TRYGONOMETRYA

PROSTOLINIJNA I SFERYCZNA

ZEBRANA

Z NAJZNAKOMITSZYCH DZIEŁ FRANCUZKICH
I WEDLE METOD I NOT P. G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PRZEZ

WITOŁDA TURNO

BYŁEGO UCZNIA WOLNEGO SZKOŁY POLITECHNICZNEJ
W PARYŻU

ZE TRZEMA NOTAMI
I WYKŁADEM MIAR I WAG SYSTEMATU METRYCZNEGO

POZNAŃ

W KOMISIE KSIĘGARNI JANA-KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO

1857

TRYGONOMETRYA

PROSTOLINIJNA I SFERYCZNA

TRYGONOMETRYA

PROSTOLINIJNA I SFERYCZNA

ZEBRANA

Z NAJZNAKOMITSZYCH DZIEŁ FRANCUZKICH
I WEDLE METOD I NOT P. G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PRZEZ

WITOŁDA TURNO

BYŁEGO UCZNIA WOLNEGO SZKOŁY POLITECHNICZNEJ
W PARYŻU

ZE TRZEMA NOTAMI
I WYKŁADEM MIAR I WAG SYSTEMATU METRYCZNEGO

POZNAŃ

W KOMISIE KSIĘGARNI JANA-KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO

1857

Paryż. — W drukarni L. MARTINET, przy ulicy Mignon. 2.

MOJEMU NAJUKOCHAŃSZEMU OJCU

WINCENTEMU TURNO

I MOJEJ NAJUKOCHAŃSZEJ MATCE

HELENIE Z KWILECKICH TURNO

Hołd najgłębszej synowskiej miłości
i posłuszeństwa.

MOJEMU NAJUKOCHAŃSZEMU WUJOWI

ARSENOWI KWILECKIEMU

Na dowód serdecznego przywiązania i uszanowania

Ofiaruje autor,

WITOŁD TURNO.

Berlin, dnia 25 Kwietnia 1856 r.

PRZEDMOWA

Przyjechawszy do Paryża w celu uczęszczania na kursa Szkoły Politechnicznej, chciałem naprzód zgłębić dokładnie te części Matematyki które mi, tak w tej szkole jako też w zawodzie wojskowym, miały być niezbędnie potrzebnemi. Zacząłem od Trygonometryi. Nie znając jeszcze dobrze języka technicznego francuskiego, szukałem polskiego dzieła któreby, stając na równi z cudzoziemskiemi, ułatwiło mi napotykane tu i owdzie trudności. Ale szukałem napróżno; bo Trygonometrye Polińskiego, Lewockiego i Libelta, zawierając samą tylko Trygonometryę płaską, jakąkolwiek miały zaletę w swoim czasie, nie mogły mi być, w obecnym stanie umiejętności, żadną pomocą. Rad nierad, z żalem udałem się do dzieł francuskich. Musiałem tedy walczyć z dwiema trudnościami, z językiem i umiejętnością.

Aby oszczędzić podobnych trudności moim młodym Kolegom, postanowiłem zebrać to com najlepszego znalazł w najznakomitszych dziełach cudzoziemskich i swojskich, i ułożyć po polsku Trygonometrię prostolinijną i sferyczną. — Taki był początek i taka pobudka niniejszego dzieła.

Niech mi tu wolno będzie złożyć publicznie głębokie podziękowanie mojemu czcigodnemu professorowi, Panu G.-H. Niewęgłowskiemu, za jego światłe rady które natchnęły to dzieło i niem kierowały; a szczególniej za jego dobroć z jaką pozwolił mi czerpać obszernie w swoich Notach trygonometrycznych.

Pisałem w Berlinie, dnia 25 Kwietnia 1856 r.

TRYGONOMETRYA

WSTĘP

W każdym trójkącie jest sześć części do uważania, trzy boki i trzy kąty. Wiadomo z Geometryi, że mając dane trzy z sześciu części trójkąta prostolinijnego, można wyznaczyć trzy inne, byle tylko między częściami danemi znajdował się jeden bok przynajmniej. (*Zob.* Geometryę Pana G.-H. Niewęgłowskiego).

Ale wykreślenia geometryczne, jako sposoby graficzne, nie mogą być dokładnemi, ani nawet dać często dostatecznego przybliżenia, z przyczyny niedokładności narzędzi których używać trzeba praktycznie. Dla uniknienia właśnie tych niedogodności, starano się, zamiast wykreśleń, użyć rachunku który zawsze pozwala dosięgnąć takiego stopnia dokładności jaki mieć chcemy. Otoż,

Trygonometryi głównym przedmiotem jest wyznaczyć rachunkiem wszystkie części trójkąta, którego liczba części danych jest dostateczną. To właśnie nazywa się rozwiązać trójkąt.

Aby wyrazić długości liczbami, odnosi się je do pewnej jedności używanej, *np.* do metra, łokcia, stopy; tym sposobem każdy bok równa się pewnej liczbie metrów, etc.

Wielkość kątów oznacza się wielkością łuków które im służą za miarę. W tym celu podzielono okrąg na pewną liczbę części równych, zwanych *stopniami;* wtedy, kąt albo łuk wyraża się liczbą tych stopni.

Przyjmiemy *dawny podział okręgu koła*, *na* 360 *stopni*, ponieważ tablice logarytmów, których często użyjemy, są podług tego podziału zrobione.

W tym podziale, jako już wiadomo, kąt prosty ma 90 stopni, stopień dzieli się na 60 minut, minuta na 60 sekund, etc.

Aby oznaczyć kąt A zawierający 23 stopni, 28 minut, 40 sekund, pisze się: $A = 23^\circ\, 28'\, 40''$.

W nowym podziale okrąg koła dzieli się na 400 części równych, nazwanych także stopniami, stopień na 100 minut, etc.

KSIĘGA PIERWSZA

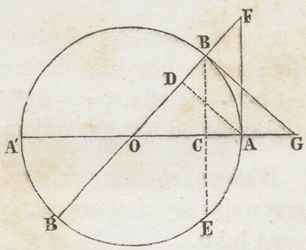
OKREŚLENIA LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

---

1. W trójkącie, jako wiadomo, stosunek kątów nie równa się stosunkowi boków przeciwnych. Nie można tedy, znając boki, wyznaczyć geometrycznie wielkości kątów trójkąta. Dla usunięcia właśnie tej trudności używa się pewnych linij, zwanych *trygonometrycznemi*, które zastępują kąty, i tak od nich zależą, że znając kąty można wyznaczyć wszystkie linie trygonometryczne; i nawzajem, znajomość tych linij jest dostateczną do wyznaczenia kątów. Stosunki tych linij do promienia następujące mają nazwiska:

Wstawą łuku, albo kąta mierzonego tym łukiem, jest stosunek do promienia prostopadłej spuszczonej z jednej skrajności łuku na średnicę która przechodzi przez drugą skrajność.

