

Z u r
öffentlichen Prüfung
der Zöglinge

des
Königlichen Gymnasiums zu Lissa
am 11. April 1865

ladet
alle Beschützer, Gönner und Freunde des Schulwesens
ehrerbietigst ein
der Director des Gymnasiums
A. Biegler.



Inhalt:

1. Abhandlung des Lehrers Julius Töplitz: Analytisch-geometrische Studien zur Theorie der geraden Linie und der Kegelschnitte.
2. Schulnachrichten vom Director.

L i s s a .

Gedruckt in Ernst Günther's Officin.



Öffentlichen Prüfung
der Kandidaten

Königlichen Gymnasiums zu Lissa



Q. 31024

der Direktor des Gymnasiums
A. Richter

Bestand in Kunst-Gewerbe-Oberm.

Analytisch-geometrische Studien zur Theorie der geraden Linie und der Kegelschnitte.

Die synthetische Geometrie, wie sie von *Poncelet*, *Chasles* und insbesondere von *Steiner* ausgebildet wurde, schien lange Zeit hindurch der analytischen Methode den Rang abzulaufen, da sie nur von einfachen Verhältnissen Gebrauch machte, und mit deren Hülfe Sätze über das Durchschneiden von Linien und die Lage von Punkten ableitete, die analytisch anscheinend nur durch langwierige Rechnungen gefunden werden konnten. Zugleich verliess die synthetische Methode nie den Boden der Anschauung, der während der umständlichen analytischen Rechnungen oft verloren ging. Dabei konnte jedoch nicht übersehen werden, dass die analytische Methode der naturgemässe Weg zur systematischen Entwicklung der Geometrie sei, während die synthetische nur in den Händen besonders begabter Männer ein geeignetes Werkzeug zur Förderung der Wissenschaft war.

Plücker hat in seinen klassischen Werken zuerst gezeigt, wie man der analytischen Geometrie alle Vorzüge der synthetischen verschaffen könne, wenn man bei jeder Umformung einer Gleichung oder der Verbindung mehrerer Gleichungen unter einander ihre geometrische Deutung fest im Auge behalte. Aus seinen Untersuchungen geht hervor, dass alle Sätze, welche bloss die Lage von Punkten und das Durchschneiden von Linien oder deren Berührungen betreffen, einzig und allein aus Betrachtung der Formen der Gleichungen und ihrer Verbindungen ohne Herbeiholung von metrischen Relationen abgeleitet werden können und müssen. Ebenso müssen alle metrischen Relationen aus der geometrischen Deutung der Koeffizienten der Gleichungen abgeleitet werden.

In den nachfolgenden Untersuchungen beabsichtige ich zu zeigen, wie die Rolle, welche die anharmonischen Verhältnisse und die Involution in der Theorie der geraden Linie und der Kegelschnitte spielen, aus der Betrachtung der Koeffizienten der Gleichungen der geraden Linie und der Kegelschnitte abgeleitet werden kann. Ferner soll gezeigt werden, dass die sogenannten linearen Konstruktionen an Kegelschnitten aus der Betrachtung ihrer Gleichungen hergeleitet werden können, ohne den Umweg durch die anharmonischen Verhältnisse und die Involution einzuschlagen. Schliesslich soll noch eine kurze Andeutung über die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Raum folgen.

Es enthält daher der nachfolgende Aufsatz mehr Andeutungen, als eine ausführliche systematische Behandlung des Gegenstandes, die ich mir für eine längere Arbeit vorbehalte. Jedenfalls, glaube ich, kann das Nachfolgende als Übungsmaterial für angehende Mathematiker verwendet werden.

§ 1.

Ueber gerade Linien, die durch denselben Punkt gehen.

In dem Folgenden bedeuten p, q, r etc. lineare Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x und y . Ist die Gleichung einer Geraden $p = 0$, so nennen wir die letztere die Gerade p .

Fig. 1.

Sind zwei Gerade p und q gegeben, so ist bekanntlich die Gleichung einer beliebigen, durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden: $\lambda p - \mu q = 0$. Das Verhältniss $\lambda : \mu$ charakterisirt die Gerade r . Wir wollen nun die geometrische Bedeutung dieses Verhältnisses feststellen. Es sei OX die Abscissenachse.

Ferner sei $p = \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} - 1$ und $q = \frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\alpha'} - 1$; alsdann ist $\alpha = OP$ und $\alpha' = OQ$. Die

Gleichung der Geraden r ist nach dem Obigen: $\lambda \left(\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} - 1 \right) - \mu \left(\frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\alpha'} - 1 \right) = 0$.

Aus dieser erhält man, indem man $y = 0$ setzt (wodurch $x = OR$ wird): $\lambda \left(\frac{OR}{OP} - 1 \right) -$

$\mu \left(\frac{OR}{OQ} - 1 \right) = 0$ oder $\lambda \cdot \frac{PR}{OP} + \mu \cdot \frac{QR}{OQ} = 0$, also $\lambda : \mu = - \frac{OP}{PR} : \frac{OQ}{QR}$. Es ist leicht zu sehen, dass, wenn die Linie r ausserhalb des Winkels PCQ liegt, das Verhältniss $\lambda : \mu$ positiv wird.

Anmerkung. Sind daher die Gleichungen zweier Geraden r und s $\lambda p - \mu q = 0$ und $\lambda p + \mu q = 0$, so liegt die eine innerhalb, die andre ausserhalb des Winkels PCQ . Alsdann ist einerseits $\frac{\lambda}{\mu} = - \frac{OP}{PR} : \frac{OQ}{QR}$, andererseits $\frac{\lambda}{\mu} = - \frac{OP}{PS} : \frac{OQ}{QS}$, also $PR : QR = PS : QS$. Die 4 Punkte einer Geraden, welche dieser Gleichung genügen, heissen harmonische Punkte und die 4 Geraden p, q, r, s harmonische Gerade. Das Verhältniss $\frac{PR}{PS} : \frac{QR}{QS}$ heisst das anharmonische oder Doppelschnittsverhältniss der 4 Punkte P, Q, R, S , und wird oft abgekürzt durch (P, Q, R, S) bezeichnet.

Eine zweite Art, das Verhältniss $\lambda : \mu$ geometrisch zu deuten, ist folgende: Es ist, wenn wir den Winkel zweier Geraden p und q durch (pq) bezeichnen, und die Abscissenachse OX y nennen, bekanntlich $\frac{\beta}{\alpha} = - \operatorname{tg} (py)$, $\frac{\beta'}{\alpha'} = - \operatorname{tg} (qy)$ und $\operatorname{tg} (ry) = \frac{\mu}{\alpha'} - \frac{\lambda}{\alpha}$. Daraus findet man nach

den gehörigen Reductionen: $\lambda : \mu = - \frac{\alpha \cdot \sin (py)}{\sin (pr)} : \frac{\alpha' \cdot \sin (qy)}{\sin (qr)}$. Liegt die Linie r ausserhalb des Winkel PCQ, so ist das Verhältniss $\lambda : \mu$ positiv.

Anwendung. Sind $\lambda p - \mu q = 0$ und $\lambda' p - \mu' q = 0$ die Gleichungen der Geraden r und s, so ist: $\lambda : \mu = - \frac{OP}{PR} : \frac{OQ}{QR}$, $\lambda' : \mu' = \frac{OP}{PS} : \frac{OQ}{QS}$, also: $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'} = - \frac{PS}{PR} : \frac{QS}{QR}$. Ebenso ist: $\lambda : \mu = - \frac{\alpha \cdot \sin (py)}{\sin (pr)} : \frac{\alpha' \cdot \sin (qy)}{\sin (qr)}$, $\lambda' : \mu' = - \frac{\alpha \cdot \sin (py)}{\sin (ps)} : \frac{\alpha' \cdot \sin (qy)}{\sin (qs)}$, also: $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'} = - \frac{\sin (ps)}{\sin (pr)} : \frac{\sin (qs)}{\sin (qr)}$. Daraus folgt: $\frac{PS}{PR} : \frac{QS}{QR} = \frac{\sin (ps)}{\sin (pr)} : \frac{\sin (qs)}{\sin (qr)}$ d. h.

Satz I.

»Die sinus der Winkel, welche 4 durch ein und denselben Punkt gehende Gerade mit einander bilden, haben dasselbe anharmonische Verhältniss, wie die entsprechenden Abschnitte einer beliebigen Transversale, welche die 4 Geraden schneidet.«

Dieser Satz bildet bekanntlich die Grundlage der Theorie der anharmonischen Verhältnisse.

§ 2.

Darstellung von Punkten mit Hülfe der Gleichungen dreier, nicht durch denselben Punkt gehender Geraden.

Es seien 3 feste Gerade p, q, r gegeben. Das von ihnen gebildete Dreieck ABC nennen wir das Fundamentaldreieck, die drei Linien die Fundamentallinien, und die drei Ecken A, B, C die Fundamentalecken. Alsdann wird eine beliebige Gerade CM oder r' durch die Gleichung $\lambda p - \mu q = 0$ dargestellt, und ebenso die beliebige Gerade AM oder p' durch die Gleichung $\mu q - \nu r = 0$. Durch den Durchschnitt dieser beiden Geraden ist der Punkt M bestimmt. Finden also die beiden Gleichungen $\lambda p - \mu q = 0$ und $\mu q - \nu r = 0$ zugleich statt, so ist durch dieselben der Punkt M vollständig bestimmt. Ist umgekehrt der Punkt M gegeben, so zieht man die Linien AM und CM, und bestimmt mit Hülfe derselben die Verhältnisse $\lambda : \mu$ und $\mu : \nu$. Jeder Punkt M wird also durch das Gleichungssystem $\lambda p = \mu q = \nu r$ dargestellt.

Die Gleichung $\nu r - \lambda p = 0$ wird sowohl durch $p = 0$ und $r = 0$, als durch $\lambda p - \mu q = 0$ und $\mu q - \nu r = 0$ befriedigt; folglich stellt die Gleichung $\nu r - \lambda p = 0$ die Gerade BM oder q' dar.

Anwendung. $\lambda p - \mu q = 0$, $\mu q - \nu r = 0$ und $\nu r - \lambda p = 0$ sind die Gleichungen der Geraden r', p' und q'. Also ist nach § 1: $\frac{\lambda}{\mu} = - \frac{OP}{PR} : \frac{OQ}{QR}$, $\frac{\mu}{\nu} = - \frac{OQ}{QP'} : \frac{OR}{RP'}$, $\frac{\nu}{\lambda} =$

Fig. 2.

$\frac{OR}{RQ'} : \frac{OP}{PQ'}$. Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen und Reduktion erhält man: $PQ' \cdot QR' \cdot RP' = P'Q \cdot Q'R \cdot R'P$. Bekanntlich sagt man von 6 Punkten einer Geraden, welche der zuletzt gefundenen Gleichung genügen, sie bilden eine Involution. Wir haben also folgenden Satz:

Satz II.

»Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte durch gerade Linien, so werden die Seiten des Dreiecks und die drei Verbindungslinien durch jede beliebige Transversale in 6 Punkten geschnitten, die eine Involution bilden«.

Ebenso ist $\frac{\lambda}{\mu} = - \frac{\alpha \cdot \sin(px)}{\sin(pr')} : \frac{\alpha' \cdot \sin(qx)}{\sin(qr')}$, $\frac{\mu}{\nu} = - \frac{\alpha' \cdot \sin(qx)}{\sin(qp')} : \frac{\alpha'' \cdot \sin(rx)}{\sin(rp')}$,
 $\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\alpha'' \cdot \sin(rx)}{\sin(rq')} : \frac{\alpha \cdot \sin(px)}{\sin(pq')}$, also wieder durch Multiplikation und Reduktion:
 $\sin(pq') \cdot \sin(qr') \cdot \sin(rp') = \sin(p'q) \cdot \sin(q'r) \cdot \sin(r'p)$, d. h.

Satz III.

»Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte durch gerade Linien, so wird jeder Winkel des Dreiecks so in zwei Theile getheilt, dass das Produkt der sinus dreier Winkel, von denen nicht zwei demselben Theildreiecke angehören, dem Produkte der sinus der 3 andern Winkel gleich ist.«

§ 3.

Darstellung einer geraden Linie mit Hülfe der Gleichungen der drei Fundamentallinien.

Fig 3.

Nach dem Vorigen stellt die Gleichung $\lambda p + \mu q = 0$ eine beliebige durch C gehende Gerade CC' oder r' dar, und ebenso die Gleichung $\lambda p + \nu r = 0$ jede beliebige durch B gehende Gerade BB' oder q' . Die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ wird sowohl durch $\lambda p + \mu q = 0$ und $r = 0$, als durch $\lambda p + \nu r = 0$ und $q = 0$ befriedigt. Folglich stellt die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ die Gerade dar, welche durch B' und C' geht. Sind also die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ gegeben, so sind die Geraden BB' und CC' , und daher auch die Gerade $B'C'$ bestimmt. Ist umgekehrt die Gerade $B'C'$ gegeben, so sind dadurch die Geraden BB' und CC' , und daher auch die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ bestimmt. Jede beliebige Gerade wird also durch die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ dargestellt. Offenbar geht die Gerade $\mu q + \nu r = 0$ sowohl durch den Durchschnittspunkt der Geraden $q = 0$ und $r = 0$,

als durch den der Geraden $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ und $p = 0$. Folglich stellt die Gleichung $\mu q + \nu r = 0$ die Gerade AA' oder p' dar.

Anwendung. $\lambda p + \mu q = 0$, $\mu q + \nu r = 0$ und $\nu r + \lambda p = 0$ sind die Gleichungen der Geraden r' , p' und q' . Also ist nach § 1: $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{OP}{PR'} : \frac{OQ}{QR'}$, $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{OQ}{QP'} : \frac{OR}{RP'}$ und $\frac{\nu}{\lambda} = \frac{OR}{RQ'} : \frac{OP}{PQ'}$, woraus man durch Multiplikation und Reduction findet:

$$PQ' \cdot QR' \cdot RP' = P'Q \cdot Q'R \cdot R'P, \text{ d. h.}$$

Satz IV.

»Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine beliebige Gerade geschnitten, und verbindet man die Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch gerade Linien, so werden diese drei Verbindungslinien und die drei Seiten des Dreiecks durch jede beliebige Transversale in 6 Punkten geschnitten, die eine Involution bilden«.

Ebenso ist: $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\alpha \cdot \sin(py)}{\sin(pr')} : \frac{\alpha' \cdot \sin(qy)}{\sin(qr')}$, $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha' \cdot \sin(qy)}{\sin(qp')} : \frac{\alpha'' \cdot \sin(ry)}{\sin(rp')}$
und $\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\alpha'' \cdot \sin(ry)}{\sin(rq')} : \frac{\alpha' \cdot \sin(py)}{\sin(pq')}$, also wieder durch Multiplikation und Reduktion:
 $\sin(pq') \cdot \sin(qr') \cdot \sin(rp') = \sin(p'q) \cdot \sin(q'r) \cdot \sin(r'p), \text{ d. h.}$

Satz V.

»Schneidet eine Gerade die drei Seiten eines Dreiecks, und verbindet man die Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch gerade Linien, so entstehen an den Ecken des Dreiecks 6 Winkel von der Art, dass das Produkt der sinus je dreier Winkel, von denen nicht zwei an derselben Seite des Dreiecks liegen, dem Produkte der sinus der drei andern Winkel gleich ist«.

Anmerkung. Die Sätze IV und V können auch in einer andern Ausdrucksweise als Lehrsätze über das vollständige Viereck ausgesprochen werden.

§ 4.

Von den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wenn mehrere Punkte in einer Geraden liegen, oder mehrere Gerade durch denselben Punkt gehen sollen.

Den Punkt, dessen Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r$ sind, nennen wir den Punkt α , β , γ , und ebenso die Linie, deren Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ ist, die Linie λ , μ , ν .

Wir suchen nun die Bedingung, die erfüllt sein muss, wenn der Punkt α, β, γ auf der Geraden λ, μ, ν liegen soll. Alsdann müssen die Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r$ und $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ durch dieselben Werthe von p, q und r befriedigt werden. Eliminiren wir aus diesen 3 Gleichungen p, q und r , so erhalten wir die Bedingungsgleichung: $\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$.

Diese Bedingungsgleichung erhält ihre geometrische Deutung auf folgende Weise. M sei der Punkt α, β, γ , und $A' B' C'$ die Linie λ, μ, ν . Alsdann haben CC' und BB' die Gleichungen $\lambda p + \mu q = 0$ und $\lambda p + \nu r = 0$. Also ist: $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{OP}{PR'} : \frac{OQ}{QR'}$, $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{OP}{PQ'} : \frac{OR}{RQ'}$, oder $\mu = -\frac{\lambda \cdot OQ \cdot PR'}{OP \cdot QR'}$, $\nu = \frac{\lambda \cdot OR \cdot PQ'}{OP \cdot RQ'}$.

