnym obserwujemy trzy typy procesów wzrostu w zależności od długości horyzontu czasu T . Jeżeli horyzont jest krótki, wtedy wzrost przebiega podobnie jak poprzednio - zerowe inwestycje w sektorze 1, a wobec tego spadek majątku produkcyjnego i dochodu w tym sektorze, wzrost majątku produkcyjnego i dochodu w sektorze 2, powolny wzrost konsumpcji na osobę. Jeżeli horyzont czasu T jest średniej długości, wtedy proces wzrostu rozpoczyna się od fazy inwestycyjnej. Produkcja końcowa sektora inwestycyjnego kierowana jest wyłącznie na inwestycje w tym sektorze. Jego majątek produkcyjny i dochód szybko rosną. Majątek produkcyjny i dochód sektora 2 utrzymują się na wyjściowym poziomie. Konsumpcja na osobę maleje. W fazie drugiej, konsumpcyjnej, następuje wstrzymanie inwestycji w sektorze 1. Majątek produkcyjny i dochód tego sektora maleją. Rozpoczyna się proces szybkiego inwestowania w sektor 2, co powoduje wzrost jego majątku i dochodu. Powoli rośnie konsumpcja na osobę. Jeżeli horyzont jest dostatecznie długi, wtedy obserwujemy wszystkie trzy fazy wzrostu: inwestycyjną, równomiernego wzrostu majątku i dochodu w sektorach i konsumpcyjną. Im dłuższy jest horyzont czasu T , tym dłuższa jest faza środkowa - równomiernego wzrostu majątku i dochodu w sektorach (rys.9.5).



Rys.9.5. Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach -
- rozwiązanie zadania (9.16) - (9.17) w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy i długiego horyzontu czasu

W optymalnym procesie przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie tylko długość fazy równomiernego wzrostu. W tej dominującej w długich okresach fazy obserwujemy tymczasem spadek konsumpcji na osobę (w procesie optymalnym z punktu widzenia „konsumpcyjnego” kryterium!). Podobnego zjawiska nie obserwowaliśmy dotąd w żadnym „trójfazowym” optymalnym procesie wzrostu. Wyjaśnienie jest proste. O spadku konsumpcji na osobę w fazie równomiernego wzrostu w rozwiązaniu zadania (9.16) - (9.17) zadecydowało założenie o zamrożeniu zatrudnienia w sektorze 2. W rozwiązaniu uwidacznia się to w niższej stopie wzrostu jego produkcji końcowej (dochodu) w fazie równomiernego wzrostu, niż produkcji końcowej sektora inwestycyjnego. Ponieważ dochód w sektorze inwestycyjnym w fazie tej rośnie ze stopą równą stopie wzrostu ludności, zatem dochód sektora 2 w przeliczeniu na osobę (konsumpcja na osobę) - maleje³⁶.

9.3.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W zadaniu (9.16) - (9.17) równanie wzrostu majątku produkcyjnego w sektorze inwestycyjnym opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego (jednowymiarowego, niestacjonarnego) systemu dynamicznego. Przekształceniem wyjścia jest funkcja podcałkowa w (9.16) (produkcja końcowa sektora inwestycyjnego „wychodząca” z tego sektora i kierowana na inwestycje w sektorze 2)³⁷.

³⁶ „Rozsądniejsze” rozwiązanie otrzymalibyśmy, zakładając wzrost zatrudnienia w sektorze 2 (wymagałoby to jednak sformułowania nowego zadania - twierdzenia 6.1 nie można wprost przenieść na taki przypadek), albo zakładając stałą liczbę ludności. W tym ostatnim przypadku w okresie zrównoważonego wzrostu mielibyśmy reprodukcję prostą majątku w sektorach, czemu odpowiadałby stały poziom dochodu i konsumpcji na osobę (stan klasycznej równowagi „statycznej”).

³⁷ Warunki (9.17) opisują funkcjonowanie tylko jednego podsystemu gospodarki, jakim w modelu jest sektor inwestycyjny. Co prawda, poprzez wcześniejsze założenia pośrednio potrafimy odwołać się do funkcjonowania drugiego sektora oraz ustalić wielkość konsumpcji na osobę, niemniej z punktu widzenia zadania (9.16) - (9.17) sektor 2 jest tylko fragmentem „otoczenia” sektora inwestycyjnego.

Równowaga, którą zajmiemy się krótko obecnie, dotyczy de facto sektora inwestycyjnego, a nie całej gospodarki.

Rozpatrzmy procesy wzrostu $(s, m_1)_T$ ze stałą stopą wzrostu majątku produkcyjnego i stałą stopą wzrostu inwestycji $i_2(t) = b_1(1-s(t))m_1^{\varepsilon_1}(t) \times \exp\{\beta_1(t-t_0)\}$ kierowanych do sektora 2 (stan wyjścia systemu, zob. funkcję podcałkową w (9.16)), tzn. procesy dla których

$$G(m_1, i_2) = (\delta_{m_1}, \delta_{i_2}) = \left(\frac{d}{dt} m_1 \cdot \frac{1}{m_1}, \frac{d}{dt} i_2 \cdot \frac{1}{i_2} \right) = \text{const.}$$

Będą interesować nas trzy typy takich procesów: ze sterowaniem $\bar{s}(t) = 0$, $\bar{s}(t) = 1$ i $\bar{s}(t) = s$ ($= \varepsilon_1(1 + \lambda/\mu_1)$) na T .

(A) Sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = 0$ na T odpowiada w G -równowadze cała wiązka trajektorii majątku \bar{m}_{1T} ze stałą stopą wzrostu:

$$\bar{m}_1(t) = \bar{m}_1^0 e^{-\mu_1(t-t_0)}, \quad (9.22)$$

$$(\bar{i}_2(t) = b_1(\bar{m}_1^0)^{\varepsilon_1}(\beta_1 - \mu_1 \varepsilon_1)(t-t_0))$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{m}_1^0 jest dowolną dodatnią początkową wielkością majątku produkcyjnego w sektorze 1 ($\delta_{\bar{m}_1}(t) = -\mu_1 < 0$).

(B) Sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = 1$ na T odpowiada w G -równowadze tylko jedna trajektoria \bar{m}_{1T} ,

$$\bar{m}_1(t) = \bar{m}_1^0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (\bar{i}_2(t) = 0) \quad (9.23)$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\bar{m}_1^0 = a_1(\varrho_1 l^0)^{1-\varepsilon_1}/(\lambda + \mu_1)$.

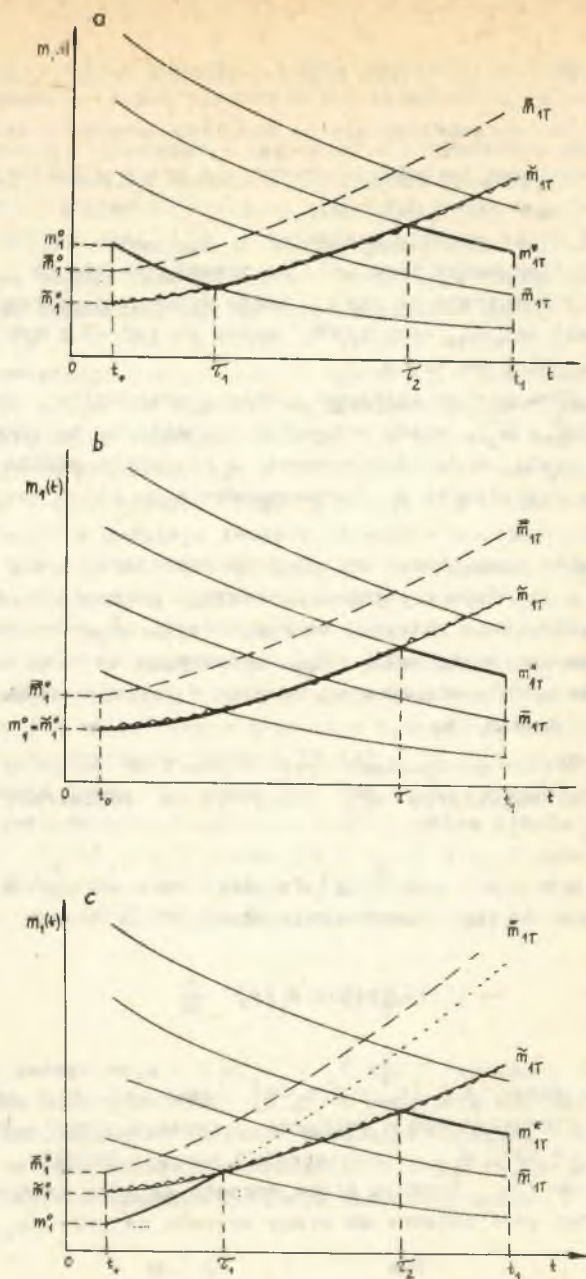
($\delta_{\bar{m}}(t) = \lambda$). Przy $|T| \rightarrow +\infty$ każda trajektoria majątku produkcyjnego m_{1T} wychodząca z dowolnego stanu początkowego $m_1^0 > 0$, odpowiadająca sterowaniu tożsamościowo równemu jedności, jest asymptotycznie zbieżna do \bar{m}_T .

(C) Sterowaniu \bar{s}_T z wartościami $\bar{s}(t) = s$ na T odpowiada w G -równowadze tylko jedna trajektoria majątku \tilde{m}_{1T} (ze stopą wzrostu równą λ),

$$\tilde{m}_1(t) = \tilde{m}_1^0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (9.24)$$

$$(\tilde{i}_2(t) = b_1(1-s)(\tilde{m}_1^0)^{\varepsilon_1}(\lambda \varepsilon_1 + \beta_1)(t-t_0))$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\tilde{m}_1^0 = \varrho_1 l^0 (a_1 \varepsilon_1 / \mu_1)^{1/(1-\varepsilon_1)}$.



Rys.9.6. Trajektorie majątku produkcyjnego w sektorze inwestycyjnym w G -równowagach oraz optymalna trajektoria majątku w długim horyzoncie czasu w przypadku, gdy (a) początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym jest wysokie, (b) początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym $u_1^0 = [a_1 \varepsilon_1 / \mu_1]^{1/(1-\varepsilon_1)}$, (c) początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym jest niskie

Analiza podobna do przeprowadzonej w punkcie 6.2.4 prowadzi do następujących wniosków (ograniczamy się do długiego horyzontu czasu T).

(i) Jeżeli początkowe techniczne uzbrojenie pracy w sektorze inwestycyjnym jest wysokie, a zatem dysponuje on znacznym majątkiem produkcyjnym, wtedy w pierwszej fazie wzrostu trajektoria m_{1T}^* jest tożsama z jedną z trajektorii w G -równowadze typu (A). Po przecięciu się z trajektorią \tilde{m}_{1T} (magistralą) pozostaje na niej w fazie środkowej, a następnie w fazie trzeciej oddala się od magistrali znowu po jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) (rys.9.6.a)

(ii) Jeżeli w momencie początkowym sektor inwestycyjny znajduje się na magistrali ($m_1^0 = \tilde{m}_1^0$), wtedy optymalna trajektoria majątku m_{1T}^* pozostaje na magistrali w fazie pierwszej, a następnie oddala się od niej znowu po jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) w fazie drugiej (rys.9.6.b).

(iii) Przy niskim początkowym technicznym uzbrojeniu pracy majątek produkcyjny sektora 1 startuje z poziomu poniższej magistrali po jednej z trajektorii asymptotycznie zbieżnej do trajektorii \bar{m}_{1T} w G -równowadze typu (B). Dochodzi do magistrali \tilde{m}_{1T} , pozostając na niej w fazie środkowej, a następnie oddala się od niej po jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A) (rys.9.6.c).

We wszystkich trzech przypadkach przy $|T| \rightarrow +\infty$ wydłuża się okres, w którym optymalna trajektoria m_{1T}^* pozostaje na magistrali (analog twierdzenia 6.2).

□ T w i e r d z e n i e 9.3.³⁸ (i) Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi, $|T| > 2\theta$, to

$$m_1^*(t) = \tilde{m}_1(t)$$

w każdym momencie czasu $t \in [t_0 + \theta, t_1 - \theta]$, gdzie m_{1T}^* jest optymalną trajektorią majątku produkcyjnego w sektorze inwestycyjnym - rozwiązanie zadania (9.16) - (9.17), \tilde{m}_{1T} - „magistralą” postaci (9.24).

(ii) Przy $|T| \rightarrow +\infty$ średnia stopa wzrostu majątku produkcyjnego w procesie optymalnym jest zbieżna do stopy wzrostu majątku na magistrali :

$$\lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{m_{1T}^*} = \lambda \quad \blacksquare$$

9.4. Proces wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji

Oba poprzednie rozwiązania zagadnienie optymalnego podziału inwestycji między sektory nakazują okresowe wstrzymanie inwestycji (w inwestycyjnej fazie wzrostu - w sektorze 2, oraz w konsumpcyjnej fazie wzrostu - w sektorze 1), co jest niemożliwe w realnej gospodarce. Można co prawda „zawęzić” zakres dopuszczalnych zmian w strukturze inwestowania, ustalając np. przedział dopuszczalnych wartości wskaźnika podziału inwestycji między sektory $[s^0, s^1] \subset [0, 1]$, gdzie s^0 oznacza minimalny, a s^1 - maksymalny udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w nakładach inwestycyjnych ogółem, i tym samym nie dopuścić do całkowitego wstrzymania inwestycji w żadnym z sektorów. W rozwiązaniu uwidoczni się to w wolniejszym wzroście (spadku) majątku produkcyjnego i dochodu w sektorach gospodarki w poszczególnych fazach wzrostu. Idąc tą drogą, nie wykluczamy jednak gwałtownych „skoków” w podziale inwestycji między sektory przy przejściu od jednej fazy wzrostu do drugiej. Będą one występowały dopóty, dopóki w zadaniu sterowania optymalnego wzrostu rolę „steru” będzie grała funkcja podziału inwestycji między sektory.

W punkcie tym sformułujemy przykład zadania, w którym funkcja podziału inwestycji między sektory nie będzie sterowaniem, lecz kolejną współrzędną wektora stanu wewnętrznego gładkiego systemu dynamicznego. Zadanie stanowi szczególny przypadek zadania (9.14) - (9.15). Po pierwsze założymy, że w horyzoncie czasu T stałe jest nie tylko zatrudnienie w sektorze 2, lecz także zatrudnienie w sektorze 1 oraz ogólna liczba ludności: $l(t) = l = \text{const.} > 0$, $z_1(t) = z_1 = \text{const.} > 0$, $z_2(t) = z_2 = \text{const.} > 0$, $z_1 + z_2 < 1$. Po drugie, przyjmiemy, że funkcje s_T podziału inwestycji między sektory są ciągłymi, przedziałami gładkimi rozwiązaniami równania różniczkowego³⁹

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t))$$

z warunkiem początkowym $s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1] \subset [0, 1]$. O funkcjach α_T (sterowaniach) zakładamy, że należą do klasy $C^0[T]$ i przyjmują wartości z przedziału $[\alpha^0, \alpha^1]$ - dopuszczalnych wartości wskaźnika podziału inwestycji między sektory. Przy tych założeniach zadanie (9.14) - (9.15) maksymalizacji konsumpcji na osobę w momencie końcowym horyzontu czasu T przyjmie postać następującą:

$$\max \gamma(t_1) \quad (9.25)$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = a_1 z_1^{1-\varepsilon_1} s(t) m_1^{\varepsilon_1}(t) - \mu_1 m_1(t),$$

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = a_1 z_1^{1-\varepsilon_1} (1-s(t)) m_1^{\varepsilon_1}(t), \quad (9.26)$$

³⁹ Interpretacja tego równania jest podobna, jak interpretacja równania (7.24) w punkcie 7.4.

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)),$$

$$\alpha(t) \in [\alpha^0, \alpha^1], \alpha \in \tilde{C}^0[T],$$

$$(m_1(t_0), m_2(t_0), s(t_0)) = (m_1^0, m_2^0, s^0)$$

$(m_1^0, m_2^0 > 0; s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1])$, gdzie $\delta(t) = a_2 z_2^{1-\epsilon_2}(t)/1$. Łatwo wykazać, że zadanie to jest równoważne z zadaniem następującym (w tym samym sensie, w jakim rozumiemy równoważność zadań (9.14) - (9.15), (9.16) - (9.17)):

$$\max \int_T b_1(1-s(t))m_1^{\epsilon_1}(t) dt, \quad (9.27)$$

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = b_1 s(t)m_1^{\epsilon_1}(t) - \mu_1 m_1(t), \quad (9.28)$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)),$$

$$\alpha(t) \in [\alpha^0, \alpha^1], \alpha \in \tilde{C}^0[T]$$

$$(m_1(t_0), s(t_0)) = (m_1^0, s^0)$$

$(m_1^0 > 0, s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1], b_1 = a_1 z_1^{1-\epsilon_1})$. Wprowadźmy nową zmienną:

$$k_1(t) = m_1(t)/y_1(t) \quad (9.29)$$

(kapitałochłonność produkcji w sektorze 1, wymiar: R). Podstawiając ją do zadania (9.27) - (9.28), zważywszy na postać funkcji produkcji (9.3), otrzymujemy ostatecznie zadanie:

$$\max \int_T b_1(1-s(t))k_1^{\epsilon_1}(t) dt, \quad (9.27')$$

$$\frac{d}{dt} k_1(t) = (\epsilon_1 - 1)\mu_1 k_1(t) + (1 - \epsilon_1)s(t),$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)) \quad (9.28')$$

$$\alpha(t) \in [\alpha^0, \alpha^1], \alpha \in \tilde{C}^0[T],$$

$$(k_1(t_0), s(t_0)) = (k_1^0, s^0),$$

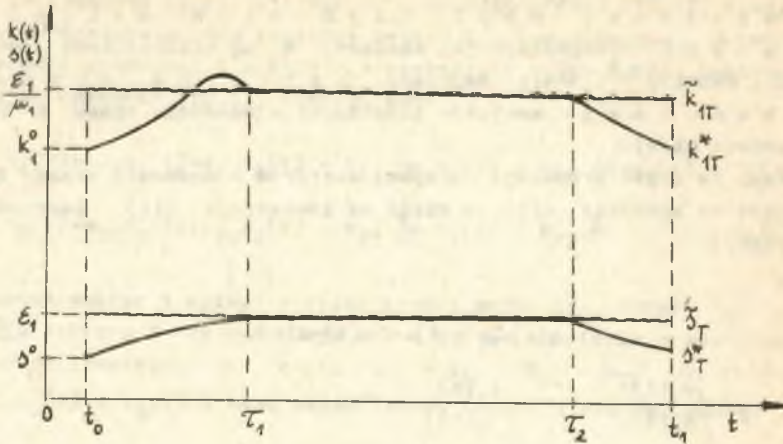
$(k_1^0 = a_1^{-1} z_1^{\epsilon_1 - 1} (m_1^0)^{1 - \epsilon_1}; s^0 \in [\alpha^0, \alpha^1])$. Znając rozwiązanie tego zadania, możemy odtworzyć optymalną trajektorię majątku produkcyjnego w sektorze 1 z (9.29), w sektorze 2 - z drugiego równania w (9.26) itd. Magistralą jest obecnie trajektoria \tilde{k}_{1T} .

$$\tilde{k}_1(t) = \epsilon_1 / \mu_1 = \text{const.}$$

odpowiadająca podziałowi inwestycji między sektory \tilde{s}_T .

$$\bar{s}(t) = \xi_1 = \text{const.}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$. Przypuszczalną postać rozwiązania zadania ilustruje rys.9.7 (przy $k_1^0 < \tilde{k}_1, s^0 < \tilde{s} \in (\alpha^0, \alpha^1)$). Dowieść tego jednak na razie nie potrafimy⁴⁰.



Rys.9.7.

§ 10. OPTIMALNY PODZIAŁ INWESTYCJI MIĘDZY SEKTORY W DWUSEKTOROWYM DYNAMICZNYM MODELU LEONTIEWA

10.1. Podstawowe założenia

Rozpatrzmy gospodarkę podzieloną na $n \geq 2$ sektory i oznaczmy przez $x_k(t)$ wielkość produkcji k -tego sektora w momencie czasu t (strumień, wymiar: zł/R). Załóżmy, że w celu wytworzenia jednostki produkcji, np. wartości 1 mld zł, sektor j -ty zużywa $a_{kj} \geq 0$ jednostek produkcji sektora k -tego ($k, j = 1, 2, \dots, n$). Wówczas bieżące zużycie produkcyjne w sektorach

⁴⁰ Postać rozwiązania zależy od kombinacji początkowych wartości $k_1^0, s^0, \tilde{k}_1, \tilde{s}$. Rysunek ilustruje sytuację, kiedy trajektoria k_{1T}^* dociera do magistrali \tilde{k}_{1T} wcześniej, niż s_T^* do \tilde{s}_T , przekracza ją, a następnie cofa się tak, by powrócić na magistralę w tym samym momencie, w którym s_T^* dochodzi do \tilde{s}_T .

gospodarki wytwarzających wektor produkcji $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ wyniesie $Ax(t)$,

gdzie $A = (a_{kj})$, $k, j = 1, 2, \dots, n$. Nieujemna, kwadratowa macierz A nosi nazwę macierzy współczynników nakładów bieżących (współczynniki macierzy A są wielkościami niemianowanymi). Różnicę $x(t) - Ax(t)$ nazywamy wektorem produkcji końcowej sektorów gospodarki w momencie czasu t (strumień, wymiar: zł/R).

Założmy, że część produkcji końcowej sektorów w momencie czasu t kierowana jest na spożycie $c(t)$, a część na inwestycje $i(t)$ (strumienie, wymiar: zł/R):

$$x(t) - Ax(t) = c(t) + i(t) \quad (10.1)$$

gdzie $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$, $i(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{pmatrix}$. Niech

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^n i_{kj}(t),$$

gdzie $i_{kj}(t)$ oznacza przepływ inwestycyjny produkcji z sektora k -tego do j -tego. Jeżeli wielkość przepływu inwestycyjnego $i_{kj}(t)$ jest proporcjonalna do szybkości, z jaką wzrasta produkcja w sektorze j -tym w momencie czasu t ,

$$i_{kj}(t) = b_{kj} \frac{d}{dt} x_j(t),$$

wtedy

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^n b_{kj} \frac{d}{dt} x_j(t),$$

($k = 1, 2, \dots, n$) lub inaczej

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = B \frac{d}{dt} x(t), \quad (10.2)$$

gdzie $B = (b_{kj})$, $k, j = 1, 2, \dots, n$.

Kwadratowa, nieujemna macierz B nosi nazwę macierzy współczynników inwestycyjnych (jej współ-

czynnikami mają wymiar czasu: R). Z (10.1), (10.2) otrzymujemy układ równań dynamicznego modelu Leontiewa⁴¹:

$$x(t) - A x(t) - B \frac{d}{dt} x(t) = c(t). \quad (10.3)$$

Nas interesować będzie szczególny przypadek układu (10.3), kiedy w gospodarce wyróżnione są dwa sektory: sektor 1 - inwestycyjny - wytwarzający tylko środki produkcji i sektor 2 wytwarzający tylko dobra konsumpcyjne. Rozpisując równanie (10.3), otrzymujemy:

$$x_1(t) - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t) - b_{11} \frac{d}{dt} x_1(t) - b_{12} \frac{d}{dt} x_2(t) = c_1(t)$$

$$x_2(t) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t) - b_{21} \frac{d}{dt} x_1(t) - b_{22} \frac{d}{dt} x_2(t) = c_2(t).$$

Ponieważ sektor 1 wytwarza tylko środki produkcji, zatem $c_1(t) = 0$. Produkcja sektora 2 nie występuje ani w bieżącym zużyciu produkcyjnym, ani w nakładach inwestycyjnych, czyli $a_{21} = a_{22} = b_{21} = b_{22} = 0$, stąd otrzymujemy $x_2(t) = c_2(t)$ i nasz układ równań redukuje się do jednego równania.

$$x_1(t) - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t) = b_{11} \frac{d}{dt} x_1(t) + b_{12} \frac{d}{dt} x_2(t).$$

O parametrach $a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}$ zakładamy, że są dodatnie oraz $a_{11}, a_{12} < 1$ (warunek „produktywności” gospodarki). Lewa strona równania przedstawia wielkości inwestycji w gospodarce w momencie czasu t równych produkcji końcowej sektora inwestycyjnego, od których zależy wzrost produkcji w obu sektorach. Ustalmy horyzont czasu $T = [t_0, t_1]$ i oznaczmy przez $h(t) \in [0, 1]$ udział inwestycji ponoszonych w sektorze 1 w nakładach inwestycyjnych ogółem w obu sektorach gospodarki w momencie czasu $t \in T$. Funkcję $h_T = \{(t, h(t)), t \in T\}$ z wartościami w $[0, 1]$ w każdym momencie $t \in T$ nazywamy tradycyjnie funkcją podziału inwestycji między sektory. Ponieważ na inwestycje przeznaczony jest cały produkt końcowy sektora 1, zatem warunki wzrostu produkcji w obu sektorach gospodarki można zapisać w postaci następującego układu równań

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = h(t)b_{11}^{-1} [(1-a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t)] \quad (10.4)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = (1-h(t))b_{12}^{-1} [(1-a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t)].$$

Będziemy ponadto zakładać, że w momencie początkowym t_0 gospodarka dysponuje dodatnimi inwestycjami (dodatnią produkcją końcową sektora 1).

⁴¹ Por. np. Z. C z e r w i ń s k i [12] rozdz.5.

Jeżeli przez $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \geq 0$ oznaczymy wektor produkcji w momencie początkowym, wtedy warunek ten oznacza, że

$$\nabla \text{Z a ł o ż e n i e } 10.1. (1-a_{11})x_1^0 - a_{12}x_2^0 > 0. \quad \blacktriangledown$$

Przy tym założeniu każdej przynajmniej przedziałami ciągłej funkcji podziału inwestycji między sektory h_T odpowiada niemalejąca trajektoria produkcji w sektorach $x_T = \{(t, x(t)), t \in T\}$ - rozwiązanie układu równań (10.4) (rozumiane w sensie całkowym).

10.2. Procesy wzrostu z przedziałami ciągłymi trajektoriami inwestycji w sektorach

10.2.1. SFORMUŁOWANIE ZADAŃ

Przy założeniu, że funkcja podziału inwestycji między sektory $h \in \bar{C}^0[T]$ układ równań (10.4) opisuje przekształcenie stanów wewnętrznych gładkiego, dwuwymiarowego systemu stacjonarnego. Jego stanem wewnętrznym jest wektor $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ produkcji w momencie czasu t , stanem wyjścia - konsumpcja $c(t) = x_2(t)$ (jest to równocześnie przekształcenie wyjścia systemu). Sterowaniem (trajektorią sterowań) jest funkcja podziału inwestycji między sektory h_T . Rozpatrzmy następujące trzy zadania sterowania optymalnego⁴²:

(a) maksymalizacji konsumpcji (produkcji sektora 2) w ustalonym horyzoncie czasu T ,

$$\max \int_T x_2(t) dt, \quad (10.5)$$

przy ograniczeniach (10.4),

$$h(t) \in [0, 1], \quad h \in \bar{C}^0[T], \quad (10.6)$$

$$x(t_0) = x^0;$$

(b) maksymalizacji konsumpcji w momencie końcowym t_1 horyzontu T ,

$$\max x_2(t_1), \quad (10.7)$$

przy ograniczeniach (10.4),

$$h(t) \in [0, 1], \quad h \in \bar{C}^0[T], \quad (10.8)$$

$$x(t_0) = x^0;$$

⁴² Por. Z. C z e r w i ń s k i [13].

(c) minimalizacji czasu dojścia do ustalonego, docelowego poziomu konsumpcji $c^1 = x_2^1 > c^0 = x_2^0$,

$$\min t_1, \quad (10.9)$$

przy ograniczeniach (10.4),

$$h(t) \in [0, 1], \quad h \in C^0[T],$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (10.10)$$

i dodatkowym warunkiem: $x_2(t_1) \geq x_2^1$

(moment t_1 - nie ustalony).

Zadania te mają podobną postać, jak zadania (7.16') - (7.17') - (7.20') - (7.21') z punktu 7.3. Założeniu 7.2, przy którym dowodziliśmy twierdzenia 7.4 odpowiada obecnie założenie 10.1 (założenie 7.1 jest obecnie spełnione zawsze). Rozwiązania dwóch pierwszych zadań są następujące.

□ **T w i e r d z e n i e 10.1.**⁴³ (i) Rozwiązaniem zadania (10.5) - (10.6) przy założeniu 10.1 jest proces $(h^*, x^*)_T$:

$$h^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} (x_1^0 - d_1) e^{\varrho(t-t_0)} + d_1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ x_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} x_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (x_2^0 - d_2(\tau)) e^{-\theta(t-\tau)} + d_2(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d_1 = a_{12}x_2^0/(1-a_{11})$, $d_2(\tau) = x_1^*(\tau)x_2^0/d_1$, $\varrho = (1-a_{11})/b_{11}$, $\theta = a_{12}/b_{12}$. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wówczas $\tau = t_1 - \theta > t_0$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 - e^{-\theta\theta} = \frac{\theta}{\varrho^{-1} + \theta^{-1}}.$$

Jeżeli $|T| \leq \theta$, wówczas $\tau = t_0$.

⁴³ Dowód pomijamy, przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 7.4; zob. także I.A. I c k o w i c z [23] rozdz.3 punkt 3.