I tak, wstawą łuku AB, albo kąta AOB, jest stosunek $\frac{BC}{OA}$, albo co to samo $\frac{AD}{OB}$. Nazywając a łuk AB, a zaś R promień, pisze się przez skrócenie $\text{wst}\, a = \frac{BC}{R}$.



Jako widać, *wstawa łuku równa się stosunkowi do promienia połowy cięciwy podpasującej łuk dwa razy większy*. Albowiem, prostopadła BC jest połową cięciwy BE która podpasuje łuk BAE dwa razy większy od łuku AB.

Styczną trygonometryczną łuku, albo kąta mierzonego tym łukiem, jest stosunek do promienia części stycznej geometrycznej przechodzącej przez jedną skrajność łuku, a zawartej między tą skrajnością i promieniem przedłużonym który przechodzi przez drugą skrajność. I tak, styczną trygonometryczną łuku AB jest stosunek $\frac{AF}{OA}$ albo też $\frac{BG}{OA}$; i pisze się

$$\text{sty}\,a = \frac{AF}{R} \quad \text{albo} \quad \text{sty}\,a = \frac{BG}{R}.$$

Sieczna łuku, albo kąta mierzonego tym łukiem, jest stosunek do promienia linii prostej która, przechodząc przez jedną skrajność łuku, łączy środek koła ze styczną wyprowadzoną z drugiej skrajności. I tak, sieczną trygonometryczną łuku AB jest stosunek $\frac{OF}{OA}$, albo co to samo $\frac{OG}{OA}$; i pisze się $\text{sie}\,a = \frac{OF}{R}$.

Czytelnik zechce uważać że trójkąt prostokątny OAF daje

$$\overline{OF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AF}^2;$$

zkąd, dzieląc przez $\overline{OA}^2$, otrzymujemy

$$\text{sie}^2\,a = 1 + \text{sty}^2\,a.$$

Równość ta, okazująca związek między sieczną i styczną łuku a, będzie nam często użyteczną.

Wstawę odwrotną łuku AB jest stosunek strzały AC łuku podwójnego do promienia, $\frac{AC}{OA}$ albo $\frac{BD}{OA}$, i pisze się $\text{wst.odw}\,a = \frac{AC}{R}$.

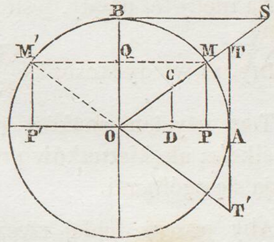
2. *Dopełnieniem* łuku nazywa się łuk który mu dodać trzeba aby summa uczyniła *ćwiercian* czyli 90°. Dopełnienie łuku a jest $90° - a$, albo $\frac{1}{2}\pi - a$ (*). Ztąd wynika że dopełnienie łuku większego od 90° jest odjemnem.

Wstawa, *styczna*, *sieczna*, *wstawa odwrotna* dopełnienia łuku, nazywają się *dostawą*, *dotyczną*, *dosieczną*, *wstawą odwrotną* tegoż łuku.

Na przykład, przypuszczając że łuk AMB=90°, łuk BM będzie dopełnieniem łuku AM. Zatem stosunek $\frac{MQ}{OB}$, który wyraża wstawę łuku BM, jest dostawą łuku AB. Tak samo stosunki

(*) Należy tu dobrze uważać że $90° - a$ i $\frac{1}{2}\pi - a$ nie jest to samo. Różnica $90° - a$ oznacza że łuk a jest wyrażony w stopniach, a zaś $\frac{1}{2}\pi - a$ pokazuje że łuk a jest wyrażony w funkcyi promienia który wzięto za jedność.

$\frac{BS}{R}$, $\frac{OS}{R}$, $\frac{BQ}{R}$ przedstawiają *dotyczną*, *dosieczną i dostawę odwrotną* łuku AM.



Ponieważ $MQ = OP$, przeto dostawa łuku AM równa się stosunkowi do promienia odległości spodku wstawy tego łuku od środka koła : to jest dos $AM = \frac{OP}{R}$.

Nazywając a łuk AM, mamy

$$\text{dos}\,a = \frac{OP}{R},\ \text{dot}\,a = \frac{BS}{R},\ \text{dosie}\,a = \frac{OS}{R},\ \text{dos. odw}\,a = \frac{BQ}{R}.$$

3. Uwaga. — Należy dobrze uważać że wielkość liczb trygonometrycznych jako wstawy, dostawy, stycznej... nie zależy bynajmniej od promienia, ale tylko od wielkości kąta. Jakoż, wst $AOM = \frac{MP}{OM} = \frac{CD}{OC}$: i tak samo o innych.

Wynika ztąd że można, dla ułatwienia dowodzeń, wziąć promień za jedność; tym sposobem liczby trygonometryczne, nie zmieniając swej wartości, wyrażają się liniami; co właśnie ułatwia ich porównanie.

O WARTOŚCIACH I ZNAKACH LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

4. Dotąd uważaliśmy tylko linie trygonometryczne łuku AM mniejszego od ćwiercianu. Gdy łuk jest większy od ćwiercianu, niektóre z tych linij mogą przybrać inne położenia, całkiem różne od pierwszych.

Jakoż, niech będzie łuk AM′ zawarty między 90° i 180°; jego styczną trygonometryczną jest stosunek $\frac{AT'}{R}$. Położenia linij AT, AT′ są wprost przeciwne. Zatem stosunki $\frac{AT}{R}$, $\frac{AT'}{R}$, równe co do wartości liczebnej, a nierówne co do kierunku linij AT, AT′, muszą być wyraźnie odróżnione od siebie. Dla tej właśnie przyczyny, daje się znak + liniom które idą w jednym kierunku, a znak — liniom które idą w kierunku przeciwnym.

Na mocy tej ugody, jeśli stosunek $\frac{AT}{R}$ zostaje wzięty jako dodatny, to wtedy stosunk $\frac{AT'}{R}$ należy uważać za odjemny.

Tem użyciem znaków +, — do odróżnienia linij, równej wielkości ale kierunków przeciwnych, formuły trygometryczne stają się ogólnemi.