Die Gleichungen der Linien MC und MB sind: $\alpha p - \beta q = 0$ und $\alpha p - \gamma r = 0$. Also ist: $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{OP}{PR''} : \frac{OQ}{QR''}$, $\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{OP}{PQ''} : \frac{OR}{RQ''}$, oder $\beta = -\frac{\alpha \cdot OQ \cdot PR''}{OP \cdot QR''}$, $\gamma = -\frac{\alpha \cdot OR \cdot PQ''}{OP \cdot RQ''}$.

Setzen wir diese Werthe in die oben gefundene Bedingungsgleichung $\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$ ein, so erhalten wir: $1 + \frac{PR' \cdot QR''}{PR'' \cdot QR'} = \frac{PQ' \cdot RQ''}{PQ'' \cdot RQ'}$ oder $\frac{PR'' \cdot QR' + PR' \cdot QR''}{PR'' \cdot QR'} = \frac{PQ' \cdot RQ''}{PQ'' \cdot RQ'}$. Da aber be-

kanntlich: $PR'' \cdot QR' + PR' \cdot QR'' = PQ \cdot R'R''$, so haben wir $\frac{PQ \cdot R'R''}{PR'' \cdot QR'} = \frac{PQ' \cdot RQ''}{PQ'' \cdot RQ'}$, oder $\frac{PQ}{PR''} : \frac{R'R''}{R'Q'} = \frac{PQ'}{PQ''} : \frac{RQ'}{RQ''}$ oder endlich $(P, R', Q, R'') = (P, R, Q', Q'')$.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die 3 Punkte C', B', M in einer Geraden liegen. Man überzeugt sich leicht, dass dies der Steinersche Satz ist: »Haben zwei projektivische Strahlbüschel einen Strahl gemeinschaftlich, so liegen dieselben perspektivisch«.

Sollen 3 Punkte $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''; \alpha''', \beta''', \gamma'''$ in derselben Geraden liegen, so muss man drei Grössen λ, μ, ν von der Art bestimmen können, dass $\frac{\lambda}{\alpha'} + \frac{\mu}{\beta'} + \frac{\nu}{\gamma'} = 0$, $\frac{\lambda}{\alpha''} + \frac{\mu}{\beta''} + \frac{\nu}{\gamma''} = 0$ und $\frac{\lambda}{\alpha'''} + \frac{\mu}{\beta'''} + \frac{\nu}{\gamma'''} = 0$. Durch Elimination von λ, μ, ν erhält man die Bedingung,

dass die Determinante
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha'}, & \frac{1}{\beta'}, & \frac{1}{\gamma'} \\ \frac{1}{\alpha''}, & \frac{1}{\beta''}, & \frac{1}{\gamma''} \\ \frac{1}{\alpha'''}, & \frac{1}{\beta'''}, & \frac{1}{\gamma'''} \end{vmatrix} = 0$$
 sein muss.

Sollen 3 Gerade $\lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu''; \lambda''', \mu''', \nu'''$ durch denselben Punkt gehen, so findet man ebenso als Bedingung, dass die Determinante
$$\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \\ \lambda''' & \mu''' & \nu''' \end{vmatrix} = 0$$
 sein muss.

§ 5.

Konjugirte Punkte und Linien.

Der Punkt λ, μ, ν und die Gerade λ, μ, ν stehen in einer merkwürdigen Beziehung zu einander. Sobald nämlich der Punkt λ, μ, ν gegeben ist, so kann man die Gerade λ, μ, ν durch lineare Konstruktion d. h. durch blosses Ziehen von geraden Linien finden. Ist umgekehrt die Gerade λ, μ, ν gegeben, so kann man den Punkt λ, μ, ν durch lineare Konstruktion finden. Fig. 5.

Denn es sei M der Punkt λ, μ, ν . Alsdann stellen $\lambda p - \mu q = 0$, $\mu q - \nu r = 0$ und $\nu r - \lambda p = 0$ die Geraden CC', AA' und BB' dar. Die Gerade $B'C'$ geht sowohl durch den Durchschnittspunkt von r und CC' , als durch den Durchschnittspunkt von q und BB' ; ihre Gleichung ist daher: $-\lambda p + \mu q + \nu r = 0$. Ebenso wird gezeigt, dass die Geraden $A'C'$ und $A'B'$ die Gleichungen $\lambda p - \mu q + \nu r = 0$ und $\lambda p + \mu q - \nu r = 0$ haben. Die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ wird aber befriedigt, wenn entweder $-\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ und $p = 0$, oder $\lambda p - \mu q + \nu r = 0$ und $q = 0$, oder $\lambda p + \mu q - \nu r = 0$ und $r = 0$ ist d. h. die Gerade $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ geht durch die Durchschnittspunkte A'', B'', C'' der Linien BC und $B'C'$, AC und $A'C'$, AB und $A'B'$.

Stellt umgekehrt die Gleichung: $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ die Gerade $A'' B'' C''$ dar, so sind $\lambda p + \mu q = 0$, $\mu q + \nu r = 0$ und $\lambda p + \nu r = 0$ die Gleichungen der Geraden CC'', AA'' und BB'' . Die Gerade CC''' , welche C mit dem Durchschnittspunkte C''' von AA'' und BB'' verbindet, hat offenbar die Gleichung $\lambda p - \mu q = 0$, weil diese Gleichung sowohl durch $p = 0$ und $q = 0$, als durch $\mu q + \nu r = 0$ und $\lambda p + \nu r = 0$ befriedigt wird. Ebenso sind $\mu q - \nu r = 0$ und $\nu r - \lambda p = 0$ die Gleichungen der Geraden AA''' und BB''' . Die blosse Ansicht dieser Gleichungen zeigt, dass sich die 3 Geraden AA''' , BB''' , CC''' in ein und demselben Punkte schneiden, und zwar in dem gesuchten Punkte λ, μ, ν .

Wir haben also folgende zwei reciproke Sätze:

Satz VI.

- »Verbindet man einen Punkt mit den Ecken eines
- »Fundamentaldreiecks, und verlängert man diese
- »Verbindungslinien, bis sie die gegenüberliegenden
- »Seiten des Dreiecks schneiden, so erhält man

Satz VII.

- »Schneidet eine gerade Linie die drei Seiten eines
- »Fundamentaldreiecks, und verbindet man die 3
- »Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden
- »Ecken des Dreiecks, so erhält man durch die

»durch die Verbindung dieser Durchschnittspunkte
 »ein neues Dreieck. Verlängert man die Seiten
 »des letzteren Dreiecks, bis sie die Seiten des
 »Fundamentaldreiecks schneiden, so liegen die 3
 »Durchschnittspunkte in ein und derselben Geraden,
 »die wir die konjugirte Linie des gegebenen
 »Punktes nennen«.

»Durchschnitte dieser Verbindungslinien ein neues
 »Dreieck. Verbindet man die Ecken des letzteren
 »Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken des
 »Fundamentaldreiecks, so gehen die 3 Verbindungs-
 »linien durch ein und denselben Punkt, den wir
 »den konjugirten Punkt der gegebenen Linie
 »nennen«.

Anmerkung 1. Die blosse Betrachtung der in der Fig. 5 vorkommenden Geraden und ihrer Gleichungen führt zu den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks, so wie zu der linearen Lösung der Aufgabe: »Zu 3 harmonischen Elementen das 4te durch lineare Konstruktion zu finden«.

Anmerkung 2. *Plücker* nennt in seinem »Systeme der analytischen Geometrie« den Punkt M und die Gerade $A'' B'' C''$ Pol und Polare. Diese Bezeichnung scheint mir jedoch nicht passend zu sein, da man daran gewöhnt ist, vorauszusetzen, dass, wenn der Pol sich in einer festen Geraden fortbewegt, die Polare sich um einen festen Punkt drehe; was hier, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, nicht der Fall ist. Ich habe es daher vorgezogen, sie konjugirte Punkte und Linien zu nennen.

§ 6.

Von der Kurve, welche ein Punkt beschreibt, wenn seine konjugirte Linie sich um einen festen Punkt dreht, und von der Kurve, welche eine Linie einhüllt, wenn ihr konjugirter Punkt sich in einer festen Geraden fortbewegt.

Soll eine Gerade λ, μ, ν durch einen festen Punkt α, β, γ gehen, so muss nach § 4 die Gleichung $\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$ statt finden. Der konjugirte Punkt der Geraden λ, μ, ν hat die Gleichungen $\lambda p = \mu q = \nu r$. Dreht sich die Gerade λ, μ, ν um den festen Punkt α, β, γ , so ändern sich λ, μ, ν , müssen aber immer der Gleichung $\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$ genügen. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und den Gleichungen des konjugirten Punktes $\lambda p = \mu q = \nu r$ die Grössen λ, μ, ν , so erhält man $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$ als die Gleichung des Ortes, den der konjugirte Punkt beschreibt, während die Gerade sich um den Punkt α, β, γ dreht. Dieser Ort ist offenbar ein Kegelschnitt, der durch die 3 Fundamentalpunkte A, B, C geht.

Soll umgekehrt der Punkt λ, μ, ν auf der Geraden α, β, γ liegen, so muss die Gleichung: $\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu} = 0$ statt finden. Die Gleichung der konjugirten Geraden ist: $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$. Bewegt sich der Punkt λ, μ, ν auf der Geraden α, β, γ fort, so ändern sich die Konstanten λ, μ, ν , müssen aber immer der Gleichung $\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu} = 0$ genügen. Dabei ändert auch die konjugirte Linie ihre Lage, und um zu finden, welche Kurve sie bei dieser Veränderung ihrer Lage einhüllt, setzen wir $\frac{\mu}{\lambda} = x, \frac{\nu}{\lambda} = y$, und differenziren die beiden Gleichungen $\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{y} = 0$ und $p + qx + ry = 0$ nach x . Wir erhalten sodann: $\frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ und $q + r \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen $\frac{dy}{dx}$, so kömmt: $y = x \sqrt{\frac{rq}{\beta r}}$. Verbindet man diese Gleichung mit den beiden ersten: $\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{y} = 0$ und $p + qx + ry = 0$, so erhält man nach der Elimination von x und y die Finalgleichung: $\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 - 2\alpha\beta pq - 2\alpha\gamma pr - 2\beta\gamma qr = 0$.

Der Ort, den diese Gleichung darstellt, ist offenbar ein Kegelschnitt. Man überzeugt sich leicht, dass die Gerade $p = 0$ eine Tangente dieses Kegelschnitts ist. Denn für $p = 0$ erhält man aus der Gleichung des Kegelschnitts $(\beta q - \gamma r)^2 = 0$ d. h. die Durchschnittspunkte der Geraden $p = 0$ und des Kegelschnitts fallen zusammen. Ebenso sieht man, dass die Geraden $q = 0$ und $r = 0$ Tangenten dieses Kegelschnitts sind.

Wir haben also folgende zwei reciproke Sätze:

Satz VIII.

»Dreht sich eine gerade Linie um einen festen Punkt, so beschreibt ihr konjugirter Punkt einen Kegelschnitt, der durch die drei Fundamentalpunkte geht«.

Satz IX.

»Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden fort, so umhüllt die konjugirte Linie desselben einen Kegelschnitt, der von den drei Fundamentallinien berührt wird«.

§ 7.

Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen, oder von drei festen Geraden berührt werden.

Wir wenden uns zur Umkehrung der Sätze VIII und IX.

Die Gleichung $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$ stellt jeden beliebigen Kegelschnitt dar, der durch die

Fig. 6.

drei Fundamentalpunkte geht, da sie noch 2 Konstanten, nämlich die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ enthält, welche bestimmt werden, wenn noch zwei andre Punkte des Kegelschnitts gegeben sind. Soll ein Punkt λ, μ, ν auf diesem Kegelschnitte liegen, so müssen die Gleichungen $\lambda p = \mu q = \nu r$ und $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$ zugleich gelten. Eliminiren wir aus denselben p, q und r , so erhalten wir die Bedingungsgleichung: $\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$. Dieselbe Gleichung erhielten wir aber als Bedingung dafür, dass die Gerade λ, μ, ν durch den Punkt α, β, γ gehe. Wenn also ein Punkt auf dem gegebenen Kegelschnitte liegt, so geht seine konjugirte Linie durch einen festen Punkt.

Schreiben wir die Gleichung des Kegelschnitts unter der Form $\left(\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta}\right)r + \frac{pq}{\gamma} = 0$, und setzen wir $\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta} = 0$, so erhalten wir entweder $p = 0$ oder $q = 0$ d. h. Die Gerade $\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta} = 0$ schneidet den Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten, in denen sie von den Geraden $p = 0$ und $q = 0$ geschnitten wird. Die Gleichungspaare $\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta} = 0, p = 0$ und $\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta} = 0, q = 0$ sind aber beide gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare $p = 0, q = 0$. Die beiden Durchschnittspunkte fallen also zusammen, und zwar in den Fundamentalpunkt C. Die Gleichung $\frac{q}{\alpha} + \frac{p}{\beta} = 0$ oder besser $\alpha p + \beta q = 0$ stellt also die Tangente A'B' im Punkte C dar. Ebenso stellen die Gleichungen $\beta q + \gamma r = 0$ und $\alpha p + \gamma r = 0$ die Tangenten B'C' und A'C' in den Punkten A und B dar. Aus der Form dieser Gleichungen ersieht man sogleich, dass die Geraden B'C' und BC, A'C' und AC, A'B' und AB sich in drei Punkten schneiden, die in ein und derselben Geraden liegen. Denn durch die Gleichungspaare $\alpha p + \beta q = 0$ und $r = 0, \beta q + \gamma r = 0$ und $p = 0, \alpha p + \gamma r = 0$ und $q = 0$ wird ein und dieselbe Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$ befriedigt. — Die Gleichung der Geraden AA' ist offenbar $\beta q - \gamma r = 0$. Ebenso sind $\alpha p - \beta q = 0$ und $\alpha p - \gamma r = 0$ die Gleichungen der Geraden CC' und BB'. Daraus ist ersichtlich, dass sich die drei Geraden AA', BB' und CC' in ein und demselben Punkte α, β, γ , dem konjugirten Punkte der oben erwähnten Geraden, schneiden. Ferner sieht man, dass die Vierstrahlen, die in A, B und C entstehen, harmonische Büschel sind. Endlich überzeugt man sich aus Satz II und IV, dass sowohl die 6 Geraden AB, BC, AC, A'B', B'C', A'C', als die 6 Geraden AB, BC, AC, CC', AA', BB' von einer beliebigen Transversalen in 6 Punkten geschnitten werden, die eine Involution bilden.

Fig 7.

Betrachten wir jetzt die Gleichung $\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 - 2\alpha\beta pq - 2\alpha\gamma pr - 2\beta\gamma qr = 0$, so stellt diese offenbar einen Kegelschnitt dar, der von den drei Fundamentallinien berührt wird. Denn sucht man die Durchschnittspunkte der Geraden $p = 0$ mit dem Kegelschnitte, so erhält man $(\beta q - \gamma r)^2 = 0$ d. h. die beiden Durchschnittspunkte fallen zusammen, und die Gerade AA', welche

den Berührungspunkt A' mit dem Fundamentalpunkte A verbindet, hat die Gleichung $\beta q - \gamma r = 0$. Ebenso findet man, dass die Geraden $q = 0$ und $r = 0$ den Kegelschnitt berühren, und dass die Geraden BB' und CC' die Gleichungen $\alpha p - \gamma r = 0$ und $\alpha p - \beta q = 0$ heben.

Wir untersuchen nun, welche Bedingung erfüllt sein muss, wenn eine Gerade $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ den obigen Kegelschnitt berühren soll. Zu diesem Zwecke setzen wir $p = -\frac{\mu q + \nu r}{\lambda}$ in die Gleichung des Kegelschnitts hinein. Wenn die Gerade den Kegelschnitt berührt, so müssen die aus der entstehenden quadratischen Gleichung sich ergebenden Werthe von $\frac{q}{r}$ gleich werden. Man erhält aber alsdann die Gleichung:

$$(\alpha\mu + \beta\lambda)^2 q^2 + 2(\alpha\nu(\alpha\mu + \beta\lambda) + \gamma\lambda(\alpha\mu - \beta\lambda)) qr + (\alpha\nu + \gamma\lambda)^2 r^2 = 0.$$

Soll aber eine Gleichung $Aq^2 + 2Bqr + Cr^2 = 0$ zwei gleiche Werthe für $\frac{q}{r}$ ergeben, so muss $B^2 - AC = 0$ sein. Also muss hier: $(\alpha\nu(\alpha\mu + \beta\lambda) + \gamma\lambda(\alpha\mu - \beta\lambda))^2 - (\alpha\mu + \beta\lambda)^2 (\alpha\nu + \gamma\lambda)^2 = 0$ oder $4\alpha\beta\gamma\lambda^2(\alpha\mu\nu + \beta\lambda\nu + \gamma\lambda\mu) = 0$, oder, da weder α , noch β , noch γ , noch λ verschwinden können: $\alpha\mu\nu + \beta\lambda\nu + \gamma\lambda\mu = 0$, oder endlich $\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu} = 0$ sein. Nach dem Früheren erkennen wir aus der Form dieser Gleichung, dass, wenn eine Gerade λ, μ, ν den Kegelschnitt berührt, ihr konjugirter Punkt λ, μ, ν sich immer auf einer festen Geraden α, β, γ befinden muss.