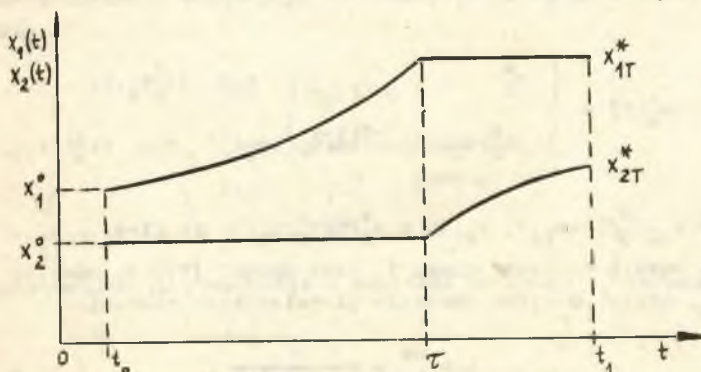
(ii) Rozwiązanie zadania (10.7) - (10.8) różni się tylko momentem „przełączenia” sterowania h_T^* (z 1 na 0) i wobec tego oceną długości horyzontu T : przez krótki rozumiemy w zadaniu tym horyzont o długości $|T| \leq \theta = \sigma^{-1} \ln(1 + \sigma \rho^{-1})$, przez długi - horyzont o długości $|T| > \theta$. ■

Rozwiązanie zadania minimalnoczasowego (10.9) - (10.10) ma postać podobną, jak rozwiązanie zadania sterowania docelowego (10.7) - (10.8). Zadania te są bowiem wzajemnie dualne w tym samym sensie, w jakim dualne są zadania (7.18') - (7.19'), (7.20') - (7.21')⁴⁴. Przez długi w zadaniu (10.9) - (10.10) rozumiemy horyzont czasu $T^* = [t_0, t_1^*]$ o długości $|T^*| \theta = \sigma^{-1} \ln[1 + \sigma \rho^{-1}]$, przez krótki - horyzont o długości $|T^*| \leq \theta$. Optymalny horyzont czasu T^* jest tym dłuższy, im wyższy jest założony docelowy poziom produkcji sektora 2 (konsumpcji).

10.2.2. CHARAKTERYSTYKA ROZWIĄZAŃ

Postać rozwiązania zależy od długości horyzontu czasu T (w zadaniu minimalnoczasowym - od założonego docelowego poziomu konsumpcji). W krótkim horyzoncie czasu (w zadaniu minimalnoczasowym - przy niewysokim docelowym poziomie konsumpcji) produkcja końcowa sektora 1 wytwarzającego środki produkcji dla obu sektorów przeznaczona jest wyłącznie na inwestycje w sektorze 2. Wskutek tego produkcja sektora 1 utrzymuje się na wyjściowym poziomie x_0^1 . Produkcja sektora 2 (konsumpcja) rośnie gwałtownie.

W długim horyzoncie czasu (w zadaniu minimalnoczasowym - przy wysokim docelowym poziomie konsumpcji) obserwujemy dwie fazy wzrostu. W fazie początkowej - inwestycyjnej - sektor inwestycyjny całą produkcję końcową zużywa na wzrost własnej produkcji. Jego produkcja szybko rośnie. Produk-



Rys.10.1. Optymalne trajektorie produkcji w sektorach - rozwiązania zadań (10.5) - (10.6), (10.7) - (10.8), (10.9) - (10.10) w przypadku długiego horyzontu czasu (w zadaniu minimalnoczasowym horyzont $T = T^*$)

cja sektora 2 (konsumpcja) utrzymuje się na wyjściowym poziomie x_2^0 . W fazie drugiej - konsumpcyjnej - zredukowane zostają do zera inwestycje w sektorze 1, natomiast cała produkcja tego sektora skierowana zostaje na inwestycje w sektorze 2. W rezultacie zaczyna rosnąć jego produkcja (konsumpcja) - najpierw szybko, potem jednak coraz wolniej. Wzrostowi produkcji nie towarzyszy bowiem niezbędny wzrost inwestycji - na skutek zamrożenia działalności inwestycyjnej w sektorze 1 dostarczającym środki produkcji dla sektora 2 (rys.10.1).

Przejściu od fazy inwestycyjnej towarzyszy gwałtowny spadek inwestycji w sektorze 1 i ich wzrost w sektorze 2.

10.2.3. RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU

W świetle otrzymanych rozwiązań interesujące są procesy wzrostu w G -równowadze ze stałym poziomem produkcji sektora 2 (konsumpcji):

$$G(x, c) = x_2 = \text{const.}$$

(A) Sterowaniu \bar{h}_T z wartościami $\bar{h}(t) = 1$ na T odpowiada w G -równowadze trajektoria produkcji \bar{x}_T ,

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(t) &= (\bar{x}_1^0 - \bar{d}_1) e^{\rho(t-t_0)} + \bar{d}_1, \\ \bar{x}_2(t) &= \bar{x}_2^0.\end{aligned}\quad (10.11)$$

($\bar{c}(t) = \bar{x}_2^0$, $\delta_{\bar{c}}(t) = 0$) w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $\begin{pmatrix} \bar{x}_1^0 \\ \bar{x}_2^0 \end{pmatrix} \geq 0$

oznacza początkowy wektor produkcji spełniający warunek $(1 - a_{11})\bar{x}_1^0 - a_{12}\bar{x}_2^0 > 0$ natomiast $\bar{d}_1 = a_{12}\bar{x}_2^0 / (1 - a_{11})$.

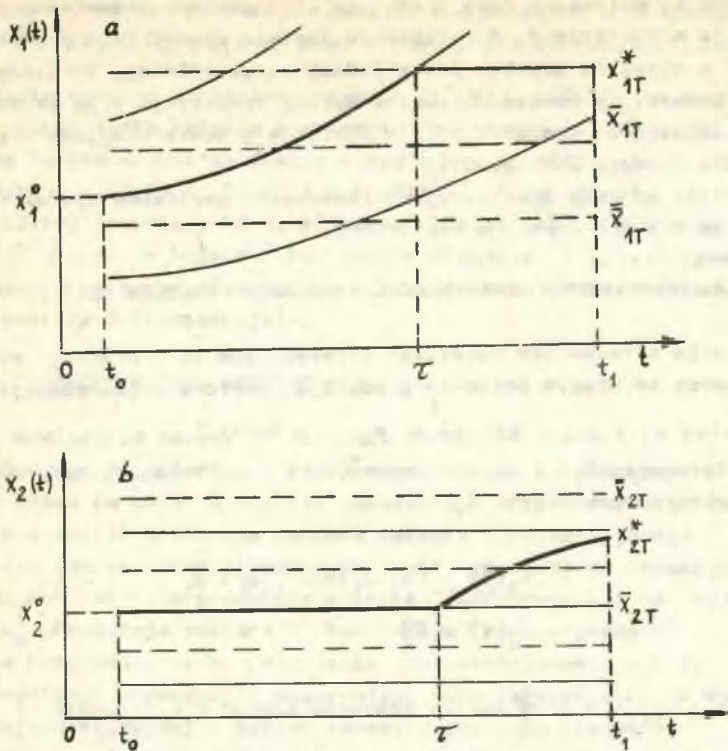
(B) Dowolnemu innemu sterowaniu \bar{h}_T w G -równowadze ze stałą stopą wzrostu konsumpcji odpowiada trajektoria \bar{x}_T ,

$$\bar{x}_1(t) = \bar{x}_1^0, \quad \bar{x}_2(t) = \frac{1 - a_{11}}{a_{12}} \bar{x}_1^0.\quad (10.12)$$

($\bar{c}(t) = \bar{x}_2^0$, $\delta_{\bar{c}}(t) = 0$) w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie \bar{x}_1^0 - dowolna dodatnia początkowa wielkość produkcji w sektorze inwestycyjnym (stan klasycznej równowagi statycznej).

Optymalne trajektorie produkcji, rozwiązania zadań (10.5) - (10.6) - (10.9) - (10.10), w fazie inwestycyjnej pozostają na jednej z trajektorii w G -równowadze typu (A), w fazie konsumpcyjnej wykazują tendencję do przybliżania się do jednej z trajektorii w G -równowadze typu (B) (rys.10.2.a,b).

Im dłuższy jest horyzont czasu T (w zadaniu minimalnoczasowym - im wyższy jest docelowy poziom konsumpcji), tym dłużej gospodarka pozostaje w G -równowadze typu (A).



Rys. 10.2. Trajektorie produkcji w G -równowagach oraz optymalna trajektoria produkcji w długim horyzoncie czasu (a) w sektorze inwestycyjnym, (b) w sektorze wytwarzającym dobra konsumpcyjne (w zadaniu minimalnoczasowym horyzont $T = T^*$).

□ T w i e r d z e n i e 10.2.⁴⁵ Przy $|T| \rightarrow +\infty$ różnica $|\delta_{x_{1T}^*} - \delta_{\bar{x}_{1T}}|$ średnich stóp wzrostu produkcji w sektorze 1 w procesach optymalnych - rozwiązaniach zadań (10.5) - (10.6), (10.7) - (10.8), (10.9) - (10.10) - i G -równowadze typu (A) maleje asymptotycznie do zera (w zadaniu minimalnoczasowym (10.9) - (10.10) należy horyzont czasu T zastąpić optymalnym horyzontem T^*). ■

⁴⁵ Dowód pomijamy, przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 7.5.

10.3. Przykład optymalnego procesu wzrostu z ciągłą trajektorią inwestycji w sektorach

Prosty przykład zagadnienia podziału inwestycji między sektory z ciągłymi trajektoriami inwestycji w sektorach otrzymujemy, postępując podobnie jak w punkcie 7.4, tzn. przyjmując, że funkcja h_T podziału inwestycji między sektory jest rozwiązaniem równania (por. (7.25), (6.28))

$$\frac{d}{dt} h(t) = \omega(s(t) - h(t)) \quad (10.13)$$

($\omega > 0$) z warunkiem początkowym $h(t_0) = h^0 \in [s^0, s^1] \subset [0, 1]$ i funkcją $s \in \tilde{C}^0[T]$, $s(t) \in [s^0, s^1]$ w każdym momencie czasu $t \in T$; $[s^0, s^1]$ - przedział dopuszczalnych wartości wskaźnika podziału inwestycji między sektory. Rozpatrzmy zadanie (10.7) - (10.8) maksymalizacji konsumpcji (produkcji sektora 2) w momencie końcowym ustalonego horyzontu czasu T , (zadanie sterowania docelowego) z dodatkowym warunkiem (10.13) „wymuszającym” ciągłość funkcji h_T podziału inwestycji między sektory, a tym samym ciągłość trajektorii inwestycji w sektorach $(i_1, i_2)_T$.

$$\begin{aligned} i_1(t) &= h(t)j(t), \\ i_2(t) &= (1-h(t))j(t), \end{aligned} \quad (10.14)$$

gdzie

$$j(t) = (1-a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t). \quad (10.15)$$

Zadanie to po podstawieniu do (10.8) zmiennej $j(t)$ zgodnie z (10.15) jest równoważne z następującym zadaniem sterowania optymalnego gładkim dwuwymiarowym systemem stacjonarnym:

$$\max \int_T b_{12}(1-h(t))j(t)dt, \quad (10.16)$$

$$\frac{d}{dt} j(t) = (b_1 h(t) - b_2)j(t),$$

$$\frac{d}{dt} h(t) = \omega(s(t) - h(t)), \quad (10.17)$$

$$j(t_0) = j^0,$$

$$h(t_0) = h^0,$$

$$s(t) \in [s^0, s^1], \quad s \in \tilde{C}^0[T],$$

gdzie $b_1 = (1-a_{11})/b_{11} + b_2$, $b_2 = a_{12}/b_{12}$, $j^0 = (1-a_{11})x_1^0 - a_{12}x_2^0 > 0$, $h^0 \in [s^0, s^1]$. Rolę sterowania gra funkcja s_T . Stan wewnętrzny systemu charakteryzują inwestycje $j(t)$ oraz wskaźnik $h(t)$ ich podziału między sektory. Stanem wyjścia jest konsumpcja (produkcja sektora 2). Znając roz-

zania $(s^*, j^*, h^*)_T$ tego zadania, możemy odtworzyć optymalne trajektorie inwestycji w sektorach z (10.14) oraz produkcji z rozwiązania równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= b_{11}^{-1} i_1(t), \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= b_{12}^{-1} i_2(t). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Rozwiązanie zadania (10.16) - (10.17) przy założeniu, że $s^0 > b_2/b_1$, $\omega > b_1 s^1 - b_2$ podaje twierdzenie 7.6 (obowiązuje założenie 10.1)⁴⁶. Jest nim proces $(s^*, i^*, h^*)_T$ następującej postaci:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \begin{cases} s^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ s^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\ s^*(t) &= \begin{cases} (h^0 - s^1) e^{-\omega(t-t_0)} + s^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (h^*(\tau) - s^0) e^{-\omega(t-\tau)} + s^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\ j^*(t) &= \begin{cases} j^0 e^g(t) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ j^*(\tau) e^{g(\tau; t)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $g(t) = b_1 \omega^{-1} (h^0 - s^1) (1 - e^{-\omega(t-t_0)}) + (b_1 s^1 - b_2)(t - t_0)$,

$g(\tau; t) = b_1 \omega^{-1} (h^*(\tau) - s^0) (1 - e^{-\omega(t-\tau)}) + (b_1 s^0 - b_2)(t - \tau)$. Istnieje przy tym taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, to $\tau \in [t_1 - \theta, t_1)$. W krótkim horyzoncie czasu ($|T| \leq \theta$) proces optymalny redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= s^0 \\ h^*(t) &= (h^0 - s^0) e^{-\omega(t-t_0)} + s^0, \\ j^*(t) &= j^0 e^{g(t_0; t)} \end{aligned}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $g(t_0; t) = g(\tau; t)$ dla $\tau = t_0$.

Postać optymalnej trajektorii produkcji w sektorach jest podobna, jak optymalnej trajektorii majątku produkcyjnego w zadaniu (7.25') - (7.26'), a przebieg optymalnego procesu wzrostu - podobny do opisanego w punkcie 7.4.2 (zamiast trajektorii majątku produkcyjnego m_T^* mamy obecnie trajektorię produkcji w sektorach x_T^*). Prawdziwe pozostaje także twierdzenie 7.7 „o magistrali”, jeżeli tylko dokonamy podstawienia zmiennych, o których mowa w ods.46⁴⁷.

⁴⁶ Należy tylko w miejsce parametrów a_1, a_2, μ podstawić parametry b_1, b_{12}^{-1}, b_2 , a funkcje β, α zastąpić funkcjami s, h .

⁴⁷ Inną wersję twierdzenia „o magistrali” w dwusektorowym modelu Leontiewa omawiamy w pracy [39].

ZAKOŃCZENIE

Sądzę, że dalszy rozwój teorii ekonomii nie będzie możliwy bez zasadniczego postępu w dziedzinie ekonomii matematycznej. Nie oznacza to, iż spodziewam się, że cała ekonomia matematyczna, czy choćby szczególnie interesujący mnie jej dział zwany matematyczną teorią wzrostu, osiągnie szybko stadium pełnej aksjomatyzacji, spełniając równocześnie stawiane naukom opisującym rzeczywistość warunki weryfikacji empirycznej założeń i wprowadzanych twierdzeń, jak to ma miejsce np. w niektórych gałęziach fizyki.

Od zarania rozwoju ekonomii matematycznej większy nacisk kładziono w niej na aksjomatyczne ujęcie przedmiotu charakterystyczne dla nauk logiczno-matematycznych niż na weryfikację założeń. Nie twierdzę, że ekonomista matematyczny buduje swój system aksjomatyczny, całkowicie pomijając etap konfrontacji przyjmowanych założeń z rzeczywistością. Stara się on bowiem w miarę możliwości przyjmować założenia zgodne z obserwacją procesów zachodzących w realnej gospodarce. Trudność polega na tym, że ta obserwacja nie daje mu przeważnie podstaw do wyciągania wniosków tak jasnych i jednoznacznych, jak doświadczenie w naukach przyrodniczych.

Nie bez znaczenia jest również to, że współczesna matematyka ukształtowała się pod przemożnym wpływem, jaki przez wieki wywierały na nią nauki przyrodnicze z fizyką na czele. Jak dotąd, bardzo znikomy udział w jej rozwoju miały nauki ekonomiczno-społeczne. Do nielicznych gałęzi matematyki, o których można powiedzieć, że ich rozwój zainspirowany został przez określone problemy ekonomiczne należy m.in. programowanie matematyczne, analiza wypukła oraz szybko w ostatnich latach rozwijająca się teoria zbiorów rozmytych.

Aksjomatyka większości teorii matematycznych w istocie rzeczy jest odbiciem zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie fizycznym. Jedną z takich teorii, która powstała jako narzędzie badawcze obiektów fizycznych i równocześnie od lat wzbudza zainteresowanie ekonomistów matematycznych, jest teoria sterowania optymalnego. Będąc gałęzią matematyki, teoria sterowania optymalnego zajmuje się, oczywiście, nie realnymi obiektami, lecz ich modelami matematycznymi. Zakłada m.in., że na obiekty można w czasie oddziaływać „z zewnątrz” (obiektami można sterować) za pomocą określonych wielkości wejściowych zwanych sterowaniami. Pod wpływem sterowań obiekty mogą zmieniać swoje tzw. stany wewnętrzne, a ich reakcje na sterowania można obserwować na „wyjściu”. Zarówno stany wewnętrzne obiektów, jak i ich stany wyjścia mogą zmieniać się wraz ze zmianą sposobu oddziaływania, tzn. sterowania.

Teoria sterowania optymalnego dostarcza aparatu matematycznego umożliwiającego znajdowanie sterowania optymalnego z punktu widzenia określonego kryterium w zbiorze wszystkich sterowań dopuszczalnych.

W modelach wzrostu znanych w ekonomii matematycznej rolę sterowań grają zazwyczaj funkcje opisujące wielkość nakładów inwestycyjnych w pewnym okresie czasu, ewentualnie udział inwestycji w dochodzie lub ich podział między sektory gospodarki. Już z najprostszych przykładów można wywnioskować, że stosując w takich przypadkach aparat teorii sterowania optymalnego, otrzymujemy nierealne rozwiązania nakazujące np. gwałtowne zmiany w poziomie, a także strukturze, inwestycji i konsumpcji, do ich całkowitego wstrzymania włącznie. Celem pracy było m.in. pokazanie, że te oraz im podobne nierealne rozwiązania nie dowodzą nieprzydatności teorii sterowania jako narzędzia badawczego zjawisk ekonomicznych, lecz są wynikiem niepoprawnego, z ekonomicznego punktu widzenia, sformułowania problemu. Teoria sterowania optymalnego może stać się dla ekonomisty, zajmującego się problemami wzrostu gospodarczego, pożytecznym narzędziem badawczym, jednak same zadania sterowania wzrostem należy stawiać inaczej, niż to czynili dotąd ci ekonomiści matematycy, którzy podejmowali próby „mechanicznego” wykorzystania tej teorii do celów ekonomicznych. Do wniosku takiego ekłąnia przeprowadzona analiza szeregu zadań sterowania optymalnego wzrostem, poczynając od zadań znanych od bez mała dwudziestu lat, posiadających rozwiązania eleganckie matematycznie, lecz nierealne z punktu widzenia ekonomicznego i kończąc na ich daleko niekiedy posuniętych modyfikacjach, prowadzących do rozwiązań w pełni realnych w świetle naszej wiedzy o wzroście gospodarczym. W rezultacie przedstawiona została nowa klasa modeli wzrostu spełniających niezbędne warunki matematyczne stawiane w teorii sterowania optymalnego, a równocześnie trafniej niż tradycyjne modele ujawniających szereg generalnych prawidłowości, którym podporządkowują się optymalne procesy wzrostu.

Fundamentalną właściwością optymalnych procesów, ujawnioną w rozwiązaniach wszystkich zadań sterowania optymalnego wzrostem (w modelach jedno- i dwusektorowych, zero-, jedno- i dwuczynnikowych, stacjonarnych i niestacjonarnych, z kryterium maksymalizacji konsumpcji w ustalonym okresie, maksymalizacji konsumpcji w momencie końcowym ustalonego okresu, minimalizacji czasu dojścia gospodarki do założonego, docelowego poziomu produkcji dóbr konsumpcyjnych) jest tendencja do przebiegania optymalnych trajektorii wzrostu w „pobliżu” pewnych wyróżnionych trajektorii zwanych magistralami, charakteryzujących gospodarkę w określonej równowadze (lub po takich trajektoriach). Otrzymane rozwiązania sugerują, że wzrost gospodarczy powinien przebiegać według schematu: najpierw przejście w pobliże magistrali (lub dojście do niej), następnie rozwój w otoczeniu magistrali (lub na magistrali), wreszcie oddalenie się od niej pod koniec interesującego nas horyzontu czasu. Im rozpatrywany horyzont czasu będzie przy tym dłuższy, tym dłuższy powinien być także pobyt optymalnej trajektorii wzrostu w pobliżu magistrali (lub na niej), zaważając z wyjątkiem co

najwyżej pewnego ograniczonego okresu na początku i pod koniec horyzontu czasu.

Aczkolwiek problematykę magistral zajmują się ekonomiści matematyczni od ponad dwudziestu lat (szczególny rozgłos zyskały udowodnione m.in. przez M.Morishimę, R.Radnera, H.Nikaido, W.L.Makarowa oraz J.Toukui twierdzenia o magistralach w modelach wzrostu typu Neumanna-Gale'a-Leontiewa, por. np. prace [31], [35], [36]), jednak stwierdzenie magistralnych właściwości optymalnych trajektorii w modelach wzrostu zarówno stacjonarnych, jak i niestacjonarnych gospodarek rozpatrywanych w tej książce byłoby niemożliwe bez sformułowania nowej definicji równowagi (dynamicznej) uogólniającej powszechnie przyjętą m.in. w technice definicję równowagi (statycznej) w systemach stacjonarnych. Dzięki nowemu ujęciu na istotę równowagi możliwe było ujawnienie nie tylko normatywnego znaczenia magistrali jako wzorca, do którego w długich okresach powinna zależeć gospodarka, lecz także - a może przede wszystkim - uznanie aktywnej roli władzy gospodarczej w inicjowaniu lub zmianie określonego typu równowagi.

Dochodzimy w ten sposób do faz wzrostu - inwestycyjnej, konsumpcyjnej oraz fazy równomiernego wzrostu - na które dzielą się optymalne procesy. We wszystkich rozpatrywanych modelach, w długich okresach, w praktycznie ciekawych sytuacjach jako początkowa w optymalnych procesach wzrostu występuje zawsze faza inwestycyjna, w której - w modelach jednosektorowych - należy ograniczyć (w granicach, które określają założenia modeli) strumień dóbr przeznaczonych na konsumpcję na rzecz strumienia inwestycji, a w modelach dwusektorowych - strumień inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne na rzecz zwiększonych inwestycji w sektorze 1 wytwarzającym środki produkcji. We wszystkich modelach, niezależnie od długości horyzontu czasu T , optymalne procesy wzrostu kończą się fazą konsumpcyjną, w której - w modelach jednosektorowych - należy maksymalnie zwiększyć strumień dóbr konsumpcyjnych kosztem zmniejszonego strumienia inwestycji, natomiast w modelach dwusektorowych - strumień inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne.

Dlaczego we wszystkich praktycznie ciekawych sytuacjach optymalne procesy wzrostu powinny rozpoczynać się od fazy inwestycyjnej i kończyć fazą konsumpcyjną (pomijamy na razie sprawę ewentualnego występowania między jedną fazą a drugą jakichś innych faz wzrostu)? Gdyby kryterium wzrostu była nie maksymalizacja konsumpcji, lecz na przykład maksymalizacja dochodu narodowego, wtedy w modelach jednosektorowych w żadnym procesie optymalnym z punktu widzenia tego kryterium nie pojawiłaby się faza konsumpcyjna. Niezależnie od długości horyzontu czasu w rozwiązaniach mielibyśmy tylko fazę inwestycyjną. W modelach dwusektorowych podobną sytuację obserwowalibyśmy, postulując maksymalizację produkcji sektora inwestycyjnego. Natomiast w przypadku maksymalizacji sumy wartości produkcji w obu sektorach istnienie i charakter fazy zależałoby już od długości horyzontu czasu oraz od wyjściowej struktury majątku. Samo występowanie fazy konsumpcyjnej związane jest z „konsumpcyjnymi” kryteriami wzros-

tu, co oczywiście nie wyjaśnia jeszcze, dlaczego w optymalnych procesach wzrostu faza ta zawsze zamyka interesujący nas horyzont czasu.

Wyobraźmy sobie „typową” gospodarkę z niezbyt wysokim technicznym uzbrojeniem pracy. Założmy, że faza konsumpcyjna nie kończy procesu wzrostu, lecz pojawia się wcześniej. Tak więc po fazie konsumpcyjnej powinna wystąpić jeszcze inna, nie konsumpcyjna, faza wzrostu, w której można by zwiększyć produkcję dóbr konsumpcyjnych, ale nie czyni się tego (mniej-
sza o to, z jakiego powodu). W świetle „konsumpcyjnych” kryteriów wzrostu faza ta nie będzie w pełni wykorzystana, a proces taki nie będzie optymalny.

Z kolei brak w ogóle fazy inwestycyjnej oznacza na dłuższą metę kurczenie się majątku, a w konsekwencji spadek dochodu narodowego i konsumpcji. Nieopłacalne jest również przesunięcie tej fazy, a więc poprzedzenie jej jakąkolwiek inną fazą wzrostu. Oznaczałoby to bowiem rezygnację z możliwości szybkiego doinwestowania gospodarki w okresie początkowym i stworzenie wysokiego potencjału wytwórczego pozwalającego m.in. na zwiększenie produkcji dóbr konsumpcyjnych w przyszłości

W niektórych modelach dwuczynnikowych przedstawionych w paragrafach 6,9 w optymalnych procesach wzrostu w długich okresach czasu między początkową - inwestycyjną a końcową - konsumpcyjną fazą wzrostu pojawia się trzecia faza - równomiernego wzrostu majątku, dochodu, inwestycji i konsumpcji odpowiadająca tzw. złotej regule akumulacji Phelps'a (ściślej rzecz biorąc - jej zmodyfikowanym wariantom). Gdzie pojawia się ta faza wzrostu, tam tylko ona rośnie wraz ze wzrostem długości całego horyzontu czasu. Na jej występowanie w optymalnych procesach wzrostu ma na pewno wpływ postać funkcji produkcji. Z przeprowadzonych badań wynika m.in., że faza ta nie pojawia się w optymalnych procesach w jednoczynnikowych modelach z liniowymi funkcjami produkcji, a także przypuszczalnie w tych modelach jednoczynnikowych, w których zakłada się niemalejącą krańcową wydajność majątku produkcyjnego. Wzrost majątku w takich przypadkach wywołuje bowiem co najmniej proporcjonalny wzrost dochodu. W świetle „konsumpcyjnych” kryteriów wzrostu zawsze będzie opłacalny podział ewentualnej fazy powolnego, równomiernego wzrostu majątku, dochodu i konsumpcji na dwie: pierwszą - inwestycyjną, w której szybko wzrośnie majątek i dochód (w gospodarce dwusektorowej - produkcja sektora inwestycyjnego) i drugą - konsumpcyjną, w której wzrośnie konsumpcja (w gospodarce dwusektorowej - produkcja sektora wytwarzającego dobra konsumpcyjne). Przy niemalejącej krańcowej wydajności majątku każde ograniczenie strumienia konsumpcji (zwiększenie strumienia inwestycji) dzisiaj, owocuje w przyszłości, powodując taki wzrost produkcji dóbr konsumpcyjnych, którego nie udało by się w żadnym razie osiągnąć wcześniej.

Środkowa faza równomiernego wzrostu w procesach optymalnych pojawia się w modelach z funkcjami produkcji charakteryzującymi się malejącymi krańcowymi wydajnościami czynników produkcji. Z analizy rozwiązań zadań sterowania optymalnego wzrostem z kryterium całkowitym (maksymalizacji konsumpcji w ustalonym okresie) wynika, że w zadaniach z tym kryterium, w dłu-

gich okresach, faza równomiernego wzrostu występuje zawsze-niezależnie od tego, czy są to zadania stacjonarne, czy niestacjonarne. Charakter fazy zależy od poziomu technicznego uzbrojenia pracy. Znając techniczne uzbrojenie pracy, można w każdym momencie ustalić, w jakiej fazie wzrostu znajduje się gospodarka.

Zasadnicze właściwości optymalnych procesów wzrostu nie zmieniają się jednak niezależnie od tego, czy kryterium wzrostu jest maksymalizacja konsumpcji w ustalonym okresie, w momencie końcowym ustalonego okresu czy minimalizacja czasu dojścia gospodarki do założonego, docelowego poziomu produkcji dóbr konsumpcyjnych, co rzuca pewne światło na spór o kryterium wzrostu. Także przejście od tradycyjnych zadań sterowania wzrostem dopuszczających nieregularne rozwiązania, w szczególności „skoki” trajektorii inwestycji i konsumpcji, do zadań z regularnie przebiegającymi procesami wzrostu nie zmienia takich generalnych właściwości rozwiązań, jak określone następstwo faz wzrostu czy przebieg optymalnych trajektorii w pobliżu magistral (z wyjątkiem, ewentualnie, pewnego okresu początkowego i końcowego). Zmieniają się jedynie konkretne postacie trajektorii, uwytytuowanie magistral itp.

Bibliografia

1. A l l e n R.G.D.: *Ekonomia matematyczna*. Warszawa: PWN, 1961.
2. A r r o w K.J.: *Primienienije teoriji uprawlenija k ekonomicesko-skomu rostu*. W: *Matematiceskaja ekonomija*. Red. Mitiagin B.S. Moskwa: Mir 1974.
3. A t h a n s M., F a l b P.L.: *Sterowanie optymalne*. Warszawa: WNT, 1969.
4. B a r k a ł o w N.B.: *Proizwodstwiennyje funkcji w modelach ekonomiceskogo rosta*. Moskwa: MGU, 1981.
5. B e l l m a n R.: *Dynamic Programming*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957.
6. B e l l m a n R., K a l a b a R.: *Dinamiczeskoje programmirowanije i sowriemiennaja teoria uprawlenija*. Moskwa: Nauka 1969 (tłum. z j.ang.).
7. B e r g s t r o m A.: *Postrojenije i primienienije ekonomiceskich modeliej*, Moskwa: Progress 1970 (tłum. z j.ang.).
8. B o ł t e Ń s k i W.G.: *Metody matematyczne sterowania optymalnego*, Warszawa: WNT 1970.
9. C a s s D.: *Optimal Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation*. *Review of Economic Studies* 1965. v.32 nr 91.
10. C a s s D.: *Optimal Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem*. *Econometrica* 1966. v.34 nr 4.
11. C z e r w i Ń s k i Z.: *Stopa inwestycji a maksymalizacja spożycia*. *Ekonomista* 1965 nr 1.
12. C z e r w i Ń s k i Z.: *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*". Warszawa: PWE 1973.
13. C z e r w i Ń s k i Z.: *Optymalny podział inwestycji między dwa sektory*. *Ekonomista* 1974 nr 5.
14. D e b r e u G.: *Theory of Value*. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1959.
15. D i r e c t o r S.W., R o h r e r R.A.: *Wwiedienije w teoriju sietiem*. Moskwa: Mir 1974 (tłum. z j.ang.).
16. D o m a r E.D.: *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*. Warszawa: PWN 1962.
17. D u b o w i c k i j A.J., M i l u t i n A.A.: *Teoriija principa maksimuma*. W: *Metody teorii ekstremalnych zadacz w ekonomike*. Red. Lewin W.J. Moskwa: Nauka 1981.