Aby jeszcze lepiej rzecz tę wyjaśnić, uważajmy łuk AM mniejszy od 90°. Mamy

$$OP = OA - AP.$$

Ztąd, dzieląc przez promień OA, wynika

$$\text{dos}\, AM = 1 - \text{wst. odw}\, AM.$$

Biorąc zaś łuk AM′, większy od 90°, mamy przeciwnie

$$OP' = AP' - OA;$$

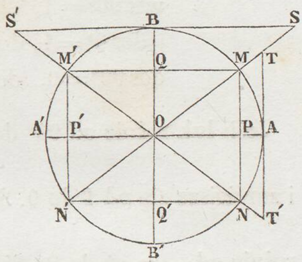
co pokazuje że pierwsza formuła dos AM nie stosuje się do łuku AM′, gdyby dostawa tego łuku miała się wyrażać stosunkiem dodatnym $\frac{OP'}{R}$. Ale, jeśli stosownie do prawidła znaków wyżej położonego, wyrazimy dostawę łuku AM′ stosunkiem odjemnym $-\frac{OP'}{R}$, wtedy ostatnia równość da nam, podobnie jako pierwsza,

$$\text{dos}\, AM' = 1 - \text{wst. odw}\, AM'$$

i ta sama formuła stosować się będzie do obydwóch łuków AM, AM′.

W ogólności więc, jeśli brać będziemy, na liniach jakichkolwiek, odległości od pewnego punktu stałego który nazwiemy *początkiem*, wtedy dawać będziemy tym odległościom znaki dodatne, gdy będą wzięte z jednej strony początku, a zaś znaki odjemne, gdy będą wzięte z drugiej strony tego początku. Zresztą można dowolnie rozporządzić stroną w której odległości będą uważane za dodatne.

We wszystkiem tem co nastąpi, weźmiemy za początek łuków, tak dodatnych jako odjemnych, punkt jakikolwiek A okręgu koła, i łuki dodatne liczyć będziemy w kierunku AMB, a łuki odjemne w kierunku przeciwnym ANB′.



Jeśli teraz uważać będziemy że, biorąc promień OA=R za jedność, wstawa, dostawa, styczna, etc. łuku AM wyrażą się liniami MP, OP, AT, etc.; łatwo pojmiemy że dając tym liniom znak + w położeniu które mają gdy łuk jest dodatny i mniejszy od 90°, należy im dać znak — w położeniach przeciwnych:

Więc da się znak + wstawom i stycznym leżącym nad średnicą AA′, a znak — gdy te linie będą pod średnicą. Dostawy i dotyczne będą miały znak + albo znak —, według tego jak te linie będą poprowadzone w prawo albo w lewo średnicy BB′.

Nakoniec sieczna ma znak + lub —, podług tego jak przechodzi przez skrajność łuku albo idzie w stronę przeciwną. I tak, sieczna łuku AM jest dodatną $+\frac{OT}{R}$, a zaś sieczna łuku AM′ odjemną $-\frac{OT'}{R}$.

5. Linie trygonometryczne nie stosują się do samych tylko łuków które mierzą kąty, ale także do łuków które mogą zawierać wiele okręgów. Należy przeto rozpatrzyć pilnie zmianę wielkości i znaku tych linij gdy łuk rośnie od zera aż do nieskończoności. Od dokładnego albowiem zrozumienia tych zmian linij trygonometrycznych zależy łatwość pojęcia ich związków.

Biorąc punkt A za początek łuków, przypuśćmy że łuk AM rośnie dodatnie od 0° aż do 90°. Widzimy że wstawa $\frac{MP}{R}$ tego łuku rośnie od 0 aż do 1; styczna $\frac{AT}{R}$ rośnie od 0 aż do ∞; a sieczna $\frac{OT}{R}$ od 1 aż do ∞. Trzy zaś linie dopełniające idą zmniejszając się, dostawa $\frac{OP}{R}$ od 1 aż do 0; dotyczna $\frac{BS}{R}$ od ∞ aż do 0; a dosieczna $\frac{OS}{R}$ od ∞ aż do 1.

Mamy przeto

$$\text{wst}\,0^\circ = 0,\quad \text{sty}\,0^\circ = 0,\quad \text{sie}\,0^\circ = 1,$$
$$\text{wst}\,90^\circ = 1,\quad \text{sty}\,90^\circ = \infty,\quad \text{sie}\,90^\circ = \infty,$$
$$\text{dos}\,0^\circ = 1,\quad \text{dot}\,0^\circ = \infty,\quad \text{dosie}\,0^\circ = \infty,$$
$$\text{dos}\,90^\circ = 0,\quad \text{dot}\,90^\circ = 0,\quad \text{dosie}\,90^\circ = 1.$$

II Jeśli łuk rośnie od 90° do 180°, wstawa $\frac{M'P'}{R}$ zostaje dodatną i zmniejsza się od 1 do 0. Styczna $\frac{AT'}{R}$ jest odjemną i jej wartość rośnie od $-\infty$ aż do 0. Sieczna $\frac{OT'}{R}$ jest także odjemną i jej wartość rośnie od $-\infty$ aż do -1.

Dostawa $\frac{OP'}{R}$ zostaje odjemną i maleje od 0 aż do -1. Dotyczna $\frac{BS'}{R}$ jest odjemną i maleje od 0 aż do $-\infty$. Dosieczna zostaje dodatną i rośnie od 1 aż do $+\infty$.

Przeto mamy:

$$\text{wst}\,180^\circ = 0,\quad \text{sty}\,180^\circ = 0,\quad \text{sie}\,180^\circ = -1,$$
$$\text{dos}\,180^\circ = -1,\quad \text{dot}\,180^\circ = -\infty,\quad \text{dosie}\,180^\circ = \infty.$$

III Jeśli łuk rośnie ciągle od 180° aż do 270°, wtedy wstawa $\frac{N'P'}{R}$ staje się odjemną i maleje od 0 aż do -1. Styczna $\frac{AT}{R}$ jest dodatną, i powiększa się od 0 aż do ∞. Sieczna $\frac{OT}{R}$ zostaje odjemną i maleje od -1 do $-\infty$.

Dostawa $\frac{OP'}{R}$ zostaje także odjemną i rośnie od -1 aż do 0. Dotyczna $\frac{BS}{R}$ jest dodatną i zmniejsza się od ∞ aż do 0. Dosieczna $\frac{OS}{R}$ jest odjemną i rośnie od $-\infty$ do -1.

