POCZĄTKI PLANIMETRYI

UŁOŻONE DLA SZKÓŁ

na wzór niemieckiéj książki p. L. Kambly, professora przy gimnazyum Św. Elżbiety w Wrocławiu.

Przez

Juliana Zaborowskiego,
Nauczyciela etatowego przy Szkole Realnéj w Poznaniu.

A. Deutsch

(Z 135 figurami wśród tekstu umieszczonemi.)

POZNAŃ.
NAKŁADEM KSIĘGARNI JANA KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO.
1857.

В.И

POCZĄTKI
PLANIMETRYI

UŁOŻONE DLA SZKÓŁ

na wzór niemieckiéj książki p. L. Kambly, professora przy gimnazyum Św. Elżbiety w Wrocławiu.

Przez

Juliana Zaborowskiego,

Nauczyciela etatowego przy Szkole Realnéj w Poznaniu.

(Z 135 figurami wśród tekstu umieszczonemi.)

POZNAŃ.

NAKŁADEM KSIĘGARNI JANA KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO.

1857.

Poznań, czcionkami M. Zoerna.

PRZEDMOWA.

Niniejszy wykład początków planimetryi, przeznaczonéj dla uczącéj się młodzieży klass niższych, osnuty jest na wzór trzeciego wydania szkólnéj książki niemieckiéj, ułożonéj przez L. Kambly, prof. przy gimnazyum Św. Elżbiety w Wrocławiu. Mimo praktycznéj strony téj książki, polecanéj przez pisma pedagogiczne i zaprowadzonéj w skutek tego po wielu szkołach szlązkich, poczyniłem jednak w polskiém jéj przerobieniu liczne zmiany, zachowując wszakże główny rozkład treści przez niemiecki oryginał podany. W obec opinii oryginału wymagają zmiany przezemnie poczynione szczegółowego usprawiedliwienia.

Pomijając drobne i bardzo mało znaczące zmiany we wstępie, przystępuję do ważniejszych. W rozdziale pierwszym zatrzymałem linie równoległe w bezpośredniém następstwie po kątach powstających przez dwie przecinające się linie, gdyż takie być powinno ich miejsce w wykładzie systematycznym; uważając jednak zasadnicze twierdzenie teoryi o liniach równoległych przez pana Kambly podane za niedostateczne, postawiłem na jego miejscu twierdzenie professora Bertrand z Genewy, które zdaniem mojém nie tylko jest ściśle umiejętne, ale zarazem dla ucznia nawet początkującego nie zbyt trudne, jak się w tym względzie do swego doświadczenia odwołać mogę. Prócz tego całą teoryą linii równoległych rozszerzyłem.

W rozdziale drugim zmieniłem znacznie szyk twierdzeń o trójkątach. Twierdzenia o przystawaniu stanęły bliżéj siebie, poprzedzone, o ile porządek tego dozwolił, jak największą ilością twierdzeń, których przedmiotem są pojedyńczego trójkąta własności; twierdzenia zaś o równoramiennym trójkącie, tudzież kilka innych, które tylko za pomocą przystawania udowodnić można, zajęły szereg dalszy, w którego końcu dopiero umieściłem zbiór odpowiednich zagadnień, w niemieckiéj książce wśród innych twierdzeń o trójkątach umieszczony. Z twierdzeń o równoległobokach zestawiłem obok siebie cztery, zawierające warunki, pod któremi każdy czworobok jest równoległobokiem, z powodu że te nierozerwaną tworzą całość, przez co nietylko powstał szyk naturalniejszy, ale także jedno twierdzenie dość ważne się przyłączyło, pominione przez oryginał niemiecki.

Rozdział trzeci o kole uległ prawie zupełnemu przerobieniu i rozszerzeniu, mianowicie przez zestawienie czterech twierdzeń o prostopadłéj ze środka koła na cięciwę spuszczonéj i jéj stosunku do odpowiedniego kąta środkowego, oraz czterech odpowiednich twierdzeń wyrażających stosunek stycznéj do promienia; wreście wymieniłem w końcu tego rozdziału pięć twierdzeń o kołach przecinających się i stykających z dodaniem jednak tylko skazówki do ich udowodnienia, z powodu, iż dla pobierającego pierwsze początki planimetryi, zdaniem mojém, podrzędnéj są wagi.

W rozdziałach następnych odstąpiłem tylko w podrzędnych bardzo przedmiotach od oryginału niemieckiego, zkąd też ich wyszczególnienie uważam za zbyteczne.

W końcu tych uwag usprawiedliwiających winien jestem dodać, iż zabierając się do ułożenia niniejszéj książki, a pragnąc zarazem oprzeć me zmiany na pewnéj powadze, poddałem projektowane poprawki pod rozstrząśnienie towarzystwa pedagogicznego poznańskiego, gdzie większa ich ilość przychylne pozyskała zdanie; pomysł jednak niektórych powstał dopiero wśród wykonania pracy, sądzę przecież, iż ich doborem myśl praktyczna kierowała.

Gdy przeznaczeniem niniejszéj książki podręcznéj jest wprowadzenie ucznia w naukę geometryi pod przewodnictwem nauczyciela, wybór przeto materyału z obfitéj treści zebranéj ostatniemu jest pozostawiony; ważniejsze wszakże twierdzenia jako konieczne w układzie, już samym drukiem rozstawionym uderzają oko, gdy przeciwnie podrzędniejsze we formie zwyczajnéj odbite zostały. Dowody wreście nie są szczegółowo wykonane, gdyż mając zapobiedz wszelkiemu mechanicznemu przyswojeniu nauki przez ucznia, tylko przez ciągłe pobudzanie do wyszukiwania łączącego wątku pomiędzy prawdami łańcuch dowodu stanowiącemi, celowi książki najstósowniéj odpowiedzieć mogą. Ztąd też forma dowodów przedstawia często tylko szereg prawd kreskami poziomemi przedzielonych. W końcu uwag dotyczących zewnętrznéj strony niniejszéj książki pominąć nie mogę zasługi nakładzcy pana Żupańskiego, który dodaniem figur wśród textu umieszczonych a wykonanych przez p. Belowa w Poznaniu, do istotnéj wartości książki dla użytku w szkołach przeznaczonéj, znacznie się przyczynił.

Poznań, dnia 28. Lutego r. 1857.

Julian Zaborowski.

WSTĘP.

Określenia.

§. 1.

Przestrzeń w nieskończoność we wszystkich rozciąga się kierunkach. Część jéj ze wszech stron ograniczona zowie się ciałem czyli bryłą matematyczną. Ciała matematyczne, jako i wszelkie kształty przestrzeni przedmiotem są nauki geometryą zwanéj.

§. 2.

Każde ciało matematyczne uważamy tylko ze względu na jego kształt i własności rozmiarowe, mając zaś także wzgląd na materyą dotykalną, wypełniającą przestrzeń, przechodzimy w zakres fizyki, badającéj ciała fizyczne, pod zmysły podpadające.

§. 3.

Trzy rozmiary czyli rozciągłości właściwe są każdemu ciału matematycznemu, jako to: szerokość, wysokość i długość.

§. 4.

Każde ciało matematyczne ograniczone jest powierzchniami, mającemi tylko dwa rozmiary, t. j. szerokość i długość; granice powierzchni mogą tylko być liniami, czyli kształtami przestrzeni o jednéj tylko rozciągłości, t. j. długości; krańce wreście czyli granice linii stanowią punkta, z któremi wyobrażenie rozciągłości wcale się nie łączy.

§. 5.

Ciało matematyczne nie składa się z powierzchni, również jak powierzchnia nie jest złożona z linii, linia nie jest złożona z punktów; poruszenie jednak punktu wykreśla linią, poruszona linia utworzyć może powierzchnią, a ta wreście stósownie poruszona nawet bryłę matematyczną.

§. 6.

Punkt poruszający się zawsze w tym samym kierunku, wykreśla linią prostą. Ze wszystkich linii, jedyną tylko linią prostą obrócić można tak około siebie, że żaden jéj punkt nie zmienia miejsca w przestrzeni.

Linia krzywa, łamana, linia mięszana.

§. 7.

Powierzchnia, na któréj można w każdym punkcie i w każdym kierunku pociągnąć linią prostą, zowie się płaszczyzną. Część ograniczoną płaszczyzny zowiemy figurą płaską. Przedmiotem planimetryi są figury i kształty na płaszczyznie wykreślone, przedmiotem zaś stereometryi kształty i figury, które w całości uważane, tylko w przestrzeni wyobrazić sobie można.

§. 8.

Zgodność pod względem wielkości zowie się równością ($=$), zgodność pod względem kształtu zowie się podobieństwem ($\sim$), zgodność wreście pod względem tak wielkości jako i kształtu, nazywa się przystawaniem ($\cong$). Znakiem nierówności jest mały kąt ($>$ albo $<$), ramionami zawsze ku większéj ilości zwrócony.

$a > b$ oznacza, że a jest większe od b,

$a < b$ zaś oznacza, że a jest mniejsze od b.

§. 9.

Pewnik. Każda ilość do siebie saméj przystaje.

$a \cong a$.

Wniosek 1. Kształty przestrzeni przystają do siebie, jeżeli położone na siebie jednę tylko tworzą figurę.

Wniosek 2. Całość równa się wszystkim częściom, z których się składa, razem wziętym, sumę zatem części wszędzie zamiast całości i odwrotnie całość w miejsce wszystkich części położyć można.

Wniosek 3. Każda część mniejsza jest od całości, w któréj skład wchodzi.

Wniosek 4. Dwie ilości równe trzeciéj, także między sobą są równe.

$$\begin{array}{l} \text{Jeżeli } a=b \\ \underline{\text{i } c=b} \\ \text{to } a=c. \end{array}$$

Wniosek 5. Równe ilości do równych dodane, dają równe sumy, od równych odjęte, równe reszty; przez równe rozmnożone, dają równe iloczyny, przez równe wreście podzielone, dają równe ilorazy.

$$\begin{array}{l} \text{Jeżeli } a=b \\ \underline{\text{i } c=d} \\ \text{to } a+c=b+d \\ \phantom{\text{to }} a-c=b-d \\ \phantom{\text{to }} a\times c=b\times d \\ \phantom{\text{to }} \frac{a}{b}=\frac{b}{d} \end{array}$$

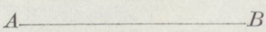
PLANIMETRYA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

1. O liniach prostych i kątach.

§. 10.

Pewnik. Położenie linii prostéj od dwóch tylko jéj punktów zależy, które w razie gdy są jéj krańcami, także długość jéj dokładnie oznaczają. Między dwoma punktami jedna tylko linia prosta jest możebna.



Wniosek 1. Dwie linie stykające się w dwóch punktach, jednę tylko linią prostą stanowić mogą.

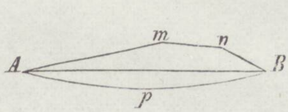
Wniosek 2. Dwie linie proste tylko w jednym punkcie przecinać się mogą.

§. 11.

Zagadnienie. Połącz dwa dane punkta linią prostą. — Przedłuż daną linią prostą o część równą innéj danéj linii i t. p.

§. 12.

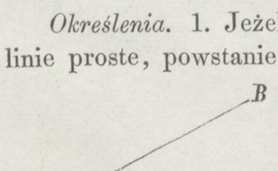
Pewnik. Linia prosta najkrótszém jest połączeniem dwóch punktów. AB < AmnB i < ApB. Linia prosta wyraża przeto także odległość właściwą dwóch punktów.



§. 13.

Określenia. 1. Jeżeli z jednego punktu wyprowadzimy dwie linie proste, powstanie kąt. (Winkel).

2. Kąt wyraża wzajemne rozchylenie dwóch linii prostych z jednego punktu wychodzących. — Punkt ten zowie się wierzchołkiem (Scheitelpunkt), linie zaś ramionami (Schenkel).

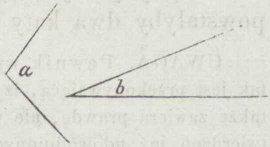


3. Kąt dany oznacza się albo tylko jedną literą między

ramionami w bliskości wierzchołka wpisaną, albo też trzema literami, z których dwie przy końcach ramion, trzecia zaś przy wierzchołku się kładzie; w tym razie jednak wymawiając kąt, wierzchołkową literę zawsze w środku położyć należy. W razie jednak, gdy pomyłka zajść nie może, nawet tylko wierzchołkowa litera wystarcza, n. p. $\angle$BAC albo $\angle$a, albo $\angle$A.

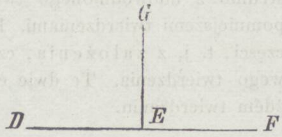
§. 14.

Wniosek. Wielkość kąta zależy nie od długości ramion, lecz od wielkości ich wzajemnego rozchylenia, n. p. $\angle a > \angle b$.



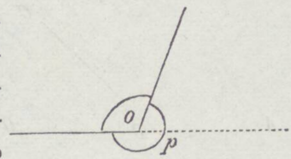
§. 15.

Określenie. Kąt, którego ramiona w przeciwne strony zwrócone, tworzą jednę linią prostą, zowie się kątem półpełnym (Gestreckter Winkel), n. p. $\angle$DEF.



Kąt mniejszy od półpełnego zowie się wklęsłym (hohler Winkel), n. p. $\angle$o; większy zaś od półpełnego wypukłym (erhabener Winkel), n. p. $\angle$p.

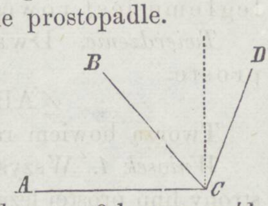
Rozchylając ramiona kąta półpełnego tak dalece, że ostatecznie się nakryją, jednę tylko linią tworząc, otrzymamy kąt pełny, (voller Winkel), wyrażający rozwartość całkowitą około jednego punktu pomyślaną (płaszczyznę nieskończoną).



Kąt prosty (R), (rechter Winkel) jest połową kąta półpełnego, czyli czwartą częścią kąta pełnego, n. p. $\angle$DEG.

Ramiona kąta prostego stoją na sobie prostopadle.

Kąt ostry (spitzer Winkel) jest mniejszy, kąt rozwarty (stumpfer Winkel) większy od prostego; n. p. $\angle ACB < 1R$, $\angle ACD > 1R$.



Wniosek. Kąt półpełny równa się dwom kątom prostym, kąt pełny $=$ 2 kątom półpełnym, czyli czterem prostym (4 R).

§. 16.

Twierdzenie. Wszystkie kąty półpełne są sobie równe, bo tak położyć można jeden na drugi, iż zupełnie się nakryją.

Wniosek 1. Wszystkie także kąty proste są sobie równe (jako połówki równych całości).

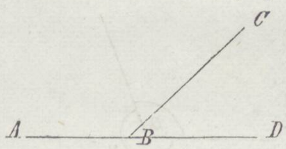
Wniosek 2. Z punktu danego linii prostéj tylko jednę prostopadłą wyprowadzić można.

Bo gdyby z jednego punktu dwie prostopadłe wychodziły, powstałyby dwa kąty proste nierówne.

UWAGA. Pewnik wyraża prawdę matematyczną, która sama przez się tak jest przekonywającą, iż żadnego dowodu nie wymaga, twierdzenie zaś także zawiera prawdę, ale wymagającą koniecznie dowodu za pomocą innych twierdzeń już udowodnionych, lub też za pomocą pewników. Ostatecznie przeto cała budowa umiejętności matematycznéj zasadza się na pewnéj małéj liczbie pewników. Wnioskami zowiemy prawdy, których prawdziwość bezpośrednio z udowodnionego twierdzenia wypływa; wnioski są przeto też tylko pomniejszemi twierdzeniami. Każde twierdzenie lub wniosek składa się z dwóch części, t. j. z założenia, czyli części stanowiącéj przypuszczenie i z właściwego twierdzenia. Te dwie części uczeń dokładnie rozróżnić powinien w każdém twierdzeniu.

§. 17.

Określenie. Kąty przyległe (Nebenwinkel) zowią się takie, które mają wierzchołek i jedno ramię wspólne, a których dwa inne ramiona tworzą linią prostą, n. p. $\angle$ABC i $\angle$CBD. Przedłużając ramię jedno jakiegokolwiek kąta, otrzymujemy kąty przyległe.



Określenie 2. Równe dwa kąty przyległe są zarazem też proste. Kąt prosty jest więc taki, który swemu przyległemu jest równy.

Twierdzenie. Dwa kąty przyległe ważą dwa kąty proste.

$$\angle ABC + \angle CBD = 2R.$$

Tworzą bowiem razem kąt półpełny ABD.

Wniosek 1. Wszystkie kąty około jednego punktu z jednéj strony linii prostéj leżące, ważą z tego samego powodu 2 proste.

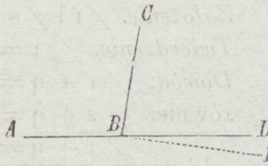
Wniosek 2. Wszystkie kąty około jednego punktu ważą 4 proste. Bo przedłużywszy jakiekolwiek ramię poza wierzchołek, otrzymamy z obu stron linii prostéj dwie niejako wiązki kątów, z których każda równa się dwom prostym.

§. 18.

Twierdzenie. Dwa kąty sąsiednie ważące razem dwa kąty proste, są zarazem kątami przyległemi.

Założenie. ∠ABC + CBD = 2R.

Twierdzenie. ∠ABD jest linią prostą, czyli BD jest przedłużeniem AB.



Wewpr.

Dowód. Przypuściwszy, że nie BD tylko inna jaka linia, n. p. BE, jest przedłużeniem ramienia BA, otrzymujemy:

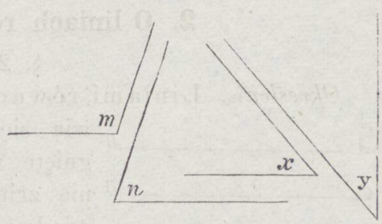
∠ABC + CBE = 2R jako kąty przyległe, podł. założenia zaś jest ∠ABC + CBD = 2R; ztądby wynikło, że ∠ABC + CBE = ∠ABC + CBD podług §. 9. wniosek 4., odjąwszy zaś po obu stronach ∠ABC, otrzymalibyśmy ∠CBE = CBD podług §. 9. wniosku 5., co jednak podług §. 9. wniosku 3. jest niepodobieństwem; przypuszczenia więc, że BE jest przedłużeniem ramienia AB uczynić nie można, twierdzenie przeto jest prawdziwe.

UWAGA. Twierdzenie powyższe odwróceniem jest twierdz. §. 17., sposób zaś dowodzenia, którego teraz użyliśmy, jest d o w o d e m n i e w p r o s t p r z e p r o w a d z o n y m, w takim razie dowodzi się, że i n a c z é j b y ć n i e m o ż e, gdy przeciwnie dowód zwyczajny okazuje bezpośrednio, że treść twierdzenia musi być prawdziwą czyli że t a k b y ć m u s i.

§. 19.

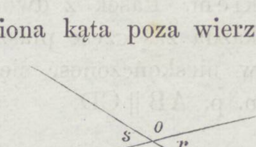
Określenie. Dwa kąty, których suma równa się dwom prostym, zowią się s p e ł n i a j ą c e m i (Supplementwinkel) n. p. ∠m i ∠n.

Kąty zaś dwa, których suma równa się jednemu prostemu, zowią się d o p e ł n i a j ą c e m i (Complementwinkel), n. p. ∠x i ∠y.



§. 20.

Określenie. Przedłużywszy oba ramiona kąta poza wierzchołek, otrzymamy dwie pary kątów zwanych w i e r z c h o ł k i e m p r z e c i w l e g ł e (Scheitelwinkel); n. p. ∠r i ∠s, ∠o i ∠q.



Kąty wierzchołkiem przeciwległe są zatem takie, których ramiona są dwoma się przecinającemi liniami.

Twierdzenie. Kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe.

Założenie. $\angle$ r i $\angle$ s są kątami wierzchołkiem przeciwległemi.

Twierdzenie. $\angle r = \angle s$.

Dowód. $\angle r + q = 2R$ jako kąty pczyległe,

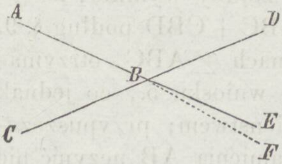
również $\angle s + q = 2R$

$\angle r + q = s + q$ podług §. 9. wniosek 4.

odciągając zaś $\angle$ c z obu stron, otrzymamy $\angle r = s$.

§. 21.

Twierdzenie. (Odwrócenie §. 20.) Dwa kąty równe można w dwa kąty wierzchołkiem przeciwległe zestawić.



Założenie, $\angle ABC = DBE$ i CBD jest linią prostą.

Twierdzenie. ABE jest także linią prostą.

Dowód (nie wprost). Przypuściwszy, że nie BE tylko BF jest przedłużeniem ramienia AB, otrzymalibyśmy

$\angle ABC = DBF$ podług twierdz. poprzedz.

podł. założ. zaś jest $\angle ABC = DBE$

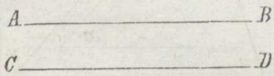
zatem $\angle DBF = DBE$, co być nie może,

bo część nie wyrównywa całości, zatem twierdzenie jest prawdziwe.

2. O liniach równoległych.

§. 22.

Określenie. Liniami równoległemi (Parallel-Linien) zowią się linie na płaszczyznie pociągnięte w nieskończoność i nigdzie się nie zcinające. Część płaszczyzny pomiędzy niemi zawarta zowie się paskiem. Pasek z dwóch stron w nieskończoność się rozciąga, każda zaś część płaszczyzny kątem objęta tylko w jednę stronę w nieskończoność się rozszerza. Znak równoległości jest ||, n. p. AB || CD.



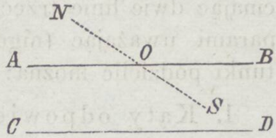
Pewnik.

§. 23.

Twierdzenie 1. Każda część nieskończonéj płaszczyzny, jakimkolwiek kątem objęta, większa jest od każdego paska.

Dowód. Że każda część nieskończonéj płaszczyzny kątem objęta, czyli po prostu, że każdy kąt większy jest od każdego danego paska, wynika ztąd, że bardzo nawet małym kątem obłożyć można całkowitą nieskończoną płaszczyznę, kładąc tenże kąt około jednego punktu. Kładąc zaś pasek obok paska, nigdy nie wyłożymy nieskończonéj płaszczyzny, otrzymując wtenczas zawsze tylko pasek, chociaż nieco szerszy. Pewna liczba kątów nakryć może nieskończoną płaszczyznę, gdy przeciwnie żadna oznaczona ilość pasków jéj nie nakryje.

Twierdzenie 2. Przez punkt zewnątrz linii prostéj leżący tylko jednę do niéj równoległą poprowadzić można.

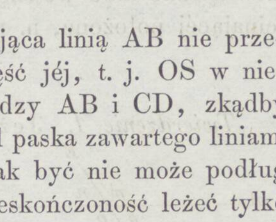


Dowód. Gdyby przez punkt O linii AB równoległéj do CD jeszcze jedna linia równoległa, n. p. linia NS była możebna, toby musiała linia OS w nieskończoność leżeć w pasku objętym liniami AB i CD, ztądby wynikło, że część płaszczyzny kątem BOS objęta, od paska mniejszą być musi, będąc tylko częścią jego. To jednak być nie może podług §. 23.; linia NS nie może zatem być równoległą do CD. Na podobną sprzeczność naprowadziłoby nas przypuszczenie, że inna jaka linia przez punkt O przeciągnięta do CD równoległą być może.

Twierdzenie 3. Linia prosta przecinająca jednę z dwóch równoległych, przecina także i drugą. (Figura poprzedzającego twierdzenia).

Dowód. Gdyby linia NS przecinająca linią AB nie przecinała także linii CD, musiałaby część jéj, t. j. OS w nieskończoność przedłużona leżeć pomiędzy AB i CD, zkądby wynikło, że kąt BOS jest mniejszy od paska zawartego liniami AB i CD jako część jego; co jednak być nie może podług §. 23. Gdy więc OS nie może w nieskończoność leżeć tylko w pasku, musi przeto linią CD przecinać.

Twierdzenie 4. Dwie linie, z których każda równoległa jest do trzeciéj, także między sobą są równoległe.

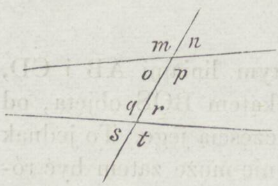


Dowód. Jeżeli AB i CD są równoległe do EF, to AB jest także równoległa do CD, bo gdyby AB i CD nie były równoległe, musiałyby się przecinać, a w takim razie mielibyśmy przez punkt jeden dwie linie pociągnięte i zarazem do EF równoległe, co podług drugiego twierdzenia jest niemożebném.

§. 24.

Określenia. Dwie linie nierównoległe zowią się ze względu na kierunek, w którym dostatecznie przedłużone, się przecinają, schylającemi się (convergent), ze względu zaś na przeciwny kierunek rozchylającemi się (divergent). Przecinając dwie linie trzecią, otrzymujemy 8 w ogóle kątów, które parami uważając (nigdy jako przyległe) na następujące gatunki podzielić można:

1. Kąty odpowiednie (correspondirende Winkel) leżą z téj saméj strony linii przecinającéj tak, że jeden zawsze leży zewnątrz, a drugi wewnątrz i ku jednéj stronie zwrócone, n. p. $\angle$ m i $\angle$ q, n i r, o i s, p i t;

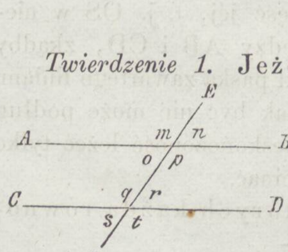


2. Kąty naprzemian ległe (Wechsel-Winkel) są kąty albo wewnątrz albo zewnątrz linii równoległych położone, zawsze jednak z obu stron przecinającéj, n. p. $\angle$ o i r, p i q, m i t, n i s.

3. Kąty jednostronne (entgegengesetzte Winkel) są albo zewnętrzne albo wewnętrzne i zawsze z téj saméj strony przecinającéj położone, n. p. $\angle$ o i q, p i r, m i s, n i t.

§. 25.