18. D u b o w s k i j S.W., D i u k a ł o w A.N., I w a n o w J.N. i in.: O postrojenii optimalnego ekonomicznego piana. Awtomatika i telemekhanika 1972 nr 8.
19. G e d y m i n O.: Zasada maksimum Pontriagina jako narzędzie planowania. Studia ekonomiczne 1972 nr 25.
20. G e d y m i n O.: Optymalne sterowanie procesami gospodarczymi. Warszawa: PWN 1977.
21. G r e n i e w s k i H.: Cybernetyka niematematyczna. Warszawa: PWN 1969.
22. H a d l e y G., K e m p M.C.: Variational Methods in Economics. Amsterdam: North-Holland 1971.
23. I c k o w i c z I.A.: Analiz liniowych ekonomiko-matematycznych modeli. Nowosybirsk: Nauka 1976.
24. I n t r i l i g a t o r M.: Matematyckije metody optimizacji i ekonomiczeskaja teorija. Moskwa: Progress 1975 (tłum. z j.ang.).
25. K a l e c k i M.: Akumulacja a maksymalizacja spożycia. Ekonomista 1962 nr 3.
26. K a l m a n R.E., F a l b P.L., A r b i b M.A.: Topics in Mathematical System Theory. New York: Mc Graw-Hill Book Company 1969.
27. K a r l i n S.: Matematyckije metody w teorii igr, programowaniu i ekonomii. Moskwa: Mir 1964 (tłum. z j.ang.).
28. K u l i k o w s k i R.: Sterowanie w wielkich systemach. Warszawa: WNT 1970.
29. L a n c a s t e r K.: Mathematical Economics. New York: The Macmillan Company 1959.
30. L e r n e r A.J.: Zarys cybernetyki. Warszawa: WNT 1971.
31. M a r k o w W.L., R u b i n o w A.M.: Matematyckaja teorija ekonomiczeskoj dynamiki i rawnowiesija. Moskwa: Nauka 1973.
32. M i c h a l e w s k i B.N.: Pierspektiwnyje rasczoty na osnovie prostych dynamiczeskich modeli. Moskwa: Nauka 1964.
33. M i n c B., P r z e l a s k o w e k i W.: Równania akumulacji. Ekonomista 1961 nr 6.
34. Modelirowanie narodnochoziajstwiennych processow. Red. Dadajan W.S. Moskwa: Nauka 1973.
35. M o r i s h i m a M.: Rawnowiesije, ustojcziwost' i rost. Moskwa: Nauka 1972 (tłum. z j.ang.).
36. N i k a i d o H.: Wypuklyje struktury i ekonomika Moskwa: Mir 1972 (tłum. z j.ang.).
37. P a n e k E.: Optymalny rozkład inwestycji w zagregowanym modelu wzrostu, Ekonomista. 1978 nr 6.
38. P a n e k E.: Sterowanie wzrostem w modelu jednosektorowym z uwzględnieniem czynnika demograficznego. W: Problemy modelowania i sterowania w systemach społeczno-gospodarczego rozwoju. Red. Strażak A. Wrocław - Warszawa: PAN 1981.

39. P a n e k E.: Kilka uwag o optymalnym podziale inwestycji między dwa sektory. W: ZN AE Poznań 1985 zes.111.
40. P h e l p s E.: Golden Rules of Economic Growth. Amsterdam: North-Holland 1967.
41. P o n t r i a g i n L.S.: Obykowniennyje differencjalnyje urownienia. Moskwa: Nauka 1965.
42. P o n t r i a g i n L.S., B o ł t i a ń s k i W.G., G a m - k r e l i d z e R.W., M i a z c z a n k o E.F.: Matematyczeskaja teorija optymalnych processow. Moskwa: Fizmatgiz 1961.
43. P o r t e r W.A.: Sowriemiennyje osnovanija obeczej teorii sietiem Moskwa: Nauka 1971 (tłum. z j.ang.).
44. S h e l l K.: Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change. W: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth. Red. Shell K. Cambridge (Mass.) 1967.
45. S o l o w R.M.: A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics 1956.v.70, nr 1.
46. S t o l e r u L.: Równowiesije i ekonomiczeskij rost. Moskwa: Statistika 1974 (tłum. z j.franc.).
47. S t o n e R.: Matematyka w naukach społecznych Warszawa: PWE 1970.
48. T i e r - K r i k o r o w A.M.: Optymalnoje uprawnienie i matematyczeskaja ekonomika. Moskwa: Nauka 1977
49. T i n b e r g e n J., B o s H.C.: Mathematical Models of Economic Growth. New York: Mc Graw-Hill Book Company 1962.
50. U z a w a H.: Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation. Review of Economic Studies 1964. v.31 nr 1.
51. Z a d e h L.A., D e s o e r C.A.: Teorija liniejnych sietiem. Moskwa: Nauka 1970 (tłum. z j.ang.).

Emil Panek

OPTIMAL GROWTH PATHS IN AGGREGATED ECONOMIC MODELS

S u m m a r y

The book is concerned with the problems of the mathematical growth theory which are solvable by means of the Pontryagin's principle. In the book the optimal paths of growth are carefully analyzed from the point of view of equilibrium and stability of an economic system. The analysis is based on aggregated one- and two-sectoral (one- and two-factoral) growth models. Discussing some properties of the paths derived from „traditionally" formulated problems by means of the control theory apparatus the author shows the contradiction between properties of the paths and our knowledge of economic growth.

Employing an original methodological principle the author proposes his own approach to the construction of growth models providing the solutions (the paths) to be fully economically acceptable.

The conclusions drawn from the analysis of the growth paths take a form of mathematical theorems. Some of them concern the existence of phases of optimal growth, some - the relationships between the phases and the dynamic equilibrium (G -equilibrium), and some - the stability of optimal growth processes.

The book consists of three chapters and of mathematical appendix. In Chapter I (Paragraphs 1 - 3) some fundamentals of the theory of optimal control are given and the definition of dynamic equilibrium (G -equilibrium) is introduced. This definition is used in the following chapters. In Chapter II (Paragraphs 4 - 6) the optimal growth paths in one-sectoral models are analyzed from the view-point of the relationships between the optimal and the equilibrium growth paths. In Chapter III (Paragraphs 7 - 10) the problems of optimization of growth process as well as the problems of equilibrium and stability in two-sectoral models are considered. In the Mathematical Appendix the theorems presented in previous parts of the book are proved.

Эмиль Панэк

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ РОСТА В АГРЕГИРОВАННЫХ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Резюме

В работе изложены проблемы математической теории экономического роста, решаемые с помощью принципа максимума Понтрягина [42]. Особое внимание уделено в ней анализу оптимальных траекторий роста с точки зрения равновесия экономической системы и устойчивости её развития.

Анализ функционирования экономической системы с помощью принципа максимума приводит к интересным выводам, формулируемым в работе в виде ряда теорем, в том числе теорем об существовании своеобразных фаз в процессе оптимального экономического роста, их связи с введенными автором понятием динамического равновесия, устойчивостью оптимальных процессов и др.

Исследования ведутся на основе агрегированных одно- и двухсекторных моделей экономики. Критически оценивая традиционные решения задач оптимального управления экономическим ростом, неприемлемые с экономической точки зрения, автор предлагает новый подход к разработке и построению моделей приводящий к экономически разумным и целесообразным решениям.

Работа состоит из трёх глав и математического дополнения. В I главе (параграфы 1-3) изложены необходимые сведения по теории оптимального управления непрерывными динамическими системами. В отличие от остальных глав, она не содержит оригинальных, самостоятельных результатов автора, за исключением предложенного во втором параграфе определения динамического равновесия (б-равновесия) используемого впоследствии во всех дальнейших главах. Во II главе (параграфы 4-6) проведен анализ оптимальных траекторий и исследованы условия равновесия и устойчивости развития экономической системы на основе односекторных моделей роста. III глава (параграфы 7-10) посвящена изложению результатов анализа оптимальных траекторий роста, вопросам равновесия и устойчивости экономической системы, на основе её двухсекторных моделей. Математическое дополнение содержит доказательства теорем формулируемых в I-III главах.

ANEKS

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 1

T w i e r d z e n i e 1.2. Załóżmy, że (i) w równaniu różniczkowym

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (*)$$

funkcje $f, \partial f / \partial x \in C^0[E^n \times U \times T]$, (ii) jeżeli u jest ciągłą i ograniczoną funkcją na otwartym przedziale (θ_0, θ_1) , to przez każdy punkt $(\tau^0, x^0) \in (\theta_0, \theta_1) \times E^n$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania

$$\frac{d}{dt} x(t) = g(x(t), t) \quad (**)$$

w którym $g(x, t) = f(x, u(t), t)$, określone i ograniczone na całym przedziale (θ_0, θ_1) . Jeżeli spełnione są warunki (i) - (ii), wtedy¹ $\forall x^0 \in E^n, \forall u \in C^0[T] \exists!$ $x \in C^0[T]: x(t_0) = x^0$ i funkcja x jest prawie wszędzie na T rozwiązaniem równania (*).

D o w ó d. Weźmy funkcję $u \in C^0[T]$, nieciągłą w punktach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ ($t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < t_1$). Na całym przedziale T funkcja ta jest ograniczona, a na $[t_0, \tau_1)$ ciągła. Przy założeniu (i) prawa strona równania (***) i jej pochodne cząstkowe względem x są zatem na $E^n \times (\theta_0, \tau_1)$ ciągłymi funkcjami zmiennych x, t . Przyjmując $g(x, t) = g(x, t_0)$ dla $t < t_0$ otrzymujemy $g, \partial g / \partial x \in C^0[E^n \times (\theta_0, \tau_1)] \forall \theta < t_0$. Zgodnie z (ii) istnieje więc dokładnie jedna (ciągła i ograniczona) funkcja $x(\theta, \tau_1)$ spełniająca równanie (***) i warunek $x(t_0) = x^0$. Na przedziale $[t_0, \tau_1)$ funkcja ta jest równocześnie rozwiązaniem równania (*). Przyjmując $x(\tau_1) = \lim_{t \rightarrow \tau_1 - 0} x(t)$ (granica ta istnieje i jest skończona) i rozpatrując z kolei równanie (***) na $[\tau_1, \tau_2)$ ze stanem początkowym $x(\tau_1)$ otrzymamy dokładnie jedną, ciągłą funkcję $x(\tau_1, \tau_2)$ spełniającą równanie (*) na przedziale $[\tau_1, \tau_2)$ (przypominamy, że funkcja u jest w punktach nieciągłości ciągła prawostronnie). Biorąc $x(\tau_2) = \lim_{t \rightarrow \tau_2 - 0} x(t)$, otrzymamy funkcję $x(t_0, \tau_2)$ spełniającą warunek $x(t_0) = x^0$, ciągłą na przedziale $[t_0, \tau_2]$ i prawie wszędzie (poza

¹ Stosujemy następującą symbolikę: \forall oznacza „dla każdego (każdej)” lub „każdemu(każdej)”; \exists czytamy „istnieje” lub „odpowiada”; $\exists!$ - „istnieje (odpowiada) dokładnie jeden (jedna, jedno)”. Np. $\forall a \in E^1 \exists! b \in E^1: a+b = 0$ czytamy „każdej liczbie rzeczywistej a odpowiada dokładnie jedna taka liczba rzeczywista b , że ich suma wynosi 0”.

punktami τ_1, τ_2) spełniająca równanie (*). Postępując analogicznie dalej, otrzymamy dokładną jedną funkcję $x \in C^0[T]$, prawie wszędzie na T spełniającą równanie (*) (wszędzie, poza punktami $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$) oraz warunek początkowy $x(t_0) = x^0$.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 3

T w i e r d z e n i e 3.1. Jeżeli spełnione są założenia 3.1, 3.2 i proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to istnieje taka stała $\psi_0^* > 0$ oraz takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x = x^*(t)},$$

że

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u) &= H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \\ &= 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*], \end{aligned}$$

a ponadto w momencie końcowym t_1^*

$$\langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0 \quad \forall x \in P_{x^*}(t_1^*),$$

gdzie $H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle$, $P_{x^*}(t_1^*)$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmiatości X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$.

D o w ó d. Niech $(u, x) [t_0, t_1]$ będzie procesem dopuszczalnym w zadaniu (3.4) - (3.5). Weźmy dowolny moment czasu $t \in [t_0, t_1]$ i liczbę $\Delta t > 0$ spełniającą warunek $t + \Delta t < t_1$. Wówczas

$$J(x(t), t) \geq \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\theta), u(\theta)) d\theta + J(x(t+\Delta t), t+\Delta t). \quad (1)$$

Rzeczywiście, zgodnie z założeniem 3.1 istnieje rozwiązanie $(u^*, x^*) [t+\Delta t, t_1^*]$ zadania (3.6) - (3.7) z momentem początkowym $t+\Delta t$ i warunkiem początkowym $x^*(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)$,

$$J(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \int_{t+\Delta t}^{t_1^*} f_0(x^*(\theta), u^*(\theta)) d\theta. \quad (2)$$

W warunkach (1) - (2) wektory $x(t), x(t+\Delta t)$ są stanami wewnętrznymi systemu w momentach $t, t+\Delta t$ w dopuszczalnym procesie (u, x) $[t_0, t_1]$ w zadaniu (3.4) - (3.5). Weźmy sterowanie $\tilde{u} [t, t_1^*]$,

$$\tilde{u}(\theta) = \begin{cases} u(\theta) & \text{dla } \theta \in [t, t+\Delta t), \\ u^*(\theta) & \text{dla } \theta \in [t+\Delta t, t_1^*], \end{cases}$$

otrzymane ze „sklejenia” $[t, t+\Delta t)$ - segmentu sterowania dopuszczalnego $u [t_0, t_1]$ w zadaniu (3.4) - (3.5) i optymalnego sterowania $u^* [t+\Delta t, t_1^*]$ w zadaniu (3.6) - (3.7) z momentem początkowym $t + \Delta t$ i stanem początkowym $x(t+\Delta t)$ (sterowanie $\tilde{u} [t, t_1^*]$ może być nieciągłe w punkcie $t+\Delta t$). Odpowiada mu trajektoria $\tilde{x} [t, t_1^*]$,

$$\tilde{x}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{dla } \theta \in [t, t+\Delta t), \\ \tilde{x}^*(\theta) & \text{dla } \theta \in [t+\Delta t, t_1^*], \end{cases}$$

będąca na przedziale $[t, t+\Delta t)$ segmentem trajektorii stanów wewnętrznych w procesie dopuszczalnym (u, x) $[t_0, t_1]$ w zadaniu (3.4) - (3.5), a na przedziale $[t+\Delta t, t_1^*]$ - optymalną trajektorią w zadaniu (3.6) - (3.7) z momentem początkowym $t + \Delta t$ i stanem początkowym $x(t+\Delta t)$. Ponieważ $\tilde{u} \in \tilde{C}^0 [t, t_1^*]$, $\tilde{x} \in \tilde{C}^1 [t, t_1^*]$, $\tilde{x}(t) = x(t)$, $\tilde{x}(t_1^*) \in X^1$, zatem para $(\tilde{u}, \tilde{x}) [t, t_1^*]$ jest procesem dopuszczalnym w zadaniu (3.6) - (3.7) z momentem początkowym t i stanem początkowym $x(t)$, czyli

$$J(x(t), t) \geq \int_t^{t_1^*} f_0(\tilde{x}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta, \quad (3)$$

Z (2), (3) otrzymujemy nierówność (1) zważywszy, że

$$\int_t^{t_1^*} f_0(\tilde{x}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta = \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\theta), u(\theta)) d\theta + \int_{t+\Delta t}^{t_1^*} f_0(\tilde{x}^*(\theta), \tilde{u}^*(\theta)) d\theta.$$

Z (1) wynika natomiast, że

$$-\frac{1}{\Delta t} [J(x(t+\Delta t), t+\Delta t) - J(x(t), t)] \geq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\theta), u(\theta)) d\theta,$$

a po przejściu do granicy przy $\Delta t \rightarrow 0$:

$$-\frac{d}{dt} J(x(t), t) \geq f_0(x(t), u(t)). \quad (4)$$

Tak więc każdy proces dopuszczalny $(u, x) [t_0, t_1]$ w zadaniu (3.4) - (3.5) w dowolnym momencie $t \in [t_0, t_1)$ spełnia warunek (4). Załóżmy teraz, że proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), a więc procesem optymalnym. Rozumując podobnie jak poprzednio, otrzymamy

$$J(x^*(t), t) = \int_t^{t+\Delta t} f_0(x^*(\theta), u^*(\theta)) d\theta + J(x^*(t+\Delta t), t+\Delta t) \quad (5)$$

czyli

$$-\frac{1}{\Delta t} [J(x^*(t+\Delta t), t+\Delta t) - J(x^*(t), t)] = -\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_0(x^*(\theta), u^*(\theta)) d\theta$$

i po przejściu do granicy przy $\Delta t \rightarrow 0$:

$$-\frac{d}{dt} J(x^*(t), t) = f_0(x^*(t), u^*(t)). \quad (6)$$

Warunek ten zachodzi dla wszystkich momentów $t \in [t_0, t_1^*]$.

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt} J(x(t), t) = \left\langle \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x(t)}, \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle + \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial t}, \quad (7)$$

gdzie $\partial J/\partial x = (\partial J/\partial x_1, \dots, \partial J/\partial x_n)$, $dx(t)/dt = f(x(t), u(t))^2$. Ponadto w stacjonarnym zadaniu sterowania z ustalonym stanem początkowym x funkcjonal $J(x, t) = \text{const.}$ we wszystkich momentach t , czyli

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Z (4), (6), uwzględniając (7), (8), otrzymujemy następujące warunki (koneczne) optymalności.

Jeżeli proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, f(x^*(t), u^*(t)) \right\rangle + f_0(x^*(t), u^*(t)) = \quad (9) \\ & = \max_{u \in U} \left\{ \left\langle \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, f(x^*(t), u) \right\rangle + f_0(x^*(t), u) \right\} = \\ & = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]. \end{aligned}$$

² wobec tego, ściśle rzecz biorąc, w warunkach (4), (6) w punktach nieciągłości sterowania określona jest tylko pochodna prawostronna funkcji J względem t (por. uwagi do twierdzenia 1.2 na s. 26).

Równanie (9) w programowaniu dynamicznym nosi nazwę równania Bellmana³. Funkcja J nazywa się funkcją Bellmana. Wprowadzając oznaczenie

$$B(x, u, t) = \left\langle \frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, f(x, u) \right\rangle + f_0(x, u)$$

równanie Bellmana (9) możemy zapisać krócej:

$$B(x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} B(x^*(t), u, t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]. \quad (10)$$

Zauważmy dalej, że (11)

$$B(x, u^*(t), t) \leq 0 \quad \forall x \in E^n, \forall t \in [t_0, t_1^*].$$

Rzeczywiście, z założenia istnieje rozwiązanie zadania (3.6) - (3.7) z dowolnym momentem początkowym $t \in E^1$ i dowolnym stanem początkowym $x \in E^n$. Ustalmy moment t . Załóżmy, że w momencie tym system znajduje się w stanie x . Oznaczmy przez $u_x^*(t)$ optymalną wartość sterowania w momencie t . Wówczas

$$B(x, u_x^*(t), t) = 0$$

oraz $B(x, u, t) \leq 0 \quad \forall u \in U$. W szczególności

$$B(x, u^*(t), t) \leq 0,$$

gdzie $u^*(t) \in U$ jest wartością sterowania optymalnego w momencie t w zadaniu (3.4) - (3.5).

Z definicji funkcji B i właściwości funkcji f, f_0 (przypomnijmy, że $f(\cdot, u), f_0(\cdot, u) \in C^1[E^n] \quad \forall u \in U$) wynika, że ma ona przy założeniu 3.2 ciągle pochodne cząstkowe względem zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n wektora x :

$$\frac{\partial B(x, u, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x^2} f(x, u) + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial x}, \quad (12)$$

gdzie

$$\frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x^2} f(x, u) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x, t)}{\partial x_i \partial x_i} f_1(x, u), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x, t)}{\partial x_i \partial x_n} f_1(x, u) \right).$$

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \right).$$

³ Zob. np. M. Intriligator [24] s.398.

Jeżeli $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest procesem optymalnym w zadaniu (3.4) - (3.5), to w każdym momencie $t \in [t_0, t_1^*]$ funkcja $B(\cdot, u^*(t), t)$ zmiennej x ma w otoczeniu punktu $x^*(t)$ pochodne cząstkowe względem współrzędnych x_1, x_2, \dots, x_n . Z (10), (11) wynika, że w punkcie $x = x^*(t)$ osiąga ona maksimum lokalne, tzn.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x^2} f(x, u^*(t)) \Big|_{x=x^*(t)} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \frac{\partial f(x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} + \\ & + \frac{\partial f_0(x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]. \end{aligned} \quad (13)$$

Zważywszy, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} &= \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x^2} f(x, u^*(t)) \Big|_{x=x^*(t)} + \\ &+ \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=x^*(t)} \end{aligned}$$

oraz (zob.(8))

$$\frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial t \partial x} = 0$$

z (13) otrzymujemy⁴:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} &= - \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \frac{\partial f(x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} - \\ &- \frac{\partial f_0(x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]. \end{aligned} \quad (14)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\psi^*(t) = \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad \psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \dots, \psi_n^*(t)),$$

$$H(\psi, x, u) = f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle$$

⁴ W równaniu tym, podobnie jak w warunkach (4), (6), w punktach nieciągłości sterowania określona jest tylko pochodna prawostronna funkcji $\partial J(x, t) / \partial x \Big|_{x=x^*(t)}$ po t . Uwaga ta dotyczy także równania (15).

równanie (14) przyjmie postać następującą:

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = - \frac{\partial H(\psi^*(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} \quad \forall t \in [t_0, t_1^*], \quad (15)$$

gdzie $\partial H / \partial x = (\partial H / \partial x_1, \dots, \partial H / \partial x_n)$. Funkcję H nazywamy funkcją Hamiltona (hamiltonianem).

Wektor $\psi^*(t)$ nazywamy wektorem zmiennych sprzężonych z $x^*(t)$ w momencie t . Równanie Bellmana (10) przyjmie teraz postać

$$\max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]. \quad (16)$$

Zauważmy, że ani w równaniu Bellmana, ani w równaniu (14) nigdzie nie występuje explicite funkcja J , tylko jej pochodne cząstkowe. Jeżeli proces $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1^*]}$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to zgodnie z założeniami 3.1., 3.2 funkcja ta oraz jej pochodne cząstkowo względem zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n istnieją i są ciągłymi funkcjami czasu. Istnieje więc takie ciągle (przedziałami różniczkowalne, poza punktami nieciągłości sterowania $u^*_{[t_0, t_1^*]}$) rozwiązanie $\psi^*_{[t_0, t_1^*]}$ równania (15), że zachodzi warunek (16)⁵. Warunek ten zachodzi dla momentów $t < t_1^*$. Równocześnie, ponieważ funkcje ψ^*, x^*, u^* są ciągłe (i ograniczone) w pewnym lewostronnym ϵ -otoczeniu punktu t_1^* (w punktach $t: t_1^* - \epsilon < t \leq t_1^*$, gdzie ϵ jest pewną liczbą dodatnią), zatem przyjmując $\psi^*(t_1^*) = \lim_{t \rightarrow t_1^* - 0} \psi^*(t)$ (granica ta istnieje) możemy warunek (16) rozszerzyć na cały przedział $[t_0, t_1^*]$. Tak więc, jeżeli proces $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1^*]}$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to istnieje także rozwiązanie $\psi^*_{[t_0, t_1^*]}$ równania (15) określone na całym przedziale $[t_0, t_1^*]$, że w każdym momencie czasu $t \in [t_0, t_1^*]$ zachodzi warunek (16).

Przedstawione warunki optymalności nie zmieniają się, jeżeli hamiltonian w układzie (15), (16) zdefiniujemy jako następującą funkcję zmiennych $\psi(t), x(t), u(t)$ i zmiennej rzeczywistej $\psi_0 > 0$ (niezależnej od czasu)⁶:

$$H(\psi_0, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi_0 f_0(x(t), u(t)) + \langle \psi(t), f(x(t), u(t)) \rangle. \quad (17)$$

⁵ Rozwiązanie równania (15) pojmujemy w sensie całkowym, por. uwagę 1^o do twierdzenia 1.2 na s. 26.

⁶ Wystarczy dokonać zamiany zmiennych, przyjmując np. $\xi(t) = \psi(t)/\psi_0$, i otrzymamy warunki optymalności z hamiltonianem postaci (17).

Warunki optymalności procesu $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ w stacjonarnym zadaniu sterowania (3.4) - (3.5) przyjmą zatem postać następującą.

Jeżeli spełnione są założenia 3.1, 3.2 i proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to istnieje taka stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania (15) (określane na całym przedziale $[t_0, t_1^*]$), że w każdym momencie czasu $t \in [t_0, t_1^*]$ zachodzi warunek (16), gdzie hamiltonian H ma postać (17).

Funkcja $\psi^* [t_0, t_1^*]$ spełnia ponadto pewien warunek w momencie końcowym t_1^* zwany warunkiem transversalności⁷. Bezpośrednio z definicji funkcji J wynika, że

$$J(x, t) \geq 0 \quad \forall x \in X^1, \quad \forall t \in E^1.$$

Niech proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ będzie rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5). Wtedy

$$J(x^*(t_1^*), t_1^*) = 0.$$

Rzeczywiście, ponieważ $x^*(t_1^*) \in X^1$, zatem $J(x^*(t_1^*)) \geq 0$. Załóżmy, że $J(x^*(t_1^*), t_1^*) > 0$. Istnieje zatem taki proces $(\bar{u}, \bar{x}) [t_1^*, \bar{t}]$, że

$$\bar{x}(t_1^*) = x^*(t_1^*), \quad \bar{x}(\bar{t}) \in X^1,$$

$$\int_{t_0}^{\bar{t}} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt > 0.$$

„Sklejając” ten proces z procesem $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$, otrzymujemy proces dopuszczalny $(\bar{u}, \bar{x}) [t_0, \bar{t}]$, któremu odpowiada wskaźnik jakości

$$\int_{t_0}^{\bar{t}} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt > J(x^0, t_0),$$

co jest niemożliwe. W punkcie $x^*(t_1^*)$ funkcja J ma więc minimum warunkowe,

$$J(x^*(t_1^*), t_1^*) = \min_{p(x)=0} J(x, t_1^*), \quad (18)$$

⁷ Warunki transversalności pojawiają się w tych zadaniach sterowania optymalnego, w których zbiór stanów docelowych (lub zbiór stanów początkowych) jest gładką rozmaitością. Mówimy wówczas o warunku transversalności w **prawym** (**lewym**) **krańcu** trajektorii stanów. W zadaniu (3.4) - (3.5) gładką rozmaitością jest zbiór stanów docelowych, zatem rzecz o warunku transversalności w **prawym krańcu trajektorii stanów**. Jeżeli gładka rozmaitość redukuje się do punktu (zbioru jednoelementowego), wtedy znika warunek transversalności, natomiast pojawia się warunek przejścia trajektorii przez ten punkt.

czyli funkcja Lagrange'a zadania (18) ma w tym punkcie zerowe pochodne cząstkowe,

$$\frac{\partial J(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t_1^*)} + \lambda \frac{\partial p(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t_1^*)} = 0$$

lub inaczej

$$\psi^*(t_1^*) = -\lambda \frac{\partial p(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t_1^*)} \quad (19)$$

gdzie

$$\lambda \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial p_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial p_i(x)}{\partial x_n} \right).$$

Mnożąc obie strony równania (19) przez wektor $x - x^*(t_1^*)$, gdzie $x \in P_{x^*(t_1^*)}$, otrzymujemy następujący warunek transwersalności (w prawym krańcu trajektorii stanów wewnętrznych):

$$\begin{aligned} \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle &= - \left\langle \lambda \frac{\partial p(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t_1^*)}, x - x^*(t_1^*) \right\rangle = \\ &= 0 \quad \forall x \in P_{x^*(t_1^*)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Reasumując, jeżeli spełnione są założenia 3.1, 3.2 i proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.4) - (3.5), to istnieje taka stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania (15) z hamiltonianem (17), że w każdym momencie czasu $t \in [t_0, t_1^*]$ spełniony jest warunek maksimum hamiltonianu (16), a w momencie końcowym t_1^* - warunek transwersalności (20).

T w i e r d z e n i e 3.3. Jeżeli proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem zadania (3.33) - (3.34), to istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ i takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)},$$

że

$$(A) \quad (\psi_0^*, \psi^*(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*],$$

$$(B) \quad \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) \quad \forall t \in [t_0, t_1^*],$$

$$(C) \quad H(\psi_0^*, \psi^*(t_1^*), x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) = 0,$$

$$(D) \quad \langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0 \quad \forall x \in P_{x^*}(t_1^*),$$

$$\text{gdzie} \quad H(\psi_0, \psi, x, u, t) = \psi_0 f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle,$$

$P_{x^*}(t_1^*)$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości X^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$.