Ztąd wynika

$$\text{wst}\,270^\circ = -1,\quad \text{sty}\,270^\circ = \infty,\quad \text{sie}\,270^\circ = -\infty,$$
$$\text{dos}\,270^\circ = 0,\quad \text{dot}\,270^\circ = 0,\quad \text{dosie}\,270^\circ = -1.$$

Nim pójdziemy dalej, zważajmy dobrze że gdy łuk zwiększa się albo zmniejsza półokręgiem, wtedy wstawa i dostawa, sieczna i dosieczna zachowują swe wartości liczebne zmieniając tylko znaki; a zaś styczna i dotyczna zachowują i wartości liczebne i znaki.

IV. Nakoniec, jeśli łuk rośnie od 270° do 360°, wtedy wstawa jest odjemną i ~~maleje~~ wzrasta od —1 do 0. Styczna jest odjemną i rośnie od —∞ do 0. Sieczna zostaje znowu dodatną, i zmienia się od ∞ do 1. t.j. maleje. Dostawa jest także dodatną i rośnie od 0 aż do +1. Dotyczna jest odjemną i maleje od 0 aż do —∞. Dosieczna jest także odjemną, jej wartość maleje od —1 aż do —∞.

Zatem mamy

$$\text{wst}\,360^\circ = 0,\quad \text{stycz}\,360^\circ = 0,\quad \text{sie}\,360^\circ = 1,$$
$$\text{dos}\,360^\circ = 1,\quad \text{dot}\,360^\circ = -\infty,\quad \text{dosie}\,360^\circ = -\infty.$$

Jeśli przypuścimy że łuk staje się większym od okręgu koła, jego linie trygonometryczne będą miały te same wartości i te same znaki jak linie łuku dodanego do okręgu.

I w ogóle, widocznem jest że dodając do łuku liczbę całkowitą okręgów, Czyli parzystą liczbę ½ okręgów. linie trygonometryczne zostają te same. Łatwo tedy pojąć że, gdy się dodaje do łuku liczbę nieparzystą półokręgów, linie trygonometryczne zatrzymują te same wartości, ale zmieniają znaki, z wyjątkiem tylko stycznej i dotycznej których się znaki nie zmieniają.

Co się tyczy łuków odjemnych, które się biorą w kierunku ANB', ich linie trygonometryczne, nie zważając na znaki, równają się tym których łuki są dodatne i mają tę samą liczbę stopni.

Biorąc, na przykład, łuk AN = AM, linie trygonometryczne tych dwóch łuków mają oczywiście te same wartości bezwzględne, ale mogą być znaków różnych. Jakoż, wstawy, styczne, dotyczne i dosieczne tych dwóch łuków mają znaki przeciwne; a zaś dostawy i sieczne mają te same znaki. Zatem oznaczając przez $-a$ łuk AN, będziemy mieli następujący związek:

$$\text{wst}(-a) = -\text{wst}\,a,\qquad \text{dos}(-a) = \text{dos}\,a,$$
$$\text{sty}(-a) = -\text{sty}\,a,\qquad \text{dot}(-a) = -\text{dot}\,a,$$
$$\text{sie}(-a) = \text{sie}\,a,\qquad \text{dosie}(-a) = -\text{dosie}\,a.$$

6. *Spełnieniem* łuku nazywa się różnica otrzymana, odejmując ten łuk od 180°. Spełnienie łuku a jest $180° - a$. Aby oznaczyć spełnienie łuku AM, dosyć jest poprowadzić przez punkt M równoległę MM′ do średnicy AA′, która spotyka okrąg koła w punkcie M′, łuk AM′ będzie spełnieniem łuku AM. Bo $AM' = 180° - A'M' = 180° - AM$.

Figura pokazuje oczywiście że *wstawy dwóch łuków spełniających* AM, AM′ *są te same*. Tak samo dosieczna. Ale *dostawy* albo *styczne* dwóch łuków spełniających są równe i znaków przeciwnych.

Nazywając, jako zwykle, a łuk AM, mamy:

$$\text{wst}\,(180° - a) = \text{wst}\,a, \qquad \text{dos}\,(180° - a) = -\,\text{dos}\,a,$$
$$\text{sie}\,(180° - a) = -\,\text{sie}\,a, \qquad \text{dosie}\,(180° - a) = \text{dosie}\,a,$$
$$\text{sty}\,(180° - a) = -\,\text{sty}\,a, \qquad \text{dot}\,(180° - a) = -\,\text{dot}\,a.$$

Z resztą, formuły te mogą się dowieśdź bez pomocy figur geometrycznych, pamiętając tylko na to cośmy powiedzieli o łukach równych znaku przeciwnego, i o łukach które się różnią liczbą nieparzystą półokręgów. W samej rzeczy mamy:

$$\text{wst}\,(180° - a) = -\,\text{wst}\,(-a) = \text{wst}\,a.$$

Tak samo się dowodzi że

$$\text{dos}\,(180° - a) = -\,\text{dos}\,(-a) = -\,\text{dos}\,a;\ \text{etc.}$$

7. Z tego przeglądu linij trygonometrycznych wszelkiego łuku wynika że:

Wstawa i dostawa biorą wartości ułamkowe poczynając od $+1$ aż do -1, i zmieniają znaki przechodząc przez zero. Styczna i dotyczna biorą wszelkie wartości od $+\infty$ aż do $-\infty$; zmieniają znaki, przechodząc przez zero i przez nieskończoność.

Nareście, sieczna i dosieczna biorą wartości zawarte między $+1$ i $+\infty$, i między -1 i $-\infty$. Te dwie linie zmieniają znaki przechodząc przez nieskończoność.

Ztąd wnieść możemy, że każda liczba dodatna albo odjemna, byle nie przechodziła jedności, może się uważać za wstawę albo dostawę łuku. A zaś wszelka liczba dodatna albo odjemna, wyznacza styczną albo dotyczną łuku. Nakoniec, wszelka liczba dodatna lub odjemna, której wartość bezwzględna jest większa od jedności, może przedstawiać sieczną albo dosieczną łuku.

Ta sama uwaga ściąga się do wszystkich linij trygonometrycznych, które się stać mogą nieskończenie wielkiemi.