Twierdzenie 1. Jeżeli jedna para kątów odpowiednich jest równa, więc pary inne kątów odpowiednich i wszystkie pary kątów naprzemian ległych są sobie równe, a kąty jednostronne ważą 2R.



Założnie. m = q.

Twierdzenie. I. o = s, n = r, p = t; II. o = r, p = q, m = t, n = s; III. o + q = 2R, m + s = 2R, p + r = 2R i n + t = 2R.

I. *Dowody na kąty odpowiednie.*

$$\begin{array}{l} m+o=2R \\ \underline{q+s=2R} \text{ jako przyległe} \\ m+o=q+s \text{ podł. §. 9. wniosk. 4., równe od równ.} \end{array}$$

odjąwszy $m=q$

otrzymamy $\angle o=\angle s$.

W podobny sposób dowodzimy, że $n=r$, że zaś $p=t$, wynika łatwo ztąd, że te dwa kąty są wierzchołkiem przeciwległemi do kątów równych m i q.

II. *Dowody na równość kątów naprzemian ległych.*

Że $\angle o=\angle r$ dowodzę tak:

$$\left.\begin{array}{l} m+o=2R \\ q+r=2R \end{array}\right\} \text{ zatem } m+o=q+r, \text{ a ponieważ podług założenia } \underline{m=q}$$

zatem $o=r$.

Że $\angle p=q$ wynika ztąd, że p = jest m jako kąty wierzchołkiem przeciwległe, a gdy m było równe q, przeto też q jest równe p.

Że $n=s$, wynika ztąd: $m+n=2R$

$$\begin{array}{l} \underline{q+s=2R} \text{ jako kąty przyległe,} \\ \text{zatem } m+n=q+s \text{ podł. §. 9. wniosek 4.} \end{array}$$

równe od równego odjąwszy $\underline{m=q}$

otrzymuję $\angle n=\angle s$.

Że $m=t$ wynika ztąd, iż $t=q$ jako kąty wierzchołkiem przeciwległe, a ponieważ $m=q$, przeto też $m=t$.

III. *Dowody na kąty jednostronne.*

Że $o+q=2R$, wynika ztąd, iż $m+o=2R$, zamiast m mogę położyć q, zatem $o+q=2R$.

Że $p+r=2R$ wynika ztąd, iż $q+r=2R$, zamiast q położyć mogę m, a zamiast m kąt p, zatem $p+r=2R$.

Że $m+s=2R$ wynika ztąd, że $q+s=2R$, zamiast q położyć mogę m, zatem $m+s=2R$.

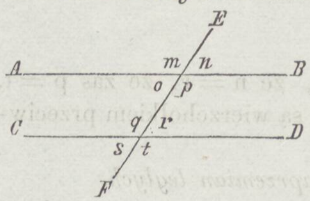
Że $n+t=2R$ wynika ztąd, że $m+n=2R$, zamiast m położyć mogę q podług założenia, a zamiast q położyć mogę t, bo są kątami wierzchołkiem przeciwległemi, a ponieważ $m+n=2R$, więc też $n+t=2R$.

Twierdzenie 2. Jeżeli jedna para kątów naprzemian ległych jest równa, więc i inne pary kątów naprzemian ległych i odpowiednich są równe, a kąty jednostronne wynoszą 2R.

Założenie. $o = r$.

Twierdzenie. I. $p = q$, $m = t$, $n = s$; II. $m = q$, $o = s$, $n = r$, $p = t$; III. $o + q = 2R$, $p + r = 2R$, $m + s = 2R$, $n + t = 2R$.

I. *Dowody na równość kątów naprzemian ległych.*



Że $p = q$, wynika ztąd, że

$$\begin{array}{l} o + p = 2R \\ \underline{q + r = 2R} \end{array}$$

zatem $o + p = q + r$, odjąwszy równe od równ. $\underline{o = r}$

otrzymuję $p = q$.

Że $m = t$ i $n = s$ także dowieść nie trudno.

II. *Dowody na równość kątów odpowiednich.*

Że $m = q$ wynika ztąd, że $m + o = 2R$

$$\underline{q + r = 2R}$$

zatem $m + o = q + r$,

odjąwszy równe od równego $\underline{o = r}$

otrzymuję $m = q$.

Że $o = s$, $n = r$ i $p = t$, także okazać nie trudno.

III. *Dowody na kąty jednostronne.*

$o + q = 2R$, bo $q + r = 2R$, zamiast r kładę o, zatem $o + q = 2R$.

$p + r = 2R$, bo $o + p = 2R$, zamiast o kładę r, zatem też $p + r = 2R$.

Że $m + s = 2R$, wynika ztąd, że $m + o = 2R$, zamiast o kładę r, a zamiast r kładę s, zatem $m + s = 2R$.

Że $n + t = 2R$, wynika ztąd, że $t + r = 2R$, zamiast r kładę o, a zamiast o kładę n, przeto $n + t = 2R$.

Twierdzenie 3. Jeżeli jedna para kątów jednostronnych waży 2R, więc i inne pary kątów jednostronnych ważą dwa proste, a kąty odpowiednie i naprzemian ległe są sobie równe.

Założenie. $o + q = 2R$.

Twierdzenie. I. $p + r = 2R$, $m + s = 2R$, $n + t = 2R$; II. $m = q$, $o = s$, $n = r$, $p = t$; III. $o = r$, $p = q$, $m = t$, $n = s$.

I. *Dowody na kąty jednostronne.*

Że $p + r = 2R$ wynika ztąd, że $o + p = 2R$

$q + r = 2R$ jako przyległe

równe do równ. dodawszy, otrzymuję $o + p + q + r = 4R$, a ponieważ $o + q$ podług założenia $= 2R$, przeto $p + r = 2R$.

Że $m+s=2R$ dowodzi się zupełnie w podobny sposób.

Że zaś $n+t=2R$ wynika ztąd, że $n=o$ i $t=q$.

II. *Dowody na kąty odpowiednie.*

Że $m=q$ wynika ztąd, iż $o+q=2R$ podług założenia
$m+o=2R$ jako przyległe
zatem $o+q=m+o$
odjąwszy $o=o$
otrzymuję $q=m$.

Że $o=s$ udowodnia się zupełnie w podobny sposób.

Że $n=r$, wynika ztąd, iż $q+r=2R$
$q+o=2R$
zatem $q+r=q+o$
odjąwszy $q=q$
otrzymuję $r=o$, a ponieważ
$o=n$ jako naprzemian ległe
przeto $r=n$.

Że $p=t$ udowodnia się w podobny zupełnie sposób, wychodząc ztąd, że $o+p=2R$, $o+q=2R$ i t. d.

III. *Dowody na równość kątów naprzemian ległych.*

Że $o=r$, wynika ztąd, iż $o+q=2R$ podług założenia
$q+r=2R$ jako przyległe
zatem $o+q=q+r$,
odciągnąwszy po obu stronach $q=q$
otrzymam $o=r$.

Że $p=q$, wynika ztąd, iż $o+p=2R$
$o+q=2R$
$o+p=o+q$
odciągam $o=o$
zatem $p=q$.

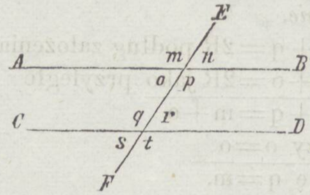
Że $m=t$ wynika ztąd, iż $m=q$ podlug poprzedzających dowodów II., a $q=t$, przeto $m=q$
$t=q$
$m=t$.

Że $n=s$, wynika ztąd, iż podług II. $n=r$, r zaś $=s$ jako kąty wierzchołkiem przeciwległe, przeto $n=r$
$s=r$
$n=s$.

UWAGA. Trzy te twierdzenia zawierają mnóstwo rozmaitych zagadnień, jeżeli zamiast danych założeń postawimy inne, do których uczeń dowody samodzielnie wyszuka.

§. 26.

Twierdzenie 1. Jeżeli jedna para kątów odpowiednich, albo naprzemianległych jest równa, albo wreście jedna para kątów jednostronnych waży 2R, linie te kąty tworzące muszą być równoległe.



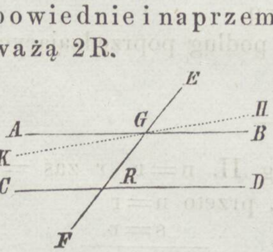
Założenie. m=q, albo o=r, albo o+q=2R i t. d.

Twierdzenie. AB || CD.

Dowód. Z twierdzeń poprzedzających wynika, że jeżeli m=q, i inne także kąty odpowiednie i naprzemian ległe równe być muszą, i że jednostronnych pary ważą 2R. Wystawmy sobie całą figurę przeciętą tam, gdzie prowadzi linia EF, wtenczas odwróconą prawą stronę przełożyć możemy tak na lewą, że kąt t padnie na ∠ m, ∠ r na ∠ o i t. d., linie więc dokładnie się nakryją. To nakrycie zaś dowodzi, że muszą także być równoległe, bo gdyby się przecinały, to też musiałyby w takim razie z obu stron linii CF się przecinać, co jednak sprzeciwiałoby się temu, że dwie linie proste tylko w jednym punkcie ścinać się mogą. Gdy więc jest niepodobieństwem, aby AB i CD się przecinały, muszą przeto być też równoległe.

UWAGA. W jakim razie możnaby w dowodzie powyższym przełożyć bez odwrócenia tak prawą stronę na lewą, aby się nakryły podobnie jako jedna karta książki przełożona na drugą?

Twierdzenie 2. (Odwrócenie przeszłego). Dwie linie równoległe przecięte trzecią, tworzą równe kąty odpowiednie i naprzemian ległe, a ich kąty jednostronne ważą 2R.



Założenie. AB || CD.

Twierdzenie. ∠ AGE = ∠ CRE, ∠ AGR = ∠ CRF i t. d.

Dowód. Gdyby ∠AGE nie był = ∠CRG, musiałby od niego być albo mniejszy, albo też większy; w pierwszym razie, t. j. gdyby ∠AGE był mniejszy od ∠CRG, dodaćbyśmy mogli do niego taki kąt, żeby KGE było = CRE, w tym razie zaś podług poprzedzającego twierdzenia KG byłaby równoległą do linii CD, i mielibyśmy, ponieważ z założenia jest też AB || do CD, przez punkt G poprowadzone dwie linie do linii CD zarazem równoległe, co być nie może podług §. 23. twierdzenia 2. Do podobnéj sprzeczności doprowadziłoby nas przypuszczenie, że $\angle$ AGE jest większy od CRG. Gdy zatem $\angle$ AGE ani $>$ ani $<$ być nie może od $\angle$ CRG, więc też musi być równy. Dowiódłszy zaś, że jedna para kątów odpowiednich jest równa, podług §. 25. twierdzenia 1. wyprowadzam równość par kątów innych odpowiednich i naprzemianległych i że jednostronne ważą 2R.

§. 27.

Twierdzenie. Jeżeli suma dwóch kątów jednostronnych wewnętrznych mniejsza jest od 2R, linie schylają się z téj strony przecinającéj, po któréj są położone. (Fig. §. 26. 2.)

Założenie. $\angle$ KGR + CRG $<$ 2 R.

Twierdzenie. Linie KH i CD schylają się po lewéj stronie.

Dowód. Do kąta KGR dodaję taką część, iżby kąt $\angle$ AGR był spełniającym do $\angle$ CRG, wtenczasby linia AB musiała być równoległą do CD, podług §. 26., 1. KG zaś przecinając linią AB, przecinać też musi linią CD do téjże równoległą i to po lewéj stronie, bo z wykreślenia wynika, iż przedłużona KG, t. j. linia GH poza linią GB leży.

UWAGA. Założywszy, że kąt KGR + CRG $<$ 2R, można dla wprawy w dowodzeniu okazać, że HGR + GRD $>$ 2R. Co wyniknie z przypuszczenia, że $\angle$ KGE $>$ od CRG i t. d.

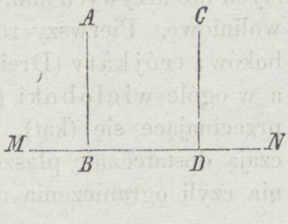
§. 28.

Twierdzenie 1. Linie prostopadłe stojące na téj saméj linii prostéj zarazem są równoległe.

Założenie. AB i CD stoją prostopadle na MN.

Twierdzenie. AB || CD.

Dowód. $\angle$ ABD = CDN jako kąty proste, a ponieważ są zarazem kątami odpowiedniemi, przeto linie muszą być równoległe podług §. 26. tw. 1.



Twierdzenie 2. (Odwrócenie) Jeżeli jedna z dwóch linii równoległych na trzeciéj linii stoi prostopadle, to i druga musi także stać prostopadle.

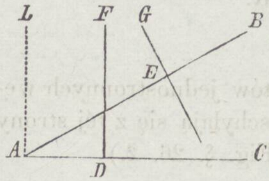
Założenie. AB || CD i AB prostopadła na MN.

Twierdzenie. CD stoi prostopadle na MN.

Dowód. $\angle ABD = CDN$ jako kąty odpowiednie
$\angle ABD = R$ podług założenia
przeto $\angle CDN = R$.

§. 29.

Twierdzenie. Dwie linie stojące prostopadle każda na jednem ramieniu kąta wklęsłego, dostatecznie przedłużone przecinać się muszą.



Założenie. EG prostopadła na AB i DF prostopadła na AC.

Twierdzenie. DF i EG przecinają się.

Dowód. Poprowadziwszy AL || do DF, a więc prostopadle na AC, otrzymujemy: $\angle LAE < R$, ponieważ zaś $\angle AEG = R$ podług założenia, przeto
$\angle LAE + AEG < 2R$
zatem AL i EG przecinają się podług §. 27.
zatem także DF i EG przecinają się podług §. 23., 3.

UWAGA. W razie gdy kąt BAC jest kątem rozwartym, rysujemy jego kąt przyległy i dowód zupełnie w taki sam sposób się odbywa. Jeżeli jest kątem prostym, twierdzenie bezpośrednio wynika z §. 28., 1.

ROZDZIAŁ DRUGI.

1. O płaskich figurach w ogólności.

§. 30.

Stósownie do figury obwodu, który składać się może z prostych lub krzywych linii, rozróżniamy figury prostoliniowe i krzywoliniowe. Pierwszy rodzaj zawiera znów stósownie do ilości boków: trójkąty (Dreiecke), czworoboki (Vierecke) i t. d. a w ogóle wieloboki (Vielecke, Polygone). Dwie linie bądź przecinające się (kąt), bądź równoległe (pasek), nie ograniczają dostatecznie płaszczyzny, do której zupełnego obwiedzenia czyli ograniczenia najmniej trzy linie proste są potrzebne.

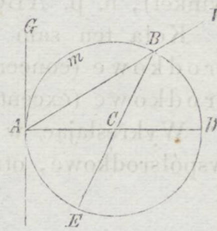
§. 31.

Określenia. Kąty wklęsłe wieloboku zowią się, uważane ze środka figury względem niej wychylonemi, czyli wyskakującemi (Ausspringende Winkel), wypukłe zaś kąty jéj kątami wsuniętemi (Einspringende Winkel). Kąt powstający przez przedłużenie jakiego boku figury i zewnątrz wieloboku leżący zowie się jéj kątem zewnętrznym (Aussen-Winkel). Przekątnią (Diagonale) nazywamy we wieloboku każdą linią dwa wierzchołki przeciwległe ze sobą łączącą.

§. 32.

Jedyną figurą krzywoliniową należącą w zakres niższéj planimetryi jest koło (Kreis).

Określenia. Koło jest figurą ograniczoną linią krzywą jednostajnie w téj saméj odległości od jednego punktu zakrzywioną. Koło powstaje w sposób taki, że linią AC około nieruchomego punktu C poruszając, kąt pełny określimy. Granicę koła zowiemy obwodem (Peripherie), punkt zaś środkowy środkiem (Mittelpunkt). Przez połączenie środka z jakim punktem obwodu za pomocą linii prostéj powstaje promień (Radius) n. p. AC, a przedłużając promień poza środek aż do obwodu, otrzymujemy średnicę (Durchmesser), n. p. AD. Cięciwą (Sehne) nazywamy linią łączącą 2 punkta obwodu, a nieprzechodzącą przez środek koła, n. p. AB. Przedłużając z obu stron cięciwę, otrzymujemy sieczną (Secante), n. p. AF. Styczna (Tangente) jest linia, która zewnątrz koła położona, tylko jeden punkt z obwodem ma wspólny, n. p. AG. Każda część obwodu zowie się łukiem (Bogen), n. p. AmB.



Wniosek 1. Wszystkie promienie w tém samém kole położone są sobie równe, również i wszystkie średnice:

$$AC = BC = EC \text{ i } AD = BE.$$

Wniosek 2. Punkt, którego odległość od środka koła mniejsza jest od promienia, leży w kole, skoro zaś odległość ta większa jest od promienia, zewnątrz koła, a jeżeli jest promieniowi równa, ów punkt leży w samym obwodzie.

Zagadnienie. Jak się wykreśla koło danym promieniem za pomocą cyrkla?

§. 33.

Określenia. Cięciwa dzieli koło na dwie części, **odcinkami** (Kreisabschnitte) zwane; są one ograniczone łukiem i cięciwą, n. p. ⌓AmB.

Wycinkiem (Kreisausschnitt) jest część koła otoczona dwoma promieniami i łukiem od tychże zawartym, n. p. △AmBC.

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, zowie się kątem środkowym (Centriwinkel), n. p. $\angle$ACB; kąt zaś, którego wierzchołek leży w obwodzie, a ramiona są cięciwami, zowie się kątem **obwodowym** czyli **wpisanym** (Peripheriewinkel), n. p. ABC.

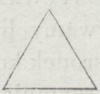
Koła ten sam środek mające wspólny, zowią się **współśrodkowe** (concentrisch), w przeciwnym razie **rozdzielnośrodkowe** (excentrisch).

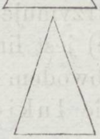
Wykreślając w kole większém koło mniejsze, ale z niém współśrodkowe, otrzymujemy **pierścień** (Ring).

2. O trójkątach.

§. 34.

Określenia. **Równobocznym trójkątem** (gleichseitiges Dreieck) zowie się ten, którego wszystkie boki są równe; **równoramiennym** (gleichschenkliges Dreieck) taki, którego tylko 2 boki są równe, a którego trzeci większy lub mniejszy zowie się **podstawą** (Basis); **nierównoboczny** (ungleichseitiges Dreieck) ma wreście wszystkie boki nierówne.



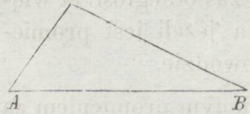


§. 35.

Twierdzenie. **W każdym trójkącie suma dwóch boków większa jest od trzeciego.**

Że AC+CB>AB, wynika bezpośrednio z §. 12.

Wniosek. W każdym trójkącie jest różnica dwóch boków mniejsza od trzeciego.



Dowód. Wiemy, że AC+CB>AB; jeżeli zaś od ilości nierównych odciągniemy ilości równe, otrzymamy znów nierówne, tak że tam, gdzie było więcéj, także pozostanie więcéj:

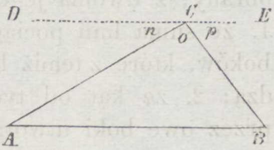
$$AC + CB > AB$$
odejmując $CB = CB$

otrzymuję $AC > AB - CB$.

§. 36.

Twierdzenie. W każdym trójkącie suma wszystkich kątów waży 2R.

Dowód. Poprowadziwszy przez punkt C linią DE równoległą do AB otrzymamy:



$\angle n + o + p = 2R$ podł. §. 17. wniosk. 1.

$\left.\begin{array}{l}\angle n = A \\ \angle p = B\end{array}\right\}$ podług §. 26. 2.

a zatem $\angle A + o + B = 2R$, bo zamiast n można położyć A, a zamiast p kładę B.

Wniosek 1. Suma dwóch tylko kątów w trójkącie jest mniejsza od 2R; t. j. o kąt trzeci.

Wniosek 2. Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa kąty równe, i trzecie kąty są sobie równe.

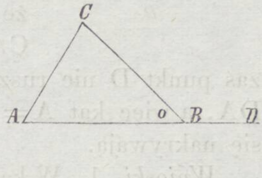
Wniosek 3. W trójkącie tylko jeden z kątów może być prostym lub rozwartym.

§. 37.

Określenie. Trójkąty dzielą się podług kątów na prostokątne (rechtwinkliges D.), o jednym kącie prostym, na rozwartokątne (stumpfwinkliges D.), o jednym kącie rozwartym i na ostrokątne (spitzwinkliges D.), o trzech kątach ostrych. W trójkącie prostokątnym zowie się bok prostemu kątowi przeciwległy przeciwprostokątnią (Hypothenuse), ramiona zaś kąta prostego przyprostokątniami (Katheten).

§. 38.

Twierdzenie. Kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych jemu przeciwległych.



Twierdzenie. $\angle CBD = A + C$.

Dowód. $\angle CBD + CBA = 2R$ jako przyległe. $\angle A + C + o = 2R$ jako kąty w trójk. $\angle CBD + o = A + C + o$

odejmując zaś $o = o$

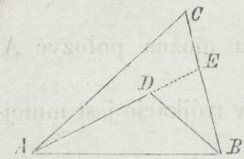
otrzymuję $CBD = A + C$

Wniosek. Kąt zewnętrzny w trójkącie większy jest od każdego wewnętrznego jemu przeciwległego.

Zagadnienie. Ile ważą wszystkie 3 kąty zewnętrzne w trójkącie?

§. 39.

Twierdzenie. Jeżeli jakikolwiek punkt w trójkącie dowolnie obrany, z dwoma jego wierzchołkami połączymy, twierdzimy: 1. że suma linii pociągnionych mniejsza jest od sumy dwóch boków, które z temiż liniami razem na trzecim boku się schodzą; 2. że kąt od tychże linii zawarty większy jest od kąta przez owe boki utworzonego.



Twierdzenie 1. $AC+CB>AD+DB$.

Dowód. Przedłużywszy AD aż do E, otrzymuję trójkąt ACE.

Bok $AC+CE>AE$, dodając po obu stronach EB otrzymuję $AC+CB>AE+EB$.

Podobnież $AE+EB>AD+DB$

tem bardziéj zatem $AC+CB>AD+DB$.

Twierdzenie 2. $\angle ADB>C$

Dowód. $\angle ADB>AEB$ podług §. 38. wniosek.

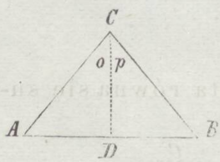
$\angle AEB>C$ z téj saméj przyczyny;

tem bardziéj też $\angle ADB>C$.

§. 40.

Twierdzenie. W trójkącie równoramiennym kąty przypodstawne są sobie równe.

Założenie $AC=CB$.



Twierdzenie. $\angle CAD=\angle CBD$.

Dowód. Dla dowodu wyobrażam sobie kąt C podzielony linią CD tak, że $o=p$, i przekładam prawą stronę figury tak na lewą, że CB padnie w kierunku CA, a że $CB=CA$, więc też B padnie na A; ponieważ zaś punkt D nie rusza się z miejsca, więc też DB padnie na DA, a więc kąt $A=\angle B$, dla tego, że ramiona ich wzajemnie się nakrywają.

Wnioski. 1. W każdym trójkącie równoramiennym kąt przypodstawny zawsze jest kątem ostrym.

2. W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe.
3. W trójkącie równobocznym każdy kąt $=\frac{2}{3}$R.
4. W trójkącie równoramiennym kąt przypodstawny równa się połowie kąta zewnętrznego przy wierzchołku położonego.

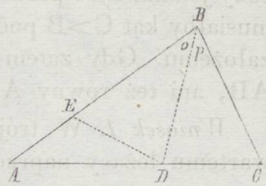
UWAGA. Przekładając figury na siebie celem udowodnienia ich równości, rozróżnić należy dokładnie, czy linia jaka padnie na drugą dokładnie, czy też tylko w kierunku jéj. Aby w powyższéj figurze CB padło w kierunku AC, wystarcza tylko równość kątów o i p; aby zaś CB dokładnie nakryło AC, nietylko kąty ale zarazem i boki AC i CB równe być muszą.

§. 41.

Twierdzenie. W każdym trójkącie leży naprzeciw boku większego kąt większy, naprzeciw boku mniejszego kąt mniejszy,

Założenie. AB > BC.

Twierdzenie. C > A.



Dowód. Dla dowodu wyobrażam sobie kąt B przedzielony linią BD na 2 równe części tak, że $\angle o = \angle p$; poczem przekładam prawą stronę figury tak na lewą, że BC padnie wzdłuż BA; ponieważ zaś BC < BA, przeto C padnie w punkcie E tak, że CB = BE, DC zaś padnie na DE. $\angle$BED jest jako kąt zewnętrzny do trójkąta DAE większy od $\angle$A, a ponieważ $\angle$BED $= \angle$BCD, przeto też $\angle$BCD > od BAD.

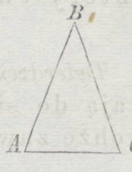
Wniosek. W trójkącie nierównobocznym wszystkie kąty są także nierówne.

§. 42.

Twierdzenie. W trójkącie naprzeciw równych kątów leżą także równe boki.

Założenie. $\angle A = \angle C$.

Twierdzenie. AB = BC.

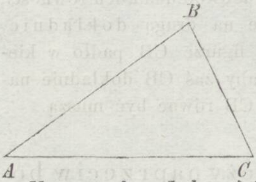


Dowód. Gdyby AB nie było równe BC, musiałoby być albo większe, albo mniejsze, przypuściwszy że AB > BC, otrzymalibyśmy podług §. 41. $\angle C > \angle A$, coby było przeciw założeniu; przypuściwszy zaś, że BC > AB, otrzymalibyśmy A > C, coby się także sprzeciwiało założeniu. Gdy więc AB ani > ani < być nie może jak BC, wynika, iż AB = BC być musi.

Wniosek. Trójkąt równokątny jest zarazem też równobocznym.

§. 43.

Twierdzenie. W każdym trójkącie leży naprzeciw większego kąta większy bok, naprzeciw mniejszego kąta mniejszy bok.



Założenie. $\angle B > \angle C$.

Twierdzenie. $AC > AB$.