D o w ó d. Skorzystamy z tego, że zadanie (3.33) - (3.34) jest równoważne z zadaniem (3.33') - (3.34'), tzn. proces $(u^*, x^*) [t_0, t_1^*]$ wtedy i tylko wtedy będzie rozwiązaniem zadania (3.33) - (3.34), gdy rozwiązaniem zadania (3.33') - (3.34') będzie proces $(u^*, x^*, x_{n+1}^*) [t_0, t_1^*]$, gdzie $x_{n+1}^*(t) = t - t_0$. Hamiltonianem zadania (3.33') - (3.34') jest funkcja \hat{H} ,

$$\hat{H}(\psi_0, \psi, \psi_{n+1}, x, x_{n+1}, u) = \psi_0 f_0(x, u, x_{n+1}) + \\ + \langle \psi, f(x, u, x_{n+1}) \rangle + \psi_{n+1}.$$

Jeżeli proces $(u^*, x^*, x_{n+1}^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem tego zadania, to zgodnie z twierdzeniem 3.2 istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ i takie rozwiązanie $\psi^* [t_0, t_1^*]$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial \hat{H}(\psi_0^*, \psi(t), \psi_{n+1}(t), x, x_{n+1}^*(t), u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_{n+1}(t) = - \frac{\partial \hat{H}(\psi_0^*, \psi(t), \psi_{n+1}(t), x^*(t), x_{n+1}, u^*(t))}{\partial x_{n+1}} \Big|_{x_{n+1}=x_{n+1}^*(t)}, \quad (2)$$

ze

$$(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*], \quad (3)$$

$$\max_{u \in U} \hat{H}(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t), x^*(t), x_{n+1}^*(t), u) = \\ = \hat{H}(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t), x^*(t), x_{n+1}^*(t), u^*(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*] \quad (4)$$

$$\langle \psi^*(t_1^*), \psi_{n+1}^*(t_1^*) \rangle \cdot (x, x_{n+1}) - (x^*(t_1^*), x_{n+1}^*(t_1^*)) \rangle = 0$$

$$\forall (x, x_{n+1}) \in \bar{P}(x^*(t_1^*), x_{n+1}^*(t_1^*)), \quad (5)$$

gdzie $\bar{P}(x^*(t_1^*), x_{n+1}^*(t_1^*))$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości \bar{x}^{-1} w punkcie $(x^*(t_1^*), x_{n+1}^*(t_1^*))$.

Wróćmy do zadania (3.33) - (3.34). Zauważmy, że $\partial \hat{H} / \partial x = \partial H / \partial x$, $\partial \hat{H} / \partial x_{n+1} = \partial H / \partial t$, zatem układ równań (1) - (2) jest równoważny z następującym:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} \quad (1')$$

$$\frac{d}{dt} \psi_{n+1}(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial t} \quad (2')$$

Z (4) oraz definicji funkcji H, \hat{H} wynika, że

$$\max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u, t) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) \quad \forall t \in [t_0, t_1^*] \quad (4')$$

W warunku transversalności (5) zmienna x_{n+1} przebiega całą oś rzeczywistą, zatem $\psi_{n+1}^*(t_1^*) = 0$ i wobec tego:

$$\langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0 \quad \forall x \in P_{x^*(t_1^*)} \quad (5')$$

gdzie $P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości x^1 w punkcie $x^*(t_1^*)$. Ponieważ $\psi_{n+1}^*(t_1^*) = 0$, więc

$$(\psi_0^*, \psi^*(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*]$$

(zakładając, że $(\psi_0^*, \psi^*(t)) = 0$ w pewnym momencie t otrzymalibyśmy trywialne rozwiązanie układu (1) - (2) nie spełniające warunku (3)). Z tego samego powodu w momencie końcowym t_1^*

$$\begin{aligned} H(\psi_0^*, \psi^*(t_1^*), x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) = \\ = \hat{H}(\psi_0^*, \psi^*(t_1^*), \psi_{n+1}^*(t_1^*), x^*(t_1^*), x_{n+1}^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) = 0. \end{aligned} \quad (4'')$$

Tak więc, jeżeli proces $(u^*, x^*)_{[t_0, t_1^*]}$ jest rozwiązaniem zadania (3.33) - (3.34), to istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ i rozwiązanie $\psi^*_{[t_0, t_1^*]}$ równania (1') spełniające warunki: nietrywialności (3'), maksimum (4'), transversalności (5') i zerowania się hamiltoniana H w momencie końcowym (4'').

T w i e r d z e n i e 3.4. Jeżeli proces $(u^*, x^*)_{\Gamma}$ jest rozwiązaniem zadania (3.35) - (3.36), to istnieje stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie ψ^*_{Γ} równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}$$

z warunkiem końcowym

$$(A) \quad \psi^*(t_1) = 0.$$

ze

$$(B) \quad \max H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{const.} \quad \forall t \in T,$$

$$\text{gdzie} \quad H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) \rangle.$$

D u = ó d. Posłużymy się metodą podobną do tej, którą zastosowaliśmy przy dowodzie twierdzenia 3.3. Wprowadźmy dodatkową zmienną x_{n+1} i równanie

$$\frac{d}{dt} x_{n+1}(t) = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0. \quad (1)$$

Wtedy zadanie (3.35) - (3.36) będzie równoważne z następującym zadaniem z nie ustalonym momentem końcowym:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t))$$

$$\frac{d}{dt} x_{n+1}(t) = 1$$

$$u(t) \in U, \quad u \in \bar{C}^0[t_0, t_1] \quad (3)$$

$$(x(t_0), x_{n+1}(t_0)) = (x^0, t_0)$$

$$(x(t_1), x_{n+1}(t_1)) \in \bar{X}^1 = \{(x, x_{n+1}) : x \in E^n, x_{n+1} = t_1\}.$$

W zadaniu (2) - (3) \bar{X}^1 jest n-wymiarową gładką rozmaitością w E^{n+1} . Moment t_1^* nie jest ustalony (jednak każda trajektoria stanów wchodzi do \bar{X}^1 w momencie $t_1^* = t_1$). Załóżmy, że proces $(u^*, x^*, x_{n+1}^*) [t_0, t_1^*]$ jest rozwiązaniem tego zadania. Oczywiście $t_1^* = t_1$, czyli $[t_0, t_1^*] = T$ i dlatego dalej będziemy mówić o optymalnym procesie $(u^*, x^*, x_{n+1}^*)_T$. Rozwiązaniem wyjściowego zadania (3.35) - (3.36) będzie proces $(u^*, x^*)_T$.

Z twierdzenia 3.2 otrzymujemy następujące warunki optymalności procesu $(u^*, x^*, x_{n+1}^*)_T$. Istnieje stała $\psi_0^* \geq 0$ i takie rozwiązanie $(\psi^*, \psi_{n+1}^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial \hat{H}(\psi_0^*, \psi(t), \psi_{n+1}^*(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_{n+1}(t) = - \frac{\partial \hat{H}(\psi_0^*, \psi(t), \psi_{n+1}(t), x^*(t), u^*(t))}{\partial x_{n+1}}, \quad (5)$$

ze

$$(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t)) \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \hat{H}(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t), x^*(t), u) = \\ = \hat{H}(\psi_0^*, \psi^*(t), \psi_{n+1}^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad \forall t \in T, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\langle \psi^*(t_1), \psi_{n+1}^*(t_1), (x, x_{n+1}) - (x^*(t_1), t_1) \rangle = 0 \quad (8)$$

$$\forall (x, x_{n+1}) \in P_{(x^*(t_1), t_1)},$$

gdzie $\hat{H}(\psi_0, \psi, \psi_{n+1}, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi, f(x, u) + \psi_{n+1}$.

$P_{(x^*(t_1), t_1)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości X^1 w punkcie $(x^*(t_1), t_1)$.

Z definicji funkcji H, \hat{H} wynika, że układ równań (4) - (5) jest równoważny z następującymi:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi_0^*, \psi(t), x, u^*(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad (4')$$

$$\frac{d}{dt} \psi_{n+1}(t) = 0, \quad (5')$$

natomiast warunek maksimum (7), wobec tego, że $\psi_{n+1}^*(t) = \text{const.}$, z warunkiem

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u) = H(\psi_0^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \\ = \text{const.} \quad \forall t \in T. \end{aligned} \quad (7')$$

Wektor x w warunku transversalności (8) przebiega całą przestrzeń E^n , zatem

$$\psi^*(t_1) = 0. \quad (8')$$

Ponadto z (7), (8') otrzymujemy, zważywszy na (6), że $\psi_0^* \neq 0$ i wobec tego $\psi_0^* > 0$. Tak więc, jeżeli proces $(u^*, x^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (3.35) - (3.36), to istnieje stała $\psi_0^* > 0$ i takie rozwiązanie ψ_T^* równania (4'), że spełnione są warunki (7'), (8').

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 4

T w i e r d z e n i e 4.1. (1) Jeżeli spełnione są założenia 4.1, 4.2, to rozwiązaniem zadania (4.12) - (4.13) jest proces $(s^*, m^*)_T$ następującej postaci:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0 e^g(t) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m^*(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $g(t) = (a^0/v)(e^{v(t-t_0)} - 1) - \mu(t-t_0)$; $t_0 \leq \tau < t_1$.

$$(11) \quad |\exists \theta > 0: |T - t_1 - t_0| > \theta \implies \tau > t_0, \quad |T| \leq \theta \implies \tau = t_0.$$

D o w ó d. (1) Zadanie (4.12) - (4.13) jest niestacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym krańcem trajektorii stanów. Z twierdzenia 3.5 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(s^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.12) - (4.13), to istnieje takie rozwiązanie ψ_T^* równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - (a(t)s^*(t) - \mu) \psi(t) - a(t)(1-s^*(t)) \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*(t_1) = 0. \quad (2)$$

że

$$\max_{s \in [0,1]} \{ (a(t)s - \mu) \psi^*(t) + a(t)(1-s) \} s^*(t) = \\ = \{ a(t)(s^*(t) - \mu) \psi^*(t) + a(t)(1-s^*(t)) \} s^*(t) \quad \forall t \in T. \quad (3)$$

W punkcie 4.2. pokazaliśmy, że wszystkie trajektorie majątku produkcyjnego w zadaniu (4.12) - (4.13) są dodatnie. Ponieważ $a(t) > 0$ na T , hamiltonian H postaci

$$H(\psi, m, s, t) = a(t)(1-s)m + \psi(a(t)s - \mu)m$$

jest liniową funkcją sterowania (zmiennej s), zbiór sterowań - przedział $[0,1]$ - prostopadłością w E^1 oraz

$$\frac{\partial H(\psi^*(t), m^*(t), s, t)}{\partial s} = a(t)m^*(t)(\psi^*(t)-1).$$

zatem

$$s^*(t) = 1, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) > 0,$$

$$s^*(t) = 0, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) < 0,$$

gdzie $\varphi^*(t) = \psi^*(t) - 1$. W momencie końcowym t_1 mamy $\psi^*(t_1) = 0$ (warunek transwersalności (2)), więc $\varphi^*(t_1) = -1$ i wobec tego - zważywszy, że $\varphi^* \in C^0[T]$ - otrzymujemy: $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią⁸. Podstawiając $\varphi^*(t)$ do równania (1), otrzymujemy następujące równanie, które prawie wszędzie spełnia ciągła funkcja ψ_T^* :

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = -a(t)(1 + \varphi^*(t))s(t) + \mu(\varphi^*(t) + 1).$$

Możliwe są trzy przypadki:

(a) $\varphi^*(t) < 0$. Wtedy $s^*(t) = 0$,

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = -a(t) + \mu + \mu\varphi^*(t) < 0.$$

(b) $\varphi^*(t) = 0$. Wtedy

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = -a(t) + \mu < 0.$$

(c) $\varphi^*(t) > 0$. Wtedy $s^*(t) = 1$,

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = (\mu - a(t))(\varphi^*(t) + 1) < 0.$$

Ciągła, przedziałami różniczkowalna funkcja ψ^* maleje więc monotonicznie na T do zera (warunek (2)), zatem maleje także funkcja φ^* i $\varphi^*(t_1) < 0$. Albo więc $\varphi^*(t) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T$, albo funkcja φ^* zmienia dokładnie raz znak na $\text{int } T$ (z dodatniego na ujemny). W ten sposób w zbiorze trajektorii sterowań

$$K[T] = \{s_T: s \in C^0[T], s(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in T\}$$

wyróżniliśmy podzbiór

$$K^0[T] = \{s_T: s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, t'), \\ & \forall t' \in [t_0, t_1], \\ 0 & \text{dla } t \in [t', t_1], \end{cases}\}.$$

⁸ Symbolem $U(\varepsilon; t)$ oznaczamy ε -otoczenie punktu t (w E^1):
 $U(\varepsilon; t) = \{t' \in E^1: |t - t'| < \varepsilon\}$; $U^-(\varepsilon; t)$ - lewostronne ε -otoczenie punktu t , $U^-(\varepsilon; t) = \{t' \in U(\varepsilon; t): t' \leq t\}$.

do którego należy sterowanie optymalne (jeżeli istnieje). Zadanie sterowania optymalnego (4.12) - (4.13) zredukowaliśmy więc do zadania ustalenia optymalnego momentu przełączenia sterowania z 1 na 0. Weźmy sterowanie $s \in K^0[T]$. Odpowiada mu trajektoria m_T :

$$m(t) = \begin{cases} m^0 \exp \int_{t_0}^t (a(\theta) - \mu) d\theta & \text{dla } t \in [t_0, t'), \\ m(t') \exp \{-\mu(t-t')\} & \text{dla } t \in [t', t_1]. \end{cases} \quad (4)$$

Zadanie ustalenia optymalnego momentu przełączenia sterowania ma postać następującą:

$$\max_{t' \in T} \xi(t'), \quad (5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \xi(t') &= \int_T a(t)(1-s(t))m(t)dt = \\ &= m^0 \left[\exp \int_{t_0}^{t'} (a(t) - \mu) dt \right] \int_{t'}^{t_1} a(t) \exp \{-\mu(t-t')\} dt \end{aligned}$$

jest wielkością konsumpcji w horyzoncie czasu T w dopuszczalnym procesie $(s, m)_T$ ze sterowaniem $s \in K^0[T]$ (trajektoria m_T ma postać (4)), przy czym funkcja $\xi \in C^1[T]$ oraz

$$\frac{d}{dt} \xi(t') \Big|_{t'=t_1} = -a(t_1)m(t_1) < 0. \quad (6)$$

Nietrudno sprawdzić, że warunek $d\xi(t')/dt' = 0$ może zachodzić co najwyżej raz na T , zatem funkcja ta ma co najwyżej jeden punkt przegięcia na T . Jeżeli istnieje taki punkt przegięcia $\tau^0 \in T$, wtedy na podstawie (6): $t_0 \leq \tau^0 < t_1$. Inaczej $\max_{t' \in T} \xi(t') = \xi(t_0)$ (rozwiązanie zadania (5) istnieje, ponieważ $\xi \in C^0[T]$, a zbiór T jest zwarty). Zatem optymalny moment przełączenia

$$\tau = \arg \max_{t' \in \{t_0, \tau^0\}} \xi(t'), \quad (7)$$

gdzie τ^0 jest punktem przegięcia funkcji ξ na T (o ile istnieje). Proces $(s^*, m^*)_T$ ze sterowaniem

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (8)$$

odpowiadającą mu z rozwiązania równania różniczkowego w (4.13) trajektorią m_T^* (po podstawieniu $a(t) = a^0 \exp \{ \nu(t-t_0) \}$),

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0 e^g(t) & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ m^*(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (9)$$

gdzie $g(t) = (a^0/\nu)(e^{\nu(t-t_0)} - 1) - \mu(t-t_0)$, i momentem przełączenia sterowania (7) jest jedynym procesem dopuszczalnym spełniającym warunki optymalności (1) - (3). Zgodnie z hipotezą (H) proces ten jest więc rozwiązaniem zadania.

(ii) Ponieważ

$$\frac{d}{dt'} \xi(t') = a(t') m(t') \left[e^{\mu t'} \int_{t_0}^{t_1} a(t) e^{-\mu t} dt - 1 \right],$$

a po podstawieniu $a(t) = a^0 \exp \{ \nu(t-t_0) \}$:

$$\frac{d}{dt'} \xi(t') = a^0 e^{\nu(t'-t_0)} m(t') \left[\frac{a^0}{\nu-\mu} (e^{\nu(t_1-t_0)-\mu(t_1-t')} - e^{\nu(t'-t_0)} - 1) \right],$$

więc w szczególności

$$\left. \frac{d}{dt'} \xi(t') \right|_{t'=t_0} = a^0 m^0 \left[\frac{a^0}{\nu-\mu} (e^{(\nu-\mu)(t_1-t_0)} - 1) - 1 \right]. \quad (10)$$

Przy założeniu 4.2 prawa strona równania (10) staje się dodatnia przy $T \rightarrow +\infty$ (wystarczy wziąć $|T| > \theta = (\nu-\mu)^{-1} \ln[1+(\nu-\mu)/a^0]$).

Jeżeli horyzont czasu T będzie dostatecznie długi, wtedy funkcja ξ nie osiągnie maksimum na T w momencie t_0 , ponieważ w momencie tym będzie miała dodatnią pochodną. Zważywszy na (7) otrzymujemy

$$\tau = \arg \max_{t' \in T} \xi(t') = \tau^0 > t_0.$$

jeżeli $|T| > \theta$. Podobnie łatwo wykazać, że funkcja ξ maleje na T , jeżeli horyzont T będzie dostatecznie krótki (wystarczy, by $|T| \leq \theta$). Wtedy $\tau = t_0$.

T w i e r d z e n i e 4.2. Jeżeli $|T| \rightarrow +\infty$, to (i) $\tau - t_0 \rightarrow +\infty$,

(ii) $|\delta_{m_T}^* - \delta_{m_T}^-| \rightarrow 0$, gdzie funkcje $\delta_{m_T}^*$, $\delta_{m_T}^-$ są postaci (4.18) -

(4.19), τ jest momentem „przełączenia” sterowania optymalnego w zadaniu (4.12) - (4.13).

D o w ó d (i) W twierdzeniu 4.1 pokazaliśmy, że jeżeli horyzont czasu T jest dostatecznie długi, to optymalny moment τ przełączenia sterowania s_T^* spełnia warunek

$$\frac{d}{dt} \xi(\tau) \Big|_{t=\tau} = a(\tau)m^*(\tau) \left[e^{\mu\tau} \int_{\tau}^{t_1} a(t)e^{-\mu t} dt - 1 \right] = 0, \quad (1)$$

(gdzie $a(t) = a^0 \exp \{v(t-t_0)\}$), skąd po przekształceniach otrzymujemy

$$1 - e^{(v-\mu)(t_1-\tau)} = \frac{\mu-v}{a^0} e^{-v(\tau-t_0)}.$$

Zważywszy, że $0 < (\mu-v)/a^0 < 1$, mamy więc $\tau \rightarrow +\infty$, $t_1 - \tau \rightarrow 0$, przy $t_1 \rightarrow +\infty$.

(ii) Ponieważ

$$\int_{\tau}^{t_1} a(t) dt < e^{\mu(t_1-\tau)},$$

gdzie τ jest momentem przełączenia sterowania w procesie optymalnym w długim horyzoncie czasu (warunek ten wynika z (1)), oraz $t_1 - \tau \rightarrow 0$ przy $t_1 \rightarrow +\infty$, więc

$$\begin{aligned} |\delta m_T^* - \delta \bar{m}_T| &= \frac{1}{|T|} \left| \int_{t_0}^{\tau} (a(t) - \mu) dt - \int_{\tau}^{t_1} \mu dt - \int_{t_0}^{t_1} (a(t) - \mu) dt \right| = \\ &= \frac{1}{|T|} \int_{\tau}^{t_1} a(t) dt < \frac{1}{|T|} e^{\mu(t_1-\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{przy } |T| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

T w i e r d z e n i e 4.3. (i) Rozwiązaniem zadania (4.26') - (4.27') przy założeniu 4.3 jest proces $(h^*, m^*, i^*)_T$ następującej postaci:

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ -\varepsilon & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases} \\ m^*(t) &= \begin{cases} (m^0 - d^0)e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{\mu}(t-t_0) + d^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (m^*(\tau) - d(\tau))e^{-\mu(t-\tau)} - \frac{\varepsilon}{\mu}(t-\tau) + d(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases} \\ i^*(t) &= \begin{cases} i^0 + \varepsilon(t-t_0) & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ i^*(\tau) - \varepsilon(t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $d^0 = (i^0/\mu) - (\varepsilon/\mu^2) > 0$, $d(\tau) = (i^*(\tau)/\mu) + (\varepsilon/\mu^2) > 0$, moment τ spełnia warunek $t_0 \leq \tau < t_1$.

$$(11) \exists \theta > 0: |T| > \theta \Rightarrow \tau = t_1 - \theta > t_0, |T| \leq \theta \Rightarrow \tau = t_0.$$

D o w ó d. Zadanie (4.26') - (4.27') jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym krańcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(h^*, m^*, i^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.26') - (4.27'), to rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_1(t) &= \mu \psi_1(t) - a, \\ \frac{d}{dt} \psi_2(t) &= -\psi_1(t) + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ze stanem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0 \quad (2)$$

spełnia warunek

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \varepsilon, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) > 0 \\ h^*(t) &= -\varepsilon, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Rozwiązanie układu równań (1) z warunkiem (2) jest jednoznaczne, przy tym

$$\psi_2^*(t) = a \mu^{-2} e^{\mu(t-t_1)} - (a \mu^{-1} - 1)(t-t_1) - a \mu^{-2}.$$

Ponieważ $\psi_2^*(t_1) = 0$, $d\psi_2^*(t)/dt|_{t=t_1} > 0$, zatem $\psi_2^*(t) < 0$

$\forall t \in U^-(\varepsilon_1; t_1) \setminus \{t_1\}$, gdzie ε_1 jest pewną liczbą dodatnią, i wobec tego $h^*(t) = -\varepsilon \quad \forall t \in U^-(\varepsilon_1; t_1)$ zważywszy, że sterowanie może być nieciągłe tylko w skończonej liczbie punktów wewnętrznych horyzontu T . Funkcja ψ_2^* zeruje się co najwyżej raz na int T , przy tym $\psi_2^*(t) < 0 \quad \forall t \in T$, jeżeli $|T| \leq \theta$ i zmienia dokładnie raz znak (z dodatniego na ujemny) w otoczeniu punktu $\tau = t_1 - \theta$, jeżeli $|T| > \theta$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 - \mu(1 - \frac{\mu}{a})\theta = e^{-\mu\theta}$$

(równanie to ma dwa pierwiastki: $\theta' = 0$ i $\theta \in (0, (\frac{a}{\mu}) / (a - \mu))$). Zgodnie z (3) sterowanie h_T^* ma więc następującą postać:

$$h^*(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ -\varepsilon & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $\tau = t_1 - \theta > t_0$, jeżeli $|T| \leq \theta$ oraz $h^*(t) = -\varepsilon \quad \forall t \in T$, jeżeli $|T| > \theta$. Rozwiązując układ równań różniczkowych w (4.27') z powyższym sterowaniem, otrzymamy żądany proces $(h^*, m^*, i^*)_T$, który jako jedyny w naszym zadaniu spełnia warunki optymalności (1) - (3). Zgodnie z hipotezą (H) jest on rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 4.4. (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0$:

$|T| > 2\theta_\varepsilon \implies |m^*(t) - \bar{m}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie m_T^* jest optymalną trajektorią majątku produkcyjnego w zadaniu (4.26') - (4.27'), \bar{m}_T - trajektorią majątku produkcyjnego postaci (4.28) z warunkiem początkowym $\bar{m}(t_0) = (\mu i^0 - \varepsilon) / \mu^2 > 0$ (i^0 - początkowa wielkość inwestycji w zadaniu (4.26') - (4.27')).

(ii) $|\delta_{m_T^*} - \delta_{\bar{m}_T}| \rightarrow 0$ przy $|T| \rightarrow +\infty$, gdzie $\delta_{m_T^*}, \delta_{\bar{m}_T}$ - średnie stopy wzrostu majątku m_T^*, \bar{m}_T zdefiniowane w (4.18), (4.19).

D o w ó d. (i) W twierdzeniu 4.3 (ii) wykazaliśmy, że długość fazy konsumpcyjnej w optymalnym procesie wzrostu jest ograniczona, tzn.

$\exists \theta > 0$: $\tau_1 - \tau \leq \theta$ dla horyzontu czasu T dowolnej długości. Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli $m^0 = d^0 = (i^0 / \mu) - (\varepsilon / \mu^2)$, wtedy $m^*(t) = \bar{m}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1 - \theta]$. Jeżeli $m^0 \neq d^0$, wtedy $|m^*(t) - \bar{m}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 + \theta'_\varepsilon, t_1 - \theta]$, gdzie $\theta'_\varepsilon = \frac{1}{\mu} \ln |(m^0 - d^0) / \varepsilon|$. Tezę (i) otrzymujemy, biorąc $\theta_\varepsilon = \max \{\theta, \theta'_\varepsilon\}$.

(ii) Z definicji średnich stóp wzrostu otrzymujemy

$$\delta_{m_T^*} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} m^*(t) \cdot \frac{1}{m^*(t)} dt = \frac{\theta}{|T|} \int_T (s^*(t) - \mu) dt$$

$$\delta_{\bar{m}_T} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} \bar{m}(t) \cdot \frac{1}{\bar{m}(t)} dt = \frac{\theta}{|T|} \int_T (\bar{s}(t) - \mu) dt,$$

a zatem

$$|\delta_{m_T^*} - \delta_{\bar{m}_T}| \leq \frac{\theta}{|T|} \int_T |s^*(t) - \bar{s}(t)| dt,$$

przy czym $s^*(t), \bar{s}(t) \in (0, 1) \quad \forall t \in T$. Zauważmy, że $\bar{s}(t) \rightarrow \mu/a < 1$, jeżeli $t \rightarrow +\infty$ oraz $s^*(t) \rightarrow \mu/a$, jeżeli $t \rightarrow +\infty, t \leq t_1 - \theta$; gdzie θ jest oceną długości fazy konsumpcyjnej w procesie optymalnym (niezależną od długości horyzontu czasu T). Stąd $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0$: $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta] \implies |s^*(t) - \bar{s}(t)| \leq \varepsilon$ (ocena θ_ε nie zależy od długości horyzontu T). Tak więc

$$|\delta_{m_T^*} - \delta_{\bar{m}_T}| \leq \frac{\theta}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_1 - \theta} |s^*(t) - \bar{s}(t)| dt + \int_{t_1 - \theta}^{t_1} |s^*(t) - \bar{s}(t)| dt \right] \leq$$

$$\leq \frac{\theta}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_0 + \theta_\varepsilon} |s^*(t) - \bar{s}(t)| dt + \int_{t_0 + \theta_\varepsilon}^{t_1 - \theta} \varepsilon dt + \int_{t_1 - \theta}^{t_1} |s^*(t) - \bar{s}(t)| dt \right] \leq$$

$$\begin{aligned} &< \frac{\theta}{|T|} [\theta + \theta_\varepsilon + \varepsilon(t_1 - t_0 - \theta - \theta_\varepsilon)] = \\ &= \frac{\theta}{|T|} (\theta + \theta_\varepsilon)(1 - \varepsilon) + \theta \varepsilon. \end{aligned}$$

Ocena ta pozostaje prawdziwa dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$, jeżeli tylko horyzont T jest dostatecznie długi, a zatem

$$|\delta_{m_T}^+ - \delta_{m_T}^-| \rightarrow 0 \quad \text{przy } |T| \rightarrow +\infty.$$

T w i e r d z e n i e 4.5. Jeżeli spełnione jest założenie 4.3', wówczas: (i) wszystkie procesy $(i, y)_T$ w układzie (4.32') są rosnące, (ii) warunek

$$\frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) < \frac{d}{dt} i(t) \leq \frac{d}{dt} y(t)$$

jest równoważny z następującym:⁹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i(t) &= \alpha(t) [a i(t) - \mu y(t)] \\ \alpha(t) &\in \left[\frac{\mu}{a}, 1 \right], \quad \alpha \in \tilde{C}^0[T]. \end{aligned} \quad (*)$$

D o w ó d. (i) Ponieważ $i \in \tilde{C}^1[T]$, więc $y \in \tilde{C}^2[T]$, tzn. para $(i, y)_T$ spełnia prawie wszędzie na T równanie

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = a \frac{d}{dt} i(t) - \mu \frac{d}{dt} y(t). \quad (1)$$

Ponieważ prawa strona tego równania jest nieujemna na T , zatem

$$\frac{d}{dt} y(t) \geq \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=t_0} = a i^0 - \mu y^0 > 0 \quad \forall t \in T$$

(przy założeniu 4.3') oraz

$$\frac{d}{dt} i(t) \geq \frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) > 0 \quad \forall t \in T.$$

(ii) Jeżeli para $(i, y)_T$ spełnia układ (4.32'), to $di(t)/dt > 0$, $dy(t)/dt > 0$ na T na podstawie (i), tzn. $\exists \beta \in \tilde{C}^0[T]: \beta(t) \in [0, 1]$,

⁹ Jeżeli w pewnym punkcie τ pochodna funkcji $i \in \tilde{C}^1[T]$ jest nieokreślona, wtedy przyjmujemy $d i(t)/dt \Big|_{t=\tau} = \lim_{t \rightarrow \tau + 0} d i(t)/dt$.

Uwaga ta dotyczy wszystkich rozpatrywanych dalej funkcji z klasy $\tilde{C}^1[T]$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i(t) &= \beta(t) \frac{d}{dt} y(t) + (1 - \beta(t)) \frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) = \\ &= \left[\beta(t) \left(1 - \frac{\mu}{a}\right) + \frac{\mu}{a} \right] \frac{d}{dt} y(t). \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie $\alpha(t) = (1 - \mu/a) \beta(t)$, otrzymujemy (*).