8. Ponieważ linie trygonometryczne łuków zawartych w pierwszym ćwiercianie mają wszystkie wartości bezwzględne możebne; przeto, jakakolwiek jest linia trygonometryczna, dodatna albo odjemna, można zawsze przyprowadzić jej łuk do łuku który nie przechodzi 90°. I tak, jeśli chcemy mieć wstawę łuku 1024°; odciągniemy naprzód 360° tyle razy ile można od 1024° i będziemy mieli resztę 304°; zatem wst 1024° = wst 304°; odciągniemy potem 180° od 304°, co daje wst 304° = — wst 124°; nakoniec biorąc spełnienie łuku 124°, które jest 56°, otrzymamy ostatecznie

$$\text{wst}\,1024^\circ = -\text{wst}\,56^\circ.$$

Użyteczną jest rzeczą znać wartość linij trygonometrycznych niektórych łuków zawartych w pierwszym ćwiercianie. I tak, aby wyznaczyć wstawę łuku 30°, dosyć jest uważać że cięciwa łuku podwójnego, to jest 60°, równa się promieniowi; zatem

$$\text{wst}\,30^\circ = \tfrac{1}{2}.$$

Jeśli łuk ma 45°, jego cięciwa, jako bok kwadratu wpisanego w koło, jest $R\sqrt{2}$; więc

$$\text{wst}\,45^\circ = \text{dos}\,45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Weźmy jeszcze łuk 60°; jego cięciwa, jako bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło, jest $R\sqrt{3}$; więc

$$\text{wst}\,60^\circ = \text{dos}\,30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Gdy łuk ma 45°, trójkąt prostokątny OAT (fig. ostat.) jest równoramiennym, AT = OA, zkąd

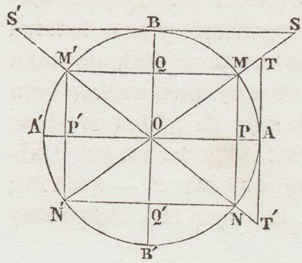
$$\text{sty}\,45^\circ = \text{dot}\,45^\circ = 1, \qquad \text{sie}\,45^\circ = \sqrt{2}.$$

O ŁUKACH KTÓRE ODPOWIEDAJĄ DANEJ LINII TRYGONOMETRYCZNEJ.

9. Każdy łuk ma tylko jedną wstawę, jedną styczną, jedną dostawę, etc ; ale oczywiście jednej wstawie, jednej dostawie, etc. odpowieda nieskończona liczba łuków. Szukajmyż tedy łuków które odpowiedają danej linii trygonometrycznej.

Niech będzie b wartość wstawy której łuk niewiadomy oznaczymy przez x; będziemy mieli $x =$ łukwst b, albo, co jest to samo, wst $x = b$.

Przypuszczając b dodatnem, weźmy na OB, w kierunku dodatnym, długość $OQ = b$, i poprowadźmy przez punkt Q równoległę do średnicy AOA′, przecinającą okrąg koła w punktach M, M′. Wszystkie łuki dodatne albo odjemne, które się kończą w tych dwóch punktach, odpowiedają wstawie danej; i nawzajem, wszystkie łuki odpowiedające wstawie danej, powinny się kończyć w jednym z tych dwóch punktów.



Nazwijmy α najmniejszy łuk dodatny AM, który ma za wstawę długość $OQ = b$. Oznaczając, jako zwykle, półokrąg przez π, łuki dodatne, kończące się w punkcie M, będą:

$$\alpha,\ 2\pi + \alpha,\ 4\pi + \alpha \ldots,\ \text{etc. (1)}.$$

Ponieważ łuk $AM' = \pi - \alpha$, łuki dodatne, kończące się w punkcie M′, są:

$$\pi - \alpha,\ 3\pi - \alpha,\ 5\pi - \alpha,\ \text{etc. (2)}.$$

Łuki odjemne AB′M, AB′M′ mają za wartość absolutną $2\pi - \alpha$ i $\pi + \alpha$. Zatem ich wartości względne są $-2\pi + \alpha$, $-\pi - \alpha$.

Odejmując od tych wartości jakąkolwiek liczbę okręgów, będziemy jeszcze mieli, dla łuków odpowiedających tej samej wstawie, następujące dwa ciągi wartości:

$$-2\pi + \alpha,\ -4\pi + \alpha,\ -6\pi + \alpha,\ \text{etc. (3)}.$$

$$-\pi - \alpha,\ -3\pi - \alpha,\ -5\pi - \alpha,\ \text{etc. (4)}.$$

Uważajmy teraz że łuki ciągów (1) i (3) formują się z łuku α, dodając mu wielokrotnik parzysty dodatny albo odjemny półokręgu π. Co się zaś tyczy łuków zawartych w ciągach (2), (4), to one się tworzą oczywiście odejmując łuk α od wielokrotnika nieparzystego, dodatnego albo odjemnego, półokręgu π. Przeto będziemy mogli zawrzeć wszystkie łuki odpowiedające danej wstawie w dwóch formułach następnych:

$$2k\pi + \alpha \ (1), \qquad (2k + 1)\pi - \alpha \ (2),$$

byle tylko k było uważane jako liczba całkowita jakakolwiek, dodatna albo odjemna, a nawet i zero.

Gdy wstawa dana b jest odjemną, wtedy trzeba wziąć na średnicy BB', poczynając od punktu O, długość OQ', i poprowadzić przez punkt Q' równoległę NN' do średnicy AA', która spotka okrąg w punktach N, N'. Nazywając α najmniejszy łuk dodatny ABN', mający za wstawę liczbę daną b, będziemy mieli:

$$ABN = 3\pi - \alpha, \quad AB'N = 2\pi - \alpha, \quad AN = \alpha - \pi;$$

zatem łuki tak dodatne jako odjemne, odpowiedające wstawie danej, są:

$$\alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$3\pi - \alpha, \quad 5\pi - \alpha, \quad 7\pi - \alpha, \text{ etc.}$$
$$-2\pi + \alpha, \quad -4\pi + \alpha, \quad -6\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$+\pi - \alpha, \quad -\pi - \alpha, \quad -3\pi - \alpha, \text{ etc.}$$

Widocznie wszystkie te łuki zawierają się w formułach (1) i (2) powyżej otrzymanych.

Jest tu ważna uwaga do zrobienia. Wiemy już że łuki różniące się pewną liczbą okręgów mają te same linie trygonometryczne. Więc ztąd i z formuł (1) i (2) powyżej otrzymanych, wynika że:

Aby dwa łuki miały tę samą wstawę, trzeba i dosyć jest żeby ich różnica była pewną liczbą okręgów, nie wyłączając zera, albo *ich summa była liczbą* NIEPARZYSTĄ PÓŁOKRĘGÓW.