Dowód. Gdyby AC nie było > od AB, musiałoby być albo $= AB$, albo też mniejsze od AB. W pierwszym przypadku, t. j. gdyby AC było $= AB$, musiałby także $\angle B =$ być $\angle C$, jako kąty przypodstawne w trójkącie równoramiennym, coby jednak było przeciw założeniu; gdyby zaś było $AC < AB$, musiałby kąt $C > B$ podług §. 41., co również by się sprzeciwiało założeniu. Gdy zatem bok AC ani nie może być mniejszy od AB, ani też równy AB, przeto musi być większy.

Wniosek 1. W trójkącie rozwartokątnym bok kątowi rozwartemu leżący naprzeciw jest największym.

Wniosek 2. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątnia największym jest bokiem.

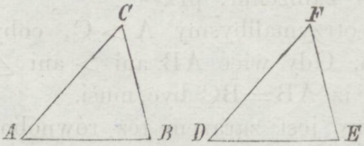
UWAGA. Cztery te ostatnie twierdzenia stanowią razem pewną całość: w pierwszych dwóch wychodzimy z boków, w drugich dwóch zaś z kątów, ostatnie dwa są zatem odwrócenia pierwszych dwóch.

§. 44.

Twierdzenie. Proste linie i kąty równéj wielkości przystają do siebie.

Cztery twierdzenia zawierające warunki przystawania trójkątów.

Twierdzenie. (Przystawania pierwsze). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa boki i kąty od tychże zawarte równe.



Założenie. Bok $AB = DE$, $AC = DF$ i $\angle A = \angle D$.

Twierdzenie. $\triangle ACB \cong \triangle DEF$.

Dowód. Przełożywszy $\triangle$ ABC tak na DEF, iżby $\angle A$

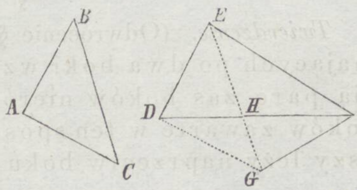
przykrył $\angle D$, t. j. aby punkt A padł na punkt D, bok AB wzdłuż boku DE, AC wzdłuż DF, przekonywamy się, że w skutek równości boków AB i DE, AC i DF także punkt B na E i C na F paść musi; stąd też BC nakryć musi EF podług §. 10. Trójkąty zatem zupełnie się nakrywają, czyli przystawają.

UWAGA. W przystających do siebie trójkątach wszystkie kąty i boki odpowiednio położone są sobie równe. Dowiódłszy zatem przystawania dwóch trójkątów, dochodzimy także równości takich części, o których poprzednio nic jeszcze niewiedzieliśmy.

W skutek dowodu poprzedzającego twierdzenia wynika więc: że $BC = EF$, $\angle B = \angle E$ i $\angle C = F$.

§. 45.

Twierdzenie. W dwóch trójkątach mających po dwa boki wzajemnie sobie równe, kąty zaś od tychże boków zawarte nierówne, także trzecia para boków w ten sposób jest nierówna, iż większemu kątowi także leży większy bok naprzeciw.



Założenie. $AB = ED$, $BC = EF$, $\angle B < \angle E$.

Twierdzenie. $AC < DF$.

Dowód. Kładę $\triangle ABC$ tak na trójkąt DEF, że AB padnie na DE; wtenczas BC padnie w kierunku linii EG, a AC w kierunku linii DG. $\triangle EFG$ jest równoramiennym,

bo $EG = BC = EF$.

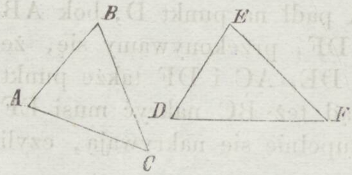
przeto $\angle EGF = \angle GFE$.

Daléj $\angle EGF > GFD$, bo $\angle GFD$ jest $<$ od $\angle GFE$, a że $\angle DGF > EGF$, zatem $\angle DGF > \angle DFG$, DF zatem $> DG$, podług §. 41.; a gdy $DG = AC$, przeto też $AC < DF$.

UWAGA. Jaki byłby dowód, gdyby punkt C padł na linią DF, lub wśród samego trójkąta?

§. 46.

Twierdzenie. (Przystawania drugie). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli trzy boki jednego równe są kolejno trzem bokom drugiego.



Założenie. AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Twierdzenie. △ABC ≌ △DEF.

Dowód. Nie trudno okazać, że w tych dwóch trójkątach dwa odpowiednio położone kąty także sobie równe być muszą, n. p. że ∠A = ∠D: bo gdyby ∠A był mniejszy lub większy od D, musiałby podług poprzedzającego twierdzenia także bok CB być stósownie do przypuszczenia większym lub mniejszym od EF, coby było w każdym razie przeciw założeniu. Ponieważ więc kąt ∠A = ∠D, przeto też trójkąty te przystają do siebie podług pierwszego twierdzenia o przystawaniu.

UWAGA. Inny dowód na to twierdzenie podaje zestawienie trojkątów równemi bokami do siebie i połączenie dwóch przeciwległych boków linią, przez co dwa trójkąty równoramienne powstają. Dowód ten czyni niepotrzebne §§. 45. i 47.

§. 47.

Twierdzenie. (Odwrócenie §. 45.) W dwóch trójkątach mających po dwa boki wzajemnie sobie równe, trzecią parę zaś boków nierówną, także kąty od owych boków zawarte w ten sposób są nierówne, że kąt większy leży naprzeciw boku większego. (Fig. §. 45.)

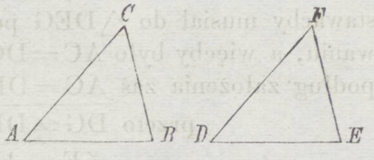
Założenie. Bok AB = DE, BC = EF, AC < DF.

Twierdzenie. ∠B < ∠E.

Dowód. Gdyby ∠B nie był mniejszy od E, lecz = E, wynikłoby także, że △ACB ≌ △DEF podług §. poprzedzającego, gdyby zaś ∠B był większy od ∠E, bok AC byłby większy od DF podług §. 45. Gdy jednak oba te przypuszczenia sprzeciwiają się założeniu, a zatem są niemożebne, przeto ∠B mniejszy jest od kąta E.

§. 48.

Twierdzenie. (Przystawania trzecie.) Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli dwa kąty i jeden bok w jednym są tak wielkie jak w drugim.



I. Jeżeli kąty są bokowi przyległe.

Założenie. $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$.

Dowód. Trójkąt ACB kładę tak na DEF, iż AB padnie na DE, a ponieważ są sobie równe, przeto punkt A nakryje D, a punkt B nakryje E. Gdy zaś $\angle A = \angle D$, przeto AC pójdzie w kierunku DF, a że $\angle B = \angle E$, przeto bok BC padnie w kierunku EF. Punkt C musi wreście także paść w punkt F, bo dwie linie tylko w jednym punkcie się mogą przecinać.

II. Jeżeli jeden tylko kąt jest przyległy, a drugi przeciwległy.

Założenie. $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, i $\angle C = \angle F$.

Dowód. Łatwo sprowadzić ten przypadek na poprzedzający, gdyż okazać można, że $\angle B = \angle E$, bo skoro

$$\begin{array}{r} A + B + C = 2R \\ D + F + E = 2R \\ \hline A + B + C = D + F + E \\ \text{skoro zaś } A + C = D + F \\ \hline \text{więc } B = E, \text{ zatem } \triangle ABC \cong \triangle EFD \end{array}$$

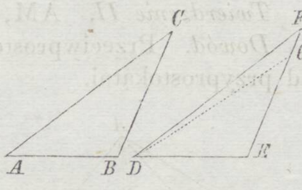
podług poprzedzającego przypadku.

UWAGA. Z rozkładu dwóch tych przypadków wynika, że i twierdzenie to właściwie na dwa się dzieli.

§. 49.

Twierdzenie. (Czwarte przystawania.) Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli dwa boki i kąt większemu bokowi przeciwległy w jednym tak wielki jest jak w drugim.

Założenie. Bok $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle B = \angle E$ i $AC > AB$, $DF > DE$.



Twierdzenie. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dowód. Dowodzimy, że bok BC = być musi bokowi EF, z czego przystawanie trójkątów bezpośrednio wynika. Bok BC jest zaś równy bokowi EF, bo, gdyby był mniejszy jak EF, t. j. równy linii EG, po połączeniu punktu D z punktem G, $\triangle ABC$ przy-

stawaćby musiał do $\triangle$DEG podług I. twierdzenia o przystawaniu, a więcby było AC = DG
podług założenia zaś AC = DF
przeto DG = DF
$\angle$F = byłby $\angle$DGF, $\angle$DGF zaś > byłby jako kąt zewnętrzny od $\angle$E, przeto też $\angle$F > E, ztąd też DE > byłby od DF, coby jednak sprzeciwiało się założeniu. Do téj sprzeczności doprowadziło nas przypuszczenie, iż CB < jest jak FE; do podobnéj sprzeczności doprowadziłoby nas także przypuszczenie, iż BC > od FE. Gdy więc ani > ani < być nie może od FE, musi przeto być równe FE.

Zagadnienia. Wyszukaj warunki, pod któremi przystają do siebie, 1) trójkąty równoboczne, 2) trójkąty równoramienne, 3) trójkąty prostokątne?

UWAGA. Części, w skutek równości których trójkąty przystawają, wystarczają zarazem do zupełnego oznaczenia trójkąta, tak że za pomocą nich zawsze tylko jeden i tenże sam trójkąt wykreślić można.

§. 50.

Twierdzenie. Z punktu danego na linią prostą tylko jednę prostopadłą spuścić można, która jest zarazem najkrótszą ze wszystkich linii poprowadzonych z tegoż punktu ku owéj linii. Z tych linii te są sobie równe, które z obu stron prostopadłéj położone, od niéj w równéj się znajdują odległości, a ze sobą porównane tem większe, im bardziéj od owéj prostopadłéj się oddalają.

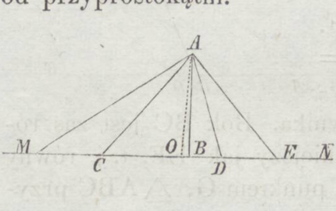
Założenie. AB stoi prostopadle na MN.

Twierdzenie I. Żadna inna linia z punktu A wyprowadzona prócz AB nie jest prostopadła na MN.

Dowód. Gdyby AO prostopadle stało na MN, powstałby trójkąt z dwoma kątami prostemi, co jest niepodobieństwem.

Twierdzenie II. AM, AC, AD, AE > AB.

Dowód. Przeciwprostokątnia jest bowiem zawsze większa od przyprostokątni.



Twierdzenie III. AC = AE.

Założenie. AB prostopadła na MN i BC = BE.

Dowód. $\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$ABE podług pierwszego przystawania o trójkątach; a więc bok AC = AE.

Twierdzenie IV. AE>AD.

Dowód. ∠ADE>ABD jako kąt zewnętrzny, zatem jest kątem rozwartym, przeto AE>AD podług §. 43. wn. 1.

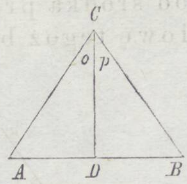
UWAGA. Odległość jakiego punktu od linii danéj wymierza się prostopadłą z tegoż punktu na linią poprowadzoną.

§. 51.

Cztery twierdzenia o trójkącie równoramiennym.

Twierdzenie I. Linia połowiąca kąt wierzchołkowy w trójkącie równoramiennym połowi także podstawę i stoi na niéj prostopadle.

Założenie. ∠o=∠p.



Twierdzenie. AD=DB, CD prostopadła na AB.

Dowód. △ACD≌CDB podług I. twier. o przyst., zatem AD=DB ∠ADC=∠CDB, a ponieważ ∠ADC+CDB=2R, więc też ∠ADC=1R i CDB=1R, czyli linia CD stoi prostopadle na AB.

Twierdzenie II. Linia łącząca w trójkącie równoramiennym środek podstawy z wierzchołkiem, stoi na podstawie prostopadle i połowi kąt wierzchołkowy.

Założenie. AD=DB.

Twierdzenie. CD stoi prostopadle na AB i ∠o=∠p.

Dowód. △ACD≌△CDB podług twierdz. II. o przyst., zatem ∠o=∠p, ∠ADC=∠CDB, a ponieważ ∠ADC+CDB=2R, więc też linia CD stoi prostopadle na AB.

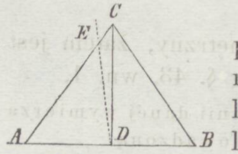
Twierdzenie III. Prostopadła z wierzchołka trójkąta równoramiennego na podstawę spuszczona połowi podstawę i kąt wierzchołkowy.

Założenie. ∠ADC=R.

Twierdzenie. AD=DB, ∠o=∠p.

Dowód. △ACD≌△CDB podług IV. twierdz. o przyst., zkąd wynika, że ∠o=∠p, i że AD=DB.

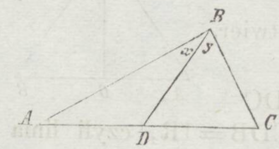
Twierdzenie IV. Prostopadła wykreślona ze środka podstawy w trójkącie równoramiennym przez wierzchołek trójkąta przechodzi.



Dowód. Gdyby prostopadła ze środka podstawy wyprowadzona przez wierzchołek nie przechodziła, a więc szła n. p. w kierunku linii DE obok punktu C, mógłbym pociągnąć linią CD, która musiałaby podł. twierdz. 2. na linii AB stać prostopadle; gdy zaś podług założenia DE stoi prostopadle na AB, otrzymalibyśmy więc w punkcie D linii AB dwie linie prostopadłe, co jest niemożliwém. Przypuszczenie zatem, iż ED nie przechodzi przez wierzchołek jest niemożliwém.

§. 52.

Twierdzenie. W trójkącie kąt, którego wierzchołek od środka przeciwległego boku jest oddalonym o połowę tegoż boku, waży 1R.



Założenie. AD = DC = DB.

Twierdzenie. $\angle$ABC = 1R.

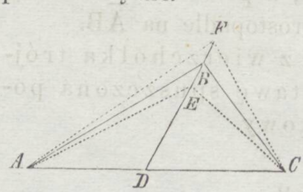
Dowód. $\left.\begin{array}{l}\angle ADB = 2y \\ \angle CDB = 2x\end{array}\right\}$ podług §. 40. 4.

$$\angle ADB + CDB = 2R = 2x + 2y$$

$$x + y = R = ABC.$$

Określenie. Linia w trójkącie łącząca wierzchołek kąta ze środkiem przeciwległego boku zowie się poprzeczną (Transversale).

Twierdzenie. (Odwrócenie przeszłego). W trójkącie prostokątnym poprzeczna z kąta prostego do przeciwprostokątni pociągnięta, równa się połowie przeciwprostokątni.



Założenie. $\angle$ABC = 1R i AD = DC.

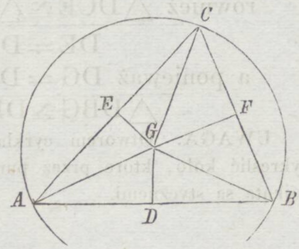
Twierdzenie. BD = AD = DC.

Dowód. Gdyby DB nie było równe AD, a więc większe tak, żeby n. p. ED było równe AD, więcby podług twierdzenia poprzedzającego musiał być $\angle$AEC = 1R, a gdy podług założenia $\angle$ABC = 1R, musiał by przeto $\angle$AEC być równy $\angle$ABC, co być nie może podług §. 39.

Gdyby zaś DB było mniejsze od AD, mógłbym DB przedłużyć tak, żeby AD było równe DF, w takim razie $\angle$AFC byłby $=1R$ podług przeszłego twierdzenia; gdy zaś podług założenia $\angle ABC = 1R$, przeto by musiał być $\angle ABC =$ kątowi AFC, co być nie może podług §. 39.

§. 53.

Twierdzenie. W każdym trójkącie prostopadłe ze środków trzech boków wyprowadzone, scinają się w jednym wspólnym punkcie, który od wierzchołków trójkąta w równéj się znajduje odległości.



Założenie. Punkta D, E i F są środkami boków i

DG prostopadła na AB.

EG „ „ AC.

Twierdzenie. GF prostopadła na CB i $AG = CG = GB$.

Dowód. $\underline{\triangle ADG \cong \triangle BDG}$ podług I. twdz. o przyst.

$AG = GB$ wynika z przystawania

również $\underline{\triangle AEG \cong \triangle CEG}$ podług I. twdz. o przyst.

$AG = GC$.

$GB = AG = GC$.

Wreście $\underline{\triangle BFG \cong CFG}$ podług II. twdz. o przyst.

zatem $\angle CFG = \angle BFG$ z przystawania

a gdy $\underline{\angle CFG + \angle BFG = 2R}$ jako przyległe

przeto GF prostopadła na CB.

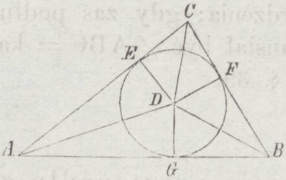
UWAGA. W jakiéj formie należałoby właściwie orzec treść tego twierdzenia stósownie do biegu dowodzenia?

Wniosek. W trójkącie prostokątnym prostopadłe tego rodzaju ścinają się w środku przeciwprostokątni, w trójkącie ostrokątnym wśród niego, a w trójkącie rozwartokątnym zewnątrz niego.

UWAGA. Otworem cyrkla obejmującym CG można koło opisać, którego obwód przez wierzchołki trójkąta przechodzi.

§. 54.

Twierdzenie. Linie połowiące wszystkie kąty w trójkącie ścinają się w jednym punkcie, który od wszystkich trzech boków w równéj znajduje się odległości.



Założenie. AD połowi $\angle$A, CD $\angle$C, i DG stoi prostopadle na AB, DE prostopadle na AC, DF prostopadle na BC.

Twierdzenie. DB połowi $\angle$B, i DG = DE = DF.

Dowód. $\triangle$DAG $\cong$ $\triangle$DAE podług III. twdz. o przyst.

DG = DE z przystawania.

również $\triangle$DCE $\cong$ $\triangle$DCF podług III. twdz. o przyst.

DE = DF z przystawania.

a ponieważ DG = DF, więc téż

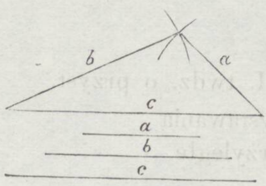
$\triangle$DBG $\cong$ DBF podług IV. twdz. o przyst.

UWAGA. Otworem cyrkla równym linii ED można około punktu D wykreślić koło, które przez punkta E, F i G przechodzi i do którego boki trójkąta są stycznemi.

Zagadnienia.

§. 55.

I. *Jak się wykreśla trójkąt, którego trzy boki a, b i c są dane?*



Uwaga. Długość danych boków o tyle zawsze być musi ograniczona, iżby suma dwóch większa była od trzeciego, inaczéj bowiem trójkątu wykreślić nie można.

Rozwiązanie. Prowadzę linią = c, otworem cyrkla równym linii b wykreślam łuk, zatknąwszy go na lewym krańcu, to samo czynię otworem cyrkla równym a, zatknąwszy ramię cyrkla w prawym końcu linii, poczem łączę punkt otrzymany przez zcięcie się łuków z jéj krańcami.

Szczegółowe przypadki powyższego zagadnienia są:

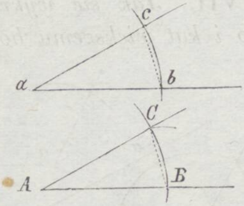
1) Jak się wykreśla za pomocą boku danego trójkąt równoboczny?

2) Jak się wykreśla trójkąt równoramienny, którego podstawa i jedno ramię są dane?

UWAGA. Trójkąt równoramienny tylko wtenczas jest możebny, jeżeli ramię większe jest od połowy podstawy.

II. *Jak się wykreśla kąt, który ma być równy danemu kątowi a?*

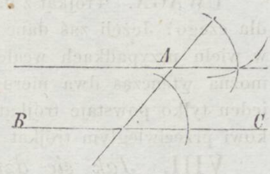
Rozwiązanie. Z danego kąta a robię trójkąt równoramienny a c b, odcinając od jego wierzchołka na obu bokach cyrklem równe części ac = ab i łącząc ich końce ze sobą, poczem podł. poprzedzającego zagadnienia rysuję △ ABC przystający do △ a b c, zkąd wynika ∠A = ∠a.



UWAGA. W powyższém zagadnieniu może także być dana linia i punkt na wierzchołek, gdzie kąt żądany ma być wykreślony.

III. *Przez punkt dany zewnątrz linii leżący jak się prowadzi do niéj linia równoległa?*

Rozwiązanie. Przez dany punkt A i linią BC prowadzę dowolnie jakąkolwiek linią i przenoszę jeden z powstałych kątów do punktu A jako kąt naprzemianległy lub odpowiedni.



IV. *Jak się wykreśla trójkąt, którego dwa boki i kąt od nich zawarty są dane?*

Rozwiązanie. Rysuję kąt równy danemu, a odciąwszy na jego ramionach boki dane, łączę ich końce ze sobą.

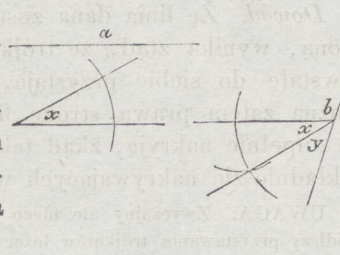
V. *Jak się wykreśla trójkąt, którego bok jeden A, i oba kąty przyległe a i b są dane?*

UWAGA. Aby trójkąta wykreślenie było możebne, musi zatem ∠a + ∠b < 2R.

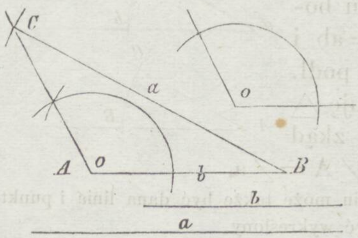
Rozwiązanie. Rysuję linią równą bokowi A i przenoszę do obu jéj krańców dane kąty, których przedłużone ramiona scinać się muszą i utworzyć trójkąt.

VI. *Jak się wykreśla trójkąt, którego dane są bok i dwa kąty, z których jeden ma leżeć przy boku, drugi zaś naprzeciw niego? Dane są kąty b i y i bok a.*

Rozwiązanie. Szukam wielkości kąta spełniającego sumę danych kątów b + y do 2R, otrzymamy kąt x, który jest spełniającym i zarazem drugim kątem bokowi przyległym, poczem zagadnienie sprowadzone jest na warunki poprzedzającego.



VII. *Jak się wykreśla trójkąt, którego dwa boki (a i b), jako i kąt większemu bokowi przeciwległy (o) są dane?*



Rozwiązanie. Ponieważ ∠o ma leżeć naprzeciw boku a, przeto musi być bokowi b przyległym, przenoszę więc ∠o do boku b w punkcie A, potem otworem cyrkla równym bokowi a z punktu B opisuję łuk, który ramię drugie w punkcie C przetnie. Połączywszy zaś punkt C i B, otrzymuję żądany trójkąt.

UWAGA. Trójkąt z danych w zadaniu warunków zawsze wykreślić można, dla czego? Jeżeli zaś dane są dwa boki i kąt mniejszemu bokowi przeciwległy, w wielu przypadkach wcale trójkąt powstać nie może, najczęściéj wykreślić można wtenczas dwa nierówne trójkąty, i tylko w razie gdy kąt jest prosty, jeden tylko powstaje trójkąt. Dwoma bokami przeto i kątem mniejszemu bokowi przeciwległym trójkąt niedostatecznie jest oznaczony.

VIII. *Jak się dzieli kąt jakikolwiek dany na dwie równe części?*

Rozwiązanie. Począwszy z wierzchołka, odcinam na obu ramionach równe części, ich krańce łączę linią prostą i nad tą linią wykreślam trójkąt równoramienny dowolnéj wielkości, otrzymam przeto z obu stron tejże linii dwa trójkąty równoramienne, poczem łączę ze sobą przeciwległe ich wierzchołki linią połowiącą zarazem kąt dany.

Dowód. Równość powstałych kątów wynika łatwo z przystawania trójkątów leżących z obu stron linii połowiącéj, podług II. twierdzenia.

IX. *Jak się dzieli linia dana na dwie równe części?*

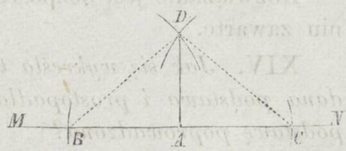
Rozwiązanie. Nad i pod linią wykreślam sobie równoramienne trójkąty dowolnéj wielkości, poczem łączę ich przeciwległe wierzchołki linią, która zarazem daną połowi.

Dowód. Że linia dana została na dwie części równe połowioną, wynika ztąd, że trójkąty z obu stron linii połowiącéj powstałe do siebie przystają, podług II. twierdz. o przyst. Można zatem prawą stronę figury tak przełożyć na lewą, iż się zupełnie nakryją, zkąd także równość powstałych połówek dokładnie się nakrywających wynika.

UWAGA. Zwyczajny ale nieco dłuższy dowód polega na tem, że dowiódłszy przystawania trójkątów leżących z obu stron połowiącéj linii, wywodzę równość kątów przy wierzchołku trójkąta wykreślonego n. p. nad linią leżących, poczem podług III. twierdz. tenże trójkąt równoramienny na dwa do siebie przystające trójkąty rozpada.

X. *Jak się wyprowadza z punktu (A), w danéj linii (MN) leżącego prostopadła?*

Rozwiązanie. Odkreślam z obu stron punktu A równe części AB = AC, wykreślam nad linią BC równoramienny trójkąt BCD, w którym poprowadzona linia DA będzie ową żądaną prostopadłą.

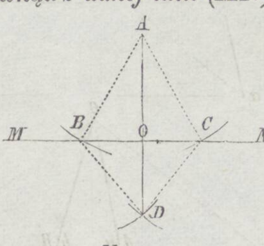


Dowód. $\triangle BAD \cong \triangle ADC$ podług II. twierdz. o przyst.
$\angle BAD = \angle DAC$, a ponieważ
$\angle BAD + \angle DAC = 2R$ jako przyległe,
przeto DA stoi prostopadle na MN.