Aus den Untersuchungen dieses Paragraphen ergeben sich daher folgende Sätze:

Satz X.

- »Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben, und zieht man an den drei Ecken
- »des Dreiecks die Tangenten an den Kegelschnitt, so entsteht ein umschriebenes Dreieck.
- »Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken dieser Dreiecke schneiden sich in
- »demselben Punkte, und die gegenüberliegenden Seiten dieser Dreiecke schneiden sich in
- »drei Punkten, die in ein und derselben Geraden liegen. Ferner werden die 6 Seiten der
- »beiden Dreiecke von jeder beliebigen Transversalen in 6 Punkten geschnitten, die eine In-
- »volution bilden. Endlich entsteht in jeder Ecke des eingeschriebenen Dreiecks ein harmo-
- »nisches Strahlbüschel.«

Satz XI.

- »Geht ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte,
- »die man zu Fundamentalpunkten nimmt, und
- »konstruirt man zu jedem andern Punkte des

Satz XII.

- »Berührt ein Kegelschnitt drei feste Gerade, die
- »man zu Fundamentallinien nimmt, und konstruirt
- »man zu jeder andern Tangente des Kegelschnitts

»Kegelschnitts die konjugirte Linie, so schneiden sich alle diese konjugirten Linien in einem festen Punkte, den wir den Hauptpunkt des Dreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt nennen. In diesem Hauptpunkte schneiden sich auch die Verbindungslinien der Ecken des Fundamentaldreiecks mit den Ecken des umschriebenen Dreiecks, welches entsteht, wenn man an den drei Fundamentalecken Tangenten an den Kegelschnitt zieht«.

»den konjugirten Punkt, so liegen alle diese konjugirten Punkte auf einer festen Geraden, die wir die Hauptlinie des Dreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt nennen. Auf dieser Hauptlinie liegen auch die Durchschnittspunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks mit den Seiten des eingeschriebenen Dreiecks, welches entsteht, wenn man die Berührungspunkte der drei Fundamentallinien und des Kegelschnitts durch gerade Linien verbindet«.

§ 8.

Lineare Konstruktionen an Kegelschnitten.

Durch die Sätze des § 7 sind wir in den Stand gesetzt, viele die Kegelschnitte betreffende Aufgaben durch lineare Konstruktion d. h. durch blosses Ziehen von geraden Linien zu lösen. So sieht man leicht, dass wir mit Hülfe des Satzes X folgende Aufgabe lösen können:

Aufgabe I.

»Von einem Kegelschnitte sind 3 Tangenten und 2 Berührungspunkte derselben, oder 3 Punkte und 2 Tangenten in denselben gegeben; man soll den dritten Berührungspunkt oder die dritte Tangente finden«.

Durch die Sätze XI und XII lösen wir folgende Aufgaben:

Aufgabe II.

»Von einem Kegelschnitte sind 5 Punkte gegeben; man soll durch lineare Konstruktion beliebig viele neue Punkte des Kegelschnitts finden«.

Auflösung.

»Man wählt 3 der gegebenen Punkte zu Fundamentalpunkten, und bestimmt zu den andern beiden Punkten die konjugirten Linien. Der Punkt, in dem sich die letzteren schneiden, ist der Hauptpunkt des Fundamentaldreiecks. Zieht

Aufgabe III.

»Von einem Kegelschnitte sind 5 Tangenten gegeben; man soll durch lineare Konstruktion beliebig viele neue Tangenten des Kegelschnitts finden«.

Auflösung.

»Man wählt drei der gegebenen Tangenten zu Fundamentallinien, und bestimmt zu den andern beiden Tangenten die konjugirten Punkte. Die Linie, welche die letzteren verbindet, ist die Hauptlinie des Fundamentaldreiecks. Sucht man

»man durch diesen Hauptpunkt beliebig viele
»gerade Linien, und sucht zu denselben die kon-
»jugirten Punkte, so sind diese Punkte des Ke-
»gelschnitts«.

Aufgabe IV.

»Von zwei Kegelschnitten sind je 5 Punkte gege-
»ben, von denen 3 beiden Kegelschnitten gemein-
»schaftlich sind; man soll den 4^{ten} Durchschnits-
»punkt der beiden Kegelschnitte durch lineare
»Konstruktion finden«.

Auflösung.

»Man wählt die 3 gemeinschaftlichen Punkte zu
»Fundamentalpunkten, und bestimmt mit Hülfe
»der jedesmaligen andern beiden gegebenen Punkte
»die Hauptpunkte des Fundamentaldreiecks in
»Bezug auf die beiden Kegelschnitte. Sucht man
»zu der Verbindungslinie der beiden Hauptpunkte
»den konjugirten Punkt, so ist dieser der 4^{te} Durch-
»schnittspunkt der beiden gegebenen Kegelschnitte«.

Aufgabe VI.

»Von einem Kegelschnitte sind 5 Punkte gegeben;
»man soll in jedem der gegebenen Punkte die
»Tangente durch lineare Konstruktion finden«.

Auflösung.

»Man wählt 3 der gegebenen Punkte zu Funda-
»mentalpunkten, und bestimmt mit Hülfe der
»andern beiden gegebenen Punkte den Hauptpunkt
»des Fundamentaldreiecks. Verbindet man diesen
»Hauptpunkt mit einem der Fundamentalpunkte,
»und sucht zur Verbindungslinie und den beiden
»zugehörigen Fundamentallinien den 4^{ten} harmo-

»zu beliebigen Punkten dieser Hauptlinie die kon-
»jugirten Linien, so sind diese Tangenten des Ke-
»gelschnitts«.

Aufgabe V.

»Von zwei Kegelschnitten sind je 5 Tangenten
»gegeben, von denen drei beiden Kegelschnitten
»gemeinschaftlich sind; man soll die 4^{te} gemein-
»schaftliche Tangente der beiden Kegelschnitte
»durch lineare Konstruktion finden«.

Auflösung.

»Man wählt die 3 gemeinschaftlichen Tangenten
»zu Fundamentallinien, und bestimmt mit Hülfe
»der jedesmaligen andern beiden gegebenen Tan-
»genten die Hauptlinien des Fundamentaldreiecks
»in Bezug auf die beiden Kegelschnitte. Sucht
»man zu dem Durchschnittspunkte der beiden
»Hauptlinien die konjugirte Linie, so ist diese die
»4^{te} gemeinschaftliche Tangente der beiden gege-
»benen Kegelschnitte.

Aufgabe VII.

»Von einem Kegelschnitte sind 5 Tangenten ge-
»geben; man soll den Berührungspunkt jeder der
»gegebenen Tangenten durch lineare Konstruktion
»finden«.

Auflösung.

»Man wählt 3 der gegebenen Tangenten zu Fun-
»damentallinien, und bestimmt mit Hülfe der an-
»dern beiden gegebenen Tangenten die Hauptlinie
»des Fundamentaldreiecks. Verlängert man diese
»Hauptlinie, bis sie eine der Fundamentallinien
»schneidet, und sucht zu dem Durchschnittspunkte
»und den beiden zugehörigen Fundamentalecken

»nischen Strahl, so ist dieser die Tangente des
»Kegelschnitts in der betreffenden Fundamental-
»ecke«.

»den 4^{ten} harmonischen Punkt, so ist dieser der
»Berührungspunkt der betreffenden Fundamental-
»linie und des Kegelschnitts«.

Fig. 8.

Ein besonderer Fall der Aufgabe IV ist folgender: Ziehen wir durch einen Fundamentalpunkt A eine beliebige Gerade, deren Gleichung $\mu q - \nu r = 0$ sei, so können wir die beiden Geraden AN und BC als einen Kegelschnitt betrachten, der durch die 3 Fundamentalpunkte A, B, C geht. Ist G ein beliebiger Punkt der Geraden AN, so sei $\lambda p - \mu q = 0$ die Gleichung der Geraden CG. Durch Veränderung der Grösse λ erhält man jeden beliebigen Punkt der Geraden AN. Die konjugirte Linie des Punktes G hat die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$, und geht also immer durch den Durchschnittspunkt der Geraden $p = 0$ und $\mu q + \nu r = 0$. Die konjugirten Linien aller Punkte der Geraden AN gehen also durch den festen Punkt D, der, wie man leicht sieht, der 4^{te} harmonische Punkt zu N, B und C ist. Dieser Punkt D ist also als der Hauptpunkt des Fundamentaldreiecks ABC in Bezug auf den Kegelschnitt ANBC zu betrachten. Wollen wir also den 4^{ten} Durchschnittspunkt des Kegelschnitts OABC (so bezeichnen wir nämlich einen Kegelschnitt, der durch die 3 Punkte A, B, C geht, und O zum Hauptpunkte hat) und des Kegelschnittes ANBC, oder, was dasselbe ist, den 2^{ten} Durchschnittspunkt der Geraden AN und des Kegelschnitts OABC finden, so verbinden wir nach Aufgabe IV D und O, und suchen zur Verbindungslinie DE den konjugirten Punkt. Dieser ist alsdann der gesuchte 2^{te} Durchschnittspunkt der Geraden AN und des Kegelschnitts OABC. Die Konstruktion ist dann einfach folgende. Man zieht BE und AD, dann CF; der Punkt G, in dem CF die Gerade AN schneidet, ist der gesuchte Punkt.

Dies lässt sich auch unabhängig von dem Früheren folgendermassen beweisen. Die Gleichung der Geraden AN ist $\mu q - \nu r = 0$, die der Geraden AD ist $\mu q + \nu r = 0$. Die Gerade DE, welche den Durchschnittspunkt D der Geraden $p = 0$ und $\mu q + \nu r = 0$ mit dem Hauptpunkte O, dessen Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r$ sind, verbindet, hat die Gleichung $-\alpha \left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} \right) p + \mu q$

$+ \nu r = 0$. Die Gerade BE hat die Gleichung: $-\alpha \left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} \right) p + \nu r = 0$. Die Gerade CF

hat die Gleichung: $\alpha \left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} \right) p + \mu q = 0$. Also hat der Punkt G die Gleichungen:

$-\alpha \left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} \right) p = \mu q = \nu r$. Nun ist $-\alpha \left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$; folglich liegt nach

§ 7 der Punkt G auf dem Kegelschnitte, der durch die Punkte A, B, C geht und O zum Hauptpunkte hat.

Ganz auf dieselbe Weise zeigt man, wie man von einem Punkte aus, der auf einer der Fundamentallinien liegt, an einen Kegelschnitt, der die 3 Fundamentallinien berührt und eine gegebene Linie zur Hauptlinie hat, die zweite Tangente zieht.

Dadurch erhalten wir die Lösungen folgender Aufgaben.

Aufgabe VIII. (Fig. 8.)

»Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte gegeben,
»ausserdem eine Gerade AN, welche durch einen
»der gegebenen Punkte A geht, man soll den
»zweiten Durchschnittspunkt der Geraden AN mit
»dem Kegelschnitte durch lineare Konstruktion
»finden«.

Auflösung.

»Man wählt den Punkt A und zwei der andern
»gegebenen Punkte zu Fundamentalpunkten, und
»bestimmt mit Hülfe der letzten beiden gegebenen
»Punkte den Hauptpunkt O. Sodann sucht man
»zu AN, AB und AC den 4^{ten} harmonischen
»Strahl AD, verlängert diesen bis zum Durch-
»schnitt D mit der gegenüberliegenden Funda-
»mentallinie BC, und verbindet D mit O. Den
»Durchschnittspunkt E der Linie DO mit einer
»der andern Fundamentallinien verbindet man mit
»der gegenüberliegenden Fundamentalecke B, und
»den Durchschnittspunkt F der Linien AD und
»BE verbindet man mit der dritten Fundamentale-
»ecke C. Der Punkt G, in welchem die Linien
»CF und AN einander schneiden, ist der gesuchte
»2^{te} Durchschnittspunkt der Geraden AN und des
»Kegelschnitts«.

Aufgabe IX. (Fig. 9.)

»Ein Kegelschnitt ist durch 5 Tangenten gegeben,
»ausserdem ein Punkt D, welcher auf einer der
»gegebenen Tangenten AB liegt; man soll die
»zweite Tangente, welche von dem Punkte D aus
»an den Kegelschnitt gezogen werden kann, durch
»lineare Konstruktion finden«.

Auflösung.

»Man wählt die Linie AB und zwei der andern
»gegebenen Tangenten zu Fundamentallinien, und
»bestimmt mit Hülfe der letzten beiden gegebenen
»Tangenten die Hauptlinie MN. Sodann sucht
»man zu D, A und B den 4^{ten} harmonischen
»Punkt E, verbindet diesen mit der gegenüber-
»liegenden Fundamentalecke C, und verlängert die
»Verbindungsline bis zum Durchschnitt F mit
»der Hauptlinie MN. Die Verbindungsline des
»Punktes F mit einer der andern beiden Funda-
»mentalecken B werde von der gegenüberliegenden
»Fundamentallinie AC in G geschnitten. Man
»verbinde G mit E, und den Durchschnittspunkt
»H der Linien GE und BC mit dem gegebenen
»Punkte D. Alsdann ist DH die gesuchte 2^{te}
»Tangente, welche von dem Punkte D aus an
»den Kegelschnitt gezogen werden kann«.

§ 9.

Gleichung der Tangente; Pol und Polare.

Es liege ein Punkt α', β', γ' auf dem Kegelschnitte $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$. Wir suchen die Gleichung der Tangente in diesem Punkte. Dies erreichen wir ohne Anwendung der Differentialrechnung auf folgende Weise. Es sei A' der gegebene Punkt, so sind $\alpha'p - \gamma'r = 0$ und $\alpha'p - \beta'q$

Fig. 10.

= 0 die Gleichungen der Geraden A'B und A'C. Wir wählen diese geraden Linien zu Fundamentallinien d. h. wir setzen: $\alpha'p - \gamma'r = q'$ und $\alpha'p - \beta'q = r'$ oder $r = \frac{\alpha'p - q'}{\gamma'}$ und $q = \frac{\alpha'p - r'}{\beta'}$. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung des Kegelschnitts ein, so erhalten wir:

$$\alpha' \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) p^2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} \right) pq' - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) pr' + \frac{q'r'}{\alpha} = 0.$$

Da aber der Punkt α', β', γ' auf dem Kegelschnitte liegen soll, so muss nach § 7 $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} = 0$ sein. Dadurch verwandelt sich die obige Gleichung in folgende: $\frac{\gamma'}{\gamma} pq' + \frac{\beta'}{\beta} pr' + \frac{q'r'}{\alpha} = 0$. Dies ist also die Gleichung des Kegelschnitts, wenn man die Linien BC, A'B und A'C zu Fundamentallinien nimmt. Nach § 7 hat nun die Tangente im Punkte A' die Gleichung $\frac{\gamma'}{\gamma} q' + \frac{\beta'}{\beta} r' = 0$. Setzen wir für q' und r' wieder die Werthe $\alpha'p - \gamma'r$ und $\alpha'p - \beta'q$ ein, so erhalten wir die Gleichung $\alpha' \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) p - \frac{\beta'^2}{\beta} q - \frac{\gamma'^2}{\gamma} r = 0$. Da aber: $\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\alpha'}{\alpha}$ ist, so erhalten wir endlich: $\frac{\alpha'^2}{\alpha} p + \frac{\beta'^2}{\beta} q + \frac{\gamma'^2}{\gamma} r = 0$ als Gleichung der Tangente im Punkte A'.

Ist der Berührungspunkt α', β', γ' nicht gegeben, sondern bloss ein Punkt λ, μ, ν ausserhalb des Kegelschnitts, durch den die Tangente gehen soll, so finden wir den Berührungspunkt α', β', γ' folgendermassen. Da dieser Berührungspunkt auf dem Kegelschnitte liegt, so haben wir: $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} = 0$, und da der Punkt λ, μ, ν auf der Geraden $\frac{\alpha'^2}{\alpha} p + \frac{\beta'^2}{\beta} q + \frac{\gamma'^2}{\gamma} r = 0$ liegen muss, so haben wir: $\frac{\alpha'^2}{\alpha\lambda} + \frac{\beta'^2}{\beta\mu} + \frac{\gamma'^2}{\gamma\nu} = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen finden wir die Verhältnisse $\alpha' : \beta' : \gamma'$, und zwar ergeben sich zwei Systeme von Werthen, die wir durch α', β', γ' und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ bezeichnen, d. h. von einem Punkte kann man an einen Kegelschnitt im Allgemeinen zwei Tangenten ziehen. Die Berührungssehne, welche die beiden Punkte α', β', γ' und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ verbindet, hat, wie man leicht findet, die Gleichung: $\alpha'\alpha'' (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'') p + \beta'\beta'' (\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') q + \gamma'\gamma'' (\beta'\alpha'' - \alpha'\beta'') r = 0$. Setzt man in diese Gleichung die für die Verhältnisse $\alpha' : \beta' : \gamma'$ und $\alpha'' : \beta'' : \gamma''$ gefundenen Werthe, so erhält man nach den gehörigen Reduktionen: $\alpha \left(\frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu} \right) p + \beta \left(\frac{\gamma}{\nu} + \frac{\alpha}{\lambda} \right) q + \gamma \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} \right) r = 0$ als die Gleichung der Berührungssehne.