10. Weźmy teraz $x =$ łukdos b, czyli co jest to samo dos $x = b$. Jeśli b jest dodatnem, weźmiemy długość $OP = b$, i przez punkt P poprowadzimy, do średnicy stałej AA', prostopadłę MPN która przetnie okrąg koła w punktach M, N. Wszystkie łuki, dodatne lub odjemne, kończące się w punktach M, N, będą miały oczywiście dostawę daną $OP = b$; i nawzajem, wszystkie łuki których dostawa równa się liczbie b, będą się kończyły w tych dwóch punktach.

Jeśli oznaczymy przez α najmniejszy łuk dodatny AM, którego dostawa jest b, otrzymamy dla łuków szukanych te cztery ciągi:

$$\alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$2\pi - \alpha, \quad 4\pi - \alpha, \quad 6\pi - \alpha, \text{ etc.}$$
$$-2\pi + \alpha, \quad -4\pi + \alpha, \quad -6\pi + \alpha. \text{ etc.}$$
$$-\alpha; \quad -2\pi - \alpha, \quad -4\pi - \alpha, \text{ etc.}$$

Wszystkie te łuki mogą się zawrzeć w jednej formule $2k\pi \pm \alpha$, w której k oznacza liczbę całkowitą, dodatną albo odjemną, a nawet i zero.

Na mocy powyższej formuły i tego co już wiadome wnosimy że

Aby dwa łuki miały tę samą dostawę trzeba i dosyć jest żeby ich różnica albo *summa czyniła pewną liczbę okręgów*, nie wyłączając zera.

11. Niech będzie jeszcze $x =$ łuksty b, albo co jest to samo, sty $x = b$. Jeśli liczba b jest dodatną, weźmiemy na stycznej nieograniczonej TAT′ długość $AT = b$, i przez punkt T i środek koła poprowadzimy linię prostą TO, która przetnie okrąg w punktach M, N. Wszystkie łuki, tak dodatne jako odjemne, kończące się w punktach M, N′, będą miały styczną daną $AT = b$, i nawzajem.

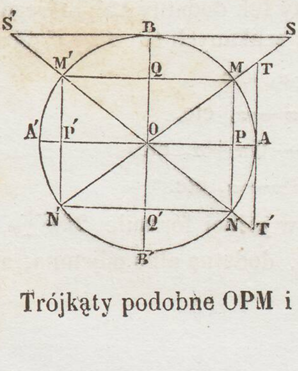
Nazywając α łuk dodatny AM, najmniejszy możebny którego styczna jest b, będziemy mieli łuk $ABN' = \pi + \alpha$, $AB'M = 2\pi - \alpha$, $AB'N' = \pi - \alpha$; przeto łuki szukane będą:

$$\alpha,\ 2\pi + \alpha,\ 4\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$\pi + \alpha,\ 3\pi + \alpha,\ 5\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$-2\pi + \alpha,\ -4\pi + \alpha,\ -\pi + \alpha, \text{ etc.}$$
$$-\pi + \alpha,\ -3\pi + \alpha,\ -5\pi + \alpha \text{ etc.}$$

Wszystkie te łuki zawierają się oczywiście w formule $\alpha + k\pi$, w której k jest liczbą całkowitą jakąkolwiek, a nawet i zero.

ZWIĄZKI LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH TEGO SAMEGO ŁUKU.

12. Nazywając a łuk AM, R promień koła, mamy jako wiadomo:



$$\text{wst}\,a = \frac{MP}{R},\ \text{dos}\,a = \frac{OP}{R};\ \text{sty}\,a = \frac{AT}{R},$$
$$\text{dot}\,a = \frac{BS}{R};\ \text{sie}\,a = \frac{OT}{R},\ \text{dosie}\,a = \frac{OS}{R},$$

Trójkąt prostokątny AMO daje

$$MP^2 + OP^2 = R^2 \text{ zkąd } \frac{MP^2}{R^2} + \frac{OP^2}{R^2} = 1$$

$$\text{albo } \text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = 1 \quad (1).$$

Trójkąty podobne OPM i OAT, OPM i OBS dają:

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}},\quad \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}},\quad \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}},\quad \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{MP}};$$

zkąd otrzymujemy:

$$\mathrm{sty}\,a=\frac{\mathrm{wst}\,a}{\mathrm{dos}\,a}\ (2),\qquad \mathrm{dot}\,a=\frac{\mathrm{dos}\,a}{\mathrm{wst}\,a}\ (3),$$

$$\mathrm{sie}\,a=\frac{1}{\mathrm{dos}\,a}\ (4),\qquad \mathrm{dosie}\,a=\frac{1}{\mathrm{wst}\,a}\ (5).$$

Formuły (4), (5) pokazują że sieczna jest odwrotnością dostawy, a dosieczna odwrotnością wstawy; dlatego też sieczna i dosieczna rzadko się używają.

13. Chociaż powyższe pięć formuł otrzymane zostały za pomocą trójkątów, uważając łuk AM dodatny i zawarty w pierwszym ćwiercianie, są one jednakże ogólnemi, stosują się do wszelkich łuków, i wtenczas nawet gdy trójkąty, do ich znalezienia użyte, nie istnieją. Jakoż, gdy łuk AM kończy jeden ze czterech ćwiercianów, te trojkąty nie istnieją, ale wtedy albo dostawa jest zerem, a zaś wstawa jednością, albo na odwrot; zatem formuła (1) sprawdza się oczywiście; i tak samo cztery następne. We wszystkich innych położeniach skrajności M łuku AM, linie trygonometryczne formują trójkąty prostokątne podobne które dadzą, jako powyżej, ich wartości bezwzględne (absolutne). Należy więc tylko sprawdzić czy znaki, wyznaczone za pomocą tych formuł, zgadzają się z temi któreśmy wprost otrzymali dla linij trygonometrycznych w każdej części okręgu.

Owoż, równanie $\mathrm{wst}^2 a+\mathrm{dos}^2 a=1$, zawierając same tylko kwadraty, jest zawsze prawdziwem jakiekolwiek wst a i dos a mają znaki. — Co się tycze innych formuł (2),... (5), ich znaki sprawdzają się bez trudności.

Jakoż, od 0° do 90°, wst a i dos a są dodatne; formuły okazane dają znaki dodatne dla sty a, dot a, sie a, dosie a. Co rzeczywiście ma miejsce, jako już wiemy.

Od 90° do 180°, wst a jest dodatną, a zaś dos a odjemną; formuły dają wartości odjemne dla sty a, dot a, sie a, a wartość dodatną dla dosie a. Co też być powinno.

Gdy łuk a zawiera się między 180° i 270°, albo między 270° i 360°, czytelnik sam się przekonać raczy o wiarogodności formuł odpowiednych.