UWAGA. Królzéj się udowadnia prawdziwość rozwiązania, odwołując się na jedno z twierdzeń o trójkącie równoramiennym.

XI. *Jak się wykreśla z punktu (A) zewnątrz danéj linii (MN) leżącego, prostopadła do téjże linii?*

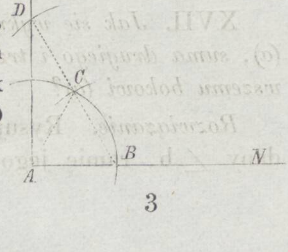
Rozwiązanie. Wykreślam z punktu A koło przecinające linią MN w dwóch punktach, t. j. w punkcie B i C, poczem rysuję pod linią MN, biorąc BC jako podstawę, równoramienny trójkąt. Połączywszy wreście punkta A i D ze sobą, otrzymuję w linii AO żądaną prostopadłą.



Dowód. $\triangle ACD \cong \triangle ADB$ podług II. twierdz. o przyst.
$\angle BAO = \angle OAC$ z przystawania,
daléj $\triangle BAO \cong \triangle OAC$ podług I. twierdz. o przyst.
$\angle AOB = \angle AOC$ z przystawania, a ponieważ
$\angle BOA + \angle AOC = 2R$, więc $\angle BOA = 1R$,
a zatem OA jest ową żądaną prostopadłą.

XII. *Jak się wykreśla prostopadła na krańcu (A) linii AN?*

Rozwiązanie. Wykreślam nad częścią danéj linii od punktu A począwszy, równoboczny trójkąt ABC, przedłużam bok BC po za C aż do punktu D, tak żeby CD było równe AC. Linia AD będzie żądaną prostopadłą.



Dowód. $\angle CAB = \frac{2}{3}R$ podług §. 40. wn. 3.
$\underline{\angle DAC = \frac{1}{3}R}$ podług §. 40. wn. 4.
$\angle DAB = 1R$, zatem AD stoi prostopadle na AN.

XIII. *Jak się dzieli kąt dany prosty na trzy równe części?* Rozwiązanie jest bezpośrednio w poprzedzającém zagadnieniu zawarte.

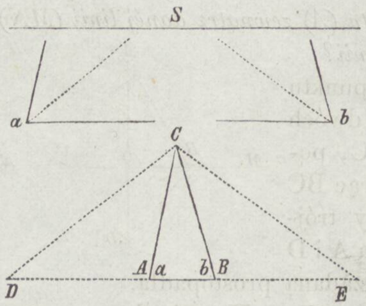
XIV. *Jak się wykreśla trójkąt równoramienny, którego jest dana podstawa i prostopadła (wysokość) z jego wierzchołka na podstawę poprowadzona?*

Rozwiązanie łatwe.

XV. *Jak się wykreśla trójkąt równoramienny, którego jest dana wysokość i jeden z boków równych?*

Rozwiązanie łatwe.

XVI. *Jak się wykreśla trójkąt, którego dana jest suma boków (S) i dwa pojedyńcze kąty a i b?*



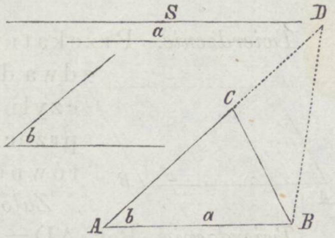
Rozwiązanie. Rysuję linią DE $= S$ i na jéj krańcach przykładam jako kąty przyległe połowy kątów a i b, tak że $\angle D = \frac{1}{2}a$, a $\angle E = \frac{1}{2}b$, przez co powstaje $\triangle DEC$; $\angle D$ przekładam do punktu C tak, aby $\angle DCA$ był równy CDA, a $\angle E$ do punktu C, aby $\angle BCE$ był $= \angle E$, a trójkąt powstały ABC będzie żądanym.

Dowód. $\triangle DCA$ jest równoramiennym, podobnież $\triangle CBE$; a zatem $DA = AC$ i $BE = CB$, zkąd wynika, że $AC + AB + BC = S$. $\angle BAC = 2\angle D$, a zatem $= \angle$ danemu a; podobnież $\angle ABC = 2\angle E$, a zatem $= \angle b$.

UWAGA. Z powyższego zagadnienia wynika łatwo i to, jak się wykreśla trójkąt równoramienny, którego suma wszystkich boków i kąt wierzchołkowy lub przypodstawny jest dany?

XVII. *Jak się wykreśla trójkąt, którego dany jest jeden bok (a), suma drugiego i trzeciego boku (S) i kąt (b) przyległy pierwszemu bokowi (a)?*

Rozwiązanie. Rysuję linią $AB = a$, do niéj przykładam dany $\angle b$, ramię jego przedłużam tak dalece, aby DA było

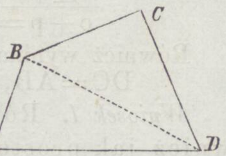


= S; łączę punkt D z punktem B i ostatecznie odkreślam w punkcie B kąt = kątowi D. △ACB będzie żądanym.

Dowód. △ABC dla tego zawiera warunki zagadnienia, bo AB = a, ∠A = ∠b, AC + CB wreście = S, bo CB = CD z powodu, że △BCD jest trójkątem równoramiennym.

3. O czworobokach, mianowicie zaś o równoległobokach.

§. 56.



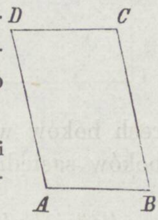
Twierdzenie. S u m a k ą t ó w w c z w o r o b o k u w y n o s i 4R.

Twierdzenie. ∠A + B + C + D = 4R.

Dowód. Rysując przekątnią, otrzymuję dwa trójkąty, których kąty pojedyńczo po 2R wynoszą.

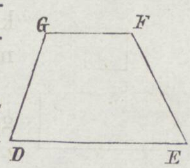
UWAGA. W czworoboku mogą być wszystkie cztery kąty prostemi, tylko trzy rozwartemi, najwięcéj trzy ostremi i najmniéj jeden może być kątem rozwartym.

§. 57.



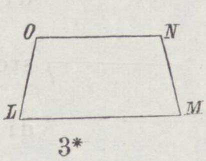
Określenia. 1. Czworobok, którego przeciwległe boki są równoległe, zowie się r ó w n o l e g ł o b o k i e m (Parallelogramm), n. p. AC, albo ABCD.

UWAGA. Figura taka powstaje, jeżeli dwie pary linii równoległych się przecinają; ztąd też powstał znak równoległoboku (#).



2. T r a p e z e m (Trapez) zowie się czworobok, w którym tylko jedna para boków przeciwległych jest równoległa, n. p. DEFG.

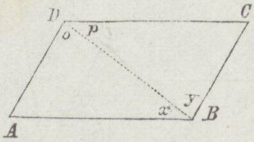
Trapez jest prostym, jeżeli boki skośne są sobie równe, czyli równe kąty z równoległemi tworzą, n. p. LMNO.



3. Czworobok wreście, w którym obie pary boków przeciwległych nie są równoległe, zowie się t r a p e z o i d e m, jak n. p. czworobok w poprzedzającym §.: ABCD.

§. 58.

Twierdzenie. Przekątnia dzieli równoległobok na dwa do siebie przystające trójkąty; czyli w każdym równoległoboku przeciwległe boki i kąty są sobie równe.



Założenie. AD || BC i AB || DC.

Twierdzenie. Bok AD = BC i AB = DC,
$\angle A = \angle C$ i $\angle D = \angle B$.

Dowód. Poprowadziwszy przekątnią, otrzymuję:

$\triangle ABD \cong \triangle BCD$ podług III. twierdz. o przyst.

$\angle o = y$,

$\angle p = x$, równe do równego dodawszy, otrzymuję

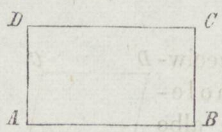
$o + p = x + y$, czyli $\angle D = \angle B$.

Również wynika z przystawania:

DC = AB, AD = BC, $\angle A = \angle C$.

Wniosek 1. Równoległe między równoległemi, również jak prostopadłe między prostopadłemi są sobie równe.

Wniosek 2. Jeżeli w równoległoboku jeden kąt jest prostym, trzy inne kąty także prostemi być muszą.

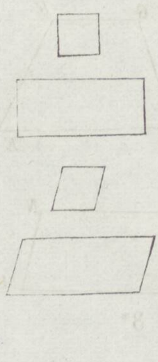


Dowód. Jeżeli $\angle A = 1R$, to $\angle C$ także $= 1R$, a zatem wynoszą $\angle D + \angle B = 2R$; a ponieważ są równe, przeto też każdy wynosi 1R.

Wniosek 3. Równość wszystkich czterech boków w równoległoboku zależy tylko od równości dwóch boków sąsiednich.

§. 59.

Podział równoległoboków. Równoległoboki dzielą się podług kątów na proste i skośne, podług boków zaś na równoboczne i nierównoboczne.



Cztery przeto są rozmaite gatunki równoległoboków:

1. prostokątne i równoboczne, zwane kwadratami (Quadrat);

2. prostokątne i nierównoboczne, zwane prostokątami (Rechteck);

3. nierównokątne i równoboczne czyli kwadraty skośne (Rhomben);

4. nierównokątne i nierównoboczne czyli **prostokąty skośne** (Rhomboide).

UWAGA. Jaki więc będzie całkowity i najogólniejszy podział czworoboków?

Wnioski. Kwadratu wielkość zawisła tylko od jednego boku, prostokąta od dwóch boków sąsiednich, kwadratu skośnego od jednego boku i jednego kąta, a wreście prostokąta skośnego od jednego kąta i dwóch boków sąsiednich.

Zagadnienie. Jak się wykreśla każdy rodzaj równoległoboków, skoro części oznaczające go są znane?

Rozwiązanie jest łatwe.

§. 60.

Cztery twierdzenia zawierające warunki, pod któremi każdy czworobok jest równoległobokiem.

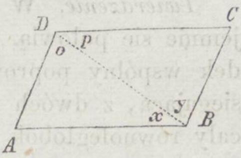
Twierdz. Każdy czworobok jest równoległobokiem:

I. *Jeżeli obie pary boków przeciwległych są równe.*

Założenie. Bok AD = BC i AB = DC.

Twierdzenie. Bok AD ‖ BC i AB ‖ DC.

Dowód. Przekątnią DB pociągnąwszy, otrzymuję:



△ABD ≌ △BCD podł. II. tw. o przyst.

∠o = ∠y i ∠p = ∠x podł. §. 44. Uw.

AD ‖ BC i AB ‖ DC podł. §. 26. tw. 1.

II. *Jeżeli jedna para boków przeciwległych jest równa i zarazem równoległa.*

Założenie. AB = i ‖ do DC.

Twierdzenie. AD = i ‖ BC.

Dowód. △ABD ≌ BCD podług §. 44.

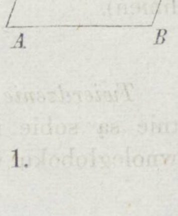
AD = BC i ∠o = ∠y.

AD ‖ BC podług §. 26. tw. 1.

III. *Jeżeli obie pary przeciwległych kątów są równe.*

Założenie. ∠A = C, ∠B = D.

Twierdzenie. AD ‖ BC i AB ‖ DC.



Dowód. ∠A + B + C + D = 4R podł. §. 56.

gdy zaś ∠A = C,

∠B = D,

∠A + ∠B = C + D

∠A + ∠B = 2R

AD ‖ BC podług §. 26. tw. 1.

Kładąc zaś: $\angle A = C$

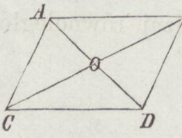
$\angle D = B$

$A + D = C + B$

$A + D = 2R$

$AB \parallel DC$ podług §. 26. tw. 1.

IV. *Jeżeli obie przekątnie wzajemnie się połowią.*



Założenie. $AO = OD$, $OC = OB$.

Twierdzenie. $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$.

Dowód. $\triangle AOC \cong \triangle OBD$ podł. tw. I. o prz.

$\angle ACO = \angle OBD$, co z przyst. wynika; a zatem $AC \parallel BD$ podł. §. 26. 1.

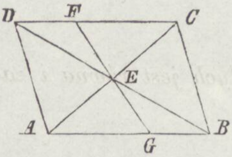
Również $\triangle AOB \cong \triangle COD$ podług I. twierdz. o przyst.

$\angle BAO = \angle ODC$

$AB \parallel CD$ podł. §. 26. 1.

§. 61.

Twierdzenie. W każdym równoległoboku przekątnie wzajemnie się połowią. Podobnież także każda linia przez ich środek wspólny poprowadzona i aż do boków równoległoboku sięgająca, z dwóch się składa równych części i zarazem dzieli cały równoległobok na dwie do siebie przystające części.



Założenie. ABCD jest równoległobokiem.

Twierdzenie I. $AE = EC$, $BE = DE$.

Dowód. $\triangle ABE \cong DCE$ podł. III. twierd. o przyst. $AE = EC$, $ED = EB$.

Twierdzenie II. $FE = EG$.

Dowód. $\triangle DEF \cong BEG$ podług III. twierdz. o przyst.

$FE = EG$.

Twierdzenie III. Czworobok $AGFD \cong CFGB$, bo wszystkie jego boki i kąty odpowiednio położone są równe.

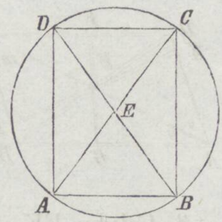
Określenie. Środek wspólny obu przekątni w równoległoboku zowie się jego **środkiem**, a linie przez niego do boków równolegle poprowadzone **liniami środkującemi** (Mittellinien).

§. 62.

Twierdzenie 1. W prostokątnym równoległoboku przekątnie są sobie równe, ich środek zatem od wierzchołków równoległoboku wszędzie równo oddalony.

Założenie. ABCD ma kąty proste.

Twierdzenie. $AC = BD$ i $AE = BE = CE = DE$.



Dowód. $\triangle ABC \cong ABD$ podł. I. tw. o przyst.

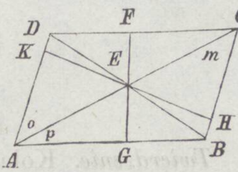
$DB = AC$ i t. d.

UWAGA. Każdy prostokątny równoległobok można, znalazłszy jego środek, kołem obwieść.

2. W równoległoboku skośnym przekątnie są w ten sposób nierówne, że większa zawsze rozwartemu kątowi leży naprzeciw.

Założenie. ABCD ma kąty skośne.

Twierdzenie. $AC > BD$.



Dowód. W trójkątach ABD i ABC jest bok $AB = AB$, $AD = BC$ jako boki przeciwległe równoległoboku, wreście $\angle DAB < ABC$ podług założenia.

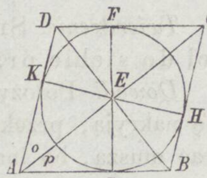
Bok $BD < AC$ podług §. 45.

§. 63.

Twierdzenie 1. W równobocznym równoległoboku przekątnie połowią kąty i przecinają się prostopadle. Ich środek od wszystkich boków w równéj jest odległości.

Założenie. $AB = BC = CD = DA$.

Twierdzenie. $\angle o = p$, $DB \perp AC$ i prostopadłe $EG = EH = EF = EK$.



Dowód. $\triangle AED \cong AEB$ podł. II. tw. o przyst.

$$\left.\begin{array}{l}\angle o = p \\ \text{i } \angle AED = AEB\end{array}\right\}\text{ z przyst.}$$

$AE \perp DB$. p. §. 17. okr. 2.

Również $\triangle AEK \cong AEG$ podług III. tw. o przyst.

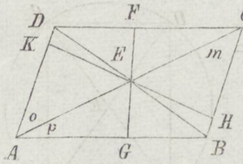
$EK = EG$.

Przedłużając KE do H i GE do F, otrzymuję $EH \perp BC$ i $EF \perp DC$ podług §. 28. twierdz. 2., a przeto $EH = EK = EF = EG$ podług §. 61. twierdz. II.

2. W nierównobocznym równoległoboku przekątnie ani nie połowią kątów, ani też się nie przecinają prostopadle; ich środek tylko od przeciwległych boków w równéj znajduje się odległości.

Założenie. Bok $AB > BC$. (Fig. §. 62, 2.)

Twierdzenie. $\angle o > p$, $\angle ACD < ACB$ i prostopadła EK nie równa prostopadłéj EG.



Dowód. 1. $\angle m > p$ podług §. 41.
$\angle m = o$ podł. §. 26. tw. 2.
więc też $\angle o > p$.

2. W trójkątach AED i AEB jest bok AE=AE, DE=EB, ale AD<AB.
$\angle$AED<AEB podług §. 47.

3. Gdyby EK=EG, byłby też
$\triangle$AEK $\cong$ AEG podług IV. twierdz. o przyst.
$\angle o = p$, coby było przeciwko 1.

ROZDZIAŁ TRZECI.

O kole.

§. 64.

Twierdzenie. Koła o równych promieniach lub równych średnicach przystają do siebie i odwrotnie.

Dowód. Położone bowiem na siebie tak, że ich środki jeden tylko punkt tworzą, także z powodu równych promieni obwodami dokładnie nakrywać się muszą.

§. 65.

Twierdzenie. Średnica połowi całe koło na dwie części do siebie przystające, **półkolami** zwane.

Dowód. Położywszy obie części tak na siebie, że średnice się nakryją, przekonamy się, że i łuki wzajemnie się nakrywać muszą, bo inaczéj nie byłyby promienie równe.

§. 66.

Mając w kole cięciwę, któréj krańce ze środkiem koła są połączone, otrzymuję trójkąt równoramienny, do którego cztery twierdzenia w §. 51. zawarte, w ten sposób zastósować można, że zamiast podstawy kładzie się cięciwa, zamiast kąta wierzchołkowego kąt środkowy i zamiast wierzchołka środek koła. W kole cztery te twierdzenia w następujący sposób brzmieć będą:

Twierdzenie. 1. Linia połowiąca kąt środkowy połowi zarazem cięciwę i stoi na niéj prostopadle.

2. Linia łącząca środek koła ze środkiem cięciwy, stoi na tejże prostopadle i połowi kąt środkowy.

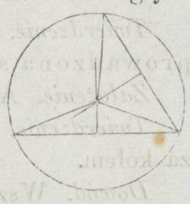
3. Prostopadła ze środka koła spuszczona na cięciwę połowi ją i na niéj stoi prostopadle.

4. Prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona przez środek koła przechodzi.

Dowodzenia tych twierdzeń w §. 51. są zawarte.

§. 67.

Wnioski. 1. Prostopadłe ze środków dwóch nierównoległych cięciw poprowadzone scinają się w środku koła.



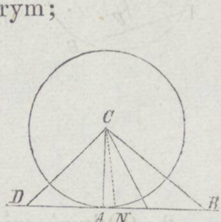
2. Punkt w kole położony, a będący w téj saméj odległości od trzech rozmaitych punktów obwodu, jest zarazem środkiem koła.

§. 68.

Jakakolwiek cięciwa przez oddalenie od środka zamienić się może względem koła w styczną, czyli w linią, która tylko jeden punkt z obwodem ma wspólny. Stósunek stycznéj do promienia okażą nam następujące twierdzenia podobne do twierdzeń zawartych w §. 66.

Twierdzenia. 1. Promień do punktu zetknięcia stycznéj poprowadzony stoi na niéj prostopadle.

Dowód. Gdyby linia AC nie stała prostopadle na DB, mógłbym inną linią do DB prostopadłą z punktu C wyprowadzić, n. p. linią CN; wtenczas $\angle$CNA byłby $=$1R, a zatem $\angle$CAN kątem ostrym; bok CN $<$ CA, co być nie może, bo kraniec linii CN leży poza obwodem; linia ta więc $>$ być musi od promienia CA. Do podobnéj sprzeczności doprowadziłoby nas przypuszczenie, że jakakolwiek inna linia z punktu C wyprowadzona, na stycznéj stoi prostopadle; twierdzenie zatem tylko linii CA dotyczeć się może.



2. Promień prostopadle do stycznéj pociągnięty trafia punkt jéj zetknięcia.

Dowód. Gdyby promień prostopadle do stycznéj DB poprowadzony nie przechodził przez punkt A, lecz przez punkt N, mógłbym poprowadzić AC, któraby była podług 1. $\perp$ do DB; otrzymalibyśmy zatem z punktu C dwie prostopadłe spuszczone na DB, co być nie może, zatem twierdzenie prawdziwe.

3. Prostopadła z punktu zetknięcia stycznéj poprowadzona przez środek koła przechodzi.

Dowód. Gdyby linia ta przez środek koła nie przechodziła, mógłbym połączyć środek jego z punktem zetknięcia i otrzymałbym dwie prostopadłe z jednego punktu linii prostéj wychodzące, co być nie może; przeto twierdzenie jest prawdziwe.

§. 69.

Twierdzenie. Prostopadła z krańca promienia wyprowadzona styczną jest względem koła. Fig. §. 68.

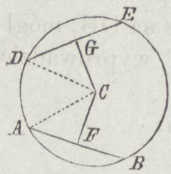
Założenie. AB ⊥ AC.

Twierdzenie. AB leży z wyjątkiem punktu A, zupełnie po za kołem.

Dowód. Wszystkie linie ze środka do linii AB poprowadzone większe są od promienia AC podług §. 50. tw. II.; ich krańce leżą zatem zewnątrz koła, przeto linia DB jest styczną.

§. 70.

Twierdzenia. 1. Równe cięciwy w kole od środka w równéj znajdują się odległości.



Założenie. AB = DE.

Twierdzenie. Prostopadłe CF i CG są sobie równe.

Dowód. Prowadząc linie AC i DC, otrzymuję trójkąty ACF i DCG, w których

AC = DC jako promienie
AF = DG jako połowy równ. całości
i ∠ F = G jako proste;

△ACF ≌ DCG podł. IV. tw. o przyst.

CF = CG.

2. (Odwrócenie.) Cięciwy w równéj odległości od środka koła będące, zarazem są sobie równe.

Założenie. Prostopadłe CF i CG są sobie równe.

Twierdzenie. AB = DE.

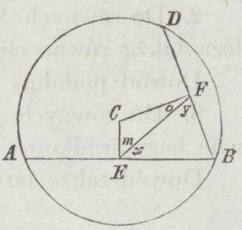
Dowód. △ACF ≌ DCG podług §. 49.

AF = DG

zatem też całości AB = DE.

§. 71.

Twierdzenie. Z dwóch nierównych cięciw w kole większa bardziéj do środka jest zbliżona, jak mniejsza i odwrotnie.



I. *Założenie.* $AB > BD$.

Twierdzenie. Prostopadła $CE < CF$.

Dowód. Prowadząc linią EF otrzymuję trójkąt EBF.

$EB > BF$ wynika z założenia

$\angle y > x$ podług §. 41.

$\angle o < m$

w trójk. CEF bok $CE < CF$ podług §. 43.

II. *Założenie.* Prostopadła $CE < CF$.

Twierdzenie. $AB > BD$.

Dowód. W trójkącie CEF bok $CE < CF$ podług założ.

$\angle o < m$ podług §. 41.

$\angle y > x$

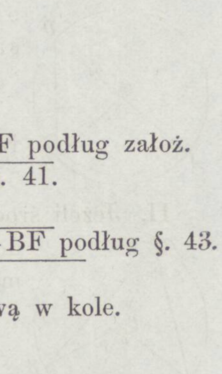
w trójkącie EBF zatem bok $EB > BF$ podług §. 43.

więc też $AB > BD$.

Wniosek. Średnica jest największą cięciwą w kole.

§. 72.

Twierdz. Linia prosta przecina koło tylko w dwóch punktach.

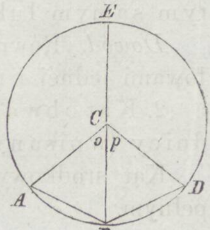


Dowód. Jeżeli połączę punkta A i B ze środkiem koła promieniami i spuszczę CD $\perp$ do AB, otrzymam twierdzenie §. 50., z którego dowód wynika.

Wniosek. Trzy punkta leżące w jednéj linii, nie mogą leżeć zarazem w obwodzie jakiego koła.

§. 73.

Twierdzenie. 1. Do równych cięciw tego samego koła należą równe kąty środkowe, równe łuki, równe odcinki i równe wycinki.



Założenie. $AB = BD$.

Twierdzenie. $\angle o = p$, $\widehat{AB} = \widehat{BD}$ i t. d.

Dowód. $\triangle ABC \cong BDC$ podług §. 46.; trójkąt zatem ABC padnie na BDC, jakoż i łuki do nich należące w skutek równości promieni, zkąd twierdzenie bezpośrednio wynika.

2. Do równych kątów środkowych tegoż samego koła należą także równe cięciwy, łuki i t. d.

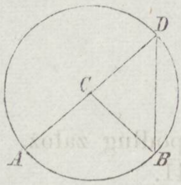
Dowód podobny do poprzedzającego.

3. Do równych łuków tego samego koła należą także równe kąty środkowe i t. d.

Dowód także łatwy.

§. 74.

Twierdzenie. Kąt ~~środkowy~~ obwodowy równa się połowie kąta ~~obwodowego~~ środk z którym w kole na tym samym stoi łuku.

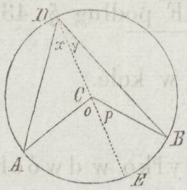


Twierdzenie. $\angle ACB = 2\,ADB$.

Przypadek I. Środek koła leży w jedném ramieniu kąta obwodowego.

$\angle ACB = 2\,ADB$ podług §. 40. wn. 4.

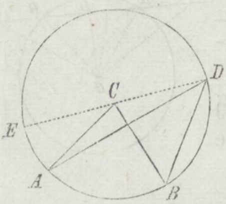
II. Jeżeli środek koła leży między ramionami kąta obwodowego, prowadzę z punktu D średnicę i otrzymuję:



$$\left.\begin{array}{l}\angle o = 2x \\ \angle p = 2y\end{array}\right\}\text{ podług przypadku I.}$$

$$\angle o + p\text{, t. j. } ACB = 2x + 2y$$
$$= 2(x + y) = 2\,ADB.$$

III. Jeżeli wreście środek koła leży zewnątrz ramion kąta obwodowego, prowadzę podobnież średnicę DE i otrzymuję:



$$\left.\begin{array}{l}\angle ECB = 2\,EDB \\ \text{i } \angle ECA = 2\,EDA\end{array}\right\}\text{ podł. przyp. I.}$$

$$\angle ECB - ECA,$$
$$\text{t. j. } \angle ACB = 2\,EDB - 2\,EDA$$
$$= 2(EDB - EDA) = 2\,ADB.$$

§. 75.