Diese Gerade ist immer reell, wenn auch die Berührungspunkte imaginär werden; sie heisst die Polare des Punktes λ, μ, ν , und der letztere der Pol der Geraden.

Dreht sich die Polare um den festen Punkt λ' , μ' , ν' , so erhalten wir die Bedingungsgleichung: $\frac{\alpha}{\lambda'} \left(\frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu} \right) + \frac{\beta}{\mu'} \left(\frac{\gamma}{\nu} + \frac{\alpha}{\lambda} \right) + \frac{\gamma}{\nu'} \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} \right) = 0$. Diese Gleichung kann aber auch auf die folgende Form gebracht werden: $\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\beta}{\mu'} + \frac{\gamma}{\nu'} \right) + \frac{\beta}{\mu} \left(\frac{\gamma}{\nu'} + \frac{\alpha}{\lambda'} \right) + \frac{\gamma}{\nu} \left(\frac{\alpha}{\lambda'} + \frac{\beta}{\mu'} \right) = 0$ d. h. der Pol bewegt sich dann auf der Polaren des Punktes λ' , μ' , ν' fort. Ebenso sieht man, dass, wenn der Pol sich auf einer gegebenen Geraden fortbewegt, die Polare sich um den Pol der gegebenen Geraden dreht.

§ 10.

Einige metrische Relationen an Kegelschnitten.

Die Gleichung des Kegelschnittes $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$, der durch die drei Fundamentalecken Fig. 11.
 A, B, C geht, bringen wir auf die Form: $\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\beta q} + \frac{1}{\gamma r} = 0$. Es sei nun $p = \frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1$,
 $q = \frac{y}{b'} + \frac{x}{a'} - 1$, $r = \frac{y}{b''} + \frac{x}{a''} - 1$, so ist, wenn OX die Abscissenachse vorstellt, $a = OP$,
 $a' = OR''$, $a'' = OR$. Setzt man nun in der Gleichung des Kegelschnittes $y = 0$, so wird x zur
Abscisse des einen oder des andern Durchschnittspunkts der Abscissenachse mit dem Kegelschnitte.
Sind also L und L' diese beiden Durchschnittspunkte, so ist entweder $x = OL$ oder $x = OL'$. Wir
erhalten also folgende beide Gleichungen:

$$\frac{1}{\alpha \left(\frac{OL}{OP} - 1 \right)} + \frac{1}{\beta \left(\frac{OL}{OR''} - 1 \right)} + \frac{1}{\gamma \left(\frac{OL}{OR} - 1 \right)} = 0 \text{ und } \frac{1}{\alpha \left(\frac{OL'}{OP} - 1 \right)} + \frac{1}{\beta \left(\frac{OL'}{OR''} - 1 \right)} + \frac{1}{\gamma \left(\frac{OL'}{OR} - 1 \right)} = 0$$

$$\text{oder } -\frac{OP}{\alpha \cdot PL} - \frac{OR''}{\beta \cdot R''L} + \frac{OR}{\gamma \cdot RL} = 0 \text{ und } -\frac{OP}{\alpha \cdot PL'} - \frac{OR''}{\beta \cdot R''L'} + \frac{OR}{\gamma \cdot RL'} = 0.$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen $\frac{OP}{\alpha}$, so erhalten wir:

$$\frac{OR''}{\beta} \left(\frac{PL}{R''L} - \frac{PL'}{R''L'} \right) = \frac{OR}{\gamma} \left(\frac{PL}{RL} - \frac{PL'}{RL'} \right).$$

$$\text{Es ist aber: } \frac{PL}{R''L} - \frac{PL'}{R''L'} = \frac{PL \cdot R''L' - PL' \cdot R''L}{R''L \cdot R''L'} = -\frac{PR'' \cdot LL'}{R''L \cdot R''L'} \text{ und}$$

$$\frac{PL}{RL} - \frac{PL'}{RL'} = \frac{PL \cdot RL' - PL' \cdot RL}{RL \cdot RL'} = \frac{PR \cdot LL'}{RL \cdot RL'}. \text{ Also erhalten wir: } -\frac{OR'' \cdot PR''}{\beta \cdot R''L \cdot R''L'}$$

$$= \frac{OR \cdot PR}{\gamma \cdot RL \cdot RL'}$$

Das Verhältniss $\beta : \gamma$ lässt sich aber auf eine andre Weise folgendermassen bestimmen.

Es sei AP'' die Tangente des Kegelschnitts im Punkte A, so ist nach § 7 ihre Gleichung

$\beta q + \gamma r = 0$. Also ist $\beta : \gamma = -\frac{OR''}{P'R''} : \frac{OR}{P''R}$. Verbinden wir diese Gleichung mit der zuletzt

erhaltenen, so wird: $\frac{PR'' \cdot P''R''}{LR'' \cdot L'R''} = \frac{PR \cdot P''R}{LR \cdot L'R}$ oder $\frac{LR}{LR''} : \frac{PR}{PR''} = \frac{L'R''}{L'R} : \frac{P''R''}{P''R}$. Daraus folgt:

$$\frac{LR}{LR''} + \frac{PR}{PR''} : \frac{PR}{PR''} = \frac{L'R''}{L'R} + \frac{P''R''}{P''R} : \frac{P''R''}{P''R} \text{ oder } \frac{PL \cdot RR''}{LR'' \cdot PR''} : \frac{PR}{PR''} = \frac{P''L' \cdot RR''}{L'R \cdot P''R} : \frac{P''R''}{P''R},$$

oder endlich $PL \cdot L'R \cdot P''R'' = P''L' \cdot LR'' \cdot PR$; d. h. die Punkte L, L'; P, P''; R, R'' bilden eine Involution. Wir haben daher folgenden Satz:

Satz XIII.

»Ein Kegelschnitt, ein demselben eingeschriebenes Dreieck und die Tangente des Kegelschnitts in einer Ecke des Dreiecks werden von jeder Transversale in 6 Punkten geschnitten, die eine Involution bilden.

Fig. 11. Ist D ein 4^{ter} Punkt des Kegelschnitts, so können wir den eben gefundenen Satz auch auf das Dreieck ACD und die Tangente AP'' anwenden. Alsdann sind einerseits L und L', P und P'', R und R'', andererseits L und L', R' und P'', P' und R'' Punkte einer Involution. Es ist daher einerseits:

$$PL \cdot L'R \cdot P''R'' = P''L' \cdot LR'' \cdot PR \text{ andererseits, indem man P mit R' und R mit P' vertauscht:}$$

$$LR' \cdot L'P' \cdot P''R'' = P''L' \cdot LR'' \cdot P'R'. \text{ Durch Division dieser Gleichungen und Reduktion erhalten wir:}$$

$$LP \cdot L'R \cdot P'R' = L'P' \cdot LR' \cdot PR; \text{ d. h. die Punkte L und L', P und P', R und R' bilden eine Involution. Wir haben also:}$$

Satz XIV.

Fig. 12. »Ein Kegelschnitt und ein demselben eingeschriebenes Viereck werden von jeder Transversale in 6 Punkten geschnitten, die eine Involution bilden«.

Aus diesem Satze kann man wieder den vorigen ableiten, wenn man D unendlich nahe an A rücken lässt.

Fig. 13. Lässt man D unendlich nahe an A, und zugleich C unendlich nahe an B rücken, so werden AP' und CP zu Tangenten des Kegelschnitts, und AB zur Polaren des Punktes O. Alsdann fallen R und R' zusammen, und man erhält die sogenannte Involution von 5 Punkten.

Legt man in diesem Falle noch die Transversale durch den Pol O, so fallen auch P und P' in O zusammen. Die Gleichung der Involution verwandelt sich dann in folgende: $LO \cdot L'R = L'O \cdot LR$ oder $LO : LR = L'O : L'R$. Also sind die Punkte L, R, L', O harmonische Punkte; d. h.

Satz XV.

»Jede durch einen Pol gehende Transversale wird von dem Kegelschnitte und der Polare in 3 Punkten geschnitten, die im Verein mit dem Pole 4 harmonische Punkte bilden«.

Bekanntlich dient dieser Satz zur Lösung der Aufgabe:

»Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kegelschnitt die beiden Tangenten durch lineare Konstruktion zu ziehen«.

§ 11.

Ausdehnung derselben Methode auf die Geometrie des Raumes.

Sind p, q, r, s etc. lineare Funktionen der 3 Koordinaten x, y, z , so stellen $p = 0, q = 0, r = 0$ etc. Ebenen dar. Wir nennen diese die Ebenen p, q, r etc., ihre Durchschnittslinien die Kanten pq, pr, qr etc., die Punkte, in denen sie sich schneiden, die Ecken pqr etc. Man sieht dann auf dieselbe Weise, wie im Vorhergehenden, dass die Gleichung $\lambda p - \mu q = 0$ eine Ebene darstellt, die durch die Kante pq geht, $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$ eine Ebene, die durch die Ecke pqr geht, und das Gleichungssystem $\lambda p = \mu q = \nu r$ eine Gerade, die durch die Ecke pqr geht. Ebenso stellt: $\frac{qr}{\alpha} + \frac{pr}{\beta} + \frac{pq}{\gamma} = 0$ einen Kegel zweiten Grades dar, der durch die Kanten pq, pr und qr geht.

Wir können daher alle vorangehenden Sätze unmittelbar auf den Raum übertragen, wenn wir statt der Ausdrücke »Fundamentaldreieck, Punkt, Gerade, Kegelschnitt, Tangente etc.« resp. die Ausdrücke »dreiseitige Ecke, durch den Punkt pqr gehende Gerade, durch den Punkt pqr gehende Ebene, Kegel zweiten Grades, Tangentialebene etc.« setzen.

Sind ferner 4 nicht durch denselben Punkt gehende Ebenen p, q, r, s gegeben, so nennen wir das von ihnen gebildete Tetraëder das Fundamentaltetraëder, die Ebenen selbst die Fundamentalebene, die Kanten des Tetraëders die Fundamentalkanten, und seine Ecken die Fundamentalecken. Alsdann zeigt man nach der obigen Methode, dass jeder beliebige Punkt durch das Gleichungssystem $\alpha p = \beta q = \gamma r = \delta s$, und jede beliebige Ebene durch die Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ dargestellt werden kann. Ist der Punkt $\alpha p = \beta q = \gamma r = \delta s$ gegeben, so kann man die Gerade $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ durch lineare Konstruktion finden, und umgekehrt.

Denn *) sind A, B, C, D die Fundamentalecken, stellen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und $s = 0$ die Fundamentebenen BCD, ACD, ABD und ABC dar, und ist M der gegebene Punkt, dessen Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r = \delta s$ sind, so verbinden wir diesen Punkt mit den Fundamentalecken. Alsdann haben die Ebenen MAB, MAC, MAD, MBC, MBD, MCD resp. die Gleichungen: $\gamma r - \delta s = 0$, $\beta q - \delta s = 0$, $\beta q - \gamma r = 0$, $\alpha p - \delta s = 0$, $\alpha p - \gamma r = 0$, $\alpha p - \beta q = 0$. Die 4 Verbindungslinien MA, MB, MC, MD werden also durch die Gleichungssysteme $\beta q = \gamma r = \delta s$, $\alpha p = \gamma r = \delta s$, $\alpha p = \beta q = \delta s$, $\alpha p = \beta q = \gamma r$ dargestellt. Schneiden nun diese Verbindungslinien die gegenüberliegenden Fundamentebenen in den Punkten A', B', C', D', so werden diese letzteren durch die Gleichungssysteme $\beta q = \gamma r = \delta s$ und $p = 0$, $\alpha p = \gamma r = \delta s$ und $q = 0$, $\alpha p = \beta q = \delta s$ und $r = 0$, $\alpha p = \beta q = \gamma r$ und $s = 0$ dargestellt. Verbinden wir die 4 Punkte A', B', C', D' unter einander, so entsteht ein dem Fundamentaltetraëder eingeschriebenes Tetraëder A'B'C'D'. Die Ebene A'B'C' hat die Gleichung: $\alpha p + \beta q + \gamma r - 2\delta s = 0$; denn diese wird sowohl durch $\beta q = \gamma r = \delta s$ und $p = 0$, als durch $\alpha p = \gamma r = \delta s$ und $q = 0$, als durch $\alpha p = \beta q = \delta s$ und $r = 0$ befriedigt. Ebenso haben die Ebenen B'C'D', A'C'D' und A'B'D' die Gleichungen: $-2\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$, $\alpha p - 2\beta q + \gamma r + \delta s = 0$, $\alpha p + \beta q - 2\gamma r + \delta s = 0$. Die Durchschnittslinien der Ebenen ABC und A'B'C', BCD und B'C'D', ACD und A'C'D', ABD und A'B'D' werden durch die Gleichungssysteme $\alpha p + \beta q + \gamma r - 2\delta s = 0$ und $s = 0$, $-2\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ und $p = 0$, $\alpha p - 2\beta q + \gamma r + \delta s = 0$ und $q = 0$, $\alpha p + \beta q - 2\gamma r + \delta s = 0$ und $r = 0$ dargestellt. Durch diese Gleichungssysteme wird aber auch die Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ befriedigt. Also liegen die 4 zuletzt erwähnten Durchschnittslinien in ein und derselben Ebene, deren Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ ist.

Ist umgekehrt $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ die Gleichung einer Ebene m, deren Durchschnittslinien mit den Fundamentebenen wir durch mp, mq, mr, ms bezeichnen, so hat die Ebene Amp die Gleichung $\beta q + \gamma r + \delta s = 0$. Ebenso haben die Ebenen Bmq, Cmr und Dms die Gleichungen $\alpha p + \gamma r + \delta s = 0$, $\alpha p + \beta q + \delta s = 0$, $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$. Diese 4 Ebenen bestimmen durch ihre Durchschnitte ein dem Fundamentaltetraëder umgeschriebenes Tetraëder A''B''C''D'', wo A'' der Schnittpunkt der 3 Ebenen Bmq, Cmr und Dms, B'' der Schnittpunkt der Ebenen Amp, Cmr und Dms etc. ist. Die Gerade AA'' muss zwei Gleichungen haben, die sowohl durch das Gleichungssystem $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, als durch das Gleichungssystem $\alpha p + \gamma r + \delta s = 0$, $\alpha p + \beta q + \delta s = 0$, $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$ befriedigt werden. Man findet daher leicht, dass $\beta q = \gamma r = \delta s$ die Gleichungen der Linien AA'' sind. Ebenso müssen $\alpha p = \gamma r = \delta s$, $\alpha p = \beta q = \delta s$ und $\alpha p = \beta q = \gamma r$ die Gleichungen der Geraden BB'', CC'' und DD'' sein. Die blosse Ansicht dieser Gleichungen zeigt, dass sich die 4 Linien AA'', BB'', CC'' und DD'' in ein und demselben Punkte schneiden, dessen Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r = \delta s$ sind.

*) Die zugehörige Figur ist leicht hinzuzudenken.

Wir haben daher folgende den Sätzen VI und VII entsprechende Sätze:

Satz XVI.

»Verbindet man einen Punkt mit den Ecken eines
»Tetraäders, und verlängert man die Verbindungs-
»linien, bis sie die gegenüberliegenden Seitenebe-
»nen des Tetraäders schneiden, so entsteht durch
»die Verbindung dieser Schnittpunkte ein neues,
»dem früheren eingeschriebenes Tetraeder. Ver-
»längert man die gegenüberliegenden Seitenebenen
»der beiden Tetraeder, bis sie sich schneiden, so
»liegen die 4 Durchschnittslinien in ein und der-
»selben Ebene«.

Satz XVII.

»Schneidet eine Ebene die 4 Seitenebenen eines
»Tetraäders, und verbindet man die Durchschnitts-
»linien mit den gegenüberliegenden Ecken des
»Tetraäders, so entsteht durch den gegenseitigen
»Durchschnitt dieser 4 Ebenen ein neues, dem
»früheren umgeschriebenes Tetraeder. Verbindet
»man die gegenüberliegenden Ecken der beiden
»Tetraeder durch gerade Linien, so schneiden sich
»diese 4 Verbindungslinien in ein und demselben
»Punkte«.

Wir können solche Punkte und Ebenen, wie die eben betrachteten, einander konjugirt nennen. Dreht sich eine Ebene um einen festen Punkt, so durchläuft ihr konjugirter Punkt eine Fläche dritten Grades, für die sich dann eben solche lineare Konstruktionen ergeben, wie wir oben für Kegelschnitte erhalten haben. Diese Untersuchungen spare ich jedoch für eine andre Gelegenheit auf.

Anhang.

Die Sätze VI, VII, XVI und XVII sind specielle Fälle andrer, allgemeinerer Sätze, deren einfachen analytischen Beweis ich hier angeben will.