Odwrotnie, weźmy dowolną funkcję $\alpha \in C^0[T]$ z wartościami w $[\mu/a, 1]$. Po podstawieniu równania wzrostu inwestycji (*) i równania wzrostu dochodu do (1) otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = (a\alpha(t) - \mu) \frac{d}{dt} y(t), \quad (2)$$

którego rozwiązaniem jest trajektoria dochodu narodowego spełniająca warunek

$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=t_0} \exp \int_{t_0}^t (a\alpha(\theta) - \mu) d\theta > 0 \quad \forall t \in T.$$

Zatem $a i(t) - \mu y(t) > 0$, $d^2 y(t)/dt^2 \geq 0$ na T . Zważywszy na (1), postać równania wzrostu dochodu narodowego w (4.32') oraz równanie wzrostu inwestycji (*) otrzymujemy

$$\frac{\mu}{a} \frac{d}{dt} y(t) \leq \frac{d}{dt} i(t) \leq \frac{d}{dt} y(t) \quad \forall t \in T.$$

T w i e r d z e n i e 4.6. Rozwiązaniem zadania (4.31'') - (4.32'') przy założeniu 4.3' jest proces $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$ następującej postaci:

$$\begin{aligned} \alpha^*(t) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ \frac{\mu}{a} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\ y^*(t) &= \begin{cases} (y^0 - a d^0) e^{(a-\mu)(t-t_0)} + a d^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ y^*(\tau) + [(a-\mu)y^*(\tau) - a c^0](t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\ i^*(t) &= \begin{cases} (i^0 - \mu d^0) e^{(a-\mu)(t-t_0)} + \mu d^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ i^*(\tau) + \frac{\mu}{a} [(a-\mu)i^*(\tau) - \mu c^0](t-\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $d^0 = c^0/(a-\mu) > 0$, $c^0 = y^0 - i^0 > 0$, $y^0 > a d^0$, $i^0 > \mu d^0$. Przy tym $\tau = t_1 - \theta > t_0$, jeżeli $|T| > \theta = 2/(a-\mu)$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T| \leq \theta$.

D o w ó d. Zadanie (4.31'') - (4.32'') jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym krańcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (4.31'') - (4.32''), to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = -\mu \psi_1(t) + \mu \alpha^*(t) \psi_2(t) - 1, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = -a \psi_1(t) - a \alpha^*(t) \psi_2(t) + 1$$

z warunkiem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

że

$$\alpha^*(t) = 1, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) > 0, \quad (3)$$

$$\alpha^*(t) = \frac{\mu}{a}, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) < 0.$$

Ponieważ $\psi_2^*(t_1) = 0$, $d\psi_2^*(t)/dt|_{t=t_1} = 1$ oraz $\alpha^* \in C_-^0 [U^-(\varepsilon; t_1)]$,

gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, więc $\exists \varepsilon' > 0$: $\psi_2^*(t) < 0$

$\forall t \in U^-(\varepsilon'; t_1) \setminus \{t_1\}$, tzn. $\alpha^*(t) = \mu/a$ $\forall t \in U^-(\varepsilon'; t_1)$. Rozwiązując układ równań (1) ze sterowaniem α_T^* , $\alpha^*(t) = \mu/a$ w lewostronnym otoczeniu punktu t_1 i warunkiem (2), otrzymujemy $\psi_2^*(t) < 0$ $\forall t \in (\tau, t_1)$, tzn. $\alpha^*(t) = \mu/a$ $\forall t \in [\tau, t_1]$, gdzie $\tau = t_1 - 2/(a - \mu)$.

Założmy, że horyzont T jest długi ($|T| > 2/(a - \mu)$). Wtedy $\tau \in \text{int } T$. W punkcie τ funkcja ψ_2^* jest różniczkowalna, $\psi_2^*(\tau) = 0$,

$d\psi_2^*(t)/dt|_{t=\tau} = -1$, tzn. $\psi_2^*(t) > 0$ $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, czyli $\alpha^*(t) = 1$ $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem $\psi(\tau) = \psi^*(\tau)$ i sterowaniem α_T^* , gdzie $\alpha^*(t) = 1$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ , otrzymujemy $\psi_2^*(t) > 0$ (tzn. $\alpha^*(t) = 1$) $\forall t \in [t_0, \tau)$. Jeżeli zatem $|T| > \theta$, to warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces $(\alpha^*, y^*, i^*)_T$ ze sterowaniem

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ \frac{\mu}{a} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $\tau = t_1 - \theta > t_0$, $\theta = 2/(a - \mu)$. Trajektorię dochodu narodowego y_T^* i inwestycji i_T^* otrzymujemy, rozwiązując układ równań różniczkowych w (4.32''). Jeżeli $|T| \leq \theta$, wtedy warunki optymalności spełnia proces ze sterowaniem α_T^* , w którym $\alpha^*(t) = \mu/a$ $\forall t \in T$. Ponieważ otrzymany pro-

ceś jest jedynym procesem dopuszczalnym w zadaniu (4.31'') - (4.32'') spełniającym warunki optymalności (1) - (3), zatem, zgodnie z hipotezą (H), jest rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 4.7. $|\delta_{y_T}^* - \delta_{\bar{y}_T}| \rightarrow 0$ przy $|T| \rightarrow +\infty$,
gdzie

$$\delta_{y_T}^* = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} y^*(t) \cdot \frac{1}{y^*(t)} dt,$$

$$\delta_{\bar{y}_T} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} \bar{y}(t) \cdot \frac{1}{\bar{y}(t)} dt,$$

y_T^* jest optymalną trajektorią dochodu narodowego w zadaniu (4.31) - (4.32), trajektoria \bar{y}_T ma postać (4.33).

D o w ó d. Mamy

$$|\delta_{y_T}^* - \delta_{\bar{y}_T}| \leq \frac{a}{|T|} \int_T \left| \frac{y^*(t)}{y^*(t)} - \frac{\bar{y}(t)}{\bar{y}(t)} \right| dt,$$

przy tym $y^*(t) - \bar{y}(t) = c^0 \quad \forall t \in [t_0, t_1 - \theta)$ oraz $\bar{y}(t) - \bar{y}(t) = -\bar{c}^0 \quad \forall t \in T$, tzn.

$$\begin{aligned} |\delta_{y_T}^* - \delta_{\bar{y}_T}| &\leq \frac{a}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_1 - \theta} \left| \frac{y^*(t) - c^0}{y^*(t)} - \frac{\bar{y}(t) - \bar{c}^0}{\bar{y}(t)} \right| dt + \int_{t_1 - \theta}^{t_1} \left| \frac{y^*(t)}{y^*(t)} - \frac{\bar{y}(t)}{\bar{y}(t)} \right| dt \right] = \\ &= \frac{a}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_1 - \theta} \left| \frac{c^0}{y^*(t)} - \frac{\bar{c}^0}{\bar{y}(t)} \right| dt + \int_{t_1 - \theta}^{t_1} \left| \frac{y^*(t)}{y^*(t)} - \frac{\bar{y}(t)}{\bar{y}(t)} \right| dt \right], \end{aligned}$$

gdzie $\theta = 2/(a - \mu)$. Funkcje y^*, \bar{y} rosną do $+\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$, czyli $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0: t > t_0 + \theta_\varepsilon \Rightarrow |c^0/y^*(t) - \bar{c}^0/\bar{y}(t)| < \varepsilon$.

Udział inwestycji (koneumpcji) w dochodzie narodowym w obu procesach jest zawsze dodatni i mniejszy od jedności, zatem jeżeli horyzont T jest dostatecznie długi, $|T| > \theta + \theta_\varepsilon$, to

$$|\delta_{y_T}^* - \delta_{\bar{y}_T}| \leq \frac{a}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_0 + \theta_\varepsilon} dt + \int_{t_0 + \theta_\varepsilon}^{t_1 - \theta} \varepsilon dt + \int_{t_1 - \theta}^{t_1} dt \right] =$$

$$= \frac{a}{|T|} (\theta_\varepsilon + \theta) + \frac{a\varepsilon}{|T|} (|T| - \theta - \theta_\varepsilon).$$

Teżę twierdzenia otrzymujemy zważywszy, że ε może być dowolnie małą liczbą dodatnią.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 5

T w i e r d z e n i e 5.1. Przy założeniu 5.1: (i) warunki (5.9') są niesprzeczne dla pewnego horyzontu T wtedy i tylko wtedy, gdy $q^0 > > \tilde{\gamma}$, (ii) jeżeli $q^0 \geq a\tilde{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$, to warunki (5.9') są niesprzeczne dla horyzontu T dowolnej długości.

D o w ó d. (i) Konieczność. Niech $T = [t_0, t_1]$ będzie horyzontem czasu, na którym określony jest dopuszczalny proces $(\gamma, q)_T$ spełniający warunki (5.9'). W szczególności $\tilde{\gamma} \leq \gamma(t_0) < q^0$. Załóżmy, że $q^0 \leq \tilde{\gamma}$. Wówczas otrzymamy $q^0 = \tilde{\gamma}$. Trajektorja q_T z warunkiem początkowym $q(t_0) = \tilde{\gamma}$ ma postać następującą:

$$q(t) = \tilde{\gamma} e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} - a \int_{t_0}^t e^{(a-\mu-\lambda)(t-\theta)} \gamma(\theta) d\theta,$$

czyli

$$q(t) \leq \tilde{\gamma} e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} - a \int_{t_0}^t e^{(a-\mu-\lambda)(t-\theta)} d\theta,$$

a stąd

$$q(t) \leq \left(\tilde{\gamma} - \frac{a\tilde{\gamma}}{a-\mu-\lambda} \right) e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + \frac{a\tilde{\gamma}}{a-\mu-\lambda} < \tilde{\gamma}$$

dla $t > t_0$, co przeczy założeniu, że para $(\gamma, q)_T$ jest procesem dopuszczalnym na T .

Dostateczność. Jeżeli $q^0 > \tilde{\gamma}$, to łatwo sprawdzić, że proces $(\gamma, q)_T$, w którym

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}, \quad q(t) = \left(q^0 - \frac{a\tilde{\gamma}}{a-\mu-\lambda} \right) e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + \frac{a\tilde{\gamma}}{a-\mu-\lambda}$$

spełnia warunki (5.9') na przedziale $T = [t_0, t_1]$ z momentem $t_1 = t_0 + (a-\mu-\lambda)^{-1} \ln d^0$, $d^0 = [(\mu+\lambda)\tilde{\gamma} / [a\tilde{\gamma} - (a-\mu-\lambda)q^0]] > 1$.

(ii) Jeżeli $q^0 \geq \tilde{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$, to zdefiniowany wyżej proces $(\gamma, q)_T$ spełnia warunki (5.9') na horyzoncie T dowolnej długości.

T w i e r d z e n i e 5.2. Jeżeli para funkcji $(\gamma, q)_T$ spełnia warunki (5.9'), to $\exists \alpha \in \tilde{C}^0[T]: \alpha(t) \in [0, 1], \gamma(t) = \tilde{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \tilde{\gamma}) \forall t \in T$.

D o w ó d. Z nierówności $\bar{y} < \bar{y}(t) \leq q(t) \quad \forall t \in T$ otrzymujemy $\bar{y}(t) - \bar{y} \in [0, q(t) - \bar{y}] \quad \forall t \in T$, zatem $\forall t \in T \exists \alpha(t): \alpha(t) \in [0, 1]$, $\bar{y}(t) - \bar{y} = \alpha(t)(q(t) - \bar{y})$. Ponieważ $\bar{y} \in \bar{C}^0[T]$, $q \in C^0[T]$, $q(t) > \bar{y}$ na $T \setminus \{t_1\}$ dla dowolnego procesu dopuszczalnego $(\bar{y}, q)_T$, więc $\alpha \in \bar{C}^0[T]$.

Założmy, że istnieją dwie funkcje $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha': T \rightarrow [0, 1]$ z klasy $\bar{C}^0[T]$,

$\bar{y}(t) = \bar{y} + \alpha(t)(q(t) - \bar{y}) = \bar{y} + \alpha'(t)(q(t) - \bar{y}) \quad \forall t \in T$.
Wówczas $(\alpha(t) - \alpha'(t))(q(t) - \bar{y}) = 0$ na T . Ponieważ $q(t) > \bar{y}$ na $T \setminus \{t_1\}$, więc $\alpha(t) = \alpha'(t) \quad \forall t \in T \setminus \{t_1\}$. Zważywszy, że $\alpha, \alpha' \in \bar{C}^0[T]$ otrzymujemy $\alpha(t) = \alpha'(t) \quad \forall t \in T$.

T w i e r d z e n i e 5.3. Rozwiązaniem zadania (5.13) - (5.14) przy założeniach 5.1, 5.2 jest proces $(\alpha^*, q^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d\bar{y})e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d\bar{y} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ q^*(\tau)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$; $\tau = t_1 - \theta > t_0$, jeżeli $|T| > \theta = (\mu+\lambda)^{-1} \ln d$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T| \leq \theta$.

D o w ó d. Zadanie (5.13) - (5.14) jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym krańcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\alpha^*, q^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.13) - (5.14), to istnieje takie rozwiązanie ψ^*_T równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = [a(\alpha^*(t) - 1) + \mu + \lambda] \psi(t) - \alpha^*(t) \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

ze

$$\begin{aligned} \alpha^*(t) &= 1, \text{ jeżeli } (q^*(t) - \bar{y}) \psi^*(t) > 0, \\ \alpha^*(t) &= 0, \text{ jeżeli } (q^*(t) - \bar{y}) \psi^*(t) < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $\varphi^*(t) = 1 - a \psi^*(t)$. W lemacie 5.1 pokażemy, że w procesie optymalnym trajektoria dochodu narodowego na osobę spełnia nierówność

$q^*(t) > \tilde{\gamma} \quad \forall t \in T$, a zatem w poszczególnych momentach czasu wartość sterowania optymalnego zależy od znaku funkcji φ^* . W momencie końcowym t_1 mamy $\varphi^*(t_1) = 1$ i wobec tego $\alpha^*(t) = 1 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązując równanie (1) z warunkiem (2) i sterowaniem α^* z wartościami $\alpha^*(t) = 1$ w lewostronnym otoczeniu punktu t_1 otrzymujemy: $\psi^*(t) < 1/a$ (a więc $\varphi^*(t) > 0$) na przedziale $(\tau, t_1]$ oraz $\psi^*(\tau) = 1/a$ (czyli $\varphi^*(\tau) = 0$), gdzie $\tau = t_1 - (\mu + \lambda)^{-1} \ln [a/(a - \mu - \lambda)]$. Załóżmy, że $\tau > t_0$. Funkcja ψ^* maleje w otoczeniu punktu τ , czyli $\psi^*(t) > 1/a$ (tzn. $\varphi^*(t) < 0$) $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. W ten sposób otrzymujemy, że $\alpha^*(t) = 0$ w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu τ . Rozwiązując równanie (1) z warunkiem $\psi^*(\tau) = 1/a$ i sterowaniem α^* z wartościami $\alpha^*(t) = 0$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ , otrzymujemy: $\psi^*(t) > 1/a$ (czyli $\varphi^*(t) < 0$) na przedziale $[t_0, \tau)$. Proces $(\alpha^*, q^*)_T$ ze sterowaniem

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

i odpowiadającą mu z rozwiązania równania różniczkowego w (5.14) trajektorią q^*_T - gdzie $\tau = t_1 - \theta > t_0$ ($\theta = (\mu + \lambda)^{-1} \ln [a/(a - \mu - \lambda)]$), jeżeli $|\tau| > \theta$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|\tau| \leq \theta$ (wtedy $\alpha^*(t) = 1 \quad \forall t \in T$) - jest jedynym procesem dopuszczalnym w zadaniu (5.13) - (5.14) spełniającym warunki optymalności (1) - (3). Zgodnie z hipotezą (H) jest procesem optymalnym.

L e m a t 5.1. Optymalny trajektoria q^*_T w zadaniu (5.13) - (5.14) spełnia warunek $q^*(t) > \tilde{\gamma} \quad \forall t \in T$.

D o w ó d. Załóżmy, że $q^*(t') = \tilde{\gamma}$ w pewnym punkcie $t' \in T$. Wtedy funkcja q^*_T monotonicznie maleje na przedziale $[t', t_1]$. Z założenia $q^0 > a\tilde{\gamma}/(a - \mu - \lambda)$, zatem $t' > t_0$.

(a) Jeżeli $t' = t_1$, wtedy $q^*(t) > \tilde{\gamma} \quad \forall t \in T \setminus \{t_1\}$. Rozwiązanie równania (1) z twierdzenia 5.3 jest funkcją ciągłą na T , $\psi^*(t_1) = 0$ a funkcja φ^* - dodatnia w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu t_1 , zatem $\alpha^*(t) = 1 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Postępując dalej analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 5.3, otrzymamy rozwiązanie $(\alpha^*, q^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d\bar{\gamma})e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d\bar{\gamma} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ q^*(\tau)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$; $\tau = t_1 - \theta$, jeżeli $|\tau| > \theta = (\mu+\lambda)^{-1} \ln d$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|\tau| \leq \theta$. Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach (zarówno $|\tau| > \theta$, jak i $|\tau| \leq \theta$) warunek $q^*(t_1) = \bar{\gamma}$ pociąga za sobą $q^0 < a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$, co przeczy założeniu 5.2.

(b) Założmy, że $q^*(t') = \bar{\gamma}$ w punkcie $t' \in \text{int } T$. Wtedy $q^*(t) < \bar{\gamma}$ na przedziale $(t', t_1]$ oraz $\alpha^*(t) = 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązaniem równania różniczkowego (1) w twierdzeniu 5.3 z warunkiem (2) jest wówczas funkcja ψ^* z wartościami $\psi^*(t) = 0$ na przedziale $[t', t_1]$ i wobec tego $\alpha^*(t) = 0 \quad \forall t \in [t', t_1]$. Ponieważ $q^*(t) > \bar{\gamma}$ na $[t_0, t')$ oraz $\psi^*(t') = 0$, więc rozumując podobnie jak w (a), otrzymujemy, że na przedziale $[t_0, t')$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t'). \end{cases}$$

gdzie $\tau = t' - \theta$, jeżeli $t' - t_0 > \theta$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $t' - t_0 \leq \theta$. Tak więc sterowanie α_T^* będzie następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t'), \\ 0 & \text{dla } t \in [t', t_1]. \end{cases}$$

Jeżeli $t' - t_0 \leq \theta$, wtedy z

$$q^*(t') = q^0 e^{-(\mu+\lambda)(t'-t_0)} = \bar{\gamma}$$

otrzymujemy $q^0 \leq a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$. Jeżeli $t' - t_0 > \theta$, wtedy

$$\begin{aligned} q^*(t') &= [(q^0 - d\bar{\gamma})e^{(a-\mu-\lambda)(\tau-t_0)} + d\bar{\gamma}]e^{-(\mu+\lambda)(t'-\tau)} = \\ &= \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu $t' - \tau = \theta = (\mu+\lambda)^{-1} \ln d$, gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$, i przekształcaniach otrzymujemy $q^0 = a\bar{\gamma}/(a-\mu-\lambda)$. W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności z założeniem 5.2.

T w i e r d z e n i e 5.4. Jeżeli proces $(\alpha^*, q^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.13) - (5.14), a proces $(\gamma^*, q^*)_T$, w którym

$$\dot{\gamma}^*(t) = \bar{\gamma} + \alpha^*(t)(q^*(t) - \bar{\gamma}) \quad (*)$$

spełnia warunki (5.9'), to proces $(\gamma^*, q^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.8') - (5.9').

D o w ó d. Oznaczmy przez $A[T]$ zbiór dopuszczalnych na T procesów wzrostu $(\gamma, q)_T$ spełniających warunki (5.9'). Niech

$$B[T] = \left\{ (\gamma, q)_T: \gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{q}) \quad \forall t \in T, \right. \\ \left. \nabla(\alpha, q)_T - \text{dopuszczalnego procesu w zadaniu} \right. \\ \left. (5.13) - (5.14) \right\}.$$

Wówczas $A[T] \subseteq B[T]$ na podstawie twierdzenia 5.2. Załóżmy, że proces $(\alpha^*, q^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.13) - (5.14) oraz $(\gamma^*, q^*) \in A[T]$, gdzie funkcja γ^* spełnia warunek (*).

Wtedy

$$\Phi^1[\gamma^*] = \Phi^2[(\alpha^*, q^*)_T] \geq \Phi^1[\gamma_T] = \Phi^2[(\alpha, q)_T]$$

$$\nabla(\gamma, q) \in B[T], \quad \nabla(\alpha, q): (\gamma, q) \in B[T], \quad \gamma(t) = \bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{q}),$$

$$\text{gdzie } \Phi^1[\gamma_T] = \int_T \gamma(t) dt, \quad \Phi^2[(\alpha, q)_T] = \int_T [\bar{\gamma} + \alpha(t)(q(t) - \bar{q})] dt.$$

Ponieważ $A[T] \subseteq B[T]$, więc tym bardziej

$$\Phi^1[\gamma^*] \geq \Phi^1[\gamma_T] \quad \nabla(\gamma, q) \in A[T].$$

Tym samym para $(\gamma^*, q^*)_T$ jest procesem optymalnym w zadaniu (5.8') - (5.9')

T w i e r d z e n i e 5.5. $|\delta_{q_T^*} - \delta_{\bar{q}_T}| \rightarrow 0$ przy $|T| \rightarrow +\infty$,

gdzie

$$\delta_{q_T^*} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} q^*(t) \frac{1}{q^*(t)} dt,$$

$$\delta_{\bar{q}_T} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} \bar{q}(t) \frac{1}{\bar{q}(t)} dt,$$

q_T^* jest optymalną trajektorią dochodu narodowego na osobę w zadaniu (5.8') - (5.9'), trajektoria \bar{q}_T ma postać (5.15).

D o w ó d. Jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wtedy

$$\left| \delta_{q_T^*} - \delta_{\bar{q}_T} \right| = \frac{1}{|T|} \left| a \bar{\gamma} \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{\bar{q}(t)} - \frac{1}{q^*(t)} \right) dt + \right. \\ \left. + a \int_T \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{q}(t)} - 1 \right) dt \right| <$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{|T|} \left[a\tilde{\gamma} \int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{1}{\bar{q}(t)} + \frac{1}{q^*(t)} \right) dt + a \left| \int_{\tau}^{t_1} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{q}(t)} - 1 \right) dt \right| \right] \\
&< \frac{1}{|T|} \left[2a\tilde{\gamma} \int_{t_0}^{\tau} d^0 e^{-(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} dt + a(t_1-\tau) \right] = \\
&= \frac{1}{|T|} \left[2ad^0 \tilde{\gamma} (a-\mu-\lambda)^{-1} (1-e^{-(a-\mu-\lambda)(\tau-t_0)}) + a(t_1-\tau) \right] = \\
&= \frac{1}{|T|} \left[2ad^0 \tilde{\gamma} (a-\mu-\lambda)^{-1} (1-e^{-(a-\mu-\lambda)(|T|-\theta)}) + a\theta \right] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

przy $|T| \rightarrow +\infty$, gdzie $\theta = \tau_1 - \tau = (\mu + \lambda)^{-1} \ln[a/(a - \mu - \lambda)]$,

$$d^0 = [q - a\tilde{\gamma}/(a - \mu - \lambda)]^{-1}, \quad q = \min\{q^0, \bar{q}^0\}.$$

T w i e r d z e n i e 5.6. Niech spełnione będą założenia 5.1, 5.2.
 (i) Jeżeli para funkcji $(\gamma, q)_T$ spełnia warunki (5.19''), to $\exists! \alpha \in \tilde{C}^0[T]$:
 $\alpha(t) \in [0, 1]$, $\gamma(t) = \tilde{\gamma} + \alpha(t) \left[(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) - \tilde{\gamma} \right] \quad \forall t \in T$. (ii) Jeżeli
 $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\gamma(t) = \tilde{\gamma} + \alpha(t) \left[(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) - \tilde{\gamma} \right] \quad \forall t \in T$,
 $q(t_0) = q^0 > a\tilde{\gamma}/(a - \mu - \lambda)$,

$$\frac{d}{dt} q(t) = (a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t), \quad (*)$$

to para $(\gamma, q)_T$ jest procesem dopuszczalnym w zadaniu (5.18'') - (5.19'').

D o w ó d. (i) Ponieważ $\gamma(t) \in [\tilde{\gamma}, (1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t)] \quad \forall t \in T$
 $(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) > \tilde{\gamma}$ na T (przy założeniach 5.1, 5.2), więc $\exists! \alpha_T: \gamma(t) =$
 $= (1 - \alpha(t))\tilde{\gamma} + \alpha(t)(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t)$, $\alpha(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in T$.

Stąd otrzymujemy $\gamma(t) = \tilde{\gamma} + \alpha(t) \left[(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) - \tilde{\gamma} \right]$. Ponieważ $\gamma \in \tilde{C}^0[T]$,
 $q \in C^0[T]$, więc $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$.

(ii) Weźmy dowolną funkcję $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$ z wartościami $\bullet [0, 1]$. Po podstawieniu $\gamma(t) = \tilde{\gamma} + \alpha(t) \left[(1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) - \tilde{\gamma} \right]$ do (*) otrzymamy równanie

$$\frac{d}{dt} q(t) = (1 - \alpha(t)) \left[(a - \mu - \lambda)q(t) - a\tilde{\gamma} \right],$$

którego rozwiązanie q_T przy założeniach 5.1, 5.2 spełnia warunek

$$q(t) > a\tilde{\gamma}/(a - \mu - \lambda) \quad \forall t \in T, \text{ tzn. } (1 - \frac{\mu + \lambda}{a})q(t) - \tilde{\gamma} > 0 \text{ na } T. \text{ Wówczas}$$

$$\bar{\gamma} \leq \gamma(t) \leq \left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q(t) \quad \forall t \in T$$

oraz $\gamma \in C^0[T]$, tzn. para $(\gamma, q)_T$ spełnia warunki (5.19'').

T w i e r d z e n i e 5.7. Rozwiązaniem zadania (5.18''') - (5.19''') przy założeniach 5.1, 5.2 jest proces $(\alpha^*, q^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d\bar{\gamma}) e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d\bar{\gamma} & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ q^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$. Jeżeli $|T| > \theta = 1/(a-\mu-\lambda)$, to $\tau = t_1 - \theta > t_0$, inaczej $\tau = t_0$.

D o w ó d. Zadanie (5.18''')-(5.19''') jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym końcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\alpha^*, q^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.18''') - (5.19'''), to istnieje takie rozwiązanie ψ_T^* równania różniczkowego

$$\frac{d}{dt} \psi^*(t) = (a-\mu-\lambda) \left[(\alpha^*(t)-1) \psi(t) - \frac{\alpha^*(t)}{a} \right] \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

że

$$\begin{aligned} \alpha^*(t) &= 1, \text{ jeżeli } \dot{\varphi}^*(t) > 0, \\ \alpha^*(t) &= 0, \text{ jeżeli } \dot{\varphi}^*(t) < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $\varphi^*(t) = \left[\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q^*(t) - \bar{\gamma} \right] (1 - a \psi^*(t))$.

Ponieważ

$$\left(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}\right) q(t) - \bar{\gamma} > 0 \quad \forall t \in T,$$

dla dowolnego procesu dopuszczalnego $(\alpha, q)_T$, oraz $\psi^* \in C^0[T]$, $\psi^*(t_1) = 0$, więc $\dot{\varphi}^*(t) > 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, czyli $\alpha^*(t) = 1$ w pewnym lewostronnym ε -otoczeniu punktu t_1 , gdzie ε jest liczbą dodatnią.

Rozwiązując równanie (1) z warunkiem (2) i sterowaniem α^* z wartościami $\alpha^*(t) = 1$ na $U^-(\varepsilon; t_1)$ otrzymujemy

$$\psi^*(t) = \left(-\frac{\mu+\lambda}{a} - 1\right)(t-t_1),$$

czyli $\psi^*(t) < 1/a$ (tzn. $\varphi^*(t) > 0$) na przedziale $(\tau, t_1]$, $\tau = t_1 - 1/(a - \mu - \lambda)$. Założmy, że $\tau \in \text{int } T$ (jeżeli $\tau \leq t_0$, to $\alpha^*(t) = 1 \quad \forall t \in T$). W punkcie τ funkcja ψ^* jest różniczkowalna, $\psi^*(\tau) = 1/a$, $d\psi^*(t)/dt|_{t=\tau} = -1 + (\mu + \lambda + a) < 0$, tzn. $\psi^*(t) > 1/a$ (czyli $\varphi^*(t) < 0$) $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau)$, gdzie ε jest pewną liczbę dodatnią. Rozwiązując równanie (1) z warunkiem $\psi^*(\tau) = 1/a$ i sterowaniem α^* z wartościami $\alpha^*(t) = 0$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ otrzymujemy

$$\psi^*(t) = \frac{1}{a} e^{-(a-\mu-\lambda)t-\tau}$$

1 wobec tego $\psi^*(t) > 1/a$ ($\varphi^*(t) < 0$, czyli $\alpha^*(t) = 0$) na przedziale $[t_0, \tau)$. Jeżeli horyzont T jest długi, $|T| > \theta = 1/(a - \mu - \lambda)$, wtedy warunki optymalności (1) - (3) spełnia jedynie proces $(\alpha^*, q^*)_T$, w którym sterowanie ma postać

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

moment przełączenia sterowania $\tau = t_1 - \theta$, trajektorię q^* otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego w (5.19'''). Jeżeli $|T| \leq \theta$, wtedy proces ten redukuje się do bardzo prostej postaci $\alpha^*(t) = 1$, $q^*(t) = q^0 \quad \forall t \in T$. Zgodnie z hipotezą (H) proces ten jest rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 5.9. W układzie (5.24) warunek (5.21) jest równoważny z (5.26).

D o w ó d. Jeżeli zachodzi warunek (5.21), to $\exists \alpha \in C^0[T]$:

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \alpha(t) \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) \frac{d}{dt} q(t), \quad \alpha(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in T^{10}.$$

Zważywszy na (5.22) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \alpha(t) \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) [(a - \mu - \lambda)q(t) - a\gamma(t)],$$

a po podstawieniu $\beta(t) = \alpha(t) \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right)$:

¹⁰ Z założenia $\gamma \in C^1[T]$.

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \beta(t) [(a - \mu - \lambda)q(t) - a \gamma(t)],$$

gdzie $\beta(t) \in [0, 1 - \frac{\mu + \lambda}{a}]$, $\beta \in \mathcal{C}^0[T]$.