Jeśli przypuścimy że łuk dany, przechodząc okrąg koła, staje się $360^{\circ} + a$, wtedy wszystkie linie trygonometryczne zachowują swe wartości liczebne i znaki; co właśnie zgadza się z otrzymanemi formułami.

Nakoniec, jeśli łuk a staje się odjemnym, wstawa zmienia znak, a zaś dostawa zostaje tą samą. W tym razie rzeczone formuły pokazują że sty a, dot a, dosie a zmieniają znaki, a sie a zachowuje swój znak; co właśnie dzieje się wedle przyjętej ugody znaków.

Formuły (4) i (5) wywodzą się z (2) i (3); jakoż, jeśli w tych ostatnich zamiast łuku a położymy $90^{\circ} - a$, otrzymamy

$$\text{sty}\,(90 - a) = \frac{\text{wst}\,(90 - a)}{\text{dos}\,(90 - a)}, \qquad \text{sie}\,(90 - a) = \frac{1}{\text{dos}\,(90 - a)}$$

$$\text{albo} \qquad \text{dot}\,a = \frac{\text{dos}\,a}{\text{wst}\,a}, \qquad \text{dosie}\,a = \frac{1}{\text{wst}\,a}.$$

Zatem, ściśle mówiąc, niema potrzeby dyskutować ogólności dwóch ostatnich formuł.

11. Znając pięć formuł poprzedniego paragrafu, można łatwo, mając daną jedną z sześciu linij trygonometrycznych łuku, wyznaczyć pięć innych.

Przykład I. — *Znając* wst a, *wyznaczyć* dos a, sty a, sie a, dot a, dosie a.

Za pomocą pięciu związków poprzednich znajdujemy

$$\text{dos}\,a = \pm\sqrt{1 - \text{wst}^2 a}, \qquad \text{sty}\,a = \pm\frac{\text{wst}\,a}{\sqrt{1 - \text{wst}^2 a}},$$

$$\text{sie}\,a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \text{wst}^2 a}}, \qquad \text{dot}\,a = \frac{\pm\sqrt{1 - \text{wst}^2 a}}{\text{wst}\,a};$$

i mamy nadto

$$\text{dosie}\,a = \frac{1}{\text{wst}\,a}.$$

Wyjąwszy dosieczną, rachunek daje, jako widzimy, dwie wartości równe i znaków przeciwnych, dla każdej z innych linij trygonometrycznych. I w samej rzeczy, danej wstawie MP (fig. ostatnia) odpowiedają dostawy OP, OP′, równe i znaków przeciwnych; i tak samo styczne AT, AT′, dotyczne BS, BS′, sieczne OT, OT′, które są co dwie równe i znaków przeciwnych. Co się zaś tyczy dosiecznych, to one są równe i tych samych znaków.

Przykład II. — *Znając* sty a, *znaleźć* wst a, dos a, dot a, sie a. dosie a.

Aby otrzymać wst a, dos a w funkcyi sty a, można wziąć formuły (1) i (2) i rozwiązać je jako zwykle, co nie przedstawia najmniejszej trudności. Ale, ponieważ te formuły często służą w zastosowaniu, nie źle będzie użyć następującego sposobu którym łatwiej je można utkwić w pamięci.

Ostatnia figura daje oczywiście

$$\text{sie}^2 a = 1 + \text{sty}^2 a, \quad \text{albo} \quad \frac{1}{\text{dos}^2 a} = 1 + \text{sty}^2 a,$$

więc

$$\text{dos}\, a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sty}^2 a}}.$$

Chcąc mieć wst a w funkcyi sty a, uważajmy że formuła (2) daje sty a dos a = wst a. Zatem mnożąc obie strony ostatniego równania przez sty a, otrzymamy

$$\text{wst}\, a = \pm \frac{\text{sty}\, a}{\sqrt{1 + \text{sty}^2 a}}.$$

Przykład III. — *Znaleźć związek między* sty a i dot a.

Mnożąc stronami równania (2) i (3) otrzymamy

$$\text{sty}\, a\; \text{dot}\, a = 1, \quad \text{albo} \quad \text{dot}\, a = \frac{1}{\text{sty}\, a}.$$

Co się tyczy trzech innych linij, łatwy rachunek daje

$$\text{sie}\, a = \pm \sqrt{1 + \text{sty}^2 a},$$

$$\text{dosie}\, a = \pm \frac{\sqrt{1 + \text{sty}^2 a}}{\text{sty}\, a}.$$

Formuły które dają wstawę i dostawę summy i różnicy dwóch łuków, za pomocą wstaw i dostaw tych łuków.

15. Niech będą dwa łuki dane AB $= a$ i BC $= b$; będziemy mieli, biorąc promień OA za jedność,

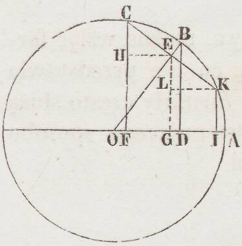
$$\text{wst}\, a = \text{BD},\quad \text{dos}\, a = \text{OD},\quad \text{wst}\, b = \text{CE},\quad \text{dos}\, b = \text{OE},$$

$$\text{wst}\,(a+b) = \text{CF} = \text{HF}+\text{CH} = \text{EG}+\text{CH},$$

$$\text{wst}\,(a-b) = \text{KI} = \text{EG}-\text{EL} = \text{EG}-\text{CH},$$

$$\text{dos}\,(a+b) = \text{OF} = \text{OG}-\text{HE},$$

$$\text{dos}\,(a-b) = \text{OI} = \text{OG}+\text{HE}.$$



Trójkąty podobne OEG, OBD dają

$$\frac{\text{EG}}{\text{BD}} = \frac{\text{OE}}{\text{OB}} \text{ i } \frac{\text{OG}}{\text{OD}} = \frac{\text{OE}}{\text{OB}}; \text{ zkąd}$$

$$\text{EG} = \text{wst}\, a \,\text{dos}\, b, \text{ i } \text{OG} = \text{dos}\, a\, \text{dos}\, b.$$

Trójkąty CEH, OBD, mające boki odpowiedne prostopadłe, są podobne i dają :

$$\frac{\text{CH}}{\text{OD}} = \frac{\text{CE}}{\text{OB}} \text{ i } \frac{\text{HE}}{\text{BD}} = \frac{\text{CE}}{\text{OB}},$$

zkąd $\text{CH} = \text{dos}\, a\, \text{wst}\, b$ i $\text{HE} = \text{wst}\, a\, \text{wst}\, b$.