Die beiden Linien OA und OB mögen von den Linien AB und ab geschnitten werden, und es seien $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und $r' = 0$ die Gleichungen der Linien OA, OB, AB und ab. Betrachten wir OAB als das Fundamentaldreieck, so hat ein Punkt C die Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r$. Betrachten wir Oab als das Fundamentaldreieck, so hat ein Punkt c die Gleichungen $\alpha' p = \beta' q = \gamma' r$. Die Linien OC, AC, BC, Oc, ac, bc haben dann die Gleichungen $\alpha p - \beta q = 0$, $\alpha p - \gamma r = 0$, $\beta q - \gamma r = 0$, $\alpha' p - \beta' q = 0$, $\alpha' p - \gamma' r = 0$, $\beta' q - \gamma' r = 0$. Sollen nun die 3 Punkte O, C und c in ein und derselben Geraden liegen, so müssen die Linien OC und Oc zusammenfallen d. h. es muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ sein. Die Linien AC und ac, BC und bc haben daher die Gleichungen: $\alpha p - \gamma r = 0$ und $\alpha p - \gamma' r = 0$, $\beta q - \gamma r = 0$ und $\beta q - \gamma' r = 0$. Subtrahirt man diese Gleichungen paarweise von einander, so erhält man beide Male dasselbe Resultat, nämlich $\gamma r - \gamma' r = 0$. Daraus ist ersichtlich, dass die Durchschnittspunkte der Linienpaare Ac und ac, BC und bc in einer Geraden liegen, die auch durch den Durchschnittspunkt der Linien AB und ab geht.

Wird ferner eine dreiseitige Ecke O, ABC von zwei Ebenen ABC und abc geschnitten, so seien die Gleichungen der Ebenen OAB, OAC, OBC, ABC und abc $r = 0$, $q = 0$, $p = 0$, $s = 0$, $s' = 0$. Betrachten wir die Ebenen p, q, r, s als Fundamentalebene, so hat ein neuer Punkt M die Gleichungen $\alpha p = \beta q = \gamma r = \delta s$. Betrachten wir die Ebenen p, q, r, s' als Fundamentalebene, so hat ein neuer Punkt m die Gleichungen: $\alpha' p = \beta' q = \gamma' r = \delta' s'$. Die Ebenen OAM, OBM, OCM, Oam, Obm, Ocm haben alsdann die Gleichungen: $\beta q - \gamma r = 0$, $\alpha p - \gamma r = 0$, $\alpha p - \beta q = 0$, $\beta' q - \gamma' r = 0$, $\alpha' p - \gamma' r = 0$, $\alpha' p - \beta' q = 0$. Sollen nun O, M und m in ein und derselben Geraden liegen, so müssen die Ebenen OAM und Oam, OBM und Obm, OCM und Ocm zusammenfallen d. h. es muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ sein. Die Ebenen MAB und mab, MAC und mac, MBC und mbc haben daher die Gleichungen $\gamma r - \delta s = 0$ und $\gamma r - \delta' s' = 0$, $\beta q - \delta s = 0$ und $\beta q - \delta' s' = 0$, $\alpha p - \delta s = 0$ und $\alpha p - \delta' s' = 0$. Zieht man je zwei dieser Gleichungen von einander ab, so erhält man immer dasselbe Resultat, nämlich $\delta s - \delta' s' = 0$. Daraus ist ersichtlich, dass die 3 Durchschnittslinien der oben genannten Ebenenpaare in ein und derselben Ebene liegen, die auch durch die Durchschnittslinie der Ebenen s und s' geht.

Wir haben daher folgende Sätze:

Satz XVIII.

»Gehen die Verbindungslinien der Ecken zweier
»Dreiecke durch ein und denselben Punkt, so lie-
»gen die Durchschnittspunkte der entsprechenden
»Seiten der beiden Dreiecke in ein und derselben
»Geraden; und umgekehrt«.

Satz XIX.

»Gehen die Verbindungslinien der Ecken zweier
»Tetraëder durch ein und denselben Punkt, so
»schneiden sich die entsprechenden Seitenebenen
»der beiden Tetraëder in 4 Geraden, die in ein
»und derselben Ebene liegen; und umgekehrt«.

J. Taeplitz.

Fig. 1.

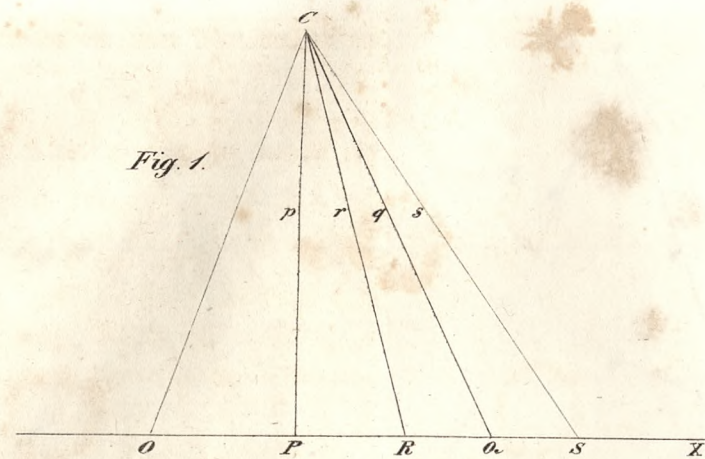


Fig. 4.

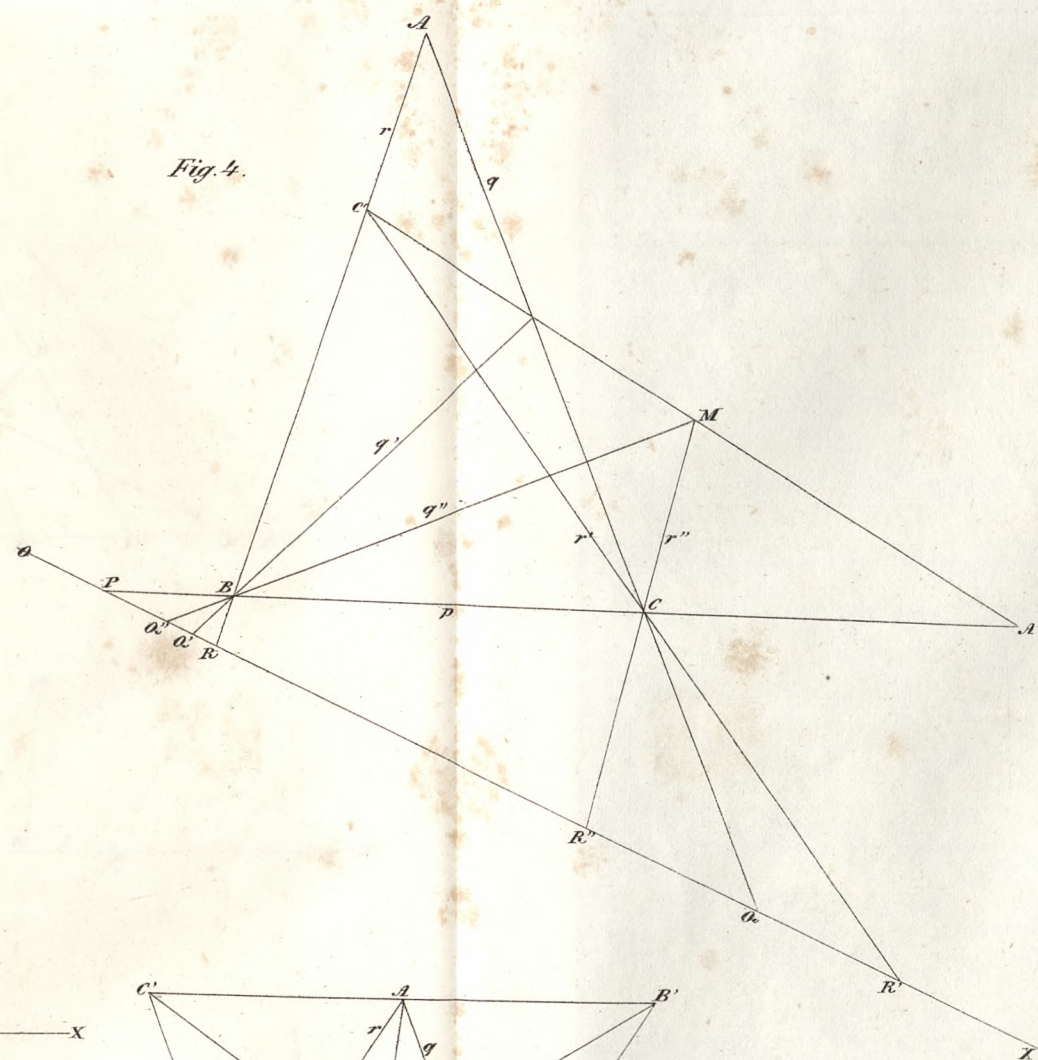


Fig. 5.

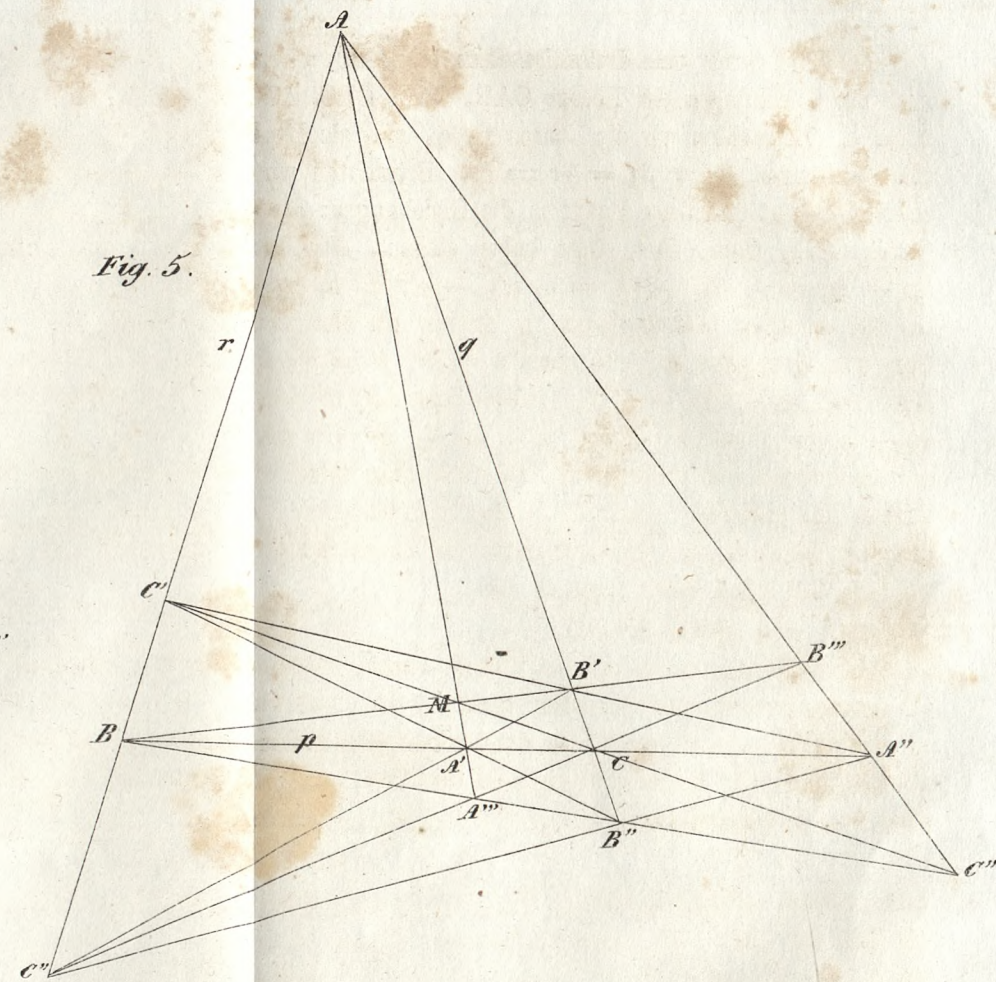


Fig. 2.

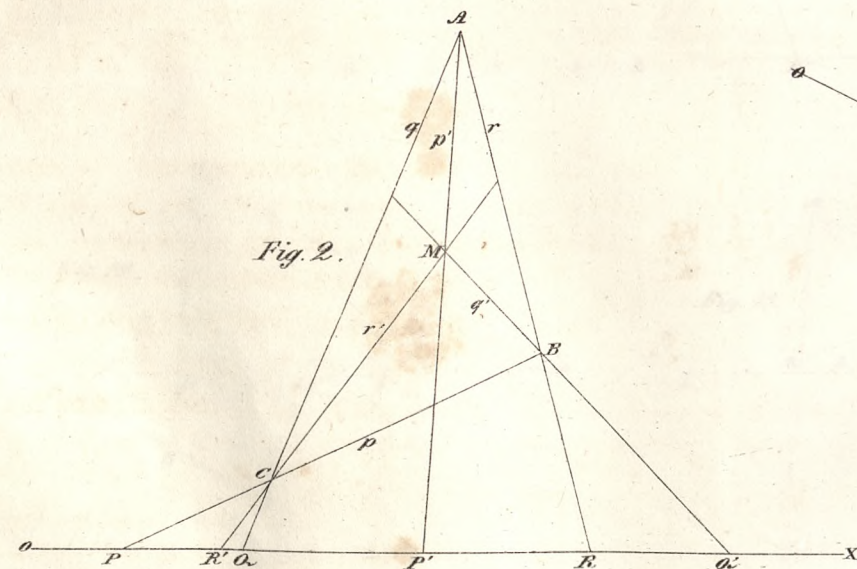


Fig. 6.

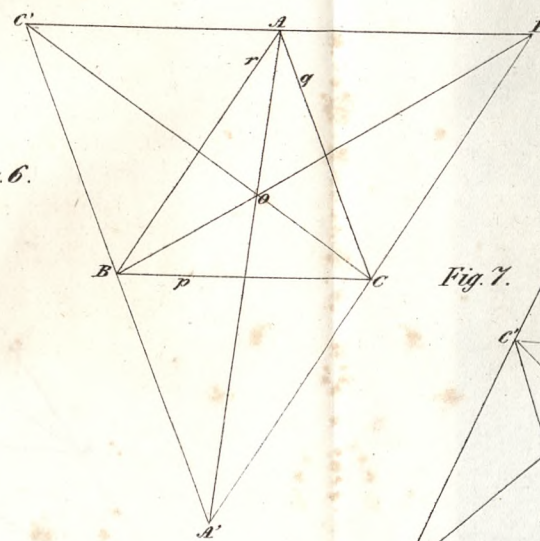


Fig. 7.

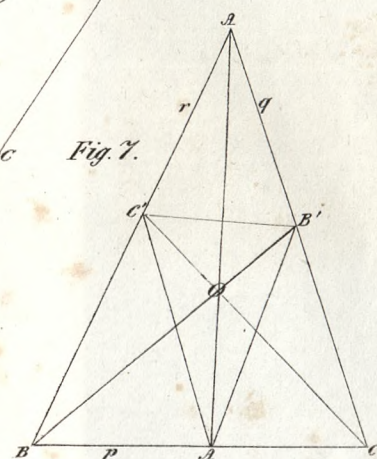


Fig. 8.

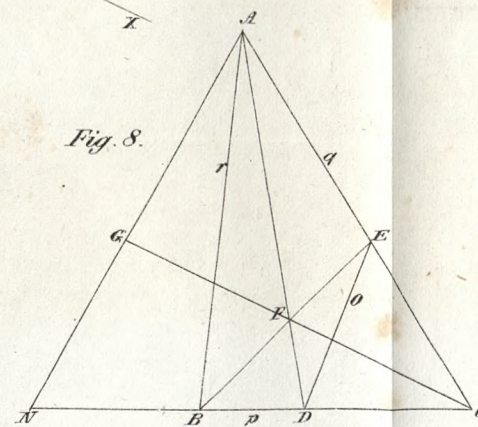


Fig. 9.