Weźmy z kolei dowolną funkcję $\beta \in \mathcal{C}^0[T]$ z wartościami $\beta(t) \in [0, 1 - \frac{\mu + \lambda}{a}]$. Pokażemy, że istnieje dopuszczalny proces $(\gamma, q)_T$ spełniający warunek (5.21). Po podstawieniu

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \beta(t) \frac{d}{dt} q(t) = \alpha(t) (1 - \frac{\mu + \lambda}{a}) \frac{d}{dt} q(t)$$

do

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) = (a - \mu - \lambda) \frac{d}{dt} q(t) - a \frac{d}{dt} \gamma(t)$$

otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) = (1 - \alpha(t))(a - \mu - \lambda) \frac{d}{dt} q(t),$$

$$\alpha(t) \in [0, 1], \quad \alpha \in \mathcal{C}^0[T],$$

gdzie $\frac{dq(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} > 0$ (przy założeniach 5.1, 5.2'), którego rozwiązanie (względem $\frac{dq(t)}{dt}$)

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} q(t) \Big|_{t=t_0} \exp \int_{t_0}^t (1 - \alpha(\theta))(a - \mu - \lambda) d\theta$$

jest dodatnie i niemalejące. W szczególności

$$(1 - \frac{\mu + \lambda}{a}) \frac{d}{dt} q(t) > 0 \quad \forall t \in T.$$

Wówczas

$$0 \leq \frac{d}{dt} \gamma(t) = \beta(t) \frac{d}{dt} q(t) \leq (1 - \frac{\mu + \lambda}{a}) \frac{d}{dt} q(t) \quad \forall t \in T$$

T w i e r d z e n i e 5.10. Rozwiązaniem zadania (5.27) - (5.28) przy założeniach 5.1, 5.2' jest proces $(\alpha^*, q^*, \gamma^*)_T$:

$$\beta^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$q^*(t) = \begin{cases} (q^0 - d \chi^0) e^{(a-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d \chi^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ [(a-\mu-\lambda)q^*(\tau) - a \chi^0](t-\tau) + q^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$\chi^*(t) = \begin{cases} \chi^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ \left[\frac{(a-\mu-\lambda)^2}{a} q^*(\tau) - (a-\mu-\lambda) \chi^0 \right] (t-\tau) + \chi^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $d = a/(a-\mu-\lambda)$. Jeżeli $|\tau| > \theta = 2/(a-\mu-\lambda)$, to $\tau = t_1 - \theta > t_0$.
W pozostałych przypadkach $\tau = t_0$.

D o w ó d. Zadanie (5.27) - (5.28) jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym krańcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\beta^*, q^*, \chi^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (5.27) - (5.28), to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = -(a-\mu-\lambda)(\psi_1(t) + \beta^*(t) \psi_2(t)), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = a \psi_1(t) + \beta^*(t) \psi_2(t) - 1$$

z warunkiem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

że

$$\beta^*(t) = 1 - \frac{\mu+\lambda}{a}, \quad \text{jeżeli } \varphi^*(t) > 0, \quad (3)$$

$$\beta^*(t) = 0, \quad \text{jeżeli } \varphi^*(t) < 0,$$

gdzie $\varphi^*(t) = [(a-\mu-\lambda)q^*(t) - a \chi^*(t)] \psi_2^*(t)$.

Ponieważ $(a-\mu-\lambda)q^*(t) - a \chi^*(t) > 0 \quad \forall t \in T$ (zob. dowód poprzedniego twierdzenia), więc znak funkcji φ^* jest taki sam, jak znak funkcji ψ_2^* . Z układu równań (1) z warunkiem (2) otrzymujemy

$$\psi_1^*(t) = \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) (-\psi_2^*(t) - t + t_1),$$

a stąd, po podstawieniu do drugiego równania w (1):

$$\frac{d}{dt} \psi_2^*(t) = a \psi_2^*(t) \left[\beta^*(t) + \frac{\mu+\lambda}{a} - 1 \right] - a \left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a}\right) (t - t_1) - 1. \quad (4)$$

Ponieważ $d\psi_2^*(t)/dt|_{t=t_1} = -1$, $\psi_2^*(t_1) = 0$, $\psi_2^* \in C^0[T]$,

więc $\psi_2^*(t) > 0$ (a zatem $\beta^*(t) = 1 - (\mu + \lambda)/a$) $\forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$,

gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązanie równania (4) z warunkiem $\psi_2^*(t_1) = 0$ i sterowaniem β_T^* z wartościami $\beta^*(t) = 1 - (\mu + \lambda)/a$ w lewostronnym otoczeniu punktu t_1 jest dodatnie na przedziale (τ, t_1) ,

$\tau = t_1 - 2/(a - \mu - \lambda)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \theta = 2/(a - \mu - \lambda)$, wtedy $\beta^*(t) = 1 - (\mu + \lambda)/a$ $\forall t \in T$. Jeżeli $|T| > \theta$, wtedy $\beta^*(t) = 1 - (\mu + \lambda)/a$ $\forall t \in (\tau, t_1]$. W punkcie τ funkcja ψ_2^* jest różniczkowalna, $\psi_2^*(\tau) = 0$ oraz $d\psi_2^*(t)/dt|_{t=\tau} = 2$, tzn. $\psi_2^*(t) < 0$

$\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$, czyli $\beta^*(t) = 0$ w pewnym lewostronnym ε -otoczeniu punktu τ . Rozwiązując równanie (4) ze sterowaniem β_T^* z wartościami $\beta^*(t) = 0$ $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$ i warunkiem $\psi_2^*(\tau) = 0$ otrzymujemy $\psi_2^*(t) < 0$ na przedziale $[t_0, \tau)$, a zatem $\beta^*(t) = 0$ $\forall t \in [t_0, \tau)$.

Tak więc, jeżeli horyzont czasu T jest długi, $|T| > \theta$, wtedy

$$\beta^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 1 - \frac{\mu + \lambda}{a} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

Proces $(\beta^*, q^*, \delta^*)_T$ z powyższym sterowaniem i odpowiadającymi mu z rozwiązania układu równań w (5.28) trajektoriami q_T^* , δ_T^* jest w zadaniu (5.27) - (5.28) jedynym procesem dopuszczalnym spełniającym warunki optymalności (1) - (3). Zgodnie z hipotezą (H) jest więc rozwiązaniem tego zadania.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 6

T w i e r d z e n i e 6.1. Przy założeniu 5.1 rozwiązanie zadania (6.15) - (6.16) jest następujące.

(1) Jeżeli $u^0 > [a\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $s = \varepsilon [1 + \nu / (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] \in (0, 1)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, wtedy $\tau_1 = \tau_2$ (wówczas $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0 \exp\{-(\mu + \lambda)(t - t_0)\} \quad \forall t \in T$)¹¹. Jeżeli $|T| > \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, wtedy $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \varphi_1 \ln d_1$, $\tau_2 = t_1 - \varphi_2 \ln d_2$, gdzie $\varphi_1 = (1 - \varepsilon) / [\nu + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] > 0$, $\varphi_2 = [\varepsilon(\mu + \lambda) - \nu]^{-1} > 0$, $d_1 = u^0 [(\mu + \lambda) / s\varepsilon]^{1/(1-\varepsilon)} > 1$, $d_2 = (\mu + \lambda) / [\nu + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] > 1$.

(ii) Jeżeli $u^0 = [s\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

przy czym $\tau = t_0$, jeżeli $|T| \leq \varphi_2 \ln d_2$ (wtedy $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0 \exp\{-(\mu + \lambda)(t - t_0)\} \quad \forall t \in T$) oraz $\tau = t_1 - \varphi_2 \ln d_2 > t_0$, jeżeli $|T| > \varphi_2 \ln d_2$. Oceny parametrów s, φ_2, d_2 są analogiczne jak w (i).

(iii) Jeżeli $u^0 < [s\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

¹¹ Przypominamy, że przyjęliśmy, iż $[\tau_1, \tau_2) = \emptyset$, jeżeli $\tau_1 = \tau_2$.

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{ [(u^0)^{1-\varepsilon} - \varphi_1] e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + \varphi_1 e^{\nu(t-t_0)} \right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)} & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

Jeżeli $|T| \leq \varphi_3 \ln d_3$, wtedy $\tau_1 = \tau_2 = t_0$ (wówczas $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0 \exp\{-(\mu+\lambda)(t-t_0)\} \quad \forall t \in T$). Jeżeli $\varphi_3 \ln d_3 < |T| \leq \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, wtedy $\tau_1 = \tau_2 = \tau \in (t_0, t_1 - \varphi_2 \ln d_2]$, gdzie moment τ jest pierwiastkiem równania —

$$1 + d(\tau) e^{-\nu(\tau-t_0)} = e^{\varphi_2^{-1}(\tau-t_1)}, \quad (*)$$

w którym $d(\tau) = [\nu - \varepsilon(\mu+\lambda)] (u^*(\tau))^{1-\varepsilon} / a\varepsilon$, $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w momencie τ w procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $s^*(t) = 1$ na przedziale $[t_0, \tau]$ i warunkiem $u^*(t_0) = u^0$.

Jeżeli $|T| > \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, wtedy $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \varphi_4 \ln d_4$, $\tau_2 = t_1 - \varphi_2 \ln d_2$, gdzie: $\varphi_3 = [\varepsilon(\mu+\lambda) - \nu]^{-1} > 0$, $\varphi_4 = [\nu + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]^{-1} > 0$, $d_3 = a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} / [a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} - \varepsilon(\mu+\lambda) + \nu] > 1$, $d_4 = [c - (u^0)^{1-\varepsilon}] / [c - a\varepsilon / (\mu+\lambda)] > 1$, $c = a(1-\varepsilon) / [\nu + (\mu+\lambda)(1-\varepsilon)]$.

Oceny pozostałych parametrów nie zmieniają się.

D o w ó d. Zadanie (6.15) - (6.16) jest niestacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii.

Z twierdzenia 3.5 wynikają następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieje takie rozwiązanie ψ_T^* równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -[a\varepsilon s^*(t) u^*(t)^{\varepsilon-1} e^{\nu(t-t_0)} - \mu - \lambda] \psi(t) - a\varphi\varepsilon (1-s^*(t)) u^*(t)^{\varepsilon-1} e^{\nu(t-t_0)} \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

za

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 1, \quad \text{jeżeli } \psi^*(t) > 0, \\ s^*(t) &= 0, \quad \text{jeżeli } \psi^*(t) < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $\varphi^*(t) = \psi^*(t) - \varrho$.

Ponieważ $\psi^*(t_1) = 0$, $\psi^* \in C^0[T]$, więc $\varphi^*(t) < 0$ (tzn. $s^*(t) = 0$)
 $\forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią.

Rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= a s(t) u^\varepsilon(t) e^{\nu(t-t_0)} - (\mu + \lambda) u(t) \\ \frac{d}{dt} \psi(t) &= -[a \varepsilon s(t) u^{\varepsilon-1}(t) e^{\nu(t-t_0)} - \mu - \lambda] \psi(t) - \\ &\quad - a \varrho \varepsilon (1 - s(t)) u^{\varepsilon-1}(t) e^{\nu(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4)$$

na półosi $[t_0, +\infty)$ z funkcją $s[t_0, +\infty)$ z wartościami $s(t) = 1$ na $[t_0, +\infty)$, i warunkiem początkowym $(u(t_0), \psi(t_0)) > 0$ stwierdzamy, że trajektoria $u[t_0, +\infty)$ jest wypukła do dołu i dodatnio $\nabla u(t_0) > 0$ oraz $u(t) \rightarrow +\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$. Przy założeniu 6.1 funkcja $\psi[t_0, +\infty)$ z warunkiem $\psi(t_0) > 0$ ma nie więcej niż jeden punkt przegięcia ($d\psi(t)/dt = 0$) oraz $\psi(t) \rightarrow +\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$. Zatem¹²

$$\frac{d}{dt} \psi(t) \Big|_{t=t'} \geq 0 \implies \psi(t) > \psi(t') \quad \forall t > t'. \quad (5)$$

Załóżmy, że funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności (1) - (3) jest taka, iż $\psi^*(t_0) > \varrho$ (czyli $s^*(t) = 1$) $\forall t \in U^+(\varepsilon; t_0)$ ¹³, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Ponieważ $\psi^* \in C^0[T]$, $\psi^*(t_1) = 0$, zatem istnieje punkt $\tau \in \text{int } T$, w którym $\psi^*(\tau) = \varrho$, $\psi^*(t) > \varrho \quad \forall t < \tau$, oraz takie rozwiązanie $(u, \psi)[t_0, +\infty)$ układu równań (4), że trajektoria $\psi[t_0, +\infty)$ jest tożsama z ψ_T^* na przedziale $[t_0, \tau]$.

Jednocześnie $d\psi^*(t)/dt \Big|_{t=\tau} \leq 0$ i $\psi^*(t) \leq \varrho \quad \forall t \in T, t \geq \tau$. Rzeczywiście, zakładając, że $d\psi^*(t)/dt \Big|_{t=\tau} > 0$ otrzymalibyśmy $\psi^*(t) > \varrho \quad \forall t \in T, t \neq \tau$ (zob.(5)), co jest niemożliwe zważywszy na (2). Jeżeli $d\psi^*(t)/dt \Big|_{t=\tau} < 0$ i $\psi^*(t) > \varrho$ w pewnym punkcie $t \in T, t > \tau$, wtedy $\psi^*(\theta) > \varrho$, $s^*(\theta) = 1$, $d\psi^*(t)/dt \Big|_{t=\theta} > 0$ dla pewnego $\theta \in (\tau, t]$ i zgodnie z (5) $\psi^*(t) > \varrho \quad \forall t \in T, t \geq \theta$, co znowu jest sprzeczne z (2).

Reasumując, jeżeli funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności (1) - (3) jest taka, że $\psi^*(t_0) > \varrho$, wówczas istnieje punkt $\tau \in \text{int } T$, w którym $\psi^*(\tau) = \varrho$, $\psi^*(t) > \varrho \quad \forall t \in [t_0, \tau)$ oraz $\psi^*(t) \leq \varrho \quad \forall t \in (\tau, t_1]$. Na przedziale $[t_0, \tau)$ sterowanie $s^*(t) = 1$.

¹² Zamiast warunku $d\psi(t)/dt \Big|_{t=t'} \geq 0$ wystarczy słabszy warunek $\lim_{t \rightarrow t'+0} d\psi(t)/dt \geq 0$.

¹³ $U^+(\varepsilon; t_0)$ oznacza prawostronne ε -otoczenie punktu t_0 , tzn. $U^+(\varepsilon; t_0) = \{t \in U(\varepsilon; t_0) : t \geq t_0\}$.

Założmy teraz, że $\psi^*(t_0) < \rho$. Wówczas albo $\psi^*(t) < \rho$ na $T \setminus \{t_1\}$, czyli $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in T$, albo $\psi^*(\tau) = \rho$ w pewnym punkcie $\tau \in \text{int } T$, $\psi^*(t) < \rho \quad \forall t < \tau$. Przypadek $d\psi^*(t)/dt|_{t=\tau} > 0$ jest niemożliwy, ponieważ wtedy $\psi^*(t) > \rho$ (czyli $s^*(t) = 1$) $\forall t \in T, t > \tau$. Podobnie niemożliwy jest przypadek $d\psi^*(t)/dt|_{t=\tau} \leq 0$, $\psi^*(t') > \rho$ w pewnym punkcie $t' \in T, t' > \tau$. Zatem, jeżeli funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności jest taka, że $\psi^*(t_0) < \rho$, to albo $\psi^*(t) < \rho$ (wówczas $s^*(t) = 0$) $\forall t \in T$, albo istnieje taki punkt $\tau \in \text{int } T$, że $\psi^*(\tau) = \rho$, $\psi^*(t) < \rho$ (czyli $s^*(t) = 0$) $\forall t \in [t_0, \tau)$ oraz $\psi^*(t) \leq \rho \quad \forall t \in (\tau, t_1]$.

Założmy wreszcie, że $\psi^*(t_0) = \rho$. Rozumując jak poprzednio, otrzymamy $\psi^*(t) \leq \rho \quad \forall t \in T$.

Pokażemy, że jeżeli funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności (1) - (3) jest taka, że $\psi^*(\tau_1) = \psi^*(\tau_2) = \rho$ ($\tau_1, \tau_2 \in T; \tau_1 < \tau_2$), to $\psi^*(t) = \rho \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$. W tym celu rozpatrzmy rozwiązanie układu równań (4) na półosi $[t', +\infty)$ z dowolnie wybranym punktem t' , funkcją s z wartościami $s(t) = 0 \quad \forall t \in [t', +\infty)$ i warunkiem $u(t') > 0$. Trajektoria $u[t', +\infty)$ jest wypukła do dołu i malejąca, funkcja $\psi[t', +\infty)$ ma nie więcej niż jeden punkt przegięcia, przy czym jeżeli punkt taki istnieje, to $\psi(t) \rightarrow -\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$. Z dotychczasowych wywodów wynika, że $\psi^*(t) \leq \rho \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2)$. Założmy, że $\psi^*(\tau') < \rho$, $\tau' \in (\tau_1, \tau_2)$. Istnieje zatem punkt $\tau^0 \in (\tau_1, \tau_2)$, w którym $d\psi^*(t)/dt|_{t=\tau^0} = 0$, $\psi^*(\tau^0) < \rho$ oraz takie rozwiązanie układu równań (4) określone na półosi $[\tau_1', +\infty)$ z punktem $\tau_1' \in (\tau_1, \tau_2)$ i funkcją s z wartościami $s(t) = 0 \quad \forall t \in [\tau_1', +\infty)$, że na pewnym przedziale $(\tau_1', \tau_2') \subset (\tau_1, \tau_2)$ zawierającym punkt τ^0 , funkcja $\psi[\tau_1', +\infty)$ jest tożsama z ψ_T^* .

$$d\psi(t)/dt|_{t=\tau^0} = 0, \quad d\psi(t)/dt|_{t=\tau_2'} > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = -\infty,$$

a więc ma co najmniej dwa punkty przegięcia na półosi $[\tau_1', +\infty)$, co jest niemożliwe¹⁴. Zatem, albo $\psi^*(t) = \rho$ tylko w jednym punkcie $\tau \in T, \tau < t_1$, albo $\psi^*(t) = \rho$ na pewnym przedziale $[\tau_1, \tau_2] \subset T, \tau_2 < t_1$.

Rozwiązując układ równań (4) z warunkiem $\psi^*(t) = \rho$ na przedziale $[\tau_1, \tau_2] \subset T$, otrzymujemy¹⁵

$$u^*(t) = u_0 \frac{v}{1-\varepsilon} (t-t_0), \quad (6)$$

$$s^*(t) = s = \varepsilon [1 + v/(1-\varepsilon)(\mu + \lambda)],$$

gdzie $u = [a\varepsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$.

¹⁴ Na przedziale (τ_1, τ_2) sterowanie $s^*(t) = 0$, zatem $\psi^* \in C^1(\tau_1, \tau_2)$.

¹⁵ Przejście od domkniętego przedziału $[\tau_1, \tau_2]$ do półotwartego przedziału $[\tau_1, \tau_2)$ związane jest z właściwością sterowania, które w punktach nieciągłości jest ciągle prawostronnie.

Tak więc: (a) jeżeli funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności (1)-(3) spełnia warunek $\psi^*(t_0) > \rho$, to odpowiada jej sterowanie s_T^* ,

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$, $\tau_1 < \tau_2$; (b) jeżeli $\psi^*(t_0) < \rho$, wtedy sterowanie s_T^* ma postać

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$, $\tau_1 \leq \tau_2$; (c) jeżeli $\psi^*(t_0) = \rho$, wtedy

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau \in T$, $\tau < t_1$.

Postać sterowania zależy od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 i długości horyzontu czasu T .

1°. $u^0 > [s\varepsilon / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Załóżmy najpierw, że horyzont czasu T jest długi¹⁶. Nierówność $\psi^*(t_0) \geq \rho$ niezależnie od długości horyzontu nie może zachodzić, ponieważ z (4) wynika wówczas, że $d\psi^*(t)/dt|_{t=t_0} > 0$, co jest niemożliwe zważywszy na (5) i warunek (2). Zatem $\psi^*(t_0) < \rho$, skąd otrzymujemy, że $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, \tau_1)$, gdzie

$$\tau_1 = t_0 + \varphi_1 \ln d_1 \quad (7)$$

jest punktem, w którym następuje „sklejenie” $[t_0, \tau_1)$ - segmentu trajektorii u_T^* odpowiadającego sterowaniu $s^*(t) = 0$ z jej $[\tau_1, \tau_2)$ - segmentem postaci (6), $\varphi_1 = (1-\varepsilon)/[\nu + (1-\varepsilon)(\mu + \lambda)] > 0$, $d_1 = u^0 [(\mu + \lambda)/s\varepsilon]^{1/(1-\varepsilon)} > 1$ ¹⁷.

¹⁶ Ocenę długości horyzontu podamy później.

¹⁷ u^0 oznacza początkowe techniczne uzbrojenie pracy w zadaniu (6.14) - (6.15).

Podobnie można ocenić długość drugiej fazy konsumpcyjnej (przedział $[\tau_2, \tau_1]$), w której ponownie $s^*(t)=0$ zważywszy, że w fazie tej funkcja ψ_T^* spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -a\varphi \varepsilon (u^*(t))^{\varepsilon-1} e^{\nu(t-t_0)} + (\mu + \lambda) \psi(t)$$

oraz warunki $\psi^*(\tau_2) = \varphi$, $\psi^*(\tau_1) = 0$, gdzie $u^*(t) =$

$$= u^*(\tau_2) \exp\{-(\mu + \lambda)(t - \tau_2)\}, \quad u^*(\tau_2) = u \exp\left\{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(\tau_2 - t_0)\right\},$$

($u = [a\varepsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$). Rozwiązując powyższe równanie, po przekształceniach otrzymujemy

$$\tau_2 = t_1 - \varphi_2 \ln d_2, \quad (8)$$

gdzie $\varphi_2 = [\varepsilon(\mu + \lambda) - \nu]^{-1} > 0$, $d_2 = (\mu + \lambda) / [\nu + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] > 1$.

W fazie środkowej (przedział $[\tau_1, \tau_2]$) $s^*(t) = s$,

$u^*(t) = u^*(\tau_1) \exp\left\{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t - \tau_1)\right\} = u \exp\left\{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t - t_0)\right\}$. Jeżeli więc początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 > [a\varepsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$ i horyzont czasu T jest długi, $|T| > \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, wtedy warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem typu (b) i momentami jego przełączenia zdefiniowanymi w (7), (8). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \varphi_1 \ln d_1 + \varphi_2 \ln d_2$, wówczas warunki optymalności spełnia proces ze sterowaniem tożsamościowo równym 0. Im dłuższy jest horyzont, tym dłuższa jest faza środkowa tj. przedział $[\tau_1, \tau_2]$.

2°. $u^0 = [a\varepsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Rozumowanie podobne do opisanego szczegółowo w 1° prowadzi do wniosku, że warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem typu (c) i momentem przełączenia

$$\tau = t_1 - \varphi_2 \ln d_2$$

jeżeli $|T| > \varphi_2 \ln d_2$, oraz sterowaniem tożsamościowo równym 0, jeżeli $|T| \leq \varphi_2 \ln d_2$. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ ściśle długość przedziału $[t_0, \tau]$.

3°. $u^0 < [a\varepsilon/(\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Wtedy $d\psi^*(t)/dt|_{t=t_0} < 0$ i wobec tego sterowanie s_T^* jest typu (a) lub $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in T$. Drugi

przypadek zachodzi wówczas, gdy $|T| \leq \varphi_3 \ln d_3$, gdzie

$$\varphi_3 = [\varepsilon(\mu + \lambda) - \nu]^{-1} > 0, \quad d_3 = a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} / [a\varepsilon(u^0)^{\varepsilon-1} - \varepsilon(\mu + \lambda) + \nu] > 1.$$

Ocena długości horyzontu przebiega podobnie, jak ocena długości przedziału $[\tau_2, \tau_1]$ w 1°, należy tylko zamiast τ_2 , $u^*(\tau_2)$ wziąć t_0 , u^0 .

Jeżeli $|T| > \varphi_3 \ln d_3$, to sterowanie s_T^* jest typu (a), przy czym faza środkowa (przedział $[\tau_1, \tau_2]$) pojawia się dopiero wówczas, gdy

$|\tau| > \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, gdzie $\varphi_4 = [v + (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)]^{-1}$,

$d_4 = [c - (u^0)^{1-\varepsilon}] / [c - a\varepsilon / (\mu + \lambda)] > 1$, $c = a(1 - \varepsilon) / [v + (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)]$.

Oceny parametrów φ_2 , d_2 nie zmieniają się. Wtedy

$$\tau_1 = t_0 + \varphi_4 \ln d_4,$$

$$\tau_2 = t_1 - \varphi_2 \ln d_2,$$

gdzie τ_1 jest punktem przecięcia $[t_0, \tau_1)$ - segmentu trajektorii u_T^* z warunkiem początkowym $u^*(t_0) = u^0$ (odpowiadającego sterowaniu $s^*(t) = 1$) z jej $[\tau_1, \tau_2)$ - segmentem postaci (6); ocena momentu τ_2 przełączenia sterowania z 1 na 0 pozostaje taka sama, jak w 1^o. Przy $|\tau| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy środkowej (przedział czasu $[\tau_1, \tau_2)$).

Jeżeli $\varphi_3 \ln d_3 < |\tau| \leq \varphi_2 \ln d_2 + \varphi_4 \ln d_4$, wówczas znika faza środkowa,

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \in \text{int } \tau,$$

gdzie τ jest pierwiastkiem równania (*). Ocenę momentu τ przełączenia sterowania z 1 na 0 otrzymujemy podobnie, jak ocenę momentu τ_2 w 1^o, należy tylko przyjąć $\tau, u^*(\tau)$ zamiast $\tau_2, u^*(\tau_2)$, gdzie $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w momencie τ w procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $s^*(t) = 1$ na przedziale $[t_0, \tau)$ i warunkiem początkowym $u^*(t_0) = u^0$.

Jeżeli znane jest początkowe techniczne uzbrojenie pracy oraz długość horyzontu czasu T , wtedy proces $(s^*, u^*)_T$ spełniający warunki optymalności (1) - (3) jest określony jednoznacznie. Zgodnie z hipotezą (H) proces ten jest rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 6.2. (11) $\delta_{u_T^*} \rightarrow v / (1 - \varepsilon)$ przy

$|\tau| \rightarrow +\infty$, gdzie

$$\delta_{u_T^*} = \frac{1}{|\tau|} \int_{\tau}^{\frac{d}{dt}} u^*(t) \frac{1}{u^*(t)} dt,$$

u_T^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w zadaniu (6.15) - (6.16).

D o w ó d. Jeżeli $|\tau| > 2\theta$, to

$$\delta_{u_T^*} \leq \frac{1}{|\tau|} \left[(\alpha_1 + \alpha_2)\theta + \frac{v}{1-\varepsilon} (|\tau| - 2\theta) \right] \rightarrow \frac{v}{1-\varepsilon}$$

przy $|\tau| \rightarrow +\infty$, gdzie $\alpha_1 = \max \left\{ \frac{v}{1-\varepsilon}, \sup_{t \in [t_0, t_0 + \theta]} \delta_{u^*(t)} \right\}$.

$$\alpha_2 = \max \left\{ \frac{\gamma}{1-\varepsilon}, \sup_{t \in [t_1-\theta, t_1]} \delta_{u^*}(t) \right\}, \quad \delta_{u^*}(t) = \frac{d}{dt} u^*(t) \cdot \frac{1}{u^*(t)}.$$

T w i e r d z e n i e 6.3. Przy założeniu 6.2. warunki

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= r(t) - (\mu + \lambda)u(t), \\ r(t) &\in [0, w(t)], \\ \frac{d}{dt} u(t) &\geq 0, \quad \gamma(t) \geq \delta^0 \varrho w(t) \end{aligned} \quad (*)$$

w układzie (6.21) są równoważne z następującymi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= s(t) [(1 - \delta^0)w(t) - (\mu + \lambda)u(t)], \\ \gamma(t) &= \varrho [s(t) \delta^0 w(t) + (1 - s(t))(w(t) - (\mu + \lambda)u(t))], \\ s(t) &\in [0, 1], \quad s \in \tilde{C}^0[T]. \end{aligned} \quad (**)$$

D o w ó d. Konieczność. Jeżeli funkcje $(u, w, \gamma, r)_T$ spełniają warunki (6.21), wówczas po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} u(t) = w(t) - (\mu + \lambda)u(t) - \frac{1}{\varrho} \gamma(t), \quad (1)$$

$$\delta^0 w(t) \leq \frac{1}{\varrho} \gamma(t) \leq w(t) - (\mu + \lambda)u(t). \quad (2)$$

Ponieważ $\gamma \in \tilde{C}^0[T]$ oraz $u, w \in \tilde{C}^1[T]$, więc istnieje taka funkcja $s: T \rightarrow [0, 1]$, $s \in \tilde{C}^0[T]$, że

$$\gamma(t) = \varrho [s(t) \delta^0 w(t) + (1 - s(t))(w(t) - (\mu + \lambda)u(t))]. \quad (3)$$

Po podstawieniu (3) do (1) otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt} u(t) = s(t) [(1 - \delta^0)w(t) - (\mu + \lambda)u(t)], \quad (4)$$

które spełniają funkcje $(s, u, w)_T$. Zatem jeżeli funkcje $(u, w, \gamma, r)_T$ spełniają warunki (*), to istnieje taka funkcja s_T , że czwórka $(s, u, w, \gamma)_T$ spełnia warunki (**).

Dostateczność. Załóżmy, że funkcje $(s, u, w, \gamma)_T$ spełniają warunki (**). Pokażemy, że funkcje $(u, w, \gamma, r)_T$, gdzie $r(t) = w(t) - \varrho^{-1} \gamma(t)$, spełniają warunki (*).

Weźmy dowolną funkcję $s: T \rightarrow [0, 1]$, $s \in \tilde{C}^0[T]$. Rozwiązaniem równania (4) z warunkiem początkowym $u(t_0) = u^0 > 0$, po podstawieniu $w(t) = au^\varepsilon(t) \exp \{ \gamma(t - t_0) \}$, jest przy założeniu 6.2 dodatnia, przynajmniej słabo rosnąca funkcja u_T , tzn. $du(t)/dt \geq 0 \quad \forall t \in T$, przy czym zawsze $(1 - \delta^0)w(t) - (\mu + \lambda)u(t) > 0$. Wówczas

$$0 < \rho \delta^0 w(t) \leq \chi(t) < \rho w(t) \quad \forall t \in T.$$

Ponieważ $r(t) = w(t) - \rho^{-1} \chi(t)$, więc $r(t) \in [0, w(t)] \quad \forall t \in T$ oraz $r \in \tilde{C}^0[T]$. Natomiast z (4), zważywszy że

$$r(t) - (\mu + \lambda)u(t) = e(t) [(1 - \delta^0)w(t) - (\mu + \lambda)u(t)],$$

otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} u(t) = r(t) - (\mu + \lambda)u(t).$$

T w i e r d z e n i e 6.4. Przy założeniach 6.1, 6.2 rozwiązanie zadania (6.20') - (6.21') jest następujące.