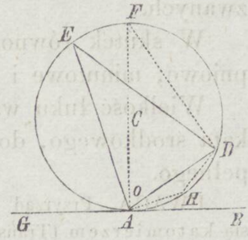
Wnioski. 1. Wszystkie kąty obwodowe, stojące na tym samym łuku, są sobie równe.

Dowód. Równość takowych kątów wynika ztąd, że są połowami jednéj i téj saméj całości.

2. Kąt obwodowy, opierający się ramionami na średnicy (wpisany w półkolu), równa się 1R.

Kąt środkowy takowego kąta jest oczywiście kątem półpełnym.

§. 76.



Twierdzenie. Kąt utworzony przez cięciwę i styczną, które się w punkcie zetknięcia scinają, równa się kątowi obwodowemu, stojącemu na łuku przez cięciwę odciętym.

Twierdz. ∠DAB=Ei ∠GAD=DHA.

Dowód. I. Prowadząc z punktu A średnicę AF, i łącząc F z D, otrzymuję:

∠DAB jest dopełniającym kąta o, bo AF ⊥ AB;

podobnież ∠F dopełniający kąta o, bo ∠ADF=1R;

∠DAB=F, a przeto też E, podług §. 75, 1.

II. Podług I. ∠ADH=HAB,

∠GAD jest spełniającym kąta DAB,

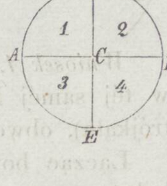
a ∠AHD jest spełn. kątów ADH+DAH, czyli ∠DAB;

∠GAD=AHD, bo są obadwa spełn. równych kątów.

§. 77.

Twierdzenia. 1. D w i e p r o s t o p a d l e s i ę p r z e c i n a j ą c e ś r e d n i c e d z i e l ą nietylko p o w i e r z c h n i ą, lecz r ó w n i e ż i o b w ó d k o ł a na 4 do siebie p r z y s t a j ą c e c z ę ś c i, k w a d r a n t a m i z w a n e.

Dowód. Przystawanie łatwo wynika, albowiem 3 wycinki czyli kwadranty na czwarty kolejno położone, dokładnie się nakrywają. Quadrant 1≌2, 2≌3, 3≌4.



2. (Odwrócenie.) Kwadrant jest wycinkiem prostokątnym.

Dowód. Z równości łuków 4 kwadrantów wynika zarazem też równość 4 kątów środkowych, z których każdy musi być = 1R, albowiem wszystkie 4 ważą 4R podł. §. 15. wniosk.

§. 78.

Kwadrant dzieli się na 90 (cały zatem obwód na 360) równych łuków, s t o p n i a m i zwanych; każdy stopień (^{0}) dzieli się dalej na 60 m i n u t i każda minuta (′) na 60 sekund (″).

Łącząc zaś punkta, któremi w ten sposób obwód jest podzielony, ze środkiem koła, otrzymuję kąt prosty podzielony na 90 kątów równych także s t o p n i a m i (^{0}) zwanych, kąt stopniowy na 60 równych kątów minutowemi (′) zwanych i kąt minutowy na 60 równych kątów, kątami sekundowemi (″) zwanych.

W skutek równości kątów prostych wynika, że kąty stopniowe, minutowe i sekundowe są sobie równe.

Wielkość łuku względem całego obwodu jest zatem miarą kąta środkowego, doń należącego. Obwód cały jest miarą kąta pełnego.

UWAGA. Przyrząd z półkolem na kąty stopniowe podzieloném, zowie się kątomierzem (Transporteur) i służy do wymierzania kątów wykreślonych, jako też do wykreślania kątów, których wielkość stopniami jest oznaczona.

§. 79.

Określenia. 1. Figura zowie się wpisaną w koło, skoro jéj boki względem koła są cięciwami.

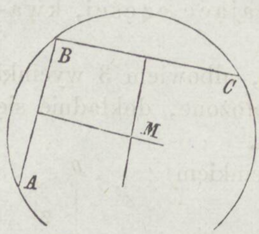
W takim razie koło opisuje figurę.

2. Przeciwnie figura opisuje koło, skoro jéj boki względem koła są stycznemi.

W takim razie koło we figurę jest wpisane.

§. 80.

Twierdzenie. Każdy trójkąt kołem można opisać, również jak w każdy trójkąt koło wpisać.



Środek opisanego koła jest punktem ścięcia się wszystkich trzech prostopadłych ze środków boków wychodzących; środek zaś wpisanego koła jest punktem, w którym wszystkie dwusieczne kątów czyli linie połowiące się ścinają.

§. 81.

Wniosek 1. Przez każde trzy punkta A, B i C, nieleżące w téj saméj linii prostéj (mogące zatem być wierzchołkami trójkąta), obwód koła pociągnąć można.

Łącząc bowiem punkta liniami, otrzymuję trójkąt, który kołem mogę opisać; obwód więc jego przez owe trzy punkta przechodzić musi.

Wniosek 2. Trzy punkta nie leżące w téj saméj linii prostéj, oznaczają dokładnie położenie i wielkość koła.

Wniosek 3. Obwody dwóch kół nigdy więcéj, jak dwa punkta wspólne, mieć nie mogą.

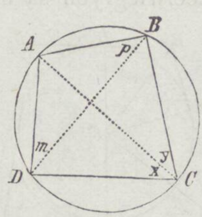
Bo gdyby miały 3 punkta wspólne, jednoby tylko tworzyć mogły koło.

Określenie. Koła mające dwa punkta wspólne, zowią się przecinającemi, mające zaś tylko jeden punkt wspólny, stykającemi się. Koła stykające się albo leżą obok siebie, albo też mniejszy wśród powierzchni większego.

§. 82.

Twierdzenia. 1. W każdym czworoboku wpisanym w koło suma kątów przeciwległych waży 2R.

Twierdzenie. $\angle DAB + DCB = 2R$.



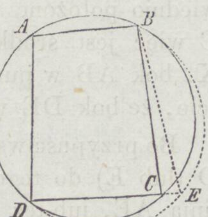
Dowód. Pociągnąwszy przekątnie, otrzymuję w $\triangle ABD$, $\angle DAB + m + p = 2R$ podług §. 36.

Wiemy także, że $\angle m = y$ (na łuku AB)

i $\angle p = x$ (na łuku AD)

$$\angle DAB + \underbrace{x + y}_{\text{t. j. } DCB} = 2R$$

2. (Odwrócenie.) Skoro w czworoboku suma kątów przeciwległych wynosi 2R, można go opisać kołem.



Założenie. $\angle A + BCD = 2R$.

Twierdzenie. Obwód koła przechodzący przez B, A i D także przez C przechodzić musi.

Dowód. Przypuściwszy, że obwód przez C nie przechodzi, musiałby natenczas bok DC (albo też BC), albo jego przedłużenie, n. p. w punkcie E przecinać, poczem poprowadziwszy BE, otrzymałbym:

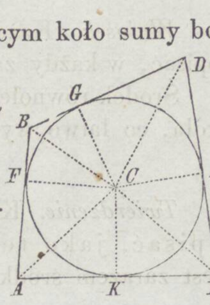
$\angle A + BED = 2R$ podług poprzedzającego twierdzenia;

$\angle A + BCD = 2R$ podług założenia;

wynikłoby więc, że $\angle BED = BCD$, co się sprzeciwia §.38. wn.

§. 83.

Twierdzenia. 1. W czworoboku opisującym koło sumy boków przeciwległych są sobie równe.



Założenie. Bok AB, BD, DE, AE są stycznemi.

Twierdzenie. $AB + DE = BD + AE$.

Dowód. Łącząc środek koła tak z wierzchołkami czworoboku, jako i z punktami zetknięcia, otrzymuję:

$\triangle ACF \cong ACK$ podług §. 49.

bok $AF = AK$ podług §. 44. uw.

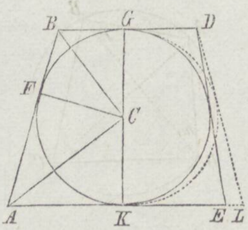
Podobnież $\triangle BCF \cong BCG$, więc $BF = BG$;

a zatem $AF + BF$, czyli $AB = AK + BG$.

W podobny sposób wynika $DE = EK + DG$; więc też

$$AB + DE = BD + AE.$$

2. (Odwrócenie.) W czworobok, w którym sumy boków przeciwległych są sobie równe, można wpisać koło.



Założenie. $AB + DE = BD + AE$.

Twierdzenie. Koło dotykające obwodem boków AE, AB i BD, to samo też czyni względem boku DE.

Dowód. Dzieląc dwa kąty sąsiednie A i B liniami AC i BC i spuszczając z punktu C prostopadłe na AE, AB i BD okazuję, że CK, CF i CG są sobie równe jako linie odpowiednio położone w przystających do siebie trójkątach. Punkt C więc jest środkiem koła dotykającego bok AE w punkcie K, bok AB w punkcie F i BD w punkcie G; dowodzę wreście, że bok DE względem koła jest styczną.

Bo przypuściwszy, że DE nie jest styczną, mógłbym z punktu D (lub E) do tegoż koła styczną sobie poprowadzić, któraby linią AE, lub też jéj przedłużenie w punkcie L przecięła; natenczas wynikałoby:

$AB + DL = BD + AL$ podł. poprzedz. tw.

wiem zaś, że $AB + DE = BD + AE$ podług założenia;

przeto byłoby $DL - DE = AL - AE$ t. j. $= EL$, coby jednak sprzeciwiało się §. 35. wn.; zatem twierdzenie jest prawdziwe.

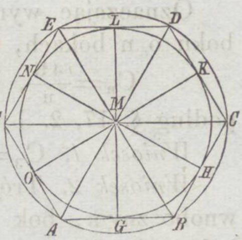
§. 84.

Wniosek. Każdy równoległobok prostokątny można kołem opisać, w każdy zaś równoległobok równoboczny koło wpisać.

Środek równoległoboku jest w obu razach środkiem żądanego koła, co łatwo wynika z §. 62. tw. 1. i z §. 63. tw. 1.

§. 85.

Twierdzenie. Każdy foremny wielobok można kołem opisać, jako też koło w niego wpisać. Środek koła jest zarazem środkiem wieloboku.



Założenie. Bok $AB=BC=CD$ i t. d.
$\angle A=B=C$ i t. d.

Wyprowadziwszy ze środków dwóch sąsiednich boków, t. j. z punktów G i H prostopadłe GM i HM, łącząc daléj ich punkt przecięcia z wierzchołkami kątów i wyprowadzając z niego prostopadłe do boków, otrzymuję:

Twierdzenie. $AM=BM=CM$ i t. d.
i prostopadła $MG=MH=MK$ i t. d.

Dowód. $\left.\begin{array}{l}\triangle AGM \cong BGM \\ \text{i } \triangle BHM \cong CHM\end{array}\right\}$ podług I. tw. o przyst.

bok $AM=BM=CM$.

Również $\triangle ABM \cong CBM$ podług II. tw. o przyst.

$\angle ABM=CBM$, więc $=\frac{1}{2}ABC$.

Jest także $\angle BCM=CBM$ podlug §. 40.

również $\angle BCM=\frac{1}{2}ABC=\frac{1}{2}BCD=MCD$

$\triangle BCM \cong DCM$ podług I. tw. o przyst.

Bok $DM=BM=CM$.

W podobny sposób wynika, że

$\triangle DCM \cong EDM$ i t. d.

bok $DM=EM=FM$, również i prostopadłe

$ME=MH=MK$ i t. d. jako odpowiednio położone prostopadłe w przystających do siebie trójkątach.

UWAGA. Środek wieloboku foremnego wynajduje się także za pomocą linii, które 2 sąsiednie kąty dzielą.

§. 86.

Określenia. Promień koła, w którém wielobok foremny jest wpisany, zowie się promieniem większym, n. p. AM, promień zaś wpisanego koła mniejszym promieniem wieloboku, n. p. MG.

Trójkąt równoramienny utworzony w foremnym wieloboku przez bok i dwa większe promienie zowie się trójkątem oznaczającym wielobok, n. p. ABM, a kąt wierzchołkowy tegoż trójkąta zowie się kątem środkowym wieloboku, n. p. $\angle AMB$.

§. 87.

Twierdzenie. Kąt środkowy foremnego wieloboku równa się 4R podzielonym przez ilość boków.

Oznaczając wyrazem C_n kąt środkowy foremnego wieloboku o n bokach, otrzymuję:

$C_n = \frac{4R}{n}$, bo n kątów środkowych wynosi razem 4R podług §. 17, 2. i wszystkie są razem sobie równe podł. §. 73.

Wniosek 1. $C_3 = \frac{4}{3}R$, $C_4 = 1R$, $C_6 = \frac{2}{3}R$ i t. d.

Wniosek 2. Trójkąt oznaczający foremny sześciobok jest równobocznym, bok przeto sześcioboku równa się promieniowi koła opisanego.

Wniosek 3. Ztąd także wynika, iż w każdém kole promień 6 razy jako cięciwę położyć można.

§. 88.

Twierdzenie. W każdym wieloboku wynosi suma wszystkich kątów tyle razy 2R, ile wielobok ma boków mniéj 4R.

Dowód. Skoro wielobok ma n boków, prowadzę z jakiegokolwiek punktu we figurze położonego do wierzchołków wszystkich linie, przez które cały wielobok na n trójkątów się podzieli. Kąty każdego trójkąta ważą 2R, przeto wszystkie kąty 2nR; od téj sumy należy jednak odliczyć kąty leżące około punktu wśród figury położonego, które wynoszą 4R i do figury nie należą; wzorzec zatem wyrażający nam sumę wszystkich kątów jest: 2nR—4R.

UWAGA. Jeżeli w wieloboku tyle jest kątów wypukłych, że nie można poprowadzić z żadnego we figurze położonego punktu linii do wierzchołków, któreby przez obwód figury nie przechodziły, rozkładam cały wielobok przekątniami na trójkąty.

Wniosek. Kąt foremnego wieloboku spełnia kąt środkowy do 2R.

Bo każdy kąt takowy $= \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4}{n}R$, t. j. podł. §. 87. $= 2R - C_n$.

§. 89.

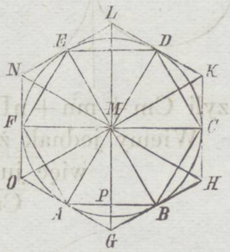
Twierdzenie. Dzieląc obwód koła na pewną ilość równych łuków i prowadząc do nich należące cięciwy, otrzymujemy foremny wielobok.

Dowód. Boki i kąty wieloboku równe są podług §. 73, 3.

UWAGA. Z treści §. 77. wynika sposób wykreślenia foremnego czworoboku w kole, §. 87, 2. podaje nam sposób wykreślenia foremnego sześcioboku w kole, z których to wieloboków przez ciągłe połowienie środkowych kątów otrzymać możemy ośmiobok, 16bok, 12bok i t. d.

§. 90.

Twierdzenie. Prowadząc przez wierzchołki kątów foremnego wieloboku w koło wpisanego styczne, otrzymujemy także foremny wielobok.



Założenie. ABCDEF jest wielobok foremny i

OG, GH i t. d. są stycznemi.

Twierdzenie. GHKLNO jest foremny.

Dowód. Łącząc M z wierzchołkami obu wieloboków, otrzymuję w czworoboku AGBM

$\angle$AGB + AMB = 2R podług §. 56.
i podług 68, 1.
również kąt BHC spełnia $\angle$ BMC,
gdy zaś $\angle$AMB = BMC i t. d. podług §. 73, 1.
przeto $\angle$AGB = BHC i t. d.

Wiem także, że $\triangle$AGM $\cong$ BGM podł. IV. tw. o przyst.
bok AG = GB
i $\angle$AGM = MGB = $\frac{1}{2}$ AGB.

Podobnież dowodzę, że H, K, L, N, O są połowione, a więc ich połówki muszą być równe.

Wreście $\triangle$AGM $\cong$ AOM podług III. tw. o przyst.
bok AG = AO.

Tak samo GB = BH, przeto OG = GH = HK i t. d.

UWAGA. Foremny wielobok koło opisujący otrzymuje się także w ten sposób, że przez wszystkie punkta połowiące łuki do koła styczne prowadzimy.

§. 91.

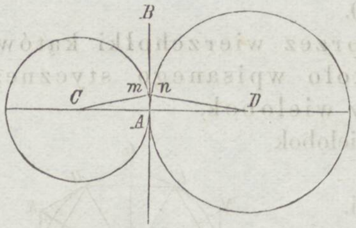
Określenie. Linia łącząca środki dwóch kół ze sobą, zowie się linią środkową (Centrallinie).

Twierdzenie. Linia środkowa dwóch przecinających się kół stoi na wspólnéj cięciwie prostopadle, połowiąc ją zarazem.

Twierdzenie 1. CD $\perp$ AB i AE = EB.

Dowód. Prowadząc promienie do punktów przecięcia, wywodzę podług II. tw. o przyst., że $\triangle$ACD $\cong$ CDB i że, ponieważ $\angle$AEC = $\angle$ CEB, CD $\perp$ na AB.

Twierdzenie 2. Linia środkowa dwóch stykających się kół przechodzi przez punkt zetknięcia i stoi prostopadle na stycznéj obu kołom wspólnéj.



I. Przypadek. Koła stykają się zewnętrznie.

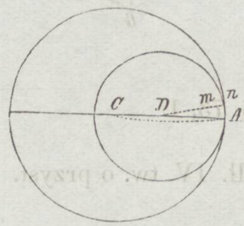
Twierdz. CAD jest linią prostą, przeto też B wspólną styczną.

Dowód. Przypuściwszy, że CAD jest linią łamaną a CmnD prostą, otrzymałbym CmnD, czyli $Cm+mn+nD<CA+AD$ podług §. 12.

Wiemy jednak że $Cm=CA$ i $nD=AD$

więc już $Cm+nD=CA+AD$

$Cm+mn+nD>CA+AD.$



II. Przypadek. Koła stykają się wewnętrznie.

Twierdzenie. CAD jest linią prostą.

Dowód. Przypuszczając, że CDA jest linią łamaną a CDmn prostą, otrzymałbym, prowadząc linią CA,

$CA<CD+DA$ podług §. 12.

również $CA=CDmn=CD+DM+mn$, jako promienie koła C,

zatem byłoby $CD+Dm+mn<CD+DA$

i $Dm+mn<DA$.

Wiemy jednak, że $Dm=DA$ jako promienie koła D;

zatem $Dm+mn>DA$.

§. 92.

Koła zupełnie oddzielnie od siebie położone mają linią środkową większą od sumy promieni; zewnątrz się stykające linią środkową równą sumie promieni, jeżeli zaś jeszcze bliżéj do siebie zostaną posunięte, tak że już się nie stykają, lecz przecinają, środkowa ich linia mniejszą się stanie od sumy promieni; dalsze poruszenie sprawi, że koło mniejsze posunie się w obręb większego, i że wewnętrznie się stykać będą, w którym to razie linia środkowa zrówna się z różnicą promieni; gdy wreście koło jedno zupełnie oddzielnie stanie wśród drugiego, linia środkowa mniejszą się stanie od różnicy promieni.

Ztąd wyprowadzamy następujące twierdzenia:

1. Koła zewnątrz siebie oddzielnie położone mają linią środkową większą od sumy promieni.

2. Koła, z których jedno wewnątrz drugiego jest położone, mają linią środkową mniejszą od różnicy promieni.

3. Koła przecinające się mają środkową linią mniejszą od sumy promieni, większą zaś od różnicy promieni.

4. Koła stykające się zewnętrznie mają linią środkową równą sumie promieni.

5. Koła stykające się wewnętrznie mają linią środkową równą różnicy promieni.

UWAGA 1. Dowody tych twierdzeń częścią wynikają bezpośrednio z wyobrażenia, częścią nie wprost łatwo dają się wykonać.

UWAGA 2. Do każdego z tych twierdzeń można także dodać odwrócenie.

UWAGA 3. Każde wykreślenie trójkąta za pomocą cyrkla opiera się na odwróceniu twierdzenia trzeciego, z którego wynika konieczność przecięcia się łuków wykreślonych. Ściśle więc biorąc, wypadałoby zagadnienie tego rodzaju poprzedzić tém twierdzeniem; nie byłby to jednak porządek z praktyczną korzyścią uczącego się połączony, bo dla drobiazgowéj konsekwencyi i ścisłości zbyt późno zapoznałby się dopiero z szeregiem zagadnień dla kształcenia umysłu ucznia bardzo korzystnych. Względy pedagogiczne, jak w wykładzie każdéj nauki, tak i w matematyce przestrzegane być winny.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

1. O powierzchniach figur uważanych ze względu na równość.

§. 93.

Określenia. 1. Każdy bok trójkąta uważać można za podstawę. Wierzchołkiem trójkąta zowiemy w każdym razie kąt podstawie przeciwległy, a prostopadłą z wierzchołka na podstawę poprowadzoną, wysokością trójkąta.

2. W równoległoboku można każdą parę przeciwległych boków, w trapezie zaś zwykle równoległe boki uważać za podstawy; ich oddalenie wzajemne prostopadłą oznaczone, jest natenczas wysokością figury.

Wnioski. 1. Trójkąty lub równoległoboki leżące pomiędzy liniami równoległemi w ten sposób, że ich podstawy leżą w jednéj, ich wierzchołki lub górne podstawy zaś w drugiéj równoległéj, mają równe wysokości.

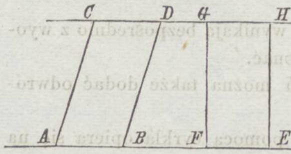
Treść wniosku wynika bezpośrednio z §. 58, 1.

2. Trójkąty i równoległoboki o równych wysokościach można w powyższy sposób pomiędzy te same linie równoległe wykreślić.

Wniosek ten dowodzę nie wprost.

§. 94.

Twierdzenie. Równoległoboki o równych podstawach i wysokościach mają także równą powierzchnią.



Dowód. Dane równoległoboki AD i FH wystawiam sobie położone pomiędzy dwie równoległe CH i AF, a otrzymam

$$AFGC \cong BEHD$$

z powodu, że wszystkie boki i kąty odpowiednie w obu trapezach są równe; odciągnąwszy zaś po obu stronach trapez BFGD, otrzymuję AD=FH.

Wniosek 1. Trójkąt mający z równoległobokiem równą podstawę i wysokość jest co do powierzchni połową równoległoboku.

Trójkąt bowiem jest połową tego równoległoboku, który łatwo przez dodanie trójkąta z niego wykreślić można, a który podług twierdzenia powyższego danemu do porównywania równoległobokowi musi być równy.

Wniosek 2. Trójkąty o równych podstawach i wysokościach mają także równą powierzchnią.

Treść wniosku tego łatwo dowieść można, wykreślając w sposób znany z każdego trójkąta równoległobok.

§. 95.

Twierdzenie. (Odwrócenie poprzedniego.) Trójkąty jako też równoległoboki, mające równą powierzchnią, mają

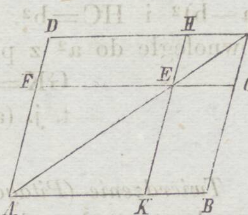
1. przy równéj wysokości równą podstawę,
2. przy równéj podstawie równą wysokość.

Dowód nie wprost.

§. 96.

Twierdzenie. Prowadząc przez jakikolwiek punkt przekątni w równoległoboku do obu boków równoległe linie, otrzymuję 4 równoległoboki, z których dwa nieprzecięte przekątnią mają równą powierzchnią. Równoległoboki te zowią się **dopełniającemi.**

Założenie. $AD \parallel BC$ i $\parallel HK$,
$AB \parallel DC$ i $\parallel FG$.



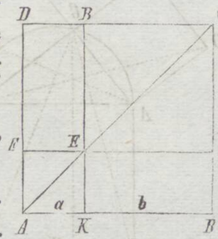
Twierdzenie. $\#DE = EB$.

Dowód. $\left.\begin{array}{l}\triangle ADC \cong ABC \\ \triangle AFE \cong AKE \\ \triangle EHC \cong EGC\end{array}\right\}$ podł. §. 58.

$\#DE = EB$ podług §. 9, 5.

Wniosek. Równoległe linie pociągnięte w powyższy sposób przez jakikolwiek punkt przekątni kwadratu, dzielą go na 2 kwadraty, i na 2 prostokąty dopełniające i przystające do siebie.

Dowód. Ponieważ $\#DB$ jest prostokątny, przeto też wszystkie 4, na które się rozpada, prostokątne być muszą podług §. 58. wn. 2.



Ponieważ zaś $AD = DC$ podł. założenia,
przeto $\angle DAC = DCA$ podł. §. 40.
wiemy zaś, że $\angle DAC =$ także HEC p. §. 26, 2.
również $\angle HEC = DCA$, p. §. 9. wn. 4.
bok $HE = HC$ podług §. 42.
$\#HG$ także równobocznym podł. §. 58.

W podobny sposób dowieść można, że FK jest kwadratem.

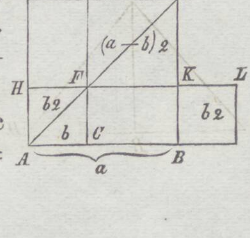
Wreście prostokąt $DE \cong EB$, dla tego że wszystkie boki i kąty odpowiednio położone w obu są równe.

§. 97.

Twierdzenie. Kwadrat wykreślony na sumie dwóch linii o podwójny prostokąt z obu jest większy od sumy kwadratów obu linii; kwadrat zaś wykreślony na różnicy owych linii o ten sam prostokąt podwójny jest mniejszy.