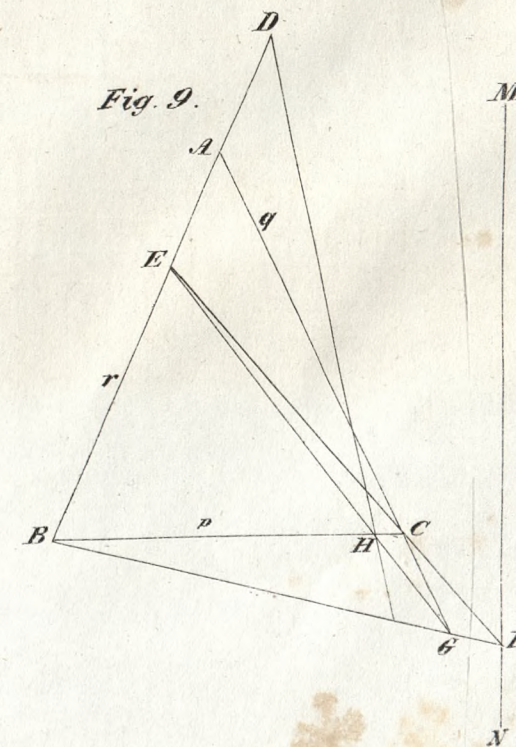
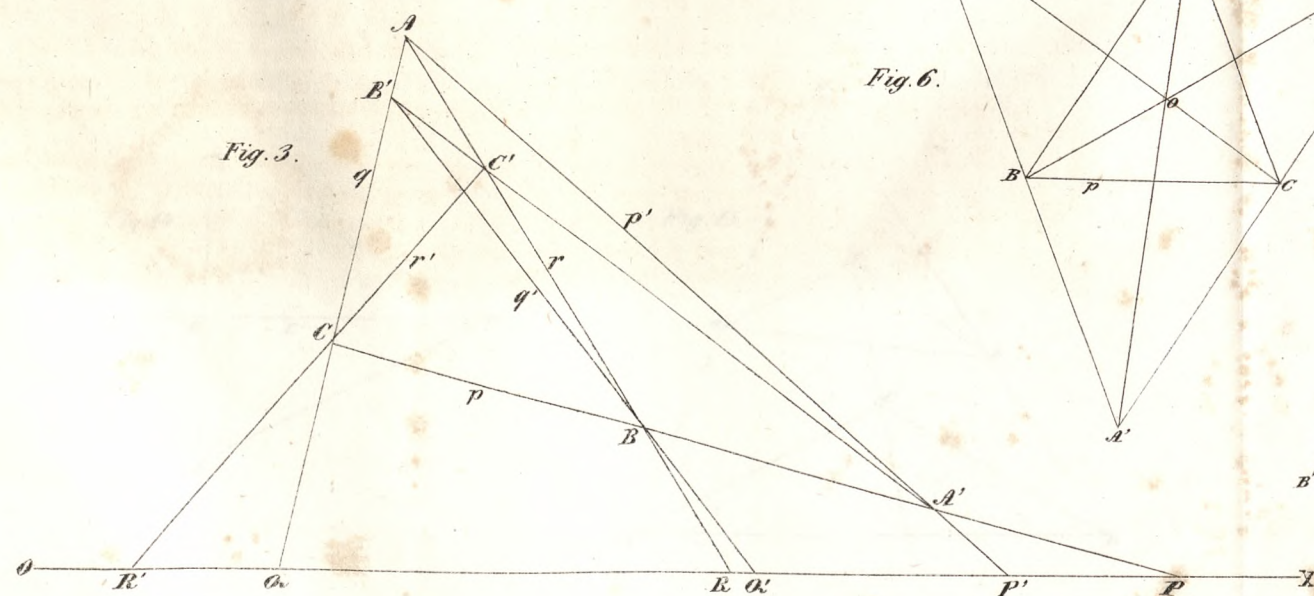


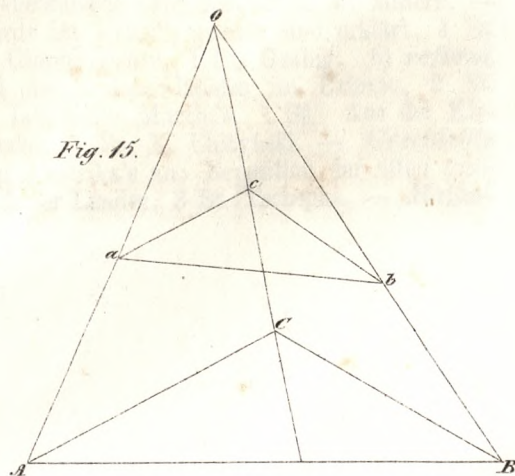
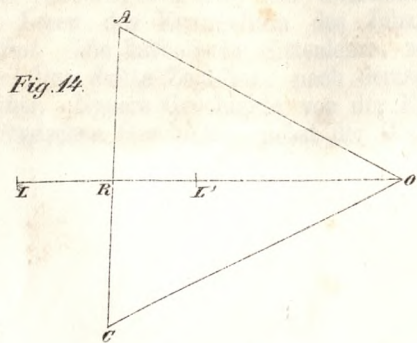
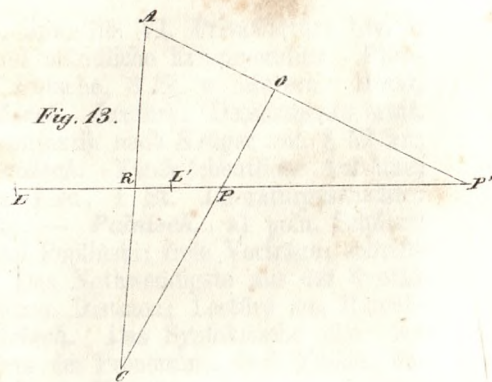
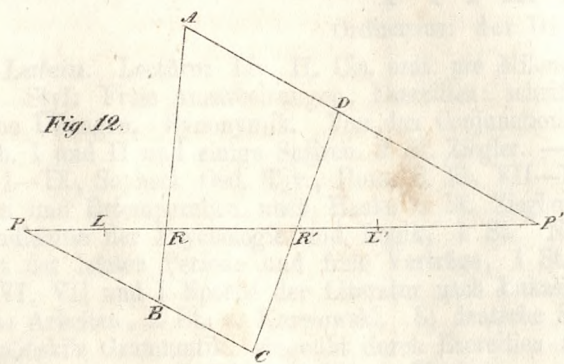
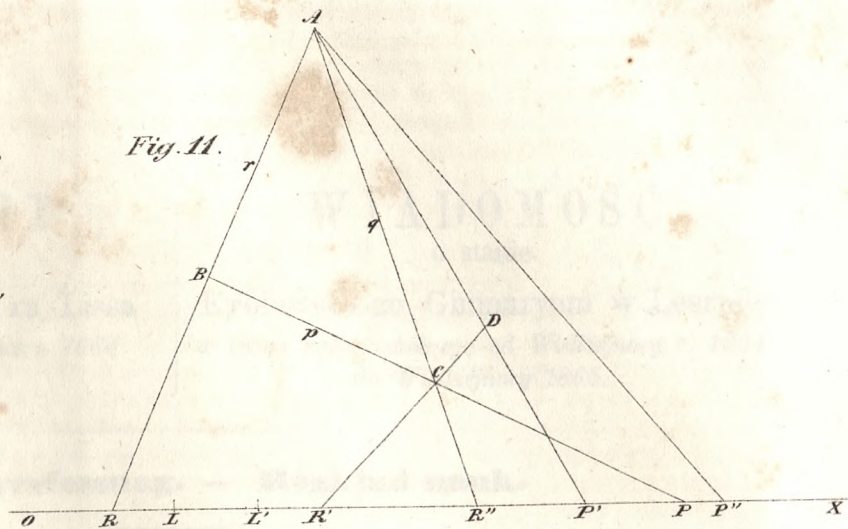
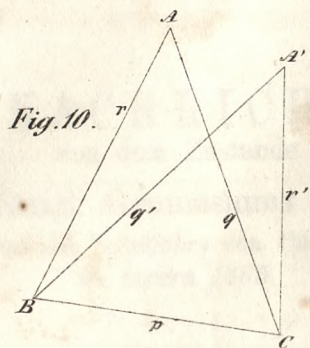
Fig. 3.



And thus the history of the world is a history of the human mind. The human mind is the source of all knowledge, and it is the human mind that has created the world of science and art. The human mind is the source of all progress, and it is the human mind that has created the world of civilization. The human mind is the source of all beauty, and it is the human mind that has created the world of art and literature. The human mind is the source of all truth, and it is the human mind that has created the world of philosophy and religion. The human mind is the source of all life, and it is the human mind that has created the world of nature and the world of man.

The human mind is the source of all knowledge, and it is the human mind that has created the world of science and art. The human mind is the source of all progress, and it is the human mind that has created the world of civilization. The human mind is the source of all beauty, and it is the human mind that has created the world of art and literature. The human mind is the source of all truth, and it is the human mind that has created the world of philosophy and religion. The human mind is the source of all life, and it is the human mind that has created the world of nature and the world of man.





NACHRICHT

von dem Zustande

des Königl. Gymnasiums zu Lissa
während des Schuljahrs von Ostern 1864
bis Ostern 1865.

WIADOMOŚĆ

o stanie

Królewskiego Gimnazjum w Lesznie
w ciągu roku szkolnego od Wielkiénocy r. 1864
do Wielkiénocy 1865.

A. Lehrverfassung. — Rozkład nauk.

P r i m a.

Ordinarius: der Director.

Latein. Lectüre: Liv. II. Cic. orat. pro Milone. Tacit. ann. lib. VI. Privatlectüre Liv. I. 3 St. w. Styl: Freie Ausarbeitungen, Exercitien; schriftliche und mündliche Extemporalien. Phra-seologische Übungen. Synonymik. Von den Conjunctionen nach Putsche, 3 St. w. Matern. Horat. Carm. lib. I und II und einige Satiren. 2 St. Ziegler. — **Griechisch.** Lectüre: Demosthenes oratt. Philipp. I—IX, Sophocl. Oed. Tyr., Hom. II. lib. VII—IX. Grammatik nach Krüger von § 52 an; Exercitien und Extemporalien nach Haake 6 St. Ziegler. — **Deutsch.** Fünfwochentliche Aufsätze; die Grundlehren der Psychologie und Logik, 1 St. Nibelungen-Lied, 1 St. Literaturgeschichte: Übersicht der letzten Periode und freie Vorträge, 1 St. Olawsky. — **Polnisch.** a) poln. Schüler: Die V, VI, VII und I Epoche der Literatur nach Łukasiewicz und Popliński; freie Vorträge; schriftliche freie Arbeiten, 2 St. v. Karwowski. b) deutsche Schüler: Das Nothwendigste aus der Syntax nach Popliński's Grammatik, eingeübt durch Exercitien nach eigenen Dictaten; Lectüre aus Rymarkiewicz: Wzory prozy 2. Thl., 2 St. w. Martens. — **Französisch.** Das Syntaktische über den abweichenden Gebrauch der Artikel, der Kasuszeichen und besonders der Pronomina, nach Knebel, daneben mündliches und schriftliches Übersetzen aus dem Übungsbuch von Höchsten, 1 St. w. Lectüre aus Plötz: Manuel de la Littérature française, 1 St. Martens. — **Hebräisch.** Lectüre: Buch Josua c. 10, 11, 22—24 Judic. 1—4. 20 Psalmen. Gramm.: Repetition der gesammten Syntax. Das Hauptsächlichste aus der Syntax; nach Gesenius. Deutsch-hebräische Übungen, 2 St. w. Matern. — **Religion.** a) **evang. luth.:** Der Brief an die Römer wurde im Urtexte gelesen und erklärt, 1 St. Erster Theil der Kirchengeschichte; von Weihnachten ab: Glaubenslehre, 1 St. Grabig. b) **reform.** Glaubenslehre, Lesen des Evangelium des Johannis und des Galater-Briefes im Urtexte, 2 St. Pflug. c) **kathol.** Die katholische Sittenlehre, nach dem Lehrbuche Martin's, 1 St. Aus der Kirchengeschichte: Das dritte Zeitalter, nach demselben Lehrb., 1 St. X. Chiżyński. — **Geschichte und Geographie.** Neuere Geschichte von der Entdeckung Amerika's an; Repetition der alten griechischen und römischen Geschichte, nebst der Geographie dieser Länder, 3 St. Tschepke. — **Mathe-**

matik. Arithmetik: Binomialsatz; höhere Reihen; Kugelhaufen; Zinseszinsen; Kombinationslehre; Gleichungen des 3ten Grades. — Geometrie: Stereometrie. — Wiederholung der gesamten Elementarmathematik. Die Theorie wurde stets durch Entwicklung einer grossen Anzahl von praktischen Aufgaben unterstützt. In allen Klassen lag beim Vortrage die Elementarmathematik Ohm's zu Grunde, 4 St. v. Karwowski. — **Physik.** Mechanik der festen, flüssigen und luftförmigen Körper; die Lehre von Schalle, 2 St. Töplitz.

S e c u n d a.

Ordinarius: Professor Olawsky.

Latein. Wöchentliche Exercitia oder Extemporalia. Deklamation ausgewählter Stücke aus Livius und Cicero. Grammatik (Putsche): Der Infinitivus und Conjunctivus, 2 St. Livius B. XXI, Cic. de sen. und Cic. oratt. in Cat. I—IV, 6 St. Olawsky. Virgil. Aen. lib. IV und Episoden aus den Georgica. Metrische Übungen, 2 St. Ziegler. — **Griechisch.** Lectüre: Xen. Hell. I, 6—7 und II. — Herod. VI 1—119 mit Überschlagnung mehrerer Episoden, deren Inhalt durch mündlichen Vortrag der Schüler ergänzt wurde. — Grammatik: Casuslehre nach Krüger. Lehre v. d. Temporal-, Causal-, Consecutiv, Final-, Conditional-, Concessivsätzen, ihren Conjunctionen und ihren Modis. Die Hauptanwendungen der Präpositionen. Wiederholung der unregelmässigen Verba nach Krüger. Exercitien nach Haake und Extemporalien, 4 St. Steusloff. Homer. Iliad. lib. V, VI und VII, 2 St. Ziegler. — **Deutsch.** Fünfwochentliche Aufsätze; Einleitung in die inventio und dispositio mit praktischen Übungen. Die Grundlehren der historischen Grammatik; Deklamations-Übungen und literär. historische Erklärung und Ergänzung des Bruchstückes aus Platens rom. Ödipus in Bachs Lesebuche S. 319 und 320, 2 St. Olawsky. — **Polnisch** combinirt mit I. — **Französisch.** Lectüre: 37 Seiten aus Plötz's Manuel. Grammatik: Repetition der Syntax der noms nach Knebel. Exercitien und Extemporalien. Mündliches Übersetzen aus Robolsky's Übungsaufgaben, 2 St. Matern. — **Hebräisch.** Grammatik: Das Hauptsächlichste aus der gesamten Etymologie nach Gesenius. Lectüre: 25 Seiten aus Gesen. Lesebuche, 2 St. Matern. — **Religion.** a) *evang. luth.*: Lectüre und Erklärung des Evangeliums Johannis vom 10 Kapitel an und das Evangelium Matthäi bis zum 10 Kapitel im Urtexte, 1 St. — Lehre von der heiligen Schrift (neutestamentl. Schriften); Glaubenslehre nach Petris Lehrbuche, 1 St. Grabig. b) *reform.* und c) *kathol.* combin. mit I. — **Geschichte und Geographie.** Geschichte des macedonischen und römischen Weltreichs; die betreffenden geographischen Übersichten, 3 St. Tschepke. — **Mathematik.** Arithmetik: Gleichungen des 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen. Logarithmen. Geometrie: Berechnung der Peripherie des Kreises. Ebene Trigonometrie. Beides durch viele praktische Beispiele geübt. Wiederholung der vorhergehenden Kurse, 4 St. v. Karwowski. — **Physik.** Magnetismus und Elektricität, 1 St. Töplitz.

O b e r - T e r t i a.

Ordinarius: Professor Tschepke.

Latein. Grammatik nach Putsche: Syntax der Temp. und Modi; wöchentlich ein schriftliches Exercitium oder Extemporale. Mündliche Übungen nach Hottenrott. Lectüre: Caesar bell. civ. lib. I, II bis c. 23, 8 St. Tschepke. — Wiederholung der Prosodie und der Grundlehren der Metrik (Hexameter). Ausgewählte Stücke aus Ovids Metamorphosen etwa 1000 Verse, 2 St. Olawsky. — **Griechisch.** Lectüre: Xen. Anab. I und IV, 1—2. Wiederholung der gesamten Formenlehre, die sogenannten unregelmässigen Verba nach Krüger's Tabellen. Allgemeine Satzlehre und Lehre von den Conjunctionen und den Hauptausdrucksarten der bezüglichen Sätze, insbesondere der hypothetischen Sätze. Einzelnes aus der Casuslehre. Exercitien nach Spiess und Breiter; Extemporalia, 4 St. Steusloff.