(i) Jeżeli wyjściowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 \in (u, u_{\max})$ gdzie $u = [\alpha \varepsilon (1 - \delta^0) / (\mu + \lambda)]^{1/(1 - \varepsilon)}$, $u_{\max} = u \varepsilon^{1/(\varepsilon - 1)}$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ e & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

gdzie $s = \nu \varepsilon / (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)^2 \in (0, 1)$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $|T| \leq \nu^{-1} \ln d_1 + d_2$, to $\tau_1 = \tau_2$ (wtedy $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0 \quad \forall t \in T$). Jeżeli $|T| > \nu^{-1} \ln d_1 + d_2$, to $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \nu^{-1} \ln d_1$, τ_2 jest pierwiastkiem równania

$$1 + \frac{\nu}{\mu + \lambda} + \nu(t_1 - \tau_2) = e^{\nu(t_1 - \tau_2)}, \quad (*)$$

gdzie $d_1 = (u^0)^{1-\varepsilon} / (\mu + \lambda) / \alpha \varepsilon (1 - \delta^0) > 1$, $d_2 = t_1 - \tau_2 > 0$.

(ii) Jeżeli $u^0 = u$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0 e^{\frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

przy czym $\tau = t_0$, jeżeli $|T| < d_2$ oraz $t_0 < \tau < t_1$, ε - pierwiastek równania (*) (po podstawieniu τ zamiast τ_2), jeżeli $|T| > d_2$. ucyony parametrów ε, d_2 nie zmieniają się.

(iii) Jeżeli $u^0 < u$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ \varepsilon & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{ (1 - \delta^0) \left[\left(\frac{u^0}{1 - \delta^0} - c \right) e^{-v(\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)(t - t_0)} + c e^{v(t - t_0)} \right] \right\}^{1/(1 - \varepsilon)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1) \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{v}{1 - \varepsilon}(t - \tau_1)} & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $c = a(1 - \varepsilon) / [v + (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)]$. Jeżeli $|T| < d_3$, to

$\tau_1 = \tau_2 = t_0$ (wtedy $s^*(t) = 0, u^*(t) = u^0 \quad \forall t \in T$), gdzie $d_3 = \tau - t_0 > 0$, moment τ jest pierwiastkiem równania

$$\varphi_1 + \frac{v}{\mu + \lambda} + v(\tau - t_0) = \varphi_1 e^{v(\tau - t_0)}, \quad (**)$$

w którym $\varphi_1 = a\varepsilon(1 - \delta^0)(u^0)^{\varepsilon - 1} / (\mu + \lambda)$. Jeżeli $d_3 < |T| \leq d_2 + \varphi_2 \ln d_4$, wtedy $\tau_1 = \tau_2 = \tau \in (t_0, t_1 - d_2]$, gdzie $\varphi_2 = [v + (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)]^{-1}$, $d_4 = [c - (u^0)^{1 - \varepsilon}(1 - \delta^0)^{-1}] / [c - a\varepsilon(\mu + \lambda)^{-1}] > 1$, moment τ jest pierwiastkiem równania

$$\frac{v}{\varepsilon} [1 + (\mu + \lambda)(t_1 - \tau)] (u^*(\tau))^{1 - \varepsilon} = (e^{v(t_1 - t_0)} - e^{v(\tau - t_0)})(1 - \delta^0), \quad (***)$$

w którym $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w momencie τ w procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $s^*(t) = 1$ na przedziale $[t_0, \tau]$ i warunkiem początkowym $u^*(t_0) = u^0$. Jeżeli $|T| > d_2 + \varphi_2 \ln d_4$, wtedy $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$, $\tau_1 = t_0 + \varphi_2 \ln d_4$, τ_2 jest pierwiastkiem równania (*). Oceny pozostałych parametrów nie zmieniają się.

Dowód przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 6.1. Zadanie (6.20) - (6.21) jest niestacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii, a więc tego samego typu, co zadanie (6.15) - (6.16). Z twierdzenia 3.5 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieją takie rozwiązania ψ^* równania

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - [\varrho(1-s^*(t)) + s^*(t)\psi(t)] \cdot [a \varepsilon (1-\delta^0) u^*(t)^{\varepsilon-1} e^{\nu(t-t_0)} - \mu - \lambda] \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

że

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 1, \text{ jeżeli } \psi^*(t) > \varrho, \\ s^*(t) &= 0, \text{ jeżeli } \psi^*(t) < \varrho. \end{aligned} \quad (3)$$

Ponieważ $\psi^*(t_1) = 0$, $\psi^* \in C^0[T]$, więc wnioskujemy, że $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon, t_1)$, gdzie ε - pewna liczba dodatnia. Rozpatrzmy kolejno trzy przypadki, zakładając różny poziom wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 .

1°. $u^0 \in (u, u_{\max})$ (nierówność $u^0 < u_{\max}$ odpowiada założeniu 6.2). Rozwiązanie układu równań

$$\frac{d}{dt} u(t) = s(t) [(1-\delta^0) a u^\varepsilon(t) e^{\nu(t-t_0)} - (\mu + \lambda) u(t)], \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - [\varrho(1-s(t)) + s(t)\psi(t)] [a \varepsilon (1-\delta^0) u^{\varepsilon-1}(t) e^{\nu(t-t_0)} - \mu - \lambda]$$

z warunkiem początkowym $u(t_0) \in [u, u_{\max}]$, $\psi(t_0) > 0$ i sterowaniem tożsamościowo równym jedności na półosi $[t_0, +\infty)$ spełnia następujące warunki: funkcja $u[t_0, +\infty)$ jest dodatnia i rosnąca, $u(t) \rightarrow +\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$, a funkcja $\psi[t_0, +\infty)$ ma nie więcej niż jeden punkt przecięcia ($d\psi(t)/dt = 0$), $\psi(t) \rightarrow +\infty$ przy $t \rightarrow +\infty$, czyli¹⁸

$$\psi(t) > \psi(t') \quad \forall t > t', \text{ jeżeli } \frac{d}{dt} \psi(t) \Big|_{t=t'} \geq 0. \quad (5)$$

¹⁸ Por. cde. 12 do analogicznego warunku w twierdzeniu 6.1.

Założmy, że $\psi^*(t_0) > \rho$. Przy $u(t_0) = u^0 > u$ z (4) otrzymujemy $d\psi^*(t)/dt|_{t=t_0} > 0$, zatem $\psi^*(t) > \rho \quad \forall t \in T$, zgodnie z (5), co jest niemożliwe zważywszy na (2). Tak więc $\psi^*(t_0) < \rho$ i wobec tego $s^*(t) = 0$ na pewnym przedziale $[t_0, \tau_1) \subset T$, albo $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in T$. Jeżeli $\psi^*(\tau_1) = \rho$ w punkcie $\tau_1 < t_1$, to $d\psi^*(t)/dt|_{t=\tau_1} \leq 0$ (zakładając $\frac{d}{dt} \psi^*(t)/dt|_{t=\tau_1} > 0$ otrzymalibyśmy $\psi^*(t) > \rho \quad \forall t > \tau_1$, co jest niemożliwe. Ponadto (a) jeżeli $\psi^*(\tau_1) = \psi^*(\tau_2) = \rho$, gdzie $\tau_1 < \tau_2$ to $\psi^*(t) = \rho \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$. (b) jeżeli $\psi^*(\tau) = \rho$, $\psi^*(t') < \rho$ w punkcie $t' > \tau$, to $\psi^*(t) < \rho \quad \forall t > t'$ (dowód przebiega podobnie, jak w twier-

dzeniu 6.1, s. 249). Rozwiązując układ równań (4) z funkcją $\psi^*(t) = \rho$ na przedziale $[\tau_1, \tau_2)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} s^*(t) &= s = v\varepsilon / (\mu + \lambda)(1 - \varepsilon)^2 \\ u^*(t) &= u e^{\frac{v}{1-\varepsilon}(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $u = [s\varepsilon(1 - \delta^0) / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, $s \in (0, 1)$ (przy założeniu 6.1). Zatem, jeżeli techniczne uzbrojenie pracy $u^0 \in (u, u_{\max})$, to funkcja ψ_T^* w warunkach optymalności spełnia następujące warunki: $\psi^*(t_0) < \rho$,

$\psi^*(\tau_1) = 0$, $\psi^*(t) \leq \rho \quad \forall t \in T$ oraz jeżeli $\psi^*(t) = \rho$ w pewnym punkcie $t \in \text{int } T$, to istnieją takie punkty $\tau_1 (\leq t)$, $\tau_2 (\geq t)$ ¹⁹, że $\psi^*(t) = \rho \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$, $\psi^*(t) < \rho \quad \forall t \in T \setminus [\tau_1, \tau_2]$. Sterowanie s_T^* ma więc następującą postać:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1), \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases} \quad (7)$$

Pozostaje ustalić momenty τ_1, τ_2 . Założmy, że horyzont czasu T jest długi²⁰. Moment τ_1 początkuje środkową fazę wzrostu, tj. przedział $[\tau_1, \tau_2)$ w którym proces $(s^*, u^*)_T$ ma postać (6). W fazie początkowej (przedział $[t_0, \tau_1)$) sterowaniu $s^*(t) = 0$ odpowiada segment trajektorii u_T^* ze stałym technicznym uzbrojeniem pracy $u^*(t) = u^0 \quad \forall t \in [t_0, \tau_1)$. Zatem w punkcie τ_1 następuje „sklejenie” (przecięcie) $[t_0, \tau_1)$ - segmentu trajektorii u_T^* z jej $[\tau_1, \tau_2)$ - segmentem postaci (6). Po przekształceniach otrzymujemy

$$\tau_1 = t_0 + \frac{1}{v} \ln d_1.$$

¹⁹ Nie jest wykluczony przypadek $\tau_1 = \tau_2 = t$.

²⁰ Ocenę długości horyzontu podamy dalej.

gdzie $d_1 = (u^0)^{1-\varepsilon} (\mu + \lambda) / a \varepsilon (1 - \delta^0) > 1$. Moment τ_2 musi być taki, by funkcja ψ_T^* z rozwiązania równania (1) ze sterowaniem tożsamościowo równym 0 na $[\tau_2, \tau_1]$ i warunkami

$$\psi^*(\tau_2) = \varrho, \quad u^*(\tau_2) = [a \varepsilon (1 - \delta^0) / (\mu + \lambda)]^{1/(1-\varepsilon)} \exp \left\{ \frac{\nu}{1-\varepsilon} (\tau_2 - t_0) \right\}$$

przyjmowała wartość 0 w momencie końcowym t_1 (warunek (2)). Po przekształceniach dochodzimy do równania (*). Równanie to ma rozwiązanie $\tau_2 < t_1$, przy czym $t_1 - \tau_2 = \text{const.}$ $\forall t_1 \in E^1$. Przez długi rozumiemy taki horyzont, w którym pojawiają się wszystkie trzy fazy wzrostu, tzn. $|T| > \nu^{-1} \ln d_1 + d_2$, gdzie $d_2 = t_1 - \tau_2$, τ_2 jest pierwiastkiem równania (*). Tak więc, jeżeli wyjściowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 \in (u, u_{\max})$ i horyzont jest długi, wtedy warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem postaci (7), w którym moment τ_1 spełnia warunek (8), a moment τ_2 jest pierwiastkiem równania (*). Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość fazy środkowej (przedział $[\tau_1, \tau_2]$).

2°. $u^0 = u$. Wówczas $d\psi^*(t)/dt|_{t=t_0} = 0$, zatem wykluczony jest przypadek $\psi^*(t_0) > \varrho$, czyli $\psi^*(t) < \varrho \quad \forall t \in T$. Rozumując podobnie jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem

$$s^*(t) = \begin{cases} s & \text{dla } t \in [t_0, \tau], \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

jeżeli $|T| > d_2$, który redukuje się do postaci $s^*(t) = 0, u^*(t) = u^0 \quad \forall t \in T$, jeżeli $|T| \leq d_2$, gdzie $d_2 = t_1 - \tau$, τ jest pierwiastkiem równania (*) - po podstawieniu τ zamiast τ_2 . Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie tylko długość przedziału $[t_0, \tau]$.

3°. $u^0 < u$. Możliwe są wszystkie trzy przypadki: $\psi^*(t_0) \geq \varrho$, przy czym zawsze $d\psi^*(t)/dt|_{t=t_0} < 0$. Wnioskujemy więc, że sterowanie s_T w warunkach optymalności (1) - (3) powinno mieć następującą postać:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau_1], \\ s & \text{dla } t \in [\tau_1, \tau_2], \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau_2, t_1]. \end{cases}$$

Jeżeli $|T| \leq d_3$, wtedy $s^*(t) = 0$, $u^*(t) = u^0 \quad \forall t \in T$, gdzie $d_3 = \tau - t_0$.
 τ jest pierwiastkiem (**). Równanie to ma pierwiastek $\tau > t_0$; ocena długości horyzontu przebiega podobnie, jak ocena długości przedziału $[\tau_2, t_1]$ w 1^o - należy tylko wszędzie zamiast $\tau_2, u^*(\tau_2)$ przyjąć t_0, u^0 . Jeżeli $d_3 < |T| \leq d_2 + \varphi_2 \ln d_4$, wtedy

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \in (t_0, t_1 - d_2],$$

gdzie τ jest pierwiastkiem równania (***), d_2 - podobnie jak w 1^o - jest oceną długości przedziału $[\tau_2, t_1]$, na którym $\psi^*(t) < \varrho$ (tj. $s^*(t) = 0$) natomiast $\varphi_2 \ln d_4$ - oceną długości przedziału $[t_0, \tau_1]$, na którym $\psi^*(t) > \varrho$ (tj. $s^*(t) = 1$). Ocenę tego przedziału otrzymujemy postępując analogicznie, jak w twierdzeniu 6.1. Przy $|T| \rightarrow +\infty$ rośnie długość przedziału $[\tau_1, \tau_2]$.

Przy ustalonym początkowym technicznym uzbrojeniu pracy i danej długości horyzontu T proces $(s^*, u^*)_T$ spełniający warunki optymalności (1) - (3) jest określony jednoznacznie. Zgodnie z hipotezą (H), proces taki jest rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 6.6. (i) Rozwiązaniem zadania (6.30) - (6.31) przy założeniu 6.3 jest proces $(\alpha^*, s^*, k^*)_T$ następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*] \end{cases},$$

$$s^*(t) = \begin{cases} (s^0 - \alpha^1) e^{-\omega(t-t_0)} + \alpha^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (s^*(\tau) - \alpha^0) e^{-\omega(t-\tau)} + \alpha^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$k^*(t) = \begin{cases} (k^0 - d_1 - d_2) e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_0)} + d_1 e^{-\omega(t-t_0)} + d_2 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (k^*(\tau) - d_3(\tau) - d_4) e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-\tau)} + d_3(\tau) e^{-\omega(t-\tau)} + d_4 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

gdzie $d_1 = (s^0 - \alpha^1) / (\mu + \lambda - \frac{\omega}{1-\varepsilon})$, $d_2 = \alpha^1 / (\mu + \lambda)$, $d_3(\tau) = (s^*(\tau) - \alpha^0) / (\mu + \lambda - \frac{\omega}{1-\varepsilon})$, $d_4 = \alpha^0 / (\mu + \lambda)$; $\tau^* = [t_0, t_1^*]$, t_1^* - wartość

kryterium (6.30). Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli $|T^*| > \theta$, to $t_0 < \tau < t_1^*$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T^*| < \theta$.

(ii) Jeżeli t_1^*, \bar{t}_1^* oznaczają najwcześniejsze momenty dojścia do poziomu konsumpcji $\gamma^1 < \bar{\gamma}^1$, to $t_1^* < \bar{t}_1^*$, przy czym istnieje taka liczba $\theta' > 0$, że $t_1^* - \tau < \theta'$ niezależnie od długości horyzontu T^* .

D o w ó d (i) Zadanie (6.30) - (6.31) jest etajonarnym zadaniem minimalnoczasowym, zatem z twierdzenia 3.8 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\alpha^*, s^*, k^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = (1-\varepsilon)(\mu+\lambda) \psi_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = -(1-\varepsilon) \psi_1(t) + \omega \psi_2(t),$$

że

$$\alpha^*(t) = \alpha^1, \text{ jeżeli } \psi_2^*(t) > 0, \quad (2)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha^0, \text{ jeżeli } \psi_2^*(t) < 0,$$

a wektor $\psi^*(t_1^*)$ jest ortogonalny do płaszczyzny stycznej do gładkiej rozmiatości X^1 ,

$$X^1 = \left\{ (k, s) : \rho(1-s)a^{1/(1-\varepsilon)} k^{\varepsilon/(1-\varepsilon)} = \gamma^1 \right\},$$

w punkcie $(k^*(t_1^*), s^*(t_1^*))$. tzn.

$$\psi^*(t_1^*) = (\psi_1^*, \psi_2^*)(t_1^*) = \left(\frac{\varepsilon \gamma^1}{\rho(1-\varepsilon)} a^{-1/(1-\varepsilon)} k^*(t_1^*)^{-1/(1-\varepsilon)}, -1 \right).$$

Ponieważ $\psi_2^*(t_1^*) < 0$, więc $\alpha^*(t) = \alpha^0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon^1, t_1^*)$, gdzie ε^1 jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem końcowym (3), otrzymujemy

$$\psi_2^*(t) \begin{cases} > 0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ = 0 & \text{dla } t = \tau, \\ < 0 & \text{dla } t \in (\tau, t_1^*]. \end{cases}$$

jeżeli $|T^*| > \theta$ oraz $\psi_2^*(t) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T^*$, jeżeli $|T^*| < \theta$, gdzie $\tau = t_1^* - \theta$, θ jest dodatnią pierwiastkiem równania

$$(1 - \varepsilon [\omega - (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]) \psi_1^*(t_1^*) = \mu + \lambda - \frac{\omega}{1 - \varepsilon} \quad (4)$$

(parametr $\psi_1^*(t_1^*)$ spełnia warunek (3)). Zgodnie z (2) sterowanie $e_{T^*}^*$ ma więc postać

$$e^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1^*]. \end{cases}$$

jeżeli $|T^*| > \theta$ ($\tau = t_1^* - \theta > t_0$) oraz $e^*(t) = 0 \quad \forall t \in T^*$, jeżeli $|T^*| \leq \theta$. Rozwiązując układ równań w (6.31) z powyższym sterowaniem otrzymujemy żądany proces $(\alpha^*, e^*, k^*)_{T^*}$.

(ii) Weźmy dwa docelowe poziomy konsumpcji $\gamma^1, \bar{\gamma}^1$; $\gamma^1 < \bar{\gamma}^1$. Niech $(\alpha^*, e^*, k^*)_{T^*}$ będzie rozwiązaniem zadania z poziomem konsumpcji γ^1 ($T^* = [t_0, t_1^*]$) a $(\bar{\alpha}^*, \bar{e}^*, \bar{k}^*)_{\bar{T}^*}$ - rozwiązaniem zadania z poziomem konsumpcji $\bar{\gamma}^1$ ($\bar{T}^* = [t_0, \bar{t}_1^*]$). Wtedy $T^* \subset \bar{T}^*$. Rzeczywiście, załóżmy, że $\bar{t}_1^* \leq t_1^*$. Istnieje zatem proces prowadzący do (wyższego) poziomu konsumpcji $\bar{\gamma}^1 > \gamma^1$ w czasie nie dłuższym od $t_1^* - t_0$. Trajektorja konsumpcji $\bar{\gamma}^* \in C^0[\bar{T}^*]$ ($\bar{\gamma}^*(t_0) = \gamma^*(t_0) < \gamma^1$), zatem istnieje taki moment $t' < t_1^*$, że $\bar{\gamma}^*(t') = \gamma^1$, co przeczy założeniu, że $(\alpha^*, e^*, k^*)_{T^*}$ jest procesem optymalnym.

Pozostaje wykazać, że przy $|T^*| \rightarrow +\infty$ długość przedziału $[\tau, t_1^*]$ jest zawsze ograniczona. Ponieważ wszystkie trajektorie kapitałochłonności oraz udziału inwestycji w dochodzie są równomiernie ograniczone na horyzontach czasu T dowolnej długości, zatem wszystkie pierwiastki równania (4) z parametrem $\psi_1^*(t_1^*)$ spełniającym warunek (3) odpowiadające różnym poziomom konsumpcji γ^1 tworzą zbiór ograniczony. Oznacza to, że ograniczona jest również długość przedziału $[\tau, t_1^*]$ w optymalnych procesach wzrostu, tzn. istnieje taka liczba $\theta' > 0$, że $t_1^* - \tau \leq \theta'$ dla każdego optymalnego horyzontu czasu. T^* odpowiadającego dowolnemu docelowemu poziomowi konsumpcji γ^1 , przy którym zadanie jest niesprzeczne.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 7

T w i e r d z e n i e 7.1. Rozwiązaniem zadania (7.11) - (7.12) przy założeniu 7.1 jest proces $(s^*, m^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} m_1^0 e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m_1^*(\tau) e^{-\mu(t - \tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 e^{-\mu(t - t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ [a_1 m_1^*(\tau)(t - \tau) + m_2^*(\tau)] e^{-\mu(t - \tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

Jeżeli $|\tau| > \theta$, wtedy $\tau = t_1 - \theta > t_0$, inaczej $\tau = t_0$, gdzie θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 + d\theta = e^{-\mu\theta},$$

w którym parametr $d = a_1 \mu / (a_1 - \mu)$.

D o w ó d. Zadania (7.11) - (7.12) jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym prawym końcem trajektorii. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(s^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_1(t) &= - (a_1 s^*(t) - \mu) \psi_1(t) - a_1 (1 - s^*(t)) \psi_2(t), \\ \frac{d}{dt} \psi_2(t) &= - a_2 + \mu \psi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0. \quad (2)$$

ze

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 1, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) > 0, \\ s^*(t) &= 0, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $\varphi^*(t) = \psi_1^*(t) - \psi_2^*(t)$.

Ponieważ $\varphi^* \in C^0 [T]$, $\varphi^*(t_1) = 0$, a $\varphi^*(t)/dt|_{t=t_1} > 0$, więc $\varphi^*(t) < 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1) \setminus \{t_1\}$, tzn. $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε - pewna liczba dodatnia. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem końcowym (2) i sterowaniem s_T^* z wartościami $s^*(t) = 0$ w lewostronnym otoczeniu punktu t_1 , otrzymujemy $\varphi^*(t) < 0 \quad \forall t \in (\tau, t_1)$ $\varphi^*(\tau) = 0$, jeżeli $|T| > \theta$, gdzie $\tau = t_1 - \theta$, θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 + d\theta = e^{\mu\theta}, \quad (4)$$

$d = a_1\mu/(a_1 - \mu) > 0$, oraz $\varphi^*(t) < 0 \quad \forall t \in \tau$, jeżeli $|T| \leq \theta$. W punkcie τ funkcja φ^* jest różniczkowalna, $d\varphi^*(t)/dt|_{t=\tau} < 0$, zatem $s^*(t) = 1 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$ gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem $\psi(\tau) = \psi^*(\tau)$ (jest to wartość rozwiązania układu (1) w punkcie τ ze sterowaniem $s^*(t) = 0$ na $(\tau, t_1]$ i warunkiem końcowym (2)) oraz sterowaniem s_T^* z wartościami $s^*(t) = 1$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ otrzymujemy $\varphi^*(t) > 0$ (wobec tego $s^*(t) = 1 \quad \forall t \in [t_0, \tau)$, jeżeli $|T| > \theta$. Rozwiązując wreszcie układ równań różniczkowych w (7.12) ze sterowaniem s_T^* ,

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

jeżeli $|T| > \theta$ i $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in \tau$ jeżeli $|T| \leq \theta$, otrzymujemy żądany proces $(s^*, m^*)_T$, który jako jedyny spełnia warunki optymalności (1) - (3). Zgodnie z hipotezą (H) jest on rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 7.2. $\lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{m_1 T}^* = a_1 - \mu$, gdzie

$$\delta_{m_1 T}^* = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} m_1^*(t) \cdot \frac{1}{m_1^*(t)} dt.$$

m_{1T}^* jest optymalną trajektorią majątku produkcyjnego w sektorze 1 w zadaniu (7.11) - 7.12).

D o w ó d jest natychmiastowy. Jeżeli $|T| > \theta$, wówczas

$$\begin{aligned} \delta_{m_1 T}^* &= \frac{1}{|T|} \int_T (a_1 s^*(t) - \mu) dt = \frac{1}{|T|} \int_{t_0}^{t_1 - \theta} (a_1 - \mu) dt - \int_{t_1 - \theta}^{t_1} \mu dt = \\ &= \frac{1}{|T|} [(a_1 - \mu)(|T| - \theta) + \mu\theta] \longrightarrow a_1 - \mu \end{aligned}$$

przy $|T| \rightarrow +\infty$, gdzie θ jest długością konsumpcyjnej fazy wzrostu w procesie optymalnym w zadaniu (7.11) - (7.12).

T w i e r d z e n i e 7.3. (i) Jeżeli spełnione jest założenie 7.2 i proces $(s, m)_T$ spełnia warunki (7.12), (7.15), to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, że

$$s(t) = \frac{\mu}{a_1} + \alpha(t) \frac{\varphi(m(t))}{a_1 m_1(t)}, \quad (*)$$

gdzie $\varphi(m(t)) = (a_1 - \mu)m_1(t) - \mu m_2(t)$. (ii) Proces $(s, m)_T$ wtedy i tylko wtedy spełnia warunki (7.12), (7.15), gdy para $(\alpha, m)_T$ spełnia układ równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1(t) &= \alpha(t) \varphi(m(t)), \\ \frac{d}{dt} m_2(t) &= (1 - \alpha(t)) \varphi(m(t)), \end{aligned} \quad (**)$$

gdzie $\alpha(t) \in [0, 1]$, $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, $m(t_0) = m^0 > 0$.

D o w ó d. (i) Zważywszy na (7.15) mamy

$$s(t) \in \left[\frac{\mu}{a_1}, \frac{\mu}{a_1} + \frac{\varphi(m(t))}{a_1 m_1(t)} \right] \quad \forall t \in T,$$

czyli $\forall t \in T \exists \alpha(t) \in [0, 1]: s(t) = \frac{\mu}{a_1} + \alpha(t) \frac{\varphi(m(t))}{a_1 m_1(t)}$. Podstawiając (*) do układu równań różniczkowych w (7.12), otrzymujemy (**).

Różniczkując funkcję $\varphi(m(\cdot)) \in \tilde{C}^1[T]$ po t , mamy

$$\frac{d}{dt} \varphi(m(t)) = (a_1 \alpha(t) - \mu) \varphi(m(t)),$$

wobec czego $\varphi(m(t)) > 0 \quad \forall t \in T$ ($\varphi(m^0) > 0$ - przy założeniu 7.2).

Ponieważ $s \in \tilde{C}^0[T]$, $\varphi(m(\cdot)) \in \tilde{C}^1[T]$, $\varphi(m(t)) > 0 \quad \forall t \in T$ więc $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, przy tym funkcja α jest określona jednoznacznie.

(ii) Konieczność. Wykazaliśmy już faktycznie w (i). Jeżeli para $(s, m)_T$ spełnia warunki (7.12), (7.15), to istnieje taka funkcja $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$, że para $(\alpha, m)_T$ jest rozwiązaniem układu równań (**).

Dostateczność. Weźmy funkcję $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$, $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$ i odpowiadające jej rozwiązanie $m_T = (m_1, m_2)_T$ układu (***) z warunkiem $m(t_0) = m^0 = (m_1^0, m_2^0) > 0$. Pokażemy, że para $(s, m)_T$ spełnia warunki (7.12), (7.15), gdzie funkcja s ma postać (*).

Ponieważ $\varphi(m(t)) > 0$, $m(t) > 0$ oraz $\alpha(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in T$, zatem

$$s(t) \in \left[\frac{\mu}{a_1} \cdot \frac{\mu}{a_1} + \frac{\varphi(m(t))}{a_1 m_1(t)} \right] \subset [0, 1] \quad \forall t \in T \quad (1)$$

oraz $\alpha \in \tilde{C}^0[T]$. Podstawiając funkcję s zamiast α do (**), otrzymujemy układ równań różniczkowych w (7.12)²¹, natomiast warunek (7.15) wynika z (1).

T w i e r d z e n i e 7.4. Rozwiązaniem zadań (7.16') - (7.17'), (7.18') - (7.19') są przy założeniu 7.2 procesy $(\alpha^*, m^*)_T$ następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$m_1^*(t) = \begin{cases} (m_1^0 - d m_2^0) e^{(a_1 - \mu)(t - t_0)} + d m_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ m_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (*)$$

$$m_2^*(t) = \begin{cases} m_2^0 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (m_2^0 - d^{-1} m_1^*(\tau)) e^{-\mu(t - \tau)} + d^{-1} m_1^*(\tau) & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

gdzie $d = \mu / (a_1 - \mu)$. przy tym $\tau = t_1 - \theta > t_0$, jeżeli $|T| > \theta$ oraz $\tau = t_0$, jeżeli $|T| \leq \theta$, gdzie w zadaniu (7.16') - (7.17') θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$1 - \mu \left(1 - \frac{\mu}{a_1}\right) \theta = e^{-\mu \theta}, \quad (**)$$

natomiast w zadaniu (7.18') - (7.19') $\theta = \mu^{-1} \ln[1 + \mu/a_2(a_1 - \mu)]$.

²¹ Podstawianie takie jest dopuszczalne, ponieważ przy $m(t) > 0$ przekształcenia (*) jest wzajemnie jednoznaczne.