Literami a i b oznaczam obie linie, prostokąt z nich powtający przez a . b, a kwadraty na nich wykreślone przez a^2 i b^2, zatem będzie,

I. Twierdzenie. $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$. Wynika bezpośrednio z figury §. 96. wn.



II. Twierdzenie. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Dowód. Jeżeli $AB = a$, $AC = b$, więc też $CB = a - b$; przeto $EB = a^2$, $GK =$

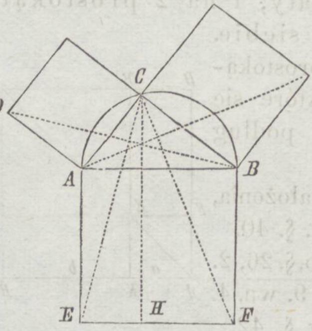
$(a-b)^2$ i $HC = b^2$. Przenosząc daléj b^2 pomiędzy te same równoległe do a^2 z przeciwnéj strony, otrzymuję:

$$GK = EB + BL - EC - CL$$

$$\text{t. j. } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \, . \, b.$$

§. 98.

Twierdzenie (Pitagorasa). W trójkącie prostokątnym kwadrat wykreślony na przeciwprostokątni równa się co do powierzchni sumie kwadratów na ramionach kąta prostego wykreślonych.



Założenie. $\angle ACB = R.$

Twierdz. $AB^2 = AC^2 + BC^2.$

Dowód. Wykreślam na każdym boku trójkąta kwadraty; prowadzę potem linie BD, AG, CE i CF i spuszczam z punktu C na EF prostopadłą CH, a otrzymam w trójkątach CAE i DAB:

bok $CA = DA$ } jako boki kwadratów
$AE = AB$ }

i $\angle CAE = DAB$, ponieważ obadwa są $= R + CAB$,

więc $\triangle CAE \cong DAB$ podług I. tw. o przyst.

Jednak wiem, że $\triangle CAE = \frac{1}{2}AH$ } podług §. 94. wn.
i $\triangle DAB = \frac{1}{2}DC$ }

$\frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}DC$ i $AH = DC$. podł. §. 9. wn. 4.

W podobny sposób okazać można że $HB = CG$; przeto $AH + HB$, t. j. $AF = DC + CG$,

albo $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Wniosek. Kwadrat wykreślony na przyprostokątni równa się kwadratowi przeciwprostokątni mniéj kwadratowi drugiéj przyprostokątni.

§. 99.

Twierdzenie. (Odwrócenie przeszłego). Skoro w trójkącie kwadrat jednego boku równa się sumie kwadratów dwóch innych boków, kąt owemu bokowi przeciwległy musi być kątem prostym.

Założenie. $AC^2 = AB^2 + BC^2.$

Twierdzenie. $\angle ABC = R.$

Dowód. Wyprowadzam z punktu B prostopadłą BD, którą robię równą AB i prowadzę linią CD; mam zatem:

$CD^2 = BD^2 + BC^2$ podług §. 98.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ podług założenia,

po trzecie $CD^2 = AC^2$ podług §. 9. wn. 4.

zatem $CD = AC$; inaczéj bowiem także ich kwadraty równeby nie mogły być.

Również $BD = AB$

i $CB = CB$

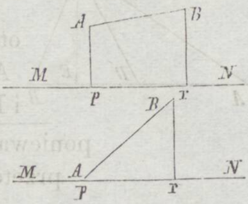
$\triangle CBD \cong ABC$

$\angle CBD = ABC$

gdy zas $\angle CBD = R$, przeto też $\angle ABC = R$.

§. 100.

Określenie. Wynaleść r z u t jednéj linii na drugą (eine gerade L. auf eine andere projiciren) znaczy, z jéj krańców do owéj drugiéj wyprowadzić prostopadłe. Część téjże linii pomiędzy prostopadłemi zawarta będzie rzutem owéj (Projection), n. p. pr jest rzutem linii AB na MN.

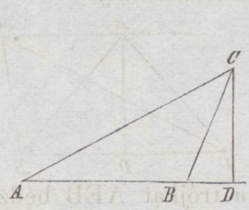


UWAGA. Wielkość rzutu zależy od wielkości linii i od jéj pochyłości ku drugiéj linii.

§. 101.

Twierdzenie. 1. W trójkącie rozwartokątnym kwadrat boku największego równa się sumie kwadratów innych dwóch boków, powiększonéj o podwójny prostokąt powstający z jednego tychże boków i z rzutu drugiego na pierwszy. 2. W każdym zaś w ogóle trójkącie kwadrat boku przeciwległego ostremu kątowi równa się sumie kwadratów drugich dwóch boków zmniejszonéj o taki sam prostokąt podwójny.

Twierdzenie. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BD$.



Dowód. $AC^2 = AD^2 + DC^2$ podł. §. 98.

Wiemy zaś, że $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB.BD$ podług §. 97, I.

i $DC^2 = BC^2 - BD^2$ podł. §. 98, wn.

$AC^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB.BD + BC^2 - BD^2$

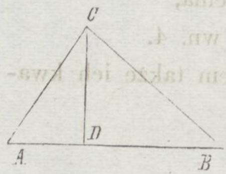
t. j. $= AB^2 + BC^2 + 2AB.BD$.

Twierdzenie 2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BD$.

Dowód. $AC^2 = AD^2 + DC^2$ podług §. 98. tw.

również AD^2 t. j. $(AB-DB)^2 = AB^2 + DB^2 - 2AB \cdot DB$

i $DC^2 = BC^2 - DB^2$ podł. §. 98. wn.



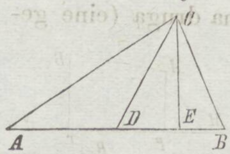
$$\overline{AC^2 = AB^2 + DB^2 - 2AB \cdot BD + BC^2 - DB^2}$$

t. j. $= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BD$.

UWAGA. Twierdzenie Pitagorasa zawarte jest w tém twierdzeniu jako przypadek szczegółowy.

§. 102.

Twierdzenie. W każdym trójkącie równa się suma kwadratów dwóch boków sumie podwójnego kwadratu wykreślonego na połowie trzeciego boku i podwójnego kwadratu poprzecznéj do jego środka poprowadzonéj.



Twierdzenie. $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$.

Dowód. Wykreślając rzut linii CD na DB, otrzymuję:

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DE \\ \text{i } BC^2 &= DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DE \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{podł. §. 101,} \\ &\text{1. i 2.} \end{aligned}$$

ponieważ zaś $AD = DB$ podług założenia, przeto $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2DC^2$.

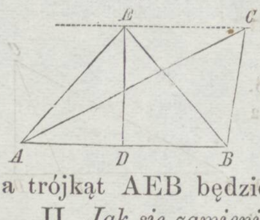
2. Zamiana figur prostoliniowych.

§. 103.

Określenie. Figurę daną zamienić znaczy, jéj powierzchni kształt inny nadać.

Zagadnienia.

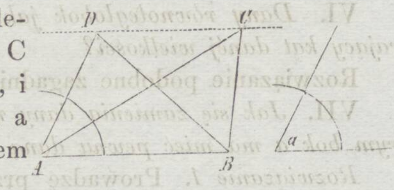
I. *Jak się zamienia trójkąt nierównoboczny na trójkąt równoramienny?*



Rozwiązanie. Wyprowadzam ze środka D linii AB prostopadłą, przedłużając ją tak dalece, aż przetnie równoległą z punktu C do AB poprowadzoną w punkcie E, poczem łączę punkt E z punktami A i B; a trójkąt AEB będzie żądanym (podług §. 94. wn. 2.)

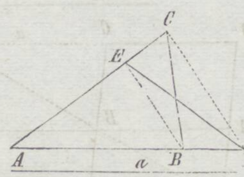
II. *Jak się zamienia trójkąt dany na inny z danym kątem a?*

Rozwiązanie. Kąt dany a przenoszę na linią AB do punktu A,



przedłużam jego ramię tak dalece, aż równoległą z punktu C do AB pociągniętą w D trafi, i łączę punkt D z punktem B, a trójkąt ABE będzie trójkątem żądanym.

III. *Jak się zamienia trójkąt dany na inny z daną podstawą?*

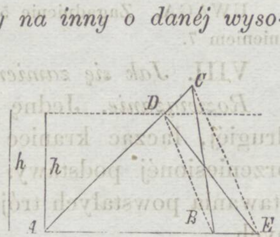


Rozwiązanie. Odcinam a na AB, aż do D, prowadzę linią CD, potem z punktu B równoległą do CD aż do boku przeciwległego lub tegoż przedłużenia do punktu E, prowadzę ED, a $\triangle$ ADE będzie żądanym.

Dowód. $\triangle$ ADE $=$ ABC, mają bowiem wspólny trojkąt ABE, a trójkąty BED i BEC są sobie równe podług §. 94, 2.

UWAGA. Rozwiązanie łączy w sobie także przypadek ten, jeżeli a jest $<$ AB.

IV. *Jak się zamienia trójkąt dany na inny o danéj wysokości?*



Rozwiązanie. Wyprowadzam linią h prostopadle na AB, z jéj krańca zaś linią równoległą do AB, aż ta AC (lub BC) albo jéj przedłużenie w punkcie D trafi; prowadzę BD i z punktu C do linii DB równoległą aż do AB lub do jéj przedłużenia. Połączywszy E z D, otrzymuję żądany trójkąt ADE.

Dowód jak w poprzedzającém zagadnieniu.

UWAGA 1. Zagadnienie to podaje zarazem sposób, jak trójkąty z rozmaitemi wysokościami na takie zamienić, któreby miały wysokości równe, jak zatem sumę lub różnicę trójkątów wyrazić w kształcie trójkąta.

UWAGA 2. Zagadnienie 3. i 4. można także każde pojedyńczo z 1. i 2. połączyć.

V. *Jak dany trójkąt ABC zamienić można na równoległobok?*

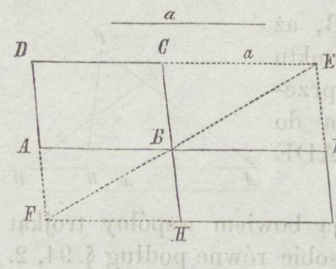
Rozwiązanie. Prowadzę z punktu D t. j. ze środka boku AB linią równoległą do CA. $\triangle$DBF $\cong$ CEF, przeto dany trójkąt ACB $= \#$ CD.

VI. *Dany równoległobok jak się zamieni na inny, zawierający kąt danéj wielkości?*

Rozwiązanie podobne zagadnieniu II.

VII. *Jak się zamienia dany równoległobok na inny, w którym bok a ma mieć pewną daną długość?*

Rozwiązanie 1. Prowadzę przekątnią; jeden z powstałych trójkątów zamieniam na inny żądany bok posiadający, a tak otrzymany trójkąt uzupełniam innym trójk. do równoległoboku.



Rozwiązanie 2. Bok dany a przykładam jako przedłużenie do boku DC, prowadzę EB, przedłużając EB tak dalece, aż się spotka z przedłużeniem boku DA w punkcie F; prowadzę FG || do DE i EG || do DF, przedłużam wreście AB i CB, a równoległobok BG będzie żądanym.

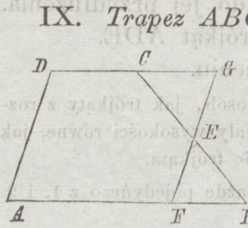
Dowód tego rozwiązania wynika bezpośrednio z §. 96.

UWAGA. Zagadnienie 5. i 6. można także jeszcze kombinować z zagadnieniem 7.

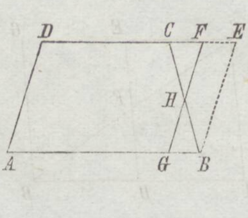
VIII. *Jak się zamienia równoległobok lub trapez na trójkąt?*

Rozwiązanie. Jednę z obu podstaw przedłużam o długość drugiéj, łącząc kraniec przedłużenia z przeciwnym krańcem przeniesionéj podstawy. Dowód wynika z łatwością z przystawania powstałych trójkątów wierzchołkiem do siebie zwróconych.

IX. *Trapez ABCD zamienić na równoległobok?*



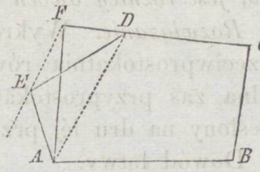
Rozwiązanie 1. Prowadzę przez środek E boku CB równoległą do DA, przedłużając ją tak dalece, aż AB i przedłużenie boku DC przetnie; mam natenczas ⧺AG=ABCD, bo △CEG≌FEB.



Rozwiązanie 2. Przedłużam DC, robiąc całą DE równą AB, prowadzę EB, połowię CE w punkcie F, odcinam EF na boku BA, i łączę punkt G z punktem F.

Dowodzę, że FG || do EB, zatem || do DA i t. d.

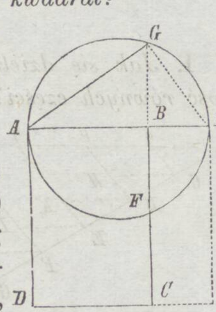
X. *Jak się zamienia wielobok ABCDE na trójkąt?*



Rozwiązanie. Odcinam przekątnią trójkąt ADE, prowadzę przez E równoległą do przekątni, przedłużając ją tak daleko, aż przedłużenie boku sąsiedniego w punkcie F trafi, poczem łączę A i F, a pięciobok ABCDE będzie zamieniony na czworobok ABCF; bo oba składają się z równych części.

W podobny zupełnie sposób otrzymany czworobok zamieniam na trójkąt.

XI. *Jak się zamienia prostokąt AC na kwadrat?*



Rozwiązanie. Przedłużam AB tak dalece, aż przedłużona wyrówna bokowi AD, poczem biorąc AE za średnicę, wykreślam nią koło, przecinające bok BC w punkcie F, i jego przedłużenie w punkcie G; pociągniona wreście linia AG (lub też AF) jest bokiem żądanego kwadratu podług §. 98., bo uzupełniwszy kwadrat nad średnicą AE, i połączywszy punkta G i E, otrzymuję według figury twierdzenia Pitagorasa:

$$GA^2 = AD \, . \, AB$$

$$\text{lub też } GE^2 = BE \, . \, BC.$$

UWAGA. Wszystkie przeto prostoliniowe figury zamienić można na kwadraty, sprowadziwszy ich powierzchnią poprzednio najprzód na trójkąty a potem na prostokąty.

XII. *Jak się wykreśla kwadrat równy sumie dwóch kwadratów?*

Rozwiązanie. Wykreślam trójkąt prostokątny, którego przyprostokątnie równe są bokom danych kwadratów. Przeciwprostokątnia będzie bokiem żądanego kwadratu.

UWAGA 1. W razie gdy jest kilka kwadratów danych, zamieniam najprzód dwa na jeden, do tego znów przyłączam trzeci, a zamieniwszy je na jeden, w podobny sposób postępuję daléj.

UWAGA. Kwadrat wykreślony na przekątni drugiego, powierzchnią dwa razy od tegoż jest większy, wykreślony zaś na podwójnym boku cztery razy dany w sobie zawiera.

XIII. *Jak się wykreśla kwadrat, którego powierzchnia równa jest różnicy dwóch danych kwadratów?*

Rozwiązanie. Wykreślam trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątnia równa się bokowi większego kwadratu, jedna zaś przyprostokątnia bokowi mniejszego. Kwadrat wykreślony na dru iéj przyprostokątni będzie żądaną różnicą.

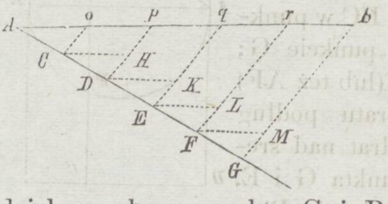
Dowód łatwy.

3. O rozdzielaniu figur prostoliniowych na równe części.

Zagadnienia.

§. 104.

I. *Jak się dzieli dana linia AB na jakąkolwiekbądź daną ilość równych części?*



Rozwiązanie. Z punktu A wyprowadzam linią pod kątem dowolnéj wielkości, na niéj zaś odcinam tyle razy jakąkolwiek linią, na ile równych części właśnie dana linia ma być podzieloną; łączę punkta G i B ze sobą, poczem z każdego punktu wyprowadzam linie Fr, Eq, Dp, Co równolegle do BG.

Dowód. Z tych samych punktów prowadząc także równoległe do AB, ale tylko w każdym razie aż do sąsiedniéj równoległéj, otrzymuję $\triangle$ACo $\cong$ CDH $\cong$ DEK podług III. tw. o przyst.

Ao = CH = DK i t. d.

zatem też Ao = op = pq i t. d. podług §. 58.

II. *Jak można podzielić dany trójkąt na jakąkolwiek daną ilość równych części?*

Rozwiązanie. Jeden z boków dzielę na żądaną ilość równych części podług poprzedzającego zagadnienia, poczem łączę krańce tych częsci z wierzchołkiem przeciwległym, a otrzymam same równe trójkąty podług §. 94. wn. 2.

III. *Dany równoległobok jak rozłożyć na jakąkolwiek daną ilość równych części?*

Rozwiązanie. Dwa boki przeciwległe dzielą się podług zagadn. I. na żądaną ilość równych części, poczem krańce tychże się z sobą łączą. Powstałe równoległoboki są sobie równe podług §. 94.

IV. *Dany trapez jak się dzieli na żądaną ilość równych części?*

Rozwiązanie. Dzielą się boki przeciwległe na żądaną ilość równych części, których krańce się łączą liniami.

Dowód. Powstałe trapezy są sobie równe, bo jeżeli w każdym poprowadzimy przekątnie, otrzymamy z każdego dwa trójkąty. Ponieważ zaś trójkąty zwrócone podstawą ku górze są sobie równe podług §. 94, 2., podobnie jak trójkąty zwrócone ku dołowi, przeto też powstałe trapezy równe być muszą.

V. *Jak się rozkłada równoległobok na żądaną ilość równych części liniami poprowadzonemi z wierzchołka równoległoboku?*

α) Na ilość parzystą.

Rozwiązanie. Każdy z boków równoległoboku przeciwległy punktowi, z którego podział ma nastąpić, rozkładam na połowę żądanych części, poczem krańce tychże z punktem wierzchołka łączę.

Dowód. Że powierzchnie otrzymanych trójkątów są sobie równe, wynika ztąd, iż nasamprzód przekątnia z danego wierzchołka wychodząca połowi go na równe dwa trójkąty, z których każdy znów na równe części rozpada.

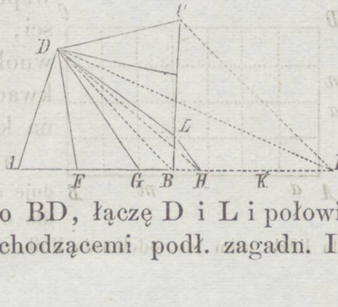
β) Na ilość nieparzystą.

Rozwiązanie. W tym razie każdy z obu przeciwległych boków dzieli się na żądaną ilość równych części, tak że te na podwójną ilość równych części będą podzielone, poczem wierzchołek łączę z krańcami tychże, opuszczając zawsze jeden, zatem łączę pierwszy, trzeci i t. d.

Dowód łatwo się nastręcza, jeżeli także pominione punkta z owym wierzchołkiem połączymy.

VI. *Dany czworobok ABCD rozłożyć liniami wychodzącemi z punktu D na jakąkolwiek ilość (na 5) równych części?*

Rozwiązanie. Dany czworobok ABCD podł. §. 103. X. zamieniam na trójkąt AED, mający wierzchołek swój w punkcie D, poczem dzielę AE na 5 równych części, łączę punkta F, G i H,



z punktem D, prowadzę HL || do BD, łączę D i L i połowię △DLC liniami z punktu D wychodzącemi podł. zagadn. II.

Dowód. Trójkąt AFD = FGD = GHD = $\frac{1}{5}$AED = $\frac{1}{5}$ABCD: również trójkąt GHD = czworobokowi GBLD, z powodu, że mają wspólny trójkąt GBD i że trójkąt DBH równa się trójkątowi DBL. Czworobok ABLD równa się przeto $\frac{3}{5}$ ABCD, przeto też trójkąt DLC = $\frac{2}{5}$ABCD.

UWAGA 1. Jeżeli kąt CDA jest półpełnym, zagadnienie to brzmi natenczas: *Jak się rozkłada dany trójkąt na równe części liniami wychodzącemi z jakiego punktu jego boku?*

UWAGA 2. W sposób podobny rozwięzuje się następujące zagadnienie: *Jak się rozkłada trójkąt dany na równe części liniami wychodzącami z jakiego punktu wewnątrz trójkąta położonego?*

4. O rozmierzaniu figur prostoliniowych.

§. 105.

Określenie 1. Miarą zowiemy ilość zawartą raz lub razy kilka w innéj jakiéj ilości równogatunkowéj, lub dającéj się sprowadzić na równogatunkową.

Określenie 2. Dana ilość wymierzyć znaczy przeto, z inną jaką ilością powszechnie znaną ją porównać i oznaczyć, ile razy owa znana w niéj jest zawartą. Wyrazem takowego porównania jest w każdym razie stosunek geometryczny.

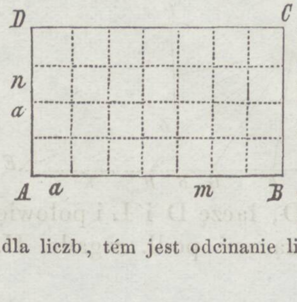
Wniosek. Miarą linii tylko może być linia, miarą kąta tylko kąt, a wreście miarą płaszczyzny tylko płaszczyzna.

UWAGA 1. Zasadniczą miarą długości jest pręt (Ruthe) (°), podzielony albo wedle miary dziesięciodzielnéj na 10, albo też wedle miary dwunastodzielnéj na 12 równych części zwanych stopami (Fuss) ('), i t. d.

UWAGA 2. Jako miara płaszczyzny służy kwadrat, który wedle wielkości boku albo jest prętem kwadratowym (□°), stopą kwadratową □' i t. d.

§. 106.

Twierdzenie. Dzieląc dwa boki sąsiednie prostokąta miarą wspólną tychże boków na równe części, i prowadząc z ich krańców równoległe, otrzymamy ilość równych kwadratów wyrażoną iloczynem z liczb, na które boki oba zostały podzielone.



UWAGA. Dla dwóch danych linii wynajduje się miara wspólna w podobny sposób, jak dla dwóch danych liczb. Czém jest dzielenie dla liczb, tém jest odcinanie linii mniejszéj na większéj.

Dowód. Niechaj litera a wyraża miarę wspólną obu boków, zawartą w boku AB m razy, w boku zaś AD n razy, prostokąd AC zatem równoległemi wyprowadzonemi z linii AB rozłożonym zostanie na m przystających do siebie prostokątów, a każdy znów z tych liniami równoległemi wyprowadzonemi z linii AD na n kwadratów (miary a). Cały przeto prostokąt na $m \times n$ równych kwadratów (miary a) został rozłożony.

Prostokąt AC równy jest przeto $m \times n$ kwadratom miary a; jeżeli zaś miarą tą jest 1 cal ("), a w podobnym przypadku $m = 7''$, n zaś $= 4''$, powierzchnia jego wynosić będzie $7 \times 4 =$ 28 cali kwadratowych ($\square''$).

Twierdzenie powyższe zwykle tak się wyraża:

Powierzchnia prostokąta równa się iloczynowi z dwóch stykających się boków, które miarą wspólną wymierzone zostały.

Dowód. Bo mnożąc $AB = m \,.\, a$

przez $AD = n \,.\, a$,

otrzymuję $AB \,.\, AD = m \,.\, n \,.\, a^2$, zatem także mn kwadratów, z których każdy ma miarę a. Prostokąt przeto $AC = AB \,.\, AD$.

UWAGA. Jeżeli oba boki nie mają miary wspólnéj, bierze się miara ile możności jak najbliższa, tak żeby błąd popełniony był jak najmniejszy.

Wniosek 1. Powierzchnia kwadratu równa się przeto bokowi przez siebie pomnożonemu.

Wniosek 2. Kwadrat jako miara płaszczyzny, wedle tego, czy jest miara dziesiętna lub dwunastodzielna, albo ma liczbę redukcyjną 100, albo też 144. Zatem

$$1 \square^{0} = 144 \square' \text{d. d. i t. d.}$$

§. 107.

Twierdzenia. I. Powierzchnia równoległoboku równa się iloczynowi z jego podstawy (p) i wysokości (w).

$$\text{Rów.} = p \,.\, w.$$

Dowód. Ta formuła jest ogólną, bo każdy równoległobok skośny równa się prostokątowi, którego jeden bok jest równy podstawie, a drugi wysokości.

Ztąd wynika także:

$$p = \frac{\text{Rów.}}{w} \text{ i } w = \frac{\text{Rów.}}{p}$$

Wniosek. Jeżeli a oznacza bok, K zaś powierzchnią kwadratu, otrzymujemy:

$$K = a^2 \text{ i } a = \sqrt{K}.$$

II. Powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z jego podstawy i wysokości.

$$Tr. = \frac{p \cdot w}{2}, \text{ przeto też } p = \frac{2\,Tr.}{w} \text{ i } w = \frac{2\,Tr.}{p}.$$

Dowód wynika bezpośrednio z §. 94. Wn. 1.

Wniosek. Powierzchnia trojkąta prostokątnego równa się połowie iloczynu z obu przyprostokątni (a i b).

$$Tr. = \frac{a \cdot b}{2}.$$

III. Powierzchnia trapezu równa się iloczynowi z połowy obu boków równoległych (P i p) pomnożonéj przez jego wysokość (w).

$$\text{Trapez} = \frac{P+p}{2} \cdot w = \frac{(P+p)\,w}{2}.$$

Dowód. Poprowadziwszy bowiem przekątnią otrzymuję:

$$\text{Trapez} = P \cdot \frac{w}{2} + \frac{p \cdot w}{2} \text{ t. j. } (P+p)\frac{w}{2} = \frac{(P+p)\,w}{2}.$$

$$\text{Zatem } w = \frac{2 \text{ Trapez}}{P+p} \text{ i } P = \frac{2 \text{ Trapez}}{w} - p.$$

IV. Powierzchnia (F) foremnego wieloboku równa się połowie iloczynu z obwodu (O) i mniejszego promienia (ρ).

$$F = \frac{O \cdot \rho}{2}.$$

Dowód. Jeżeli bowiem B oznacza bok foremnego wieloboku, a n ich ilość, natenczas

$$F = \frac{n \cdot B \cdot \rho}{2} = \frac{O \cdot \rho}{2}.$$

§. 108

Wnioski. 1) Powierzchnie dwóch trójkątów mają się do siebie jak iloczyny z odpowiednich podstaw i wysokości.