Odyss. lib. III und IV. Erklärung der epischen Formen. Memoriren, 2 St. Matern. — **Deutsch.** Schillers Maria Stuart und Jungfrau von Orleans. Historische Einleitung. Interpretation. Das Nöthigste zur scenischen und dramaturgischen Analysis. Daneben Schillersche und Uhlandsche Gedichte. Freie Aufsätze, zum Theil im Anschluss an die deutsche und griechische Klassenlectüre, 2 St. Nese-
mann. — **Polnisch.** a) polnische Schüler: III a und III b combin. Lehre vom Styl nach Rymar-
kiewicz. Eintheilung der Poesie nach Cegielski. Freie Vorträge und Memorirübungen aus Cegielski.
Schriftliche freie Arbeiten, 2 St. v. Karwowski. b) deutsche Schüler: Weitere Ausführung der Kon-
jugation und Beendigung des etymologischen Theils der Grammatik; schriftliche Arbeiten. Lectüre
aus Popliński's Wypisy, 2 St. Martens. — **Französisch.** Grammatik: Wiederholung der Etymologie;
Syntax: Syntax der noms nach Knebel. Französisch-deutsche und deutsch-französische Übungsaufgaben
aus Robolsky. Exercitien und Extemporalien, 2 St. Matern. — **Religion.** a) *evang. luth.*: Gesetzes-
und Glaubenslehre nach dem luth. Katechismus, 1 St. Die alttestamentliche Geschichte mit beson-
derer Beziehung auf das neue Testament. In jeder Woche wurden ein Psalm oder mehrere Verse
auswendig gelernt, 1 St. Grabig. b) *reform.* Glaubenslehre; Katechismus; Lieder; Sprüche, 2 St.
Frommberger. c) *kathol.* Von den Glaubenslehren, Abschnitt I—V, nach Ontrup, 2. St. Chżyński.
— **Geschichte und Geographie.** Geschichte der neuern Zeit von der Entdeckung Amerikas an.
Geographische Übersicht der aussereuropäischen Erdtheile, 3 St. Tschepke. — **Mathematik.** Arith-
metik: Wurzellehre. Entwicklung des Decimalsystems. Ausziehung der Quadrat- und Kubikwur-
zeln. Geometrie: Flächeninhalt der Figuren. Lehre vom Kreise. Viele praktische Beispiele. Wie-
derholung der Kurse der beiden vorhergehenden Klassen, 3 St. v. Karwowski. — **Naturkunde.**
Krystallographie und Naturgeschichte des Erdkörpers, 2 St. Töplitz.

U n t e r - T e r t i a .

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Steusloff.

Latein. Lectüre: Caes. de bello Gall. II und I, 1 bis 29. Das zweite Buch wurde gröss-
tentheils mündlich retrovertirt. Syntax der Casus nach Putzsch, Satzlehre mit den Conjunctionen, zu-
gleich den lateinischen und den griechischen. Hauptsächlichste Ausdrucksweisen der Adverbia; Sätze
im Lat., Tempora, Consecutive, Finalsätze im Einzelnen. Exercitia und mündliches Übersetzen nach
Spiess, 7 St. Steusloff. Deutsch-lateinische Übungen, 1 St. Lectüre: Ovid. metam. ausgewählte
Abschnitte aus lib. I, IV, V, (781 vv.) Von der Quantität der Sylben; vom Hexameter; nach Put-
zsch. Memoriren, 2 St. Matern. — **Griechisch.** Repetition der gesammten regelmässigen Formenlehre;
Verba auf μ , unregelmässige Verben. Xenoph. Anab. I, 1—5, im Verlauf der Lectüre einzelne
Erscheinungen der Syntax. Exercitien und Extemporalien nach Spiess und Breiter und Vocabeln nach
demselben, 4 St. Steusloff. Odyss. lib. II, I, 1—143. Erklärung der epischen Formen. Memoriren,
2 St. Matern. — **Deutsch.** Einige Gesänge von Herders Cid und die bekanntern Gedichte Schillers.
Übungen im Declamiren. Freie Aufsätze, bestehend in Beschreibungen und Schilderungen, zum Theil
auch im Reproduciren der lateinischen Klassenlectüre, 2 St. Neseemann. — **Polnisch** combinirt mit
III A. — **Französisch.** Grammatik: Wiederholung der Etymologie bis zum verbe régulier. Neu:
verbes irréguliers. Mündliches und schriftliches Übersetzen der zur Etymologie gehörigen deutsch-
französischen und französisch-deutschen Übungsaufgaben in Robolsky. Exercitien und Extemporalien.
Lectüre: aus Ahn 16 Seiten, 2 St. Matern. — **Religion** combin. mit III A. — **Geschichte.** Das
Mittelalter von der Völkerwanderung an, 2 St. **Geographie.** Die Länder Europas, 1 St. Tschepke.
Mathematik. Arithmetik: Algebraische Multiplikation und Division. Potenzenlehre. Geometrie:
Kongruenz der Figuren. Aehnlichkeit der Figuren. Praktische Beispiele. Wiederholung des Kursus
von Quarta, 3 St. v. Karwowski. — **Naturkunde.** Botanik nach dem natürlichen Systeme, Mine-
ralogie, 2 St. Töplitz.

Quarta.

Ordinarius: Oberlehrer Martens.

Latein. Die Kasuslehre nach Putsche's Grammatik, verbunden mit Übersetzen der dazu gehörigen Stücke in dem Übungsbuche von Spiess, und mit Exercitien und Extemporalien, 4 St. Memoriren und Vokabeln aus Methners Vocabularium, und Wiederholung des etymologischen Theils der Grammatik, 1 St. Lectüre: Cornel. Pausanias, Cimon, Alcibiades, Thrasybulus, 2. St. Martens. Die Grundlehren der Prosodie und Metrik (Jambus und Hexameter); Fabeln und ausgewählte Stücke aus Ovid in Kock's Lesebuche, 3 St. Olawsky. — **Griechisch.** Die elementare Formenlehre bis zum Verbum in μ nach Krügers Grammatik. Nachdem mit den Conjugativen der Anfang gemacht worden war, alle 14 Tage 1 Extemporale, 4 St. Nesemann. Sämmtliche Vokabeln in Spiess und Breiter und die Übungsstücke von Bach 1—11, 2 St. Steusloff. — **Deutsch.** Das Wichtigste aus der Satzlehre, besonders des zusammengesetzten Satzes, schriftliche und mündliche Übungen im Nacherzählen vorher besprochener Stücke. Memoriren von Gedichten aus dem Lesebuch von Colshorn und Gödecke, 2 St. Martens. — **Polnisch.** a) polnische Schüler: Lese- und Memorirübungen aus Cegielski und Rymarkiewicz II. Th. Schriftliche Arbeiten mit grammatischen Erläuterungen nach Malecki, 2 St. v. Karwowski. b) deutsche Schüler: Wiederholung des Pensums von V; dazu die Komparation der Adjectiva, die Pronomina und das Leichtere aus der Konjugation; schriftliche Arbeiten Paradigmata und einzelne Abschnitte aus Popliński's Elementarbuch, 2 St. Martens. — **Französisch.** Einübung des Gebrauchs der verschiedenen Artikel, die Konjugation der regelmässigen Verba, wiederholt und befestigt durch mündliches und schriftliches Übersetzen aus Robolsky's Lesebuch, 2 St. Martens. — **Religion.** a) *evang. luth.* Lectüre und Erklärung der Apostelgeschichte. Alttestamentlich biblische Geschichte, besonders seit David, bis zu den Herodianern. Daneben Memoriren des Katechismus und einzelner Kirchenlieder, 2 St. Petzold. b) *reform. combin.* mit III. c) *kathol.* Die katholische Glaubenslehre von der göttlichen Gnade und den hh. Sakramenten, 2 St. X. Chiżyński. — **Geschichte.** Griechen, Macedonier und Römer, 2 St. Nesemann. — **Geographie** der alten Welt, 1 St. Tschepke. — **Mathematik.** Praktisches Rechnen, Elemente der Buchstabenrechnung und Anfangsgründe der Geometrie bis zur Kongruenz der Dreiecke, 3 St. Töplitz.

Quinta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Nesemann.

Latein. Erweiterung der Formenlehre nach Putsche's Grammatik, namentlich Einübung der unregelmässigen Verba und der Conj. periphr. Das Nöthigste aus der Syntax, so besonders Acc. c. Inf. und Abl. absol. Lectüre nach Schönborn's lat. Lesebuche I. und II. Theil. Vokabeln nach Methner's Vocabularium. Extemporalien meist wöchentlich, 10 St. Nesemann. — **Deutsch.** Orthographische Übungen, verbunden mit grammatischen und lexikalischen Erörterungen. Freie Aufsätze, bestehend im Nacherzählen vorgelesener Stücke. Lectüre nach dem Lesebuche von Colshorn und Gödecke. Memoriren von Gedichten nach dem Lesebuche. Deklamationen, 2 St. Nesemann. — **Polnisch.** a) polnische Schüler: V und VI comb. Lese- und Memorirübungen aus Rymarkiewicz I. Th. Schriftliche Übungen mit grammatischen Erläuterungen nach Malecki, 2 St. v. Karwowski. b) deutsche Schüler: Lese- und Schreibübungen. Die Deklination der Substantiva und Adjectiva. Die Komparation. Als schriftliche Arbeiten Paradigmata, 2 St. Martens. — **Französisch.** Grammatik nach Knebel: Von der Aussprache, vom Artikel, Bildung des Plurals, Zahlwörter, die Hilfszeitwörter und die regelmässige Konjugation, Lesen und Übersetzen aus Robolsky's Lesebuche, 3 St. v. Karwowski. — **Religion.** a) *evang. luth.* Biblische Geschichte des N. Testaments nach den 4 Evangelien bis zur Himmelfahrt Christi. Erklärung des 2. Hauptstücks in Luthers kl. Katechismus. Bibelsprüche. Kirchenlieder, 3 St. Petzold. — b) *reform.* Glaube, Liebe, Hoffnung der Christen. Einige Fragen

des Heidelberger Katechismus, Sprüche und Lieder gelernt. Biblische Geschichte des N. Testaments, 3 St. Pflug. c) *kathol.* Heilige Geschichte des Neuen Testament's nach Dr. Kabath, 2 St. Vom Glauben und dem apostolischen Glaubensbekenntnisse, 1 St. X. Chizyński. — *Geographie.* Das Wichtigste aus der mathematischen und physischen Geographie nach Pütz. Der preussische Staat; Nordeuropa; Kartenzeichnen, 2 St. Stange. — *Arithmetik.* Die 4 Species mit Brüchen; Regel de tri, 3 St. Töplitz. — *Naturkunde.* Im Sommer Botanik; im Winter Zoologie und Mineralogie, 2 St. Stange. — *Kalligraphie.* 3 St. Stange.

S e x t a.

Ordinarius: Lehrer Töplitz.

Latein. Einübung der Deklinationen und Konjugationen nach Putzsch, Übersetzung von Übungsstücken aus Schönborn Th. I.; Exercitien und Extemporalien, 8 St. Töplitz. — *Deutsch.* Lectüre aus Colshorn und Gödecke, Wiedererzählen, Memoriren, Aufschreiben gelesener Stücke aus dem Gedächtniss, orthographische und grammatische Übungen; der einfache Satz, 2 St. Stange. — *Polnisch und Religion* combin. mit V. — *Geographie.* Übersicht der Geographie nach Fleischers Memorienbuche, 2 St. Stange. — *Arithmetik.* Die 4 Species in benannten und unbenannten Zahlen; Übungen im Kopfrechnen, 4 St. Töplitz. — *Naturkunde.* Beschreibung der bekanntesten Pflanzen, Thiere und Mineralien, 2 St. Stange. — *Kalligraphie.* 3 St. Stange.

Technische Fertigkeiten:

Zeichnen, Gesang und Turnen wurden von den Lehrern Gregor, Stange, Dr. Steusloff in der bisherigen Weise unterrichtet. Am Zeichenunterrichte nahmen freiwillig 3 Secundaner und 8 Tertianer Theil.

B. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. Durch Verfügung vom 9. November 1863 wurde den Gymnasien und Realschulen ein neues Reglement für den Zeichenunterricht mitgetheilt und dabei die Theilnahme für diesen Unterricht dringendst empfohlen. Unter dem 18. Mai 1864 wiederholt das hohe Ministerium diese Empfehlung, weil bei dem Königl. Gewerbe-Institut die Wahrnehmung gemacht worden ist, dass die Fertigkeit im Zeichnen bei den in Gymnasien und Realschulen vorgebildeten Zöglingen, die sich dem Studium der Mechanik widmen, meistens bei weitem nicht ausreichend ist.

2. Mittheilung vom 7. April pr., wonach zum Königl. Forstverwaltungsdienst fortan nur solche junge Leute zugelassen werden, welche 1) das Zeugniß der Reife von einem Gymnasium oder einer Realschule I. Ordnung mit einer unbedingt

B. Rozporządzenia Władz wyższych.

1. Przez rozporządzenie z dnia 9. Listopada 1863 przedłożono Gimnazyum i szkołom realnym nowy regulamin dotyczący się lekcji rysunków, przyczem udział uczniów w lekcjach tychże jak najmocniej zalecono. Polecenie to powtarza Wyssokie Ministeryum pod dniem 18. Maja r. 1864, ponieważ przekonano się przy królewskim instytucie rękodzielniczym, że biegłość w rysunku u tych uczniów, którzy się po Gimnazjach i szkołach realnych kształcili, a którzy poświęcają się mechanice, w większej części nie jest wystarczającą.

2. Uwiadomienia z dnia 7. Kwietnia r. b., według którego do królewskiej służby leśniczkiej oddać tylko tacy młodzi ludzie mają być przyjmowani, którzy, 1) dostawią zaświadczenie dojrzałości uzyskane w Gimnazyum lub w szkole realnej pierwszego rzędu z cenzurą w matematyce zupeł-

genügenden Censur in der Mathematik beibringen, 2) das 23. Lebensalter noch nicht überschritten haben, 3) ein fehlerfreies Seh- und Hörvermögen und eine kräftige Körperbeschaffenheit besitzen, 4) eine tadellose sittliche Führung und 5) die zu ihrer Ausbildung erforderlichen Subsistenzmittel nachweisen.

3. Die Zahl der von der Zahlung des Schulgeldes befreiten Schüler soll auf ein Zehntel der Schülerzahl beschränkt werden.

C. Chronik der Anstalt.

Durch häufigere Krankheitsfälle theils der Lehrer, theils der Schüler erlitt im verflossenen Schuljahre sowohl der Unterricht als auch der Schulbesuch mehrfache Unterbrechungen. Zwei liebe Schüler, die Quartaner Theophil Ciastowski und Paul von Marski wurden im Anfange d. J. durch den Typhus dahingerafft. Beide waren durch die Lust, die sie an der Erfüllung ihrer Schulpflichten empfanden, so wie durch ihr freundliches und gesittes Wesen ihren Lehrern und Mitschülern gleich lieb und werth. In herzlicher Theilnahme an dem Kummer der Eltern begleitete die Schule sie zur letzten Ruhe.

Am 14. Juni fand das übliche Frühlingsfest des Gymnasiums in der alten Fasanerie statt.

Am 13. September wohnte der Königliche Commissarius, Herr Consistorialrath Dr. Mehring dem Unterrichte in einigen Klassen bei.

Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 24. September wurde der bisherige Schulamts-Candidat, Herr Dr. Nesemann vom 1. October pr. an als ordentlicher Lehrer der Anstalt angestellt.

Zu Michaelis verliess die Anstalt der katholische Religionslehrer, Herr Niklewski. In seine Stelle trat am 28. November pr. der Licentiat der Theologie, Herr Władysław Chiżyński, bis dahin Vicarius in Bomst bei der Anstalt ein.

An dem Sieges- und Dankfeste für den glücklich beendeten dänischen Krieg theilnahmen sich am 18. December die Lehrer und Schüler in den Kirchen ihrer Confessionen.

nie zadawalniająca; 2) nie przeszli roku 23. życia, 3) obdarzeni dokładnym wzrokiem i słuchem, jakoż silną budową ciała; 4) prowadzenia się moralnego i 5) wykażą potrzebne środki do dalszego w tym zawodzie kształcenia się.

3) Liczba uczniów mających być uwolnionych od opłaty szkolnej ma być odtąd ograniczoną na jedną dziesiątą.

C. Kronika instytutu.

Przez częstsze choroby już to nauczycieli, już uczniów, które się w tym roku szkolnym wydarzyły, ucierpiał kilkakrotnie przeszkody tak wykład, jako i zwykła regularność. Dwaj mili uczniowie klasy czwartej, Teofil Ciastowski i Paweł Marski, ulegli w skutek tyfusu z początkiem bieżącego roku śmierci. Obadwaj przez zamiłowanie swych obowiązków szkolnych, przez swoje miłe i moralne prowadzenie się, drodzy byli tak sercom nauczycieli, jako i swych współuczniów. Z serdecznym udziałem boleści rodziców towarzyszył cały zakład pogrzebowemu obchodowi na miejsce wiecznego ich spoczynku.

Dnia 14. Czerwca obchodziło Gimnazjum swoją zwykłą zabawę wiosenną w starej bażantarni.

Dnia 13. Września królewski komisarz, pan Radzca konsystorski, Dr. Mehring, był przytomny przy wykładach nauki w niektórych klasach.

Rozporządzeniem królewskiego collegium prow. szkolnego z dnia 24. Września instalowanym został przy tutejszym instytucie dotychczasowy kandydat, pan Dr. Nesemann, na zwyczajnego nauczyciela od 1. Października.

Na ś. Michał opuścił instytut nauczyciel religii katolickiej, ksiądz Niklewski. Na jego miejsce wstąpił dnia 28. Listopada r. b. Licencyat teologii, ksiądz Władysław Chiżyński, były wikaryusz w Babimoście.

W uroczystości dziękczynnej na pamiątkę zwycięstwa i szczęśliwie ukończonej wojny duńskiej odbytej w dniu 18. Grudnia brali udział tak nauczyciele, jak uczniowie w kościołach odpowiednich wyznań.