D o w ó d. Zadanie (7.16') - (7.17') jest stacjonarnym zadaniem sterowania z kryterium całkowym i swobodnym prawym krańcem trajektorii stanów. Korzystając z twierdzenia 3.4, otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\alpha^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = -\alpha^*(t)(a_1 - \mu)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) - (a_1 - \mu)\psi_2(t), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = \alpha^*(t)\mu(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + \mu\psi_2(t) - a_2,$$

z warunkiem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0, \quad (2)$$

że

$$\alpha^*(t) = 1, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) > 0, \quad (3)$$

$$\alpha^*(t) = 0, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) < 0,$$

gdzie $\varphi^*(t) = \psi_1^*(t) - \psi_2^*(t)$.

Ponieważ $\varphi^*(t_1) = 0$, $d\varphi^*(t)/dt|_{t=t_1} > 0$, więc $\alpha^*(t) = 0$ $\forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Tak więc albo $\alpha^*(t) = 0$ $\forall t \in T$, jeżeli $\varphi^*(t) < 0$ na int T , albo istnieje punkt $\tau \in \text{int } T$, w którym $\varphi^*(\tau) = 0$, $\varphi^*(t) < 0$ $\forall t \in (\tau, t_1)$. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem (2) i sterowaniem α_T^* z wartościami $\alpha^*(t) = 0$ w lewostronnym otoczeniu momentu końcowego t_1 otrzymujemy $\varphi^*(t) < 0$ $\forall t \in (\tau, t_1)$, $\varphi^*(\tau) = 0$, gdzie $\tau = t_1 - \theta$, θ jest dodatnim pierwiastkiem równania (**). Założmy, że $|T| > \theta$. Wówczas $\tau > t_0$, w punkcie τ funkcja φ^* jest różniczkowalna, $d\varphi^*(t)/dt|_{t=\tau} < 0$, tzn. $\alpha^*(t) = 1$ $\forall t \in U^-(\varepsilon; \tau) \setminus \{\tau\}$, gdzie ε - pewna liczba dodatnia. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem $\psi(\tau) = \psi^*(\tau)$ i sterowaniem α_T^* z wartościami $\alpha^*(t) = 1$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ , otrzymujemy $\varphi^*(t) > 0$ czyli $\alpha^*(t) = 1$ $\forall t \in [t_0, \tau)$ jeżeli $|T| > \theta$. Tak więc jeżeli $|T| > \theta$, to

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau = t_1 - \theta$, θ jest pierwiastkiem równania (**). Jeżeli $|T| \leq \theta$, wtedy $\alpha^*(t) = 0$ $\forall t \in T$. Rozwiązując układ równań w (7.16') otrzymujemy proces (*).

Warunki optymalności procesu $(\alpha^*, m^*)_T$ w stacjonarnym zadaniu stero-

waria docelowego (7.18') - (7.19') wynikają z twierdzenia 3.6. Jeżeli proces $(\alpha^*, m^*)_T$ jest rozwiązaniem tego zadania, to istnieje takie rozwiązanie $\psi^*_T = (\psi^*_1, \psi^*_2)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = -(a_1 - \mu) [\alpha^*(t) \psi_1(t) + (1 - \alpha^*(t))(a_2 + \psi_2(t))],$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = \mu [\alpha^*(t) \psi_1(t) + (1 - \alpha^*(t))(a_1 + \psi_2(t))].$$

z warunkiem końcowym

$$\psi^*_1(t_1) = \psi^*_2(t_1) = 0,$$

że

$$\alpha^*(t) = 1, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) > 0,$$

$$\alpha^*(t) = 0, \text{ jeżeli } \varphi^*(t) < 0,$$

gdzie $\varphi^*(t) = \psi^*_1(t) - \psi^*_2(t) - a_2$. Korzystając z tych warunków i powtarzając procedurę dowodzenia zastosowaną uprzednio, otrzymamy proces $(*)$ z momentem przełączenia sterowania $\tau = t_1 - \theta$, gdzie

$\theta = \mu^{-1} \ln [1 + \mu/a_2(a_1 - \mu)]$, jeżeli $|T| > \theta$ oraz sterowaniem $\alpha^*(t) = 0 \forall t \in T$, jeżeli $|T| < \theta$. Otrzymane procesy są jedynymi procesami dopuszczalnymi spełniającymi warunki optymalności, zatem zgodnie z hipotezą (H) są rozwiązaniami zadań.

T w i e r d z e n i e 7.5.

$$|\delta_{m^*_1T} - \delta_{\bar{m}^*_1T}| \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad |T| \rightarrow +\infty$$

gdzie

$$\delta_{m^*_1T} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} m^*_1(t) \frac{1}{m^*_1(t)} dt, \quad \delta_{\bar{m}^*_1T} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} \bar{m}^*_1(t) \frac{1}{\bar{m}^*_1(t)} dt,$$

m^*_1T jest optymalną trajektorią majątku w sektorze 1 w zadaniach (7.16') - (7.17'), (7.18') - (7.19'), (7.20') - (7.21'), \bar{m}^*_1T - trajektorią w sektorze 1 w θ -równowadze typu (A) postaci (7.22) (w zadaniu minimalno-czasowym (7.20') - (7.21') należy horyzont czasu T zastąpić optymalnym horyzontem T^*).

D o w ó d. Jeżeli $|T| > \theta$, wówczas

$$\begin{aligned}
 |\delta_{m_{1T}^*} - \delta_{\bar{m}_{1T}}| &= \frac{1}{|T|} \left| \int_{t_0}^{t_1 - \theta} (a_1 - \mu - \mu \frac{m_2^*(t)}{m_1^*(t)}) dt - \int_{t_0}^{t_1} (a_1 - \mu - \mu \frac{\bar{m}_2(t)}{\bar{m}_1(t)}) dt \right| = \\
 &= \frac{1}{|T|} \left| -\mu \int_{t_0}^{t_1 - \theta} \frac{m_2^0}{m_1^*(t)} dt + \mu \int_{t_0}^{t_1} \frac{\bar{m}_2^0}{\bar{m}_1(t)} dt - (a_1 - \mu) \theta \right| \leq \\
 &\leq \frac{\mu}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_1 - \theta} d_1 e^{-(a_1 - \mu)(t - t_0)} dt + \int_{t_0}^{t_1} \bar{d}_1 e^{-(a_1 - \mu)(t - t_0)} dt \right] + \\
 &+ \frac{1}{|T|} (a_1 - \mu) \theta = \\
 &= \frac{\mu d_1}{(a_1 - \mu) |T|} (1 - e^{-(a_1 - \mu)(|T| - \theta)}) + \frac{\mu \bar{d}_1}{(a_1 - \mu) |T|} (1 - e^{-(a_1 - \mu)(|T| - \theta)}) + \\
 &+ \frac{1}{|T|} (a_1 - \mu) \theta \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad |T| \rightarrow +\infty,
 \end{aligned}$$

gdzie $d_1 = m_2^0 / (m_1^0 - d m_2^0)$, $\bar{d}_1 = \bar{m}_2^0 / (\bar{m}_1^0 - d \bar{m}_2^0)$, $d = \mu / (a_1 - \mu)$; θ jest oceną długości konsumpcyjnej fazy wzrostu w procesie optymalnym.

T w i e r d z e n i e 7.6. Rozwiązaniem zadania (7.26') - (7.27') przy założeniach 7.2, 7.3 jest proces $(\beta^*, j^*, \alpha^*)_T$:

$$\begin{aligned}
 \beta^*(t) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \\
 j^*(t) &= \begin{cases} j^0 e^g(t) & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ j^*(\tau) e^{g^*(\tau; t)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (*) \\
 \alpha^*(t) &= \begin{cases} (\alpha^0 - \beta^1) e^{-\omega(t - t_0)} + \beta^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ (\alpha^*(\tau) - \beta^0) e^{-\omega(t - \tau)} + \beta^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}
 \end{aligned}$$

gdzie $g(t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^0 - \beta^1) (1 - \exp\{-\omega(t - t_0)\}) + (a_1 \beta^1 - \mu)(t - t_0)$, $g(\tau; t) = a_1 \omega^{-1} (\alpha^*(\tau) - \beta^0) (1 - \exp\{-\omega(t - \tau)\}) + (a_1 \beta^0 - \mu)(t - \tau)$. Istnieje taka liczba $\theta > 0$, że $\tau \in (t_1 - \theta, t_1)$, jeżeli $|T| > \theta$. Jeżeli $|T| \leq \theta$, to $\tau = t_0$ i proces redukuje się do postaci:

$$\beta^*(t) = \beta^0, \quad j^*(t) = j^0 e^{g(t_0; t)},$$

$$\alpha^*(t) = (\alpha^0 - \beta^0) e^{-\omega(t-t_0)} + \beta^0$$
(**)

w każdym momencie $t \in T$, gdzie $g(t_0; t) = g(\tau; t)$ dla $\tau = t_0$.

O d o ó d. Zadanie (7.26') - (7.27') jest stacjonarnym zadaniem sterowania docelowego. Z twierdzenia 3.4 otrzymujemy następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(\beta^*, j^*, \alpha^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania, to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_T$ układu równań

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = -(a_1 \alpha(t) - \mu) \psi_1(t) - a_2(1 - \alpha(t)),$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = -a_1 j(t) \psi_1(t) + \omega \psi_2(t) + a_2 j(t),$$
(1)

z warunkiem końcowym

$$\psi_1^*(t_1) = \psi_2^*(t_1) = 0,$$
(2)

że

$$\beta^*(t) = \beta^1, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) > 0,$$

$$\beta^*(t) = \beta^0, \quad \text{jeżeli } \psi_2^*(t) < 0.$$
(3)

Ponieważ $\psi_2^*(t_1) = 0$, $d\psi_2^*(t)/dt|_{t=t_1} > 0$ (funkcja $\psi_2^* \in \tilde{C}^2[T]$), zatem $\beta^*(t) = \beta^0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Biorąc drugą pochodną funkcji ψ_{2T}^* , z (1) otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) = \omega \frac{d}{dt} \psi_2(t) + a_2(a_1 - \mu)j(t),$$

którego rozwiązanie względem $\varphi(t) = d\psi_2(t)/dt$ ma postać następującą

$$\varphi(t) = e^{\omega(t-t_1)} \left[\varphi(t_1) - a_2(a_1 - \mu) \int_{t_1}^t e^{-\omega(\theta-t_1)} j(\theta) d\theta \right].$$

Funkcja podcałkowa w (4) jest zawsze dodatnia, zatem wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest funkcją rosnącą i φ rośnie na T . Rośnie więc także funkcja φ^* , gdzie $\varphi^*(t) = d\psi_2^*(t)/dt$, czyli istnieje nie więcej niż jeden punkt $\tau \in \text{int } T$ (poza momentem t_1), w którym $\psi_2^*(\tau) = 0$. Tak więc albo $\psi_2^*(\tau) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T$ i warunki optymalności spełnia proces (***) ze sterowaniem $\beta^*(t) = \beta^0 \quad \forall t \in T$, albo $\tau \in \text{int } T$ i warunki optymalności (1) - (3) spełnia proces (*) ze sterowaniem

$$\beta^*(t) = \begin{cases} \beta^1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ \beta^0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

Przy założeniach 7.2, 7.3 rozwiązanie układu równań

$$\frac{d}{dt} \xi_1(t) = -(a_1 \beta^0 - \mu) \xi_1(t) - a_2(1 - \beta^1),$$

$$\frac{d}{dt} \xi_2(t) = -a_1 j^0 \xi_1(t) + \omega \xi_2(t) + a_2 j^0 e^{(a_1 \beta^1 - \mu)(\tau - t_0)},$$

z warunkiem końcowym $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_1) = 0$ spełnia warunki:

$$\xi_1(t) \leq \psi_1(t) \quad \forall t \in T, \quad \xi_1(t_0) \rightarrow +\infty \quad \text{przy } |T| \rightarrow +\infty \quad (i=1,2).$$

Zatem $\exists \theta > 0$, $\exists \tau \geq t_1 - \theta$ ($\tau < t_1$): $|T| > \theta \Rightarrow \psi_2(t_0) > 0$, $\psi_2(\tau) = 0$.

Warunki optymalności spełnia wówczas proces (*) z momentem przełączenia sterowania $\tau \in [t_1 - \theta, t_1]$. Jeżeli $|T| \leq \theta$, wtedy $\psi_2^*(t) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T$ i warunki optymalności spełnia proces (**). Otrzymany proces jako jedyny spełnia warunki optymalności (1) - (3) i wobec tego, zgodnie z hipotezą (H), jest rozwiązaniem zadania.

T w i e r d z e n i e 7.7. (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0: |T| > 2\theta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |j^*(t) - \bar{j}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon]$, gdzie j_T^* jest optymalną trajektorią inwestycji netto w zadaniu (7.25')-(7.26'), \bar{j}_T jest trajektorią inwestycji netto w σ -równowadze postaci (7.30) z warunkiem początkowym $\bar{j}^0 = j^0 \exp\{a_1 \omega^{-1}(\alpha^0 - \beta^1)\}$, (j^0 - jest początkową wielkością inwestycji w zadaniu (7.25')-(7.26')).

$$(ii) \lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{j_T^*} = a_1 \beta^1 - \mu,$$

gdzie

$$\delta_{j_T^*} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} j^*(t) \cdot \frac{1}{j^*(t)} dt.$$

D o w ó d. (i) Załóżmy, że horyzont czasu T jest długi. W fazie inwestycyjnej (przedział $[t_0, \tau)$) $j^*(t) > \bar{j}(t)$ i nietrudno zauważyć, że $j^*(t) - \bar{j}(t) \rightarrow 0$, jeżeli $t \rightarrow +\infty$, $t < \tau$. Zatem $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\theta}_\varepsilon > 0$: $t \in [t_0 + \bar{\theta}_\varepsilon, t_1 - \theta] \Rightarrow |j^*(t) - \bar{j}(t)| \leq \varepsilon$. wystarczy przyjąć $\theta_\varepsilon = \max\{\bar{\theta}_\varepsilon, \theta\}$, gdzie θ jest oceną długości fazy konsumpcyjnej w optymalnym procesie wzrostu w długim horyzoncie czasu.

(ii) Ponieważ

$$\delta_{j_T^*} = \frac{1}{|T|} \int_T (a_1 \alpha^*(t) - \mu) dt = \frac{a_1}{|T|} \int_T \alpha^*(t) dt - \mu$$

oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \theta_\varepsilon > 0: |T| > \theta + \theta_\varepsilon \implies 0 \leq \beta^1 - \alpha^*(t) \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta]$$

więc

$$\int_{t_0 + \theta_\varepsilon}^{t_1 - \theta} (\beta^1 - \varepsilon) dt \leq \int_T \alpha^*(t) dt \leq \beta^1 |T|,$$

jeżeli tylko $|T| > \theta + \theta_\varepsilon$. Zatem

$$(\beta^1 - \varepsilon)(|T| - \theta - \theta_\varepsilon) \leq \int_T \alpha^*(t) dt \leq \beta^1 |T|$$

1

$$\delta_{jT}^* = \frac{a_1}{|T|} \int_T \alpha^*(t) dt - \mu \in A_\varepsilon = \left[\frac{a_1}{|T|} (\beta^1 - \varepsilon)(|T| - \theta - \theta_\varepsilon) - \mu, a_1 \beta^1 - \mu \right].$$

Przy $|T| \rightarrow +\infty$ przedział $A_\varepsilon \rightarrow [a_1(\beta^1 - \varepsilon) - \mu, a_1 \beta^1 - \mu]$. Tezę twierdzenia otrzymujemy zważywszy, że ε może być dowolnie małą liczbą dodatnią.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 8

T w i e r d z e n i e 8.1. Niech funkcje $(s, m, \gamma)_T$ spełniają warunki (8.2) - (8.3), $m_T = (m_1, m_2)_T$, $\gamma_T = (\gamma_1, \gamma_2)_T$. Załóżmy, że

$$\frac{d}{dt} \gamma_1(t) \cdot \frac{1}{\gamma_1(t)} \leq \lambda - \varepsilon \quad \forall t \in T, \quad (*)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeżeli $|T| > \theta_\varepsilon$ to dla $t > t_0 + \theta_\varepsilon$ nie będzie spełniony warunek (8.4).

D o w ó d. Zważywszy na (8.3) układ równań (8.2) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_1(t) &= (a_1 s(t) - \mu) \gamma_1(t), \\ \frac{d}{dt} \gamma_2(t) &= a_2 (1 - s(t)) \gamma_1(t) - \mu \gamma_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Przyjmijmy oznaczenia: $q_1(t) = \frac{1}{1_0} \gamma_1(t) \exp\{-\lambda(t-t_0)\}$,
 $q_2(t) = \frac{1}{1_0} \gamma_2(t) \exp\{-\lambda(t-t_0)\}$. Przy tych oznaczeniach układ (1) jest równoważny z następującym

$$\frac{d}{dt} q_1(t) = (a_1 s(t) - \mu - \lambda) q_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} q_2(t) = a_2(1-s(t))q_1(t) - (\mu + \lambda)q_2(t),$$

a warunek (*) z warunkiem

$$\frac{d}{dt} q_1(t) \cdot \frac{1}{q_1(t)} < -\varepsilon. \quad (3)$$

Z (2), (3) otrzymujemy $s(t) < (\mu + \lambda - \varepsilon)/a_1$, $q_1(t) < q_1^0 \exp\{-\varepsilon(t-t_0)\}$

$$\forall t > t_0.$$

Zatem

$$\frac{d}{dt} q_2(t) \cdot \frac{1}{q_2(t)} < a_2(1-s(t)) \frac{q_1^0}{q_2(t)} e^{-\varepsilon(t-t_0) - \mu - \lambda} \quad \forall t > t_0.$$

Założmy, że zachodzi warunek (8.4). Wtedy $q_2(t) > q_2^0 \quad \forall t > t_0$. Równocześnie

$$\frac{d}{dt} q_2(t) \cdot \frac{1}{q_2(t)} < 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} y_2(t) \cdot \frac{1}{y_2(t)} < 0 \quad \forall t > t_0 + \theta_\varepsilon.$$

Jeżeli $|\tau| > \theta_\varepsilon$, gdzie $\theta_\varepsilon = \max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[\frac{a_2^2 q_1^0}{(\mu + \lambda) q_2^0} \right]\right\}$, co przeczy założeniu.

DODATEK MATEMATYCZNY DO PARAGRAFU 9

T w i e r d z e n i e 9.1. (1) Rozwiązaniem zadania (9.8) - (9.9) przy założeniu 9.1 jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$u_1^*(t) = \begin{cases} d_1^0 e^{-(1-\varepsilon_1)(\mu+\lambda)(t-t_0) + d_1}^{1/(1-\varepsilon_1)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ u_1^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases} \quad (*)$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} u_2^0 e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)} & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ d_2(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} + d_3(\tau) e^{-\varepsilon_1(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

gdzie $d_1 = a_1/(\mu + \lambda)$, $d_1^0 = (u_1^0)^{1-\varepsilon_1} - d_1 < 0$, $d_2(\tau) = u_2^*(\tau) - d_3(\tau)$,
 $d_3(\tau) = a_1 \varrho_1 \varrho_2^{-1} (u_1^*(\tau))^{\varepsilon_1} / (1 - \varepsilon_1)(\mu + \lambda)$.

$$(11) \exists \theta_1 > 0: |T| > \theta_1 \implies \tau \in \text{int } T, \quad |T| < \theta_1 \implies \tau = t_0.$$

$$(111) \exists \theta_2 > 0: \tau_1 - \tau \leq \theta_2 \quad \forall T.$$

D o w ó d (1) Ponieważ kryterium $\max \gamma(t_1) = \max a_2 \varrho_2 u_2^{\varepsilon_2}(t_1)$ przy warunkach (9.9) jest równoważne z kryterium $\max u_2(t_1)^{22}$, więc wystarczy rozwiązać następujące zadanie sterowania docelowego:

$$\max u_2(t_1) \tag{1}$$

przy warunkach (9.9).

W celu rozwiązania tego zadania posłużymy się twierdzeniem 3.7. Wynikające z niego następujące warunki optymalności. Jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (1), to istnieje takie rozwiązanie $\xi_T^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)_T$ układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi_1(t) = & -[a_1 \varepsilon_1 s^*(t)(u_1^*(t))^{\varepsilon_1 - 1} - \mu - \lambda] \xi_1(t) - \\ & - a_1 \varrho_1 \varrho_2^{-1} \varepsilon_1 (1 - s^*(t))(u_1^*(t))^{\varepsilon_1 - 1} \xi_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} \xi_2(t) = (\mu + \lambda) \xi_2(t),$$

z warunkiem końcowym

$$(\xi_1^*(t_1), \xi_2^*(t_1)) = (0, 1), \tag{3}$$

za

$$\begin{aligned} s^*(t) = 1, & \text{ jeżeli } \varphi^*(t) > 0, \\ s^*(t) = 0, & \text{ jeżeli } \varphi^*(t) < 0, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $\varphi^*(t) = \xi_1^*(t) - \varrho_1 \varrho_2^{-1} \xi_2^*(t)$. Ponieważ $\varphi^*(t_1) < 0$, $\varphi^* \in C^0[U^-(\varepsilon; t_1)]$, zatem $s^*(t) = 0 \quad \forall t \in U^-(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbę dodatnią. Załóżmy, że $\exists \tau \in \text{int } T: \varphi^*(\tau) = 0$. Zważywszy, że

$$\xi_2^*(t) = e^{(\mu + \lambda)(t - t_1)}$$

²² Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(s^*, u^*)_T$ będący rozwiązaniem zadania z jednym z kryterium jest równocześnie jego rozwiązaniem z drugim.

otrzymujemy $d\varphi^*(t)/dt|_{t=\tau} < 0$ ($\varphi^* \in C^1[U(\varepsilon; \tau)$]), zatem istnieje nie więcej niż jeden punkt $\tau \in \text{int } T$ zerowania się funkcji φ^* . Przy tym, jeżeli punkt taki istnieje, wówczas funkcja zmienia znak z dodatniego na ujemny. Sterowanie e_T^* ma więc postać następującą:

$$e^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla } t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

Odpowiadającą mu trajektorię u_T^* otrzymujemy z rozwiązanie pary równań różniczkowych (9.6). Ponieważ tylko proces postaci (*) spełnia warunki optymalności (2) - (4), zatem zgodnie z hipotezą (H) postać tę ma również proces optymalny.

(iii) Wszystkie rozwiązania układu równań (9.6) z warunkiem początkowym $u(t_0) > 0$ są równomiernie ograniczone na $[t_0, +\infty)$. Zakładając, że w procesie optymalnym $t_1 - \tau \rightarrow +\infty$ przy $|T| \rightarrow +\infty$ otrzymujemy $u^*(t_1) \rightarrow 0$. Weźmy dowolną liczbę $\theta > 0$ i sterowanie \tilde{e}_T ,

$$\tilde{e}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_0, t_1 - \theta), \\ 0 & \text{dla } t \in [t_1 - \theta, t_1]. \end{cases}$$

Niech \tilde{u}_T będzie odpowiadającą mu trajektorią technicznego uzbrojenia pracy. Wtedy

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \tilde{u}_1(t_1) = \left(\frac{a_1}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon_1)} e^{-(\mu + \lambda)\theta} > 0,$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \tilde{u}_2(t_1) = \left(\frac{a_1}{\mu + \lambda} \right)^{1/(1-\varepsilon_1)} \left(e^{-\varepsilon_1(\mu + \lambda)\theta} - e^{-(\mu + \lambda)\theta} \right) / (1 - \varepsilon_1)(\mu + \lambda) > 0.$$

Istnieją zatem liczby $\varepsilon, \theta_\varepsilon > 0$ i takie procesy $(\tilde{e}, \tilde{u})_T$, że $\tilde{u}_1(t_1), \tilde{u}_2(t_1) > \varepsilon \quad \forall T: |T| > \theta_\varepsilon$, co przeczy temu, że w procesie optymalnym $u^*(t_1) \rightarrow 0$ przy $|T| \rightarrow +\infty$.

(ii) Dowód wynika z (iii) oraz faktu, że $e^*(t_1) = 0$, niezależnie od długości horyzontu czasu T .

T w i e r d z e n i e 9.2. (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0$:

$$|T| > 2\theta_\varepsilon \implies |u_1^*(t) - \tilde{u}_1(t)| < \varepsilon, \quad u_2^*(t) = \tilde{u}_2(t) \quad \forall t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, t_1 - \theta_\varepsilon],$$

gdzie u_T^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy - rozwiązaniem zadania (9.8) - (9.9), \tilde{u}_T - trajektorią postaci (9.10).

$$(ii) \lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{u_1^*} = 0, \quad \lim_{|T| \rightarrow +\infty} \delta_{u_2^*} = -(\mu + \lambda),$$

gdzie

$$\delta_{u_{1T}^*} = \frac{1}{|T|} \int_T \frac{d}{dt} u_1^*(t) \cdot \frac{1}{u_1^*(t)} dt, \quad i=1,2.$$

D o w ó d. (1) Jeżeli $\varepsilon < d_1^{1/(1-\varepsilon_1)}$, gdzie $d_1 = a_1/(\mu+\lambda)$, wtedy wystarczy wziąć $\theta_\varepsilon = \max\{\theta_2, \theta'_\varepsilon\}$, gdzie θ_2 jest oceną długości konsumpcyjnej fazy wzrostu w zadaniu (9.8) - (9.9),

$$\theta'_\varepsilon = (1-\varepsilon_1)^{-1}(\mu+\lambda)^{-1} \ln d; \quad d = [d_1 - (u_1^0)^{1-\varepsilon_1}] / [d_1 - (d_1^{1/(1-\varepsilon_1)} - \varepsilon)^{1-\varepsilon_1}].$$

Ocena ta pozostaje słuszna dla $\varepsilon \geq d_1^{1/(1-\varepsilon_1)}$.

(11) Ponieważ

$$\begin{aligned} \delta_{u_{1T}^*} &= \frac{1}{|T|} \left[\int_{t_0}^T a_1 (u_1^*(t))^{\varepsilon_1-1} dt - (\mu+\lambda) |T| \right] = \\ &= \frac{a_1}{|T|} \int_{t_0}^T (u_1^*(t))^{\varepsilon_1-1} dt - (\mu+\lambda). \end{aligned}$$

więc wystarczy wykazać, że

$$\lim_{|T| \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{|T|} \int_{t_0}^T (u_1^*(t))^{\varepsilon_1-1} dt = \mu + \lambda, \quad (1)$$

gdzie τ jest momentem przełączenia sterowania optymalnego, $t_1 - \tau \leq \theta_2 = \text{const}$.

Przyjmijmy oznaczenie $\varphi(t) = a_1 (u_1^*(t))^{\varepsilon_1-1}$. Funkcja φ maleje na $[t_0, \tau)$, $\varphi(t) \rightarrow d_1^{-1}$ przy $t \rightarrow +\infty$, $t \leq \tau$, gdzie

$$d_1 = a_1/(\mu+\lambda), \quad \text{tzn.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \theta_\varepsilon > 0: |T| > \theta_2 + \theta_\varepsilon \implies \varepsilon > \varphi(t) - d_1^{-1} > 0 \\ \forall t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, \tau].$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{|T|} \int_{t_0}^T \varphi(t) dt &\leq \frac{a_1}{|T|} \left[\int_{t_0}^{t_0+\theta_\varepsilon} \varphi(t) dt + \int_{t_0+\theta_\varepsilon}^T (d_1^{-1} + \varepsilon) dt \right] = \\ &= \frac{a_1}{|T|} \left\{ \varphi(t_0) \theta_\varepsilon + (d_1^{-1} + \varepsilon) [|T| - (t_1 - \tau - \theta_\varepsilon)] \right\} \rightarrow \mu + \lambda + a_1 \varepsilon \end{aligned}$$

przy $|T| \rightarrow +\infty$. Równocześnie

$$\frac{a_1}{|T|} \int_{t_0}^T \varphi(t) dt \geq \frac{a_1}{|T|} \int_{t_0}^T d_1^{-1} dt = \frac{\mu + \lambda}{|T|} [|T| - (t_1 - \tau)] \rightarrow \mu + \lambda$$

przy $|\tau| \rightarrow +\infty$. Warunek (1) otrzymujemy zważywszy, że może być dowolnie małą liczbę dodatnią.

Po drugiej współrzędnej mamy

$$\delta_{u_{2\tau}}^* = - \frac{\mu + \lambda}{|\tau|} \left[(\tau - t_0) + \int_{\tau}^{t_1} \varphi(\tau; t) dt \right],$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varphi(\tau; t) &= \varphi_1(\tau; t) / \varphi_2(\tau; t), \quad \varphi_1(\tau; t) = d_2(\tau) e^{-(\mu + \lambda)(t - \tau)} + \\ &+ \varepsilon_1 d_3(\tau) e^{-\varepsilon_1(\mu + \lambda)(t - \tau)}, \end{aligned}$$

$$\varphi_2(\tau; t) = d_2(\tau) e^{-(\mu + \lambda)(t - \tau)} + d_3(\tau) e^{-\varepsilon_1(\mu + \lambda)(t - \tau)},$$

i funkcja φ jest ograniczona, zatem $\exists \bar{\varphi} > 0: |\varphi(\tau; t)| \leq \bar{\varphi} \quad \forall \tau, t$ oraz

$$\begin{aligned} \left| \delta_{u_{2\tau}}^* + \frac{\mu + \lambda}{|\tau|} (\tau - t_0) \right| &= \delta_{u_{2\tau}}^* + \frac{\mu + \lambda}{|\tau|} [|\tau| - (t_1 - \tau)] \leq \bar{\varphi} \frac{\mu + \lambda}{|\tau|} (t_1 - \tau) < \\ &\leq \bar{\varphi} \theta_2 \frac{\mu + \lambda}{|\tau|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

przy $|\tau| \rightarrow +\infty$, skąd otrzymujemy:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow +\infty} \delta_{u_{2\tau}}^* = -(\mu + \lambda).$$



5.10.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
AKADEMII EKONOMICZNEJ

173877 ZN



001-173877-00-0

Main body of the page containing several paragraphs of text. The text is extremely faint and illegible.

Akademia Ekonomiczna w Poznaniu
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

173877 2N



AE00224719

**AE POZ.
SER.2/82**