2) Trójkąty o równych wysokościach mają się jak ich podstawy.

3) Trójkąty o równych podstawach mają się jak ich wysokości.

4) Trójkąty mające dwa kąty równe, mają się do siebie jak iloczyny z ramion tychże kątów.

Bo, wyobrażając sobie oba trójkąty (których powierzchnie niechaj będą P i p) równemi kątami do siebie zestawione, tak, iż te utworzą kąty wierzchołkiem przeciwległe, i łącząc dwa wierzchołki z sobą, tak iż powstanie środkowy △f, otrzymam podług wn. 2. dwie proporcye geom., które w jedną złożone, prawdziwość czwartego wniosku dowodzą.

5) Trójkąty są sobie równe, skoro ich podstawy mają się do siebie odwrotnie jak ich wysokości — i odwrotnie: w równych trójkątach mają się podstawy do siebie odwrotnie jak ich wysokości.

Wszystkie te wnioski także i do równoległoboków można zastósować.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

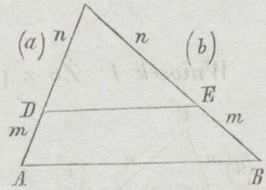
1. O proporcyonalności linii prostych i o podobieństwie figur prostoliniowych.

§. 109.

Twierdzenie. Linia w trójkącie do jakiegokolwiek boku równolegle pociągnięta, dzieli drugie dwa boki na oddziały, składające proporcye geometryczne.

Założenie. DE || AB.

Twierdzenie. AD : DC = BE : EC.

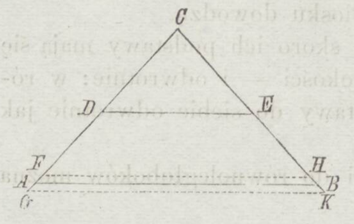


Dowód. Biorąc największą miarę (a) wspólną bokom AD i DC, zawartą w boku AD m razy, w boku zaś DC n razy, i odciąwszy ją na tychże bokach, otrzymuję, poprowadziwszy z tych punktów równoległe do AB, bok BE podzielony na m, a bok EC na n równych części, z których każda niechaj będzie = b, zatem otrzymuję daléj:

$$\text{AD} : \text{DC} = \text{m a} : \text{n a} = \text{m} : \text{n}$$
$$\text{i BE} : \text{EC} = \text{m b} : \text{n b} = \text{m} : \text{n}$$
$$\text{zatem AD} : \text{DC} = \text{BE} : \text{EC}.$$

UWAGA. Aby także w przypadku niewspółmierności pojawiającéj się w geometryi dosyć często, dać dowód ściśle umiejętny, dowodzimy, że oba stosunki nieracyonalne, których równość ma się okazać, w każdym razie pomiędzy temi samemi leżą granicami racyonalnemi. Następujący wywód ścisłość tę ma okazać, jednak li tylko jako skazówkę dla nauczyciela.

Jeżeli bowiem stosunki ilości racyonalnych, jakkolwiek do siebie zbliżone, są równe, muszą przeto też być równe i owe stosunki nieracjonalne:



Dzieląc CD na n równych części, z których każda $=$a, i odcinając a na boku DA m razy, aż do punktu F, otrzymuję FA $<$a, t. j. DA$>$DF, czyli ma jest $<$DG czyli od (m$+$1) a.

CD : DA leży przeto pomiędzy n : m a n : m$+$1,

bo wykładniki tych stosunków są $\frac{m}{n}$ i $\frac{m+1}{n}$.

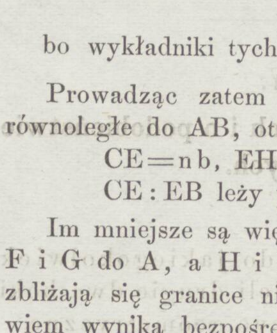
Prowadząc zatem z punktów dzielących boku CG linie równoległe do AB, otrzymamy:

CE$=$nb, EH$=$mb i EK$=$(m$+$1)b, zatem też CE : EB leży pomiędzy n : m i n : m$+$1.

Im mniejsze są więc ilości a i b, tem bardziéj zbliżają się F i G do A, a H i K tem bardziéj do B; tem bardziéj też zbliżają się granice nieracyonalne do racyonalnych. To bowiem wynika bezpośrednio ztąd, że różnica ich wykładników $\frac{1}{n}$ tem jest mniejsza, im większa ilość n.

§. 110.

Wniosek 1. Że z proporcyi AD : DC$=$BE : EC w skutek zamiany wyrazów 7 nowych proporcyi ustawić można, wynika bezpośrednio z istoty każdéj proporcyi.



Wniosek 2. Łatwo także okazać można, że całkowite boki mają się jak odpowiednio położone ich części,

AC : CB$=$AD : BE$=$DC : EC;

bo w każdéj proporcyi suma pierwszych obu wyrazów ma się do sumy drugich dwóch wyrazów, jak dwa odpowiednie wyrazy.

Zagadnienie. Do trzech danych linii znaleść czwartą proporcyonalną tak, aby a : b$=$c : X.

Rozwiązań można podać kilka bardzo łatwych.

UWAGA. Szczegółowym przypadkiem tegoż jest zagadnienie: jak wynaleść do dwóch linii danych trzecią proporcyonalną, tak aby a : b$=$b : X. (O średniéj proporcyonalnéj na innném miejscu.)

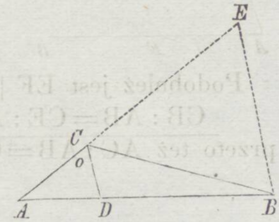
§. 111.

Twierdzenie. Dwusieczna jakiegokolwiek kąta w trójkącie dzieli bok przeciwległy proporcyonalnie podług wielkości ramion kąta podzielonego.

Założenie. CD jest dwusieczną $\angle$ ACB.

Twierdzenie. AC : BC = AD : DB.

Dowód. Przedłużając AC o bok CB aż do punktu E i prowadząc EB, otrzymuję $\angle E = \angle o$, z powodu, że każdy z nich $= \frac{1}{2}$ ACB; zatem EB || CD, podług §. 26, 1, zkąd wynika, że AC : CE (czyli CB) = AD : DB, podł. §. 109.



Zagadnienie. Jak brzmi odwrócenie tegoż twierdzenia?

§. 112.

Twierdzenie. (Odwrócenie §. 109.) Linia prosta przecinająca dwa boki trojkąta w ten sposób, iż ich części stanowią proporcyą geometryczną, do boku trzeciego jest równoległą.

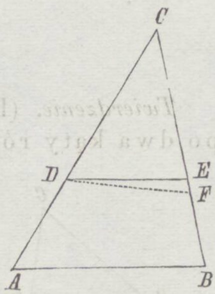
Założenie. AD : DC = BE : EC.

Twierdzenie. DE || AB.

Dowód. Gdyby nie DE, lecz DF było || do AB, otrzymalibyśmy podług §. 109.

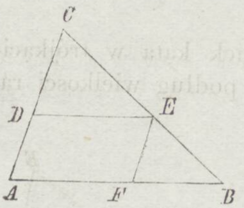
AD : DC = BF : FC,
podług założenia AD : DC = BE : EC,
musiało by być przeto BF : FC = BE : EC,
lub też BF : BE = FC : EC,

co jest niepodobieństwem z powodu, że w proporcyi stosunek wzrastający równocześnie nie może się łączyć z ubywającym.



§. 113.

Wniosek. Prowadząc z jakiego punktu boku w trójkącie równoległe do drugich dwóch jego boków, otrzymujemy proporcye z boków powstałych trójkątów, jako też z boków mniejszego i całego.



Założenie. DE ∥ AB, EF ∥ AC.
Twierdzenie. AB : BC : AC = DE : EC : DC = FB : BE : FE.

Dowód. Ponieważ DE ∥ AB, przeto podług §. 109.
AC : CB = CD : CE albo AD : EB t. j. FE : EB.
Podobnież jest EF ∥ AC.
CB : AB = CE : AF (t. j. DE) albo = EB : FB.

przeto też AC : AB = CD : DE albo = FE : FB.

§. 114.

Określenie. Figury prostoliniowe, których odpowiednio położone kąty są równe, a odpowiednio położone boki proporcyą dają geom., zowią się podobne (∼). Podobieństwo wyraża zgodność ze względu na kształt.

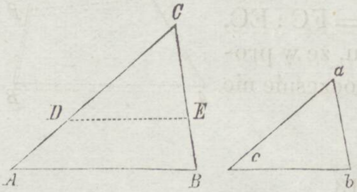
Wniosek 1. Linia prosta poprowadzona w trójkącie równolegle do jakiego boku, odcina trójkąt mniejszy podobny całemu.

Wniosek 2. Foremne wieloboki o równéj ilości boków, jako i wszystkie koła są sobie podobne.

Cztery twierdzenia zawierające warunki podobieństwa trójkątów.

§. 115.

Twierdzenie. (Podobieństwa pierwsze.) Trójkąty mające po dwa kąty równe są sobie podobne.



Założenie. ∠A=c, ∠C=a.
Twierdzenie. △ABC ∼ abc.
Wykreślenie. Przenoszę ac na odpowiedni bok AC, że się zrówna z bokiem CD, i prowadzę z punktu D do AB równoległą, tak że, CD stanie się bokiem trójkąta; więc będzie, ponieważ DE ∥ AB;

Dowód. △DEC ∼ ABC podług §. 114, 1.
△DEC ≅ abc podług III twierdz. o przyst.

△abc ∼ ABC.

UWAGA. Twierdzenie to podobieństwa odpowiada trzeciemu twierdzeniu przystawania trójkątów; z powodu jednak, że tu bok odpada i tylko dwa kąty pozostają, jeden tylko przypadek zajść może.

§. 116.

Twierdzenie. (Podobieństwa drugie.) Trójkąty, mające po dwa boki składające geometryczną proporcyą i zarazem kąty większym bokom przeciwległe równe, są sobie podobne. (Fig. §. 115.)

Założenie. $AC : CB = ac : ab$

$AC > CB$, $ac > ab$ i $\angle B = \angle b$.

Twierdzenie i potrzebne do dowodu wykreślenie jak w §. 115.

Dowód. $\triangle DEC \sim ABC$, zkąd wynika

$DC : CE = AC : CB$

ponieważ zaś $AC : CB = ac : ab$ podług założenia,

przeto $DC : CE = ac : ab$

$DC = ac$ podług wykreślenia;

zatem też $CE = ab$

$\triangle DEC \cong abc$ podług IV. tw. o przyst.

zatem też $\triangle \sim ABC$.

UWAGA. Twierdzenie to podobieństwa odpowiada IV. tw. o przystawaniu trójkątów.

§. 117.

Twierdzenie. (Podobieństwa trzecie.) Dwa trójkąty są sobie podobne, jeżeli wszystkie boki jednego z bokami drugiego tworzą proporcyą geometryczną. (Fig. §. 115).

Założenie. $AB : BC : AC = cb : ba : ac$.

Twierdzenie i wykreślenie jak w §. 115.

Dowód. $\triangle DEC \sim ABC$, zkąd wynika

$DE : EC : DC = AB : BC : AC$;

gdy zaś $AB : BC : AC = cb : ba : ac$ podług założenia,

przeto $DE : EC : DC = cb : ba : ac$

$DC = ac$ podług wykreślenia

przeto też $DE = cb$

i $EC = ba$

$\triangle DEC \cong abc$ podług II. tw. o przyst.

zatem też $\triangle abc \sim ABC$.

UWAGA. Twierdzenie to podobieństwa odpowiada II. tw. o przyst.

§. 118.

Twierdzenie. (Podobieństwa czwarte.) **Dwa trójkąty są sobie podobne, jeżeli dwa boki jednego z dwoma bokami drugiego tworzą geometryczną proporcyą a kąty od tychże boków zawarte są równe.** (Fig. §. 115).

Założenie. AC : CB = ca : ab, ∠C = ∠a.

Twierdzenie. △ABC ∾ abc.

Wykreślenie jak w §. 115.

Dowód. △DEC ∾ ABC podług §. 114. Wn. 1.
DC : CE = AC : CB,
również AC : CB = ca : ab podług założ.
DC : CE = ac : ab.

Gdy zaś DC = ac podług wykreślenia, przeto tu w powyższéj proporcyi CE = ab być musi, skoro pierwszy wyraz był równy trzeciemu; zatem też △DEC ≅ acb, podł. I. tw. o przyst.
△abc ∾ ABC.

UWAGA. Twierdzenie to podobieństwa odpowiada I. tw. o przyst.

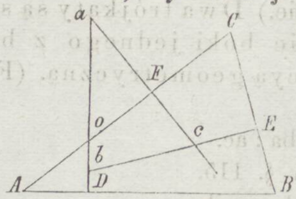
§. 119.

Wniosek. Trójkąty także są sobie podobne:

1) Jeżeli ich boki odpowiednie parami są równoległe.

2) Jeżeli boki jednego stoją prostopadle na bokach drugiego.

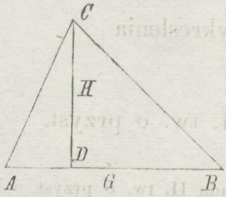
Dowód 1) wynika z §. 115.



2) ∠a = A jako dopełniający ∠o
∠b = B jako spłn. ∠BDE
△abc ∾ ABC. podł. §. 115.

§. 120.

Twierdzenie. **W podobnych do siebie trójkątach składają odpowiednie wysokości (t. j. wysokości poprowadzone z równych kątów) z odpowiedniemi bokami proporcyą geometryczną.**

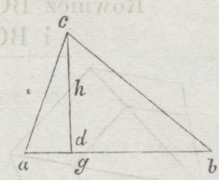


Założenie. △ABC ∾ abc.

Twierdzenie. CD : cd = AC : ac = AB : ab
lub też H : h = G : g.

Dowód. △ADC ∾ adc podług §. 115.
CD : cd = AC : ac
Podług założenia zaś AC : ac = AB : ab
CD : cd = AB : ab.

UWAGA. W podobny sposób okazujemy, że wszystkie linie w podobnych do siebie trójkątach odpowiednio poprowadzone mają się do siebie, jak dwa odpowiednie boki.



Wniosek. Obwody dwóch podobnych trójkątów mają się do siebie jak dwa odpowiednie boki.

Dowód. Podług założenia AB : ab = AC : ac = BC : bc, przeto podług znanego twierdzenia o geom. proporcyach

$$AB + AC + BC : ab + ac + bc = AB : ab.$$

To samo twierdzimy o podobnych wielobokach.

§. 121.

Twierdzenie. Powierzchnie dwóch podobnych trójkątów mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków czyli wysokości. (Fig. poprzedzającego twierdzenia).

Założenie. $\triangle ABC \backsim abc$.

Twierdzenie. $\triangle ABC : abc = G^2 : g^2$ lub $H^2 : h^2$.

Dowód. Podług §. 108, 1, otrzymuję:

$$\triangle ABC : abc = G \,.\, H : gh.$$

Ponieważ zaś $H : h = G : g$ podług §. 120

i $G : g = G : g$, przeto też

$$G \,.\, H : g \,.\, h = G^2 : g^2$$

$$\triangle ABC : abc = G^2 : g^2 = H^2 : h^2.$$

§. 122.

Twierdzenie. Podobne do siebie wieloboki przez odpowiednio poprowadzone przekątnie (t. j. linie łączące wierzchołki równych kątów) na podobne do siebie rozpadają trójkąty.

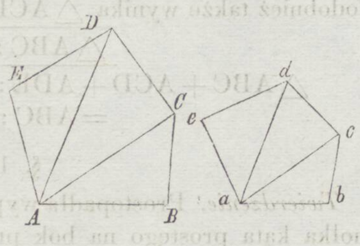
Założenie. ABCDE $\backsim$ abcde

Twierdzenie. $\triangle ABC \backsim abc$, ADC $\backsim$ adc, ADE $\backsim$ ade.

Dowód. $\triangle ABC \backsim abc$ podług §. 118] $\angle ACB = acb$.

Ponieważ zaś $\angle DCB = dcb$ pdł. założenia]

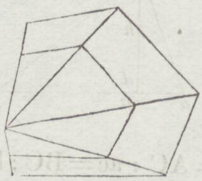
przeto też $\angle ACD = acd$



Również $BC : bc = AC : ac$, bo $\triangle ABC \sim abc$
i $BC : bc = CD : cd$ podług założenia.

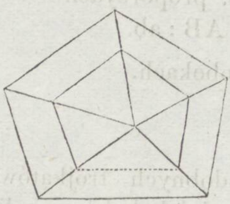
zatem $AC : ac = CD : cd$

$\triangle ACD \sim acd$.



W zupełnie podobny sposób dowodzimy także podobieństwa innych trójkątów.

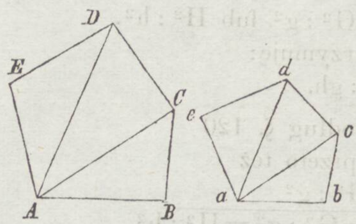
Zagadnienie. Jak się wykreśla wielobok podobny do innego danego?



Bozwiązanie opiera się na odwróceniu poprzedzającego twierdzenia; inne zaś dwa sposoby rozwiązania tegoż zagadnienia z przyłączonych figur łatwo się dadzą wyprowadzić.

§. 123.

Twierdzenie. Podobnych wieloboków powierzchnie mają się do siebie jak kwadraty odpowiednich boków.



Założenie. $ABCDE \sim abcde$.

Twierdz. $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$.

Dowód. Bo prowadząc odpowiednie przekątnie, otrzymuję:

$\triangle ABC \sim abc$ podług §. 118.

$\triangle ABC : abc = AC^2 : ac^2$ podł. §. 120,

również $\triangle ACD : acd = AC^2 : ac^2$

$\triangle ABC : abc = ACD : acd$.

Podobnież także wynika $\triangle ACD : acd = ADE : ade$

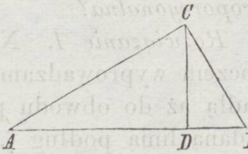
$\triangle ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade$

$\triangle ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade$
$= ABC : abc$ t. j. $= AB^2 : ab^2$.

§. 124.

Twierdzenie. Prostopadła wyprowadzona w trójkącie z wierzchołka kąta prostego na bok przeciwległy tworzy średnią proporcyonalną do obu oddziałów przeciwprostokątni; każda zaś przyprostokątnia tworzy średnią proporcyonalną do całéj przeciwprostokątni i jéj oddziału przyległego.

Założenie. $\angle ACB = R$ albo $CD \perp AB$.



Twierdzenie. 1) $AD : DC = DC : DB$.
2) $AD : AC = AC : AB$.
i $DB : BC = BC : AB$.

Dowód. $\triangle ACD \sim ACB$ podł. §. 115,
$AD : AC = AC : AB$;
również $\triangle BCD \sim ACB$ podł. §. 115.
$DB : BC = BC : AB$
i $\angle BCD = A$
$\triangle ACD \sim BCD$, podł. §. 115.
$AD : DC = DC : DB$.

Wniosek 1. Z drugiéj części poprzedzającego twierdzenia wynika bardzo łatwy dowód twierdzenia Pytagorasa.

$AD : AC = AC : AB$
zatem $AC^2 = AD \cdot AB$,
gdy zaś $DB : BC = BC : AB$,
przeto $BC^2 = DB \cdot AB$
w skutek dodania otrzym. $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB$,
t. j. $= (AD + DB) \cdot AB = AB^2$.

Wniosek 2. Twierdzenie Pytagorasa także w tym razie jest prawdziwe, jeżeli sobie wyobrazimy na bokach prostokątnego trójkąta wykreślone podobne do siebie wieloboki. Zawsze wielobok przeciwprostokątni równa się sumie wieloboków obu przyprostokątni.

Dowód. Nazywając obie przyprostokątnie literami a i b, przeciwprostokątnią zaś literą c, powierzchnie zaś tychże figur literami A, B i C, otrzymuję:

$A : B = a^2 : b^2$ podług §. 123
$A + B : A = a^2 + b^2 : a^2$.
Również $C : A = c^2 : a^2$ podług §. 123,
gdy zaś $a^2 + b^2 = c^2$ podług §. 98 tw., przeto też $A + B = C$.

UWAGA. Twierdzenie to rozciąga się także do kół, które jako foremne wieloboki o liczbie boków nieskończenie wielkiéj uważać można. To samo twierdzimy o półkolach i o owych księżycach (Lunulae Hippocratis), powstających po odciągnięciu wspólnych odcinków koła.

§. 125.

Zagadnienia.

I. *Do dwóch danych linii (a i b) jak się wykreśla średnia proporcyonalna?*

Rozwiązanie 1. Nad sumą obu linii wykreślam półkole, poczem wyprowadzam z punktu, w którym się stykają, prostopadłą aż do obwodu półkola sięgającą. Prostopadła ta będzie żądaną linią podług §. 124. Tw. część I w połączeniu z §. 75. Wn. 2.

Rozwiązanie 2 opiera się na §. 124 część 2 i do poprzedzającego jest podobne.

II. *Jak się zamienia jakakolwiek dana prostoliniowa figura na kwadrat?*

Rozwiązanie. Do obu linii, których iloczyn jest powierzchnią danéj figury, wyszukuję średniéj proporcyonalnéj, która w takim razie jest bokiem żądanego kwadratu.

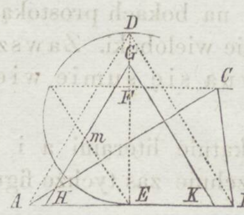
Dowód. Niechaj x oznacza długość danego boku, którego kwadrat przeto oznaczy się przez x^2 czyli przez x . x, a otrzymamy:

Równoległobok $=$ p. w $=$ x . x zkąd wynika p : x $=$ x : w

Trójkąt $=$ p. $\frac{w}{2}$ $=$ x . x, zkąd wynika p : x $=$ x : $\frac{w}{2}$.

III. *Jak się zamienia dany trójkąt nierównoboczny ABC na równoboczny?*

Rozwiązanie. Do wysokości danego trójkąta i do wysokości innego trójkąta równobocznego ale na podstawie owego danego wykreślonego, szukam średniéj proporcyonalnéj, która będzie wysokością trójkąta żądanego.



Dowód. $\triangle$GHK jest równoboczny, bo podobny do trójkąta ABD. Zarazem $\triangle$GHK $=$ ABC, z powodu, że oba do $\triangle$ABD w równym stoją stosunku, t. j. $=$ FE : DE. (Podług §. 108, 3 i 123.)

UWAGA. Zagadnienie to tylko jest pojedyńczym przypadkiem następującego: Trójkąt dany ABC zamienić na inny, któryby był podobny $\triangle$ abc.

IV. *Jak się wykreśla figura prostoliniowa do danéj figury podobna i do niéj w pewnym danym będąca stosunku?*

Rozwiązanie. Niechaj F oznacza powierzchnią, S zaś bok jakikolwiek danéj figury, f powierzchnią żądanéj, a s bok jéj odpowiedni, otrzymamy:

$$F : f = 1 : m$$
$$F : f = S^2 : s^2 \text{ podług §. 123.;}$$
$$\text{zatem } S^2 : s^2 = 1 : m$$
$$s^2 = mS^2, \text{ t. j. } s . s = m . S . S$$
$$S : s = s : mS.$$

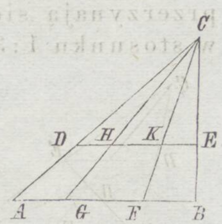
Wyszukuję przeto średnią proporcyonalną pomiędzy bokiem figury danéj i tym samym bokiem m razy zwiększonym; linia otrzymana jest w każdym razie odpowiednim bokiem żądanéj figury, poczem postępuję podług §. 122.

UWAGA 1. Jeżeli $m < 1$, otrzymujemy figurę w rozmiarach zmniejszonych, jeżeli zaś $m > 1$, otrzymujemy figurę w rozmiarach zwiększonych.

UWAGA 2. Szczegółowy przypadek tegoż zagadnienia jest następujący: Linią poprowadzoną w trójkącie równolegle do jakiego boku jak odciąć część pewną żądaną i ułamkiem całego trójkąta wyrażoną?

§. 126.

Twierdzenie. Linie poprowadzone z wierzchołka trójkąta przez bok przeciwległy w ten sposób, że zarazem przerzynają równoległą w trójkącie do owego boku poprowadzoną, odcinają na obu tych liniach części według tych samych stosunków geometrycznych.



Założenie. $DE \parallel AB$.

Twierdzenie. $AG : DH = FG : HK = FB : KE$.

Dowód. $AG : DH = CG : CH$ bo $\triangle AGC \sim DHC$.

$FG : HK = CF : CK$ bo $\triangle FGC \sim HKC$.

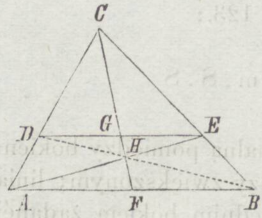
również $AF : DK = FG : HK$.

W podobny zupełnie sposób otrzymuję $FG : HK = FB : KE$.

Wniosek. Poprzeczna w trójkącie do jakiego boku poprowadzona połowi także każdą równoległą do boku tegoż.

§. 127.

Twierdzenie. Poprzeczna w trójkącie przechodzi przez punkt, w którym się przecinają linie poprowadzone pomiędzy krańcami boku, do którego poprzeczna jest poprowadzona a krańcami równoległéj do tegoż boku. Równocześnie poprzeczna harmonicznie jest podzielona czyli rozłożona na części, z których pierwsza tak się ma do drugiéj, jak cała linia do trzeciéj.



Założenie. $DE \parallel AB$, $AF = FB$ i AHE jest linią prostą.

Twierdzenie. DHB jest także linią prostą i

$$FH : HG = FC : GC.$$

Dowód. $\triangle AFH \sim EGH$ podł. §. 115

$$AF : FH = GE : GH$$

również $FB : FH = GD : GH$ podług założ. i §. 126. Wn.