Der Geburtstag Sr. Majestät wurde mit Gesang und Reden der Schüler Kretschmer und Hellmich begangen. Die Festrede hielt Herr Dr. Neseemann.

Urodziny Najjaśniejszego Pana obchodzono śpiewem i mowami uczniów Kretschmera i Hellmicha. Mowę uroczystą miał pan Dr. Neseemann.

D. Statistische Verhältnisse. | D. Stosunki statystyczne.

a) Bei der am 12. September v. J. abgehaltenen Abiturientenprüfung erhielten das Zeugniß der Reife:

Victor von Knorr aus Gr. Gutowy bei Wreschen, evangelisch, 18½ Jahr alt, 7¾ Jahr in der Anstalt und 2½ Jahr in Prima; er will ins Militair eintreten.

Robert Gräulich aus Schrim, evangelisch, 20½ Jahr alt, 10½ Jahr im Gymnasium, 2½ Jahr in Prima; studirt Medicin in Breslau.

Bruno Kühn aus Friedeberg a. Qu., evangelisch, 22 Jahr alt, 2 Jahr in der Anstalt und in Prima; will das Postfach ergreifen.

Richard Schlecht aus Samter, evangelisch, 22 Jahr alt, 4 Jahr im Gymnasium und 2½ Jahr in Prima, will in Berlin Medicin studiren.

Emanuel Norden aus Lissa, jüdischer Religion, 18½ Jahr alt, 9½ Jahr im Gymnasium 2 Jahr in Prima; studirt in Berlin Jura.

Bei der am 1. April d. J. abgehaltenen Prüfung wurde folgenden Zöglingen das Zeugniß der Reife erteilt; — viere von ihnen, nämlich Bruchmann, Oertner, Lemmel und Mahn konnte die mündliche Prüfung erlassen werden.

Michael Dykiert aus Krajewice, 22½ Jahr alt, katholisch, 11½ Jahr Schüler der Anstalt, 3 Jahr in Prima; widmet sich dem Forstfache.

Gustav Bruchmann aus Wolstein, 19½ Jahr alt, evangelisch, 4½ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; studirt Jura.

Johann Oertner aus Neugut bei Guhrau, 20½ Jahr alt, katholisch, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; studirt Philologie.

Carl Lemmel aus Pleschen, 20 Jahr alt, jüdischer Religion, 6 Jahr in der Anstalt, 2 Jahr in Prima; studirt Jura.

Otto Braunschweig aus Preuss. Holland, 19½ Jahr alt, evangelisch, 9½ Jahr Zögling der Anstalt, 2 Jahr in Prima; ergreift die Militairlaufbahn.

Otto Mützell aus Schroda, 18 Jahr alt, evangelisch, 4 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; studirt Jura.

Louis Mahn aus Lissa, 20½ Jahr alt, evangelisch, 8 Jahr Schüler der Anstalt, 2 Jahr in Prima; geht zum Postfach über.

Mieczyslaus Kłóś aus Köbnitz, 19½ Jahr alt, katholisch, 8 Jahr in der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Medicin.

Joseph Tasch aus Striesewitz, 19½ Jahr alt, katholisch, 10 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, ergreift das Baufach.

Maximilian Specht, 20 Jahr alt, evangelisch, 5 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; studirt Theologie.

Wilhelm Ziegler, 17¾ Jahr alt, evangelisch, 9 Jahr Zögling der Anstalt, 2 Jahr in Prima; studirt Naturwissenschaften.

b) Die Frequenz der Anstalt betrug im Sommer 324 Schüler; darunter befanden sich 135 Evangelische, 109 Katholiken und 80 Juden.

b) Ilość uczniów szkoły wynosiła w latowym semestrze liczbę 324; między nimi znajdowało się 135 Ewangelików, 109 Katolików i 80 Żydów.

Themata zu den Abiturientenprüfungen:

Im Deutschen: Gott giebt die Kuh, aber nicht den Strick dazu. — Welche Wissenschaften und Künste verdanken den Griechen ihre Entstehung oder Vervollkommenung.

Latein. Freie Arbeit: De vita atque moribus Catonis Uticensis. — De macula gloriae Alexandri Magni arrogantia ejus, qua pro Jovis filio haberi voluit, crebraque ejus ebrietate et caede Cliti inspersa.

Latein. Extemporale: Cic. de offic. I. 153 sqq. — Cic. de rep. I. 42.

Griech. Extemporale: Isocr. 2. § 21. sqq. — Isocr. 8. 64. sqq.

Poln. Extemporale: Cyrus von Krasicki. — Alcibiades von Popliński.

Poln. Freie Arbeit: O życiu i pismach Fr. D. Książnina. — Ten pan zdaniem mojem, kto przestał na swoim.

Französ. Extemporale: Pericles nach Barthélemy. — Die Mönche auf dem grossen St. Bernhard.

Mathematik: Ein Bauherr hat 60 Maurer und Handlanger; die Maurer erhalten zusammen täglich 12 Thlr. Lohn, ebensoviel die Handlanger, und zwar erhält ein Handlanger 5 Silbergr. weniger als ein Maurer. Wie viele Maurer und wie viele Handlanger hatte er? — Jemand bietet sein Haus, welches 11510 Thlr. werth ist, für eine jährliche Rente von 950 Thlr. an, wie lange kann man diese zahlen, wenn man $4\frac{1}{2}\%$ Zinsen rechnet? — Den Umfang p eines Trapezes aus dessen Parallelseiten $G=4$ und $g=2\frac{1}{2}$ Metres, aus deren Abstände $h=2$ Mt. und aus der grösseren Diagonale $D=5$ Mt. zu suchen. — Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln ist $=1000\text{ } \square'$, die Summe ihrer Radien $=12'$; wie gross sind die Radien der Kugeln?

Ein Viehhändler kaufte eine Anzahl Gänse für 66 Thlr. 20 Silbergr. Er behielt davon 20 Stück zurück und verkaufte jedes Stück von den übrigen um 5 Silbergr. theurer, als er sie gekauft hatte, so dass er gerade wieder 66 Thlr. 20 Silbergr. löste. Wie viele Gänse hatte er gekauft? — Eine Summe von 6400 Thlr. soll in 12 Jahren durch jährliche sich gleichbleibende Zahlungen abgetragen werden, und zwar werden die Zinseszinsen in den ersten 6 Jahren mit 4% , nachher mit 5% berechnet. Wie gross sind die jährlichen Zahlungen? — Wie gross ist der Flächeninhalt eines regulären 18Ecks, wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises 6 Fuss ist? — Eine 10seitige Pyramide mit regulärer Grundfläche, deren Höhe auf dem Mittelpunkt der Grundfläche senkrecht steht, hat eine untere Kante von $7'$, eine Seitenkante von $12'$; wie gross ist ihr Volumen?

c) Vermehrung der Gymnasialbibliothek. Durch die Munificenz des hohen Ministerii: Hippolytus Romanus und Titus Bostrenus ed. Dr. de Lagarde. Fortsetzung von Dr. Gerhards »Etruscische Spiegel« Archäologische Zeitung. — Durch Vermächtniss des Directors Dr. Gotthold in Königsberg: dessen nachgelassene Schriften herausgegeben von F. W. Schubert. 4 Bde. — Vom Herrn Buchhändler Teubner in Leipzig: Heinrichens latein-deutsches Wörterbuch. Durch Anschaffung: Humboldt's Kosmos, 5. Bd. — Kurz, Geschichte der deutschen Literatur. — Macaulay, History of England. — Bojesen, de harmonia Graecorum. — Fabricius, Bibliotheca Graeca. — Backmeisters, Freydanks Bescheidenheit. — Reuter's Werke. — Forckel, Geschichte der Musik. — Comenii lux in tenebris. — Palleske, Kuddelmuddel. — Kloeden, Handbuch der Erdkunde. — Demosthenes Philipp. Reden,

ed. Rehdantz. — Meinecke, Qu. Horatius Flaceus. — Krüger, griech. Sprachlehre II, 1. — Minkwitz, der neuhochdeutsche Parnass. — v. Falkenstein, das Riesengebirge. — Haupt, das Riesengebirge. — Stoll, Handbuch der Mythologie. — Cholevius, Dispositionen. — Seyffert, Palaestra musarum. — Seyffert, griech. Übungsbuch. — Kuhn, Verfassung des römischen Reichs. — Sophocles, Oedipus tyrannus, ed. Nauk. — Westphal, Geschichte der Musik. — Westphal, System der antiken Rhythmik. — Wiese, das höhere Schulwesen in Preussen. — Virgil, ed. Ribbeck II. — Fortsetzungen von Bunsens Bibelwerk. — Schmidt, Encyclopädie. — Gervinus, Geschichte des 19. Jahrhundert. — H. Stephani Thesaurus.

Vermehrung der Schülerbibliothek: v. Warchmin, die Schlachtfelder der Preussischen Truppen.
— Reuter, Olle Kamellen. — Masius, der Jugend Lust und Lehre. 62. 63. 64. — Scherr, Nibelungen.
— Schmidt, Nibelungenlied. — Andersen's Werke. — Engel, Lorenz Stark. — Toepfer, Genfer Novellen. — Tegner, Frithiofssage, v. Niendorf. — König René's Töchter. — Oehlenschläger's Correggio.
— Haacke, Materialien. — Simrock, die deutschen Volksbücher. — Schmidt, der 30 jährige Krieg.
— v. Horn, Maje I—VII. — Schmidt, Jugendschriften, 30 Bde. — Der Krieg gegen Dänemark 1864.

d) Die Schulgeldbefreiungen, die Stipendien der Herren Levy, Mollard und Wollheim, das Stipendium der Collecte des Stiftungsfestes wurden stiftungsmässig durch das Lehrer-Collegium vertheilt. Ausserdem hat der am 28. Februar 1864 hierselbst verstorbene Particulier, Herr S. J. Halberstadt in seinem Testamente ein Kapital von 600 Rthlr. festgestellt, von dessen Zinsen zwei Schülern jüdischer und einem Schüler christlicher Religion die Zahlung des Schulgeldes erleichtert werden soll. Diese Stiftung ist in diesem Jahre zum erstenmale zur Vertheilung gekommen. Ich kann nicht umhin hier der dankbaren Anerkennung Ausdruck zu geben, die einem Manne gebührt, der, wie der Verstorbene, sein ganzes Leben in stillem Wohltun hingebracht und durch seine letztwillige Verfügung noch mit grosser Sorgfalt überall da zu helfen bedacht war, wo die Hülfe die segensreichsten Früchte zu tragen versprach. Segen seinem Angedenken!

[illegible]

Übersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre 1864/65 *).

Lehrer:	Allgemeiner Lehrplan									Verhältnisse der				
	Fächer:	Klassen und Stunden:								Schüler.		Abiturienten.		
		I.	II.	III. A.	III. B.	IV.	V.	VI.	Summa	In den Klassen:	waren sind	Es wurden entlassen	studiren in	was?
Dir. Ziegler.	Latein	8	10	10	10	10	10	10	68	I.	34	28	mit dem	Berlin 6. Jura 4.
Prof. Olawsky.	Griechisch	6	6	6	6	6	—	—	30					
	Deutsch.	3	2	2	2	2	2	2	15	II.	41	33	Zeugniss	Breslau 2. Philologie 1.
Prof. Tschepke.	Polnisch	2	2	2	2	2	2	2	16	III. A.	50	45	der	Greifsw. 1. Medicin 3.
Prof. Matern.	Französisch	2	2	2	2	2	3	—	13	III. B.	47	47	Reife	Naturwiss. 1.
Prof. v. Karwowski.	Hebräisch	2	2	—	—	—	—	—	4	IV.	67	64	16.	Civildienst 5.
Oberlehrer Martens.	Religion { ev.	2	2	2	2	3	—	—	—	V.	51	48		Militaird. 2.
G.-L. Dr. Steusloff.	Religion { ref.	2	—	2	—	3	—	—	—	VI.	34	38		
G.-L. Dr. Neemann.	Religion { kath.	2	—	2	—	3	—	—	—					
G.-L. Stange.	Mathematik	4	4	3	3	3	—	—	17					
	Rechnen	—	—	—	—	—	3	4	7					
Hülfsl. Töplitz.	Physik	2	1	—	—	—	—	—	3					
Pred. Pflug.	Geschichte	3	3	3	3	3	—	—	19					
	Geographie	—	—	—	—	—	2	2	—					
Superint. Grabig.	Naturkunde	—	—	2	2	—	2	2	8					
Pred. Frommberger.	Kalligraphie	—	—	—	—	—	3	3	6					
Pred. Petzold.	Zeichnen	—	—	2	2	2	2	2	10					
Lic. Chiżynski.	Gesang	—	—	—	—	—	—	—	—					
Zeichenl. Gregor.	Turnen	—	—	—	—	—	—	—	—					
	Summa . . .	32	32	32	32	32	32	30	258					

*) Da Herr Lic. Chiżynski ganz in die Functionen des Herrn Niklewski getreten ist, so ist im Lehrplane sowie in diesen Tabellen nur der erstere Lehrer aufgeführt.

Vertheilung der Unterrichtsstunden im Winter 1864/65.

Lehrer.	Ordina- riate.	I.	II.	III. A.	III. B.	IV.	V.	VI.	Summa.
1. Ziegler, Director.	I.	6 Griech. 2 Latein.	2 Latein. 2 Griech.						12.
2. Olawsky, Prof.	II.	3 Deutsch.	8 Latein. 2 Deutsch.	2 Latein.		3 Latein.			18.
3. Tschepke, Prof.	III. A.	3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch. 8 Latein.	3 Gesch.	1 Geogr.			21.
4. Matern, Prof.		6 Latein. 2 Hebr.	2 Fran. 2 Hebr.	2 Griech. 2 Franz.	3 Latein. 2 Griech. 2 Franz.				23.
5. v. Karwowski, Professor.		4 Math. 2 Polnisch.	4 Math. 2 Polnisch.	3 Math. 2 Polnisch.	3 Math.	2 Poln.	3 Franz. 2 Polnisch.		25.
6. Martens, Ober- Lehrer.	IV.	2 Franz. 2 Polnisch.		2 Polnisch.		7 Latein. 2 Deutsch. 2 Franz. 2 Poln.	2 Latein. 2 Polnisch.		23.
7. Dr. Steusloff, ord. Lehrer.	III B.		4 Griech.	4 Griech. 9 Turnen in allen Klassen.	7 Latein. 4 Griech.	2 Griech.			21. 9.
8. Dr. Neemann, ord. Lehrer.	V.			2 Deutsch.	2 Deutsch.	4 Griech. 2 Gesch.	10 Latein. 2 Deutsch.		22.
9. Stange, ordentl. Lehrer.		6 Gesang in allen Klassen.					2 Geogr. 2 Naturg. 3 Kalligr.	2 Geogr. 2 Naturg. 3 Kalligr. 2 Deutsch.	22.
10. Töplitz, Hilfs- lehrer.	VI.	2 Physik.	1 Physik.	2 Naturk.	2 Naturk.	3 Mathem.	3 Arith.	8 Latein. 4 Arith.	25.
11. Pflug, reform. Prediger.		2 Religion.					3 Religion.		5.
12. Grabig, evang. Superintendent.		2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.					6.
13. Frommberger, ref. Prediger.				2 Religion.					2.
14. Petzold, evang. Prediger.						2 Religion.	3 Religion.		5.
15. Lic. Chizyński, kath. Religionsl.		2 Religion.		2 Religion.		2 Religion.	3 Religion.		9.
16. Gregor, Zeichen- lehrer.		2 Zeichnen.				4 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	10.

Dienstag, den 11. April,
Nachmittag von 2 Uhr an:
Öffentliche Prüfung.

Wtorek, dnia 11. Kwietnia,
popołudniu od godziny 2^gej:
Egzamin publiczny.

<i>Sexta:</i>	Arithmetik	Töplitz.
<i>Quinta:</i>	Latein	Nesemann.
<i>Quarta:</i>	Latein	Martens.
<i>Tertia B:</i>	Griechisch	Steusloff.
<i>Tertia A:</i>	Latein	Tschepke.
<i>Secunda:</i>	Französisch	Matern.
<i>Prima:</i>	Mathematik	v. Karwowski.

Mittwoch, den 12. April,
früh um 8 Uhr:

Choralgesang der Schüler.
Entlassung der Abiturienten.
Vertheilung der Prämien und Censuren.
Chorgesang der Schüler.

Środa, dnia 12. Kwietnia,
rano od godziny 8^{mej}:

Śpiew chóralny.
Pożegnanie abiturientów.
Rozdanie nagród i cenzur.
Śpiew chóralny.

Das neue Schuljahr beginnt am Donnerstag,
dem 27. April, früh um 9 Uhr, mit der Prüfung
und Aufnahme der neuen Schüler.

Nowy rok szkolny rozpoczyna się w Czwartek,
dnia 27. Kwietnia, rano od godziny 9^{tej} przez
egzamen i przyjmowanie nowych uczniów.