Zarazem $\angle BFH = DGH$

$$\triangle BFH \sim DGH$$

$$\angle FHB = DHG$$

DHB jest linią prostą podług §. 21.

Również $FH : HG = AF : DG$ (w miejscu EG)

i $AF : DG = FC : GC$, bo $\triangle AFC \sim DGC$

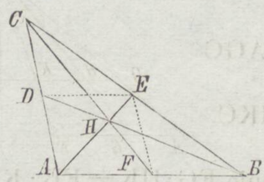
$$FH : HG = FC : GC.$$

Zagadnienie. Linią daną harmonicznie podzielić, jeżeli jeden punkt dzielący jest dany?

Rozwiązanie łatwe.

§ 128.

Twierdzenie. Wszystkie poprzeczne w trójkącie przerzynają się w jednym punkcie i są podzielone w stosunku 1 : 3.



Założenie. D, E i F są środkami wszystkich trzech boków.

Twierdzenie. AE, BD i CF przerzynają się w jednym punkcie, i $DH : HB = EH : HA = FH : HC = 1 : 2$.

Dowód. Prowadząc DE, otrzymuję $DE \parallel AB$, bo

$$AD : DC = BE : EC \text{ (podług } = 1 : 1)$$

przeto pierwsza część twierdzenia z poprzedzającego wynika.

Również. $\triangle DEH \sim ABH$ podług §. 115

$$DH : HB = EH : HA = DE : AB$$

$$\text{czyli } = DC : AC = 1 : 2$$

Prowadząc także jeszcze FE, otrzymuję:

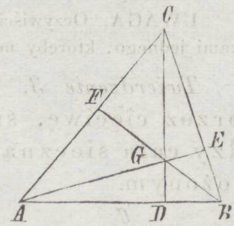
$$FH : HC = EH : AH = 1 : 2.$$

UWAGA. Punkt, w którym się wszystkie trzy poprzeczne przerzynają, zowie się jego środkiem ciążenia (Barycentrum).

§. 129.

Twierdzenie. Wszystkie trzy wysokości w trójkącie z wierzchołków wyprowadzone przerzynają się w jednym punkcie i w odwrotnym stoją stosunku, jak boki do których są prostopadłemi.

Założenie. $CD \perp AB$, $AE \perp CB$, $BF \perp AC$.



Twierdzenie. AE, BF i CD przerzynają się w jednym punkcie

i $AE : BF = AC : BC$

$AE : CD = AB : BC$

$BF : CD = AB : AC$

Dowód. Poprowadziwszy przez A, B i C równoległe do BC, AC i AB otrzymałbym AE, BF i CD prostopadłemi na środkach boków powstałego trójkąta; te zaś przerzynają się w jednym punkcie podług §. 53.

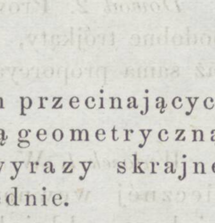
Druga część twierdzenia wynika z podobieństwa trójkątów CEA i CFB, BEA i BDC, AFB i ADC.

2. O proporcyonalności linii prostych w kole wykreślonych.

§. 130.

Twierdzenie 1. Z oddziałów dwóch przecinających się cięciw można ustawić proporcyą geometryczną, zamieniając oddziały jednéj na wyrazy skrajne, oddziały zaś drugiéj na wyrazy średnie.

Twierdzenie. $AE : CE = DE : BE$.



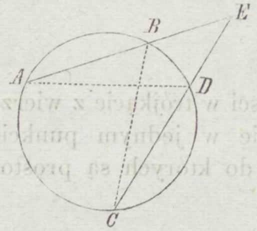
Dowód. Prowadząc linie AC i DB, otrzymuję trójkąty, w których

$\angle C = \angle B$ podług §.75, 1

i $\angle AEC = DEB$ podług §. 20.

$\triangle AEC \sim DEB$, a ponieważ w podobnych do siebie trójkątach odpowiednio położone boki stosunki tworzą geometryczne, przeto też powyższa proporcya bezpośrednio z podobieństwa wynika.

Twierdzenie 2. Sieczne zewnątrz koła się przecinające



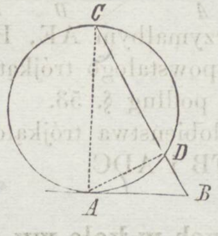
stoją w odwrotnym stosunku do swych oddziałów zewnątrz koła położonych.

Twierdzenie. AE : EC = ED : EB.

Dowód. Poprowadziwszy bowiem AD i BC, otrzymuję dwa do siebie podobne trójkąty podług §. 115., zkąd proporcyą powyższą bezpośrednio wyprowadzić można.

UWAGA. Oczywiście oba te twierdzenia tylko są szczegółowemi przypadkami jednego, któreby miało jaką osnowę?

Twierdzenie 3. Styczna przecięta zewnątrz koła przez cięciwę, średnią jest proporcyonalną pomiędzy całą sieczną a jéj oddziałem zewnątrz koła położonym.



Założenie. Linia AB jest styczną do koła.

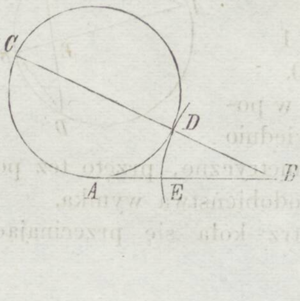
Twierdzenie. CB : AB = AB : DB.

Dowód 1. Uważając styczną jako sieczną, któréj oddział wśród koła położony zupełnie znikł, otrzymuję bezpośrednio proporcyą jako wywód szczegółowy z poprzedzającego twierdzenia.

Dowód 2. Prowadząc AD i AC, otrzymuję dwa do siebie podobne trójkąty, t. j. CAB $\sim$ ADB, z których jako wniosek taż sama proporcya bezpośrednio wynika.

§. 131.

Wniosek 1. W skutek równości stycznéj i oddziału siecznéj wewnątrz koła położonego, zamienia się większy oddział siecznéj na średnią proporcyonalną pomiędzy mniejszym jéj działem a całkowitą sieczną.



Założenie. AB = CD.

Twierdzenie. CB : CD = CD : DB.

Dowód. Z poprzedzającego twierdzenia wynika proporcya następująca CB : AB = AB : DB; gdy zaś podług założenia AB = CD, przeto też CB : CD = CD : DB.

UWAGA. Figura do tego twierdzenia się odnosząca w ten sposób najłatwiéj się wykreśla, iż bierze się styczna wielkości średnicy, z któréj krańca sieczna przez środek koła się prowadzi.

Wniosek 2. Dział zewnętrzny siecznéj wedle stałéj proporcyi odciętéj, dzieli odjęty na stycznéj i tę podług ciągłéj proporcyi.

Dowód. Podług wniosku 1. otrzymuję $CB : CD = CD : DB$.

$$CB - CD : CD - DB = CD : DB$$

czyli DB albo też $EB : AE = AB : EB$

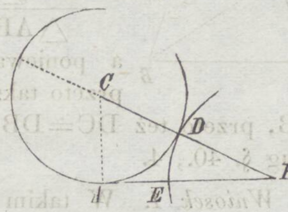
przełożywszy zaś stosunki $AB : EB = EB : AE$.

Zagadnienia.

§. 132.

Określenie. Podział linii danéj na dwa takie oddziały nierówne, iż większy jest średnią proporcyonalną do mniejszego i linii całéj, zowie się jéj podziałem na średnią i skrajną. (Goldener Schnitt, sectio divina.) Większy z oddziałów téj linii zowie się średnią, mniejszy zaś skrajną.

I. *Jak się dzieli dana linia na średnią i skrajną?*

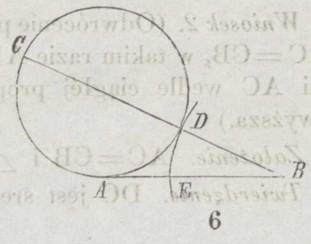


Rozwiązanie. Daną linią zamieniam na styczną koła, któréj średnica jest wielkości linii danéj, poczem uzupełniam figurę poprzedzającego twierdzenia. Zatem wyprowadzam z punktu A prostopadłą $AC = \frac{1}{2} AB$, wykreślam linią AC koło, biorąc za środek punkt C, łączę C i B i odcinam DB na linii AB.

Dowód opiera się bezpośrednio na §. 131, 2.

II. *Jak dołączyć do linii danéj mniejszą w ten sposób, aby cała była podzieloną na średnią i skrajną?*

Rozwiązanie. Postępuję jak w zagadnieniu I, z wyjątkiem jednak że DB nie odcinam na AB, lecz do AB przyłączam.



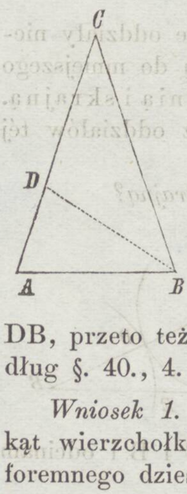
Dowód opiera się na wniosku 1, §. 131.

III. *Jak dołączyć do linii danéj większą w ten sposób, aby cała była podzieloną na średnią i skrajną?*

Rozwiązanie. Do danéj dołączam mniejszą, tak aby cała była podzieloną na średnią i skrajną, poczem całą do danéj linii dołączam. Rozwiązanie zasadza się na tem, że EB lub też DB równocześnie jest średnią proporcyonalnie podzielonéj linii AB jako też skrajną proporcyonalnie podzielonéj CB i że $AB = CD$.

§. 133.

Twierdzenie. W trójkącie równoramiennym, którego podstawa równa się większemu oddziałowi ramienia podzielonego na średnią i skrajną, kąt przypodstawny dwa razy jest większy od kąta wierzchołkowego.



Założenie. $AC = CB$, $AC : DC = DC : AD$ i $AB = DC$.

Twierdzenie. $\angle A$ lub też $\angle B = 2 \angle C$.

Dowód. Prowadząc BD, otrzymuję w obu trójkątach ABC i ABD następującą proporcyą

$$\frac{AC : AB = AB : AD \text{ podług założ. i } \angle A = \angle A,}{\triangle ABC \sim ABD \text{ podł. §. 118;}}$$

a ponieważ $\triangle ABC$ jest równoramiennym, przeto także i trójkąt ABD, a ponieważ $AB = DB$, przeto też $DC = DB$, zatem $\angle ADB$ lub $\angle A = 2C$ podług §. 40., 4.

Wniosek 1. W takim równoramiennym trójkącie zawsze kąt wierzchołkowy $= \frac{2}{5} R$, przeto równy kątowi środkowemu foremnego dziesięcioboku, jego podstawa przeto bokiem tegoż, jego wreście ramię większym promieniem.

Dowód. $\angle A + B + C = 2R$ podług §. 36.

$$\frac{\angle 2C + 2C + C \text{ t. j. } 5C = 2R,}{\angle C = \frac{2}{5} R.}$$

Wniosek 2. (Odwrócenie poprzedzającego.) Jeżeli $\angle C = \frac{2}{5} R$, i $AC = CB$, w takim razie AB równa się większemu oddziałowi linii AC wedle ciągłéj proporcyi geometr. podzielonéj. (Fig. powyższa.)

Założenie. $AC = CB$ i $\angle C = \frac{2}{5} R$.

Twierdzenie. DC jest średnią boku AC i $AB = DC$.

Dowód. Połowiąc bowiem $\angle B$ linią BD, otrzymuję

$$DC = DB, \text{ bo } \angle C = DBC = \tfrac{2}{5} R,$$
$$DB = AB, \text{ bo } \angle A = ADB = \tfrac{4}{5} R,$$
$$\overline{}$$
przeto $DC = AB$.

Również $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ podług §. 115.,

przeto $AD : AB = AB : AC$,

albo też $AD : DC = DC : AC$.

Wniosek 3. Bok foremnego dziesięcioboku równa się większemu oddziałowi większego promienia podzielonego na średnią i skrajną.

Zagadnienia.

§. 134.

I. *Jak się wykreśla w danym kole foremny dziesięciobok, pięciobok, dwudziestobok i t. d.*

Rozwiązanie bezpośrednio zawarte w §. 132., I i 133.

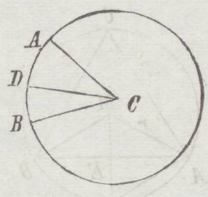
UWAGA. Zagadnienie to rozwiązuje także sposób podzielenia obwodu koła na 10, 5, 20 i t. d. równych części.

II. *Jak się wykreśla foremny dziesięciobok, którego bok jest dany?*

Rozwiązanie zawarte bezpośrednio w §. 132., II i 133.

III. *Jak się wykreśla w danêm kole foremny piętnastobok?*

Rozwiązanie. Od łuku AB otrzymanego przez wykreślenie foremnego sześcioboku odciągam przez stósowne odcięcie łuk AD, należący do foremnego dziesięcioboku; ich różnica żądanym będzie łukiem.



Dowód. $\widehat{AB} = \frac{1}{6}$ całego obw. $= \frac{1}{6}$ Ob.

$$\widehat{AD} = \tfrac{1}{10} \text{Ob.}$$
$$\overline{\widehat{DB} = \tfrac{1}{6} \text{Ob.} - \tfrac{1}{10} \text{Ob.} = \tfrac{1}{15} \text{Ob.}}$$

UWAGA 1. Inny sposób dowodzenia polegałby na okazaniu, że różnica kąta środkowego w foremnym sześcioboku i dziesięcioboku daje kąt $= \frac{1}{15} 4R$.

UWAGA 2. Zagadnienie to rozwiązuje także pytanie, jak dany obwód koła na 15, zatem też na 30, 60 i t. d. równych części podzielić?

UWAGA 3. Podział obwodu koła na 360 równych części celem sporządzenia kątomierza wzmiankowanego w §. 78, geometrycznie jest niewykonalnym. Jego wykonanie odbyć się tylko może mechanicznie.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

O wymierzaniu boków, obwodu i powierzchni foremnych wielokątów i koła.

§. 135.

Zagadnienie I. Jak się wyraża bok foremnego sześcioboku, czworoboku, trójkąta i foremnego dziesięcioboku za pomocą większego promienia?

UWAGA. Bok foremnego trójkąta oznaczamy przez B_3, bok takiegoż czworoboku przez B_4, pięcioboku przez B_5 i t. d.; P_3, P_4, P_5 wyrażają powierzchnie odpowiednich takich figur foremnych.

Rozwiązanie. 1) na foremny sześciobok: $B_6 = r$.

Jeżeli r wyraża wielkość większego promienia a B_6 bok sześcioboku, otrzymuję $B_6 = r$ podług §. 87, 2, rozwiązanie przeto bardzo łatwe.

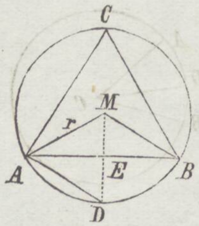
2) na foremny czworobok:

$B_4 = r\sqrt{2}$. Bo gdy kąt środkowy foremnego czworoboku równa się jednemu prostemu, musi przeto też podług §. 98.

$$B_4{}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2,$$

$$\text{zatem } B_4 = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

3) na foremny trójkąt:



$B_3 = r\sqrt{3}$, bo skoro kąt środkowy AMB linią MD połowimy i poprowadzimy AD, powstanie $\triangle$ równoramienny AMD, w którym AB dzieli na dwie równe części bok MD. Oznaczając ME znakiem ρ_3, otrzymuję $\rho_3 = \frac{1}{2} r$,

$$\text{więc } AE^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2,$$

$$\text{zatem } \tfrac{AE}{2} = \sqrt{\tfrac{3}{4}r^2} = \tfrac{r}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{zatem } B_3 = r\sqrt{3}.$$

4) na foremny dziesięciobok:

$B_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Dowód. Jeżeli promień większy r na średnią i skrajną jest podzielony, tak że x wyraża oddział większy, r—x przeto oddział mniejszy, wtedy podług §. 133., 2. $B_{10} = x$.

Z proporcyi zaś wynika $r : x = x : r - x$

$$x^2 = r^2 - rx$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$$

wyciągając zaś pierwiastek $x + \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$

$$x = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} \text{ albo } \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

UWAGA. Bok foremnego pięcioboku (B_5) wyraża się ilością r znając długość boku foremnego dziesięcioboku (B_{10}) podług formyły w następnym paragrafie rozwiniętéj. $B_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Zagadnienie II. Jak się wyraża wymiar powierzchni wymienionych figur foremnych za pomocą większego promienia r?

Rozwiązanie. $P_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$, $P_4 = 2r^2$, $P_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, $P_{10} = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Formuły te łatwo otrzymujemy, kładąc w równaniu $P_n = \frac{n.B.\rho}{2}$ wmiejscu ρ ilość następującą $\sqrt{r^2 - \frac{B^2}{4}}$ lub też $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - B^2}$, a zamiast wyrazów n i B odpowiednie ilości.

§. 136.

Zagadnienie. Jak się wynajduje bok (B_{2n}) foremnego wieloboku w koło wpisanego, skoro są znajome: bok (B) foremnego wieloboku o n bokach i większy promień r. (Fig. §. 135.)

Rozwiązanie. Uważając AB jako bok wieloboku foremnego o n bokach, mam w AD bok wieloboku foremnego o 2n bokach, przeto w trójkącie AED otrzymuję, kładąc $AB = B$ $AD = B_{2n}$ i $ME = \rho$:

$$B_{2n}^2 = \frac{B^2}{4} + (r - \rho)^2$$

$$= \frac{B^2}{4} + r^2 + \rho^2 - 2r\rho$$

Wyciągając z obu stron pierwiastek i kładąc w miejsce ρ^2 wyraz $r^2 - \frac{B^2}{4}$, w miejsce ρ zatem $\sqrt{r^2 - \frac{B^2}{4}}$ lub też $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - B^2}$, otrzymuję:

$$B_{2n} = \sqrt{\frac{B^2}{4} + r^2 + r^2 - \frac{B^2}{4} - r\sqrt{4r^2 - B^2}}, \text{ t. j.}$$

$$B_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - B^2}}, \text{ lub też}$$

$$B_{2n} = \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{r}\sqrt{4r^2 - B^2}}$$

$$B_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{B^2}{r^2}}}$$

§. 137.

Wnioski. 1. $B_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$$B_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$B_{48} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \text{ i t. d.}$$

Dowód. Kładąc we formułę na ilość B_{2n}, którą rozwinęliśmy w końcu przeszłego §., r w miejsce B ($B_6 = r$), otrzymuję:

$$B_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} \text{ t. j.} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Kładąc zaś wartość wyrównywającą B_{12} w ową formułę, otrzymujemy zamiast B_{2n}, B_{24}, a ztąd:

$$B_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{r^2(2 - \sqrt{3})}{r^2}}}$$

$$B_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}}$$

$$B_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \text{ i t. d.}$$

Wniosek 2. Wychodząc z równania $B_4 = r\sqrt{2}$ podług §. 135, 2, otrzymuję w podobny sposób:

$$B_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$B_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$B_{32} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \text{ i t. d.}$$

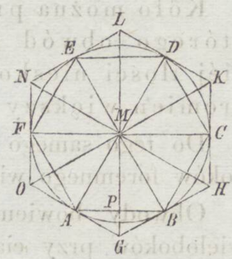
§. 138.

Zagadnienie. Jak się wynajduje bok (Bop) foremnego wieloboku koło opisującego n bokami, skoro są znane:

bok (Bwp) foremnego wieloboku o n bokach w koło wpisanego i większy promień r?

Rozwiązanie. $Bop = \frac{2r \,.\, Bwp.}{\sqrt{4r^2 - Bwp^2}.}$

Dowód. W obu równoramiennych trójkątach ABM i OGM, $\angle AMB = OMG$, ponieważ każdy z nich $= 2 \angle AMG$, przeto też kąty przypodstawne są sobie równe i $\triangle ABM \sim \triangle OGM$.



$AB : OG = MP : MA$ podług §. 120

t. j. $Bwp : Bop = \rho : r$

$$Bop = \frac{r \,.\, Bwp}{\rho} = \frac{r \,.\, Bwp}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - Bwp^2}.}$$

$$Bop = \frac{2r \,.\, Bwp}{\sqrt{4r^2 - Bwp^2}.}$$

§. 139.

Wniosek. $B_3\, op = 2r\sqrt{3}$

$B_6\, op = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$

$B_{12}\, op = 2r(2 - \sqrt{3})$

$B_4\, op = 2r$

$B_8\, op = 2r(\sqrt{2} - 1).$

Dowód. 1. $B_3\, op = \frac{2r \,.\, r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = \frac{2r \,.\, r\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}.$

2. $B_6\, op = \frac{2r \,.\, r}{\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{2r \,.\, r}{r\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$

3. $B_{12}\, op = \frac{2r \,.\, r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})}} = \frac{2r \,.\, r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{r\sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}}.$

$$= \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \,.\, \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \,.\, \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2r(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{1}} = 2r(2 - \sqrt{3}) \text{ i t. d.}$$

§ 140.

Treść poprzedzających czterech paragrafów stanowi podstawę obrachunku obwodu koła czyli **rektyfikacyi arytmetycznéj.** (Wyprostowania liczbowego.)

Obwód i powierzchnia foremnego wieloboku w koło wpisanego mniejsza jest od obwodu i powierzchni tegoż koła, z powodu, że każda cięciwa mniejsza jest od łuku do niéj należącego; obwód jako i powierzchnia wieloboku foremnego mająca 2n boków, większa jest od obwodu i powierzchni takiéj figury o n bokach, z powodu że suma dwóch boków w trójkącie większa jest od trzeciego. Wynika przeto ztąd, że w skutek ciągłego podwajania boków foremnego wieloboku w koło wpisanego, obwód i powierzchnia tegoż co raz bardziéj się zbliży do wielkości koła, a doszedłszy do nieskończenie wielkiéj ilości boków, z kołem się zrówna.

Koło można przeto uważać za foremny wielobok, którego obwód składa się z nieskończenie wielkiéj ilości nieskończenie małych boków, a w którym promień większy i mniejszy są sobie równe.

Do tego samego wypadku dochodzi się, podwajając liczbę boków foremnego wieloboku koło opisującego.

Obwody bowiem jako też i powierzchnie powstających wieloboków przy ciągłém podwajaniu boków coraz się stają mniejsze, ponieważ jednak Bop zawsze jest $>$Bwp, nigdy nie zrównają się z foremnemi wielobokami wpisanemi o równéj liczbie boków, nawet wtenczas nie, gdy w skutek nieskończenie wielkiéj ilości boków foremny wielobok kołu się zrównał.

Obwód koła zatem najdokładniéj obliczyć można, obliczając obwody dwóch foremnych wieloboków sobie podobnych, z których jeden koło opisuje, a drugi w koło jest wpisany, i biorąc z sumy tychże obwodów połowę.

W ten sposób znajduje się obwód koła równaniem Obw. $=$ d.π, w którem Obw. znaczy obwód, d średnicę koła, a π bezwzględną liczbę 3,14159265 . . . . .

π oznacza przeto liczbę, która przez średnicę rozmnożona, daje obwód koła, lub też, ponieważ $\frac{\text{Obw}}{\text{d}} = \pi$, liczbę oznaczającą stosunek pomiędzy srednicą a do niéj należącym obwodem koła.

UWAGA. Liczba π zowie się także liczbą Ludolfa na cześć matematyka tegoż nażwiska, który ją najpierw dosyć dokładnie na 32 miejsca dziesiętne obliczył. Archimedes obliczył π z obwodu foremnego wieloboku o 96 bokach i otrzymał $3\frac{1}{7}$ czyli 3,1428 . . . czyli stosunek 7 : 22. Dokładniejszym jest jednak stosunek 113 i 355 oznaczony przez Adriana.

§. 141.

Powierzchnią koła wyraża następująca formuła $P = r^2 . \pi$.

Dowód. Bo ponieważ koło uważać można za foremny wielobok, w którym r i ρ, t. j. mniejszy i większy promień są równe, przeto podług §. 107, IV wynika:

$$P = \frac{Obw.\,.\,r}{2} = \frac{2\,r\,\pi\,.\,r}{2} = r^2\,\pi.$$

UWAGA. Obrachunek powierzchni koła zowie się jego *kwadraturą arytmetyczną.*

§. 142.

Wniosek 1. Obwody dwóch kół mają się do siebie jak ich promienie lub średnice, ich powierzchnie zaś jak kwadraty z ich promieni (r) lub też średnic (d).

Dowód. Bo $Obw. : Obw._1 = 2\,r\,\pi : 2\,r_1\,\pi = r : r_1$

$$i\ P : P_1 = r^2\,\pi : r_1{}^2\,\pi = r^2 : r_1{}^2.$$

Wniosek 2. Z równań $Obw = 2\,r\,\pi$ i $P = r^2\,\pi$ wynika

$$r = \frac{Obw.}{2\,\pi} = \sqrt{\frac{P}{\pi}},\ d = \frac{Obw.}{\pi},\ P = \frac{Obw.^2}{4\pi}\ \text{i t. d.}$$

§. 143.

Zagadnienie. Jak się oblicza łuk (b) i doń należący wycinek (Sect.), skoro są znane: kąt środkowy (w) i promień koła r?

Rozwiązanie I. Obliczenie łuku. Że łuki dwa mają się do siebie, jak doń należące kąty środkowe, wynika ztąd, iż mają wspólną miarę. Jeżeli są niewspółmierne, dowodzi się podług §. 109 uwagi. Daléj otrzymujemy następującą geometr. proporcyą:

$$b : Obw. = w : 360^0$$

$$b = \frac{Obw.\ w}{360^0} = \frac{r\,\pi\,w}{180^0}.$$

II. Obliczenie wycinka.

$$Sect. : P = w : 360^0$$

$$\text{zatem } Sect. = \frac{P.\ w}{360^0} = \frac{r^2\,\pi\,w}{360^0}$$

Tę samą formułę otrzymujemy, uważając wycinek jako trójkąt, którego podstawa równa się łukowi wycinka, a którego wysokość równa się promieniowi. Przeto $Sect = \frac{b\,.\,r}{2}$, wkładając zaś w miejsce b jego obliczoną wartość, otrzymujemy

$$Sect. = \frac{r^2\,\pi\,w}{360^0}.$$

WYKAZ TREŚCI.