Podstawiając te wartości, otrzymamy cztery formuły szukane:

$$\text{wst}\,(a+b) = \text{wst}\, a\, \text{dos}\, b + \text{dos}\, a\, \text{wst}\, b \quad (1),$$

$$\text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\, a\, \text{dos}\, b - \text{wst}\, a\, \text{wst}\, b \quad (2),$$

$$\text{wst}\,(a-b) = \text{wst}\, a\, \text{dos}\, b - \text{dos}\, a\, \text{wst}\, b \quad (3),$$

$$\text{dos}\,(a-b) = \text{dos}\, a\, \text{dos}\, b + \text{wst}\, a\, \text{wst}\, b \quad (4).$$

16. W dowodzeniu formuł poprzednich przypuściliśmy łuki a i b dodatne, i ich summę mniejszą od ćwiercianu, $a+b < 90^\circ$, Co więcej, formuły (3), (4) były otrzymane w przypadkach tylko szczególnych w których łuk b jest mniejszym od a. Aby okazać ogólność tych formuł, trzebaby je sprawdzić we wszystkich przypadkach możebnych w których łuki a, b mają takie wartości jakie się podoba, dodatne albo odjemne, i wtedy nawet gdy trójkąty wyżej kreślone nie istnieją. Sposób następujący uwalnia od tak rozlicznych sprawdzeń, dowodząc wprost ogólności rzeczonych formuł.

Uważajmy przedewszystkiem że formuły (1) i (2) są prawdziwe gdy łuki a, b są dodatne i ich summa czyni ćwiercian. Bo wtedy te łuki są dopełniające, i dają

$$\text{wst}\, b = \text{dos}\, a \quad \text{i} \quad \text{dos}\, b = \text{wst}\, a.$$

Więc
$$\text{wst}\,(a+b) = \text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = 1,$$

$$\text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\, a\ \text{wst}\, a - \text{wst}\, a\ \text{dos}\, a = 0.$$

Co być powinno.

Okażmy teraz że formuła (1) jest prawdziwą dla łuków dodatnych wszelkiej wielkości.

Aby tego dowieśdź, powiadam naprzód że jeśli formuły (1) i (2) są prawdziwemi dla łuków a i b, dodatnych pewnej wielkości, to one są także prawdziwemi gdy jeden z tych łuków np. a powiększy się ćwiercianem. Jakoż

$$\text{wst}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi + b) = \text{dos}\,(-a-b) = \text{dos}\,(a+b),$$

a z założenia
$$\text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\, a\ \text{dos}\, b - \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b;$$

zatem
$$\text{wst}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi + b) = \text{dos}\, a\ \text{dos}\, b - \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b.$$

Ale, uważając $a + \frac{1}{2}\pi$ jako jeden łuk, mamy

$$\text{wst}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi) = \text{dos}\, a, \qquad \text{dos}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi) = -\text{wst}\, a;$$

więc, podstawiając za wst a, dos a, ich wartości, będzie

$$\text{wst}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi + b) = \text{wst}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi)\ \text{dos}\, b + \text{dos}\,(a + \tfrac{1}{2}\pi)\ \text{wst}\, b.$$

Ten wynik pokazuje że formuła (1) rozciąga się do wszelkich łuków dodatnych tak wielkich jak się podoba. Aby przeto jej ogólność była niezaprzeczalną, pozostaje tylko do dowodzenia że się rozciąga do wszelkich łuków odjemnych.

Przypuśćmy tedy łuk a odjemnym, i dodajmy mu taką liczbę okręgów $2k\pi$ aby łuk $2k\pi - a$ był dodatnym. Będziemy mieli, na mocy powyższego,

$$\text{wst}\,(2k\pi - a + b) = \text{wst}\,(2k\pi - a)\ \text{dos}\, b + \text{dos}\,(2k\pi - a)\ \text{wst}\, b,$$

albo, odejmując $2k\pi$, co nie zmienia linij trygonometrycznych, będzie

$$\text{wst}\,(-a+b) = \text{wst}\,(-a)\ \text{dos}\, b + \text{dos}\,(-a)\ \text{wst}\, b.$$

To dowodzi że formuła (1) jest prawdziwą gdy jeden z łuków staje się odjemnym. Można tak samo dowieśdź że formuła ta zostaje prawdziwą gdy oba łuki są odjemnemi. Więc formuła (1) stosuje się de wszelkich łuków tak dodatnych jako odjemnych.

Formuła (2) wywodzi się z formuły (1),

bo, $\text{dos}\,(a+b) = \text{wst}\,(\frac{1}{2}\pi - a - b)$;

aże, jakiekolwiek są łuki $\frac{1}{2}\pi - a$ i b, mamy

$$\text{wst}\,\{\tfrac{1}{2}\pi - a + (-b)\} = \text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\pi - a)\,\text{dos}\,(-b) + \text{dos}\,(\tfrac{1}{2}\pi - a)\,\text{wst}\,(-b)$$

$$= \text{dos}\,a\,\text{dos}\,b - \text{wst}\,a\,\text{wst}\,b.$$

Zatem $\text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,b - \text{wst}\,a\,\text{wst}\,b.$

Co właśnie jest formułą (2). Więc ta formuła jest także ogólną.

Formuły (3) i (4), jako następstwa formuł (1) i (2) są ogólnemi.

Więc ogólność formuł (1), (2), (3), (4) jest dowiedziona z całą ścisłością jakiej tylko żądać można.

Dowodzenie to, i wiele innych, użytych w tem dziele, winienem uprzejmości P. professora G.-H. Niewęgłowskiego.

MNOŻENIE ŁUKÓW.

17. Przypuszczając łuk $a = b$, formuły

$$\text{wst}\,(a+b) = \text{wst}\,a\,\text{dos}\,b + \text{dos}\,a\,\text{wst}\,b,$$

$$\text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,b - \text{wst}\,a\,\text{wst}\,b,$$

stają się

$$\text{wst}\,2a = 2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,a \quad (5),$$

$$\text{dos}\,2a = \text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a \quad (6).$$

Gdy $b = 2a$, otrzymamy najpierw

$$\text{wst}\,3a = \text{wst}\,a\,\text{dos}\,2a + \text{wst}\,2a\,\text{dos}\,a,$$

$$\text{dos}\,3a = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,2a - \text{wst}\,a\,\text{wst}\,2a;$$

potem, podstawiając za $\text{wst}\,2a$, $\text{dos}\,2a$, ich wartości (5), (6), i uważając że $\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = 1$, otrzymamy

$$\text{wst}\,3a = 3\,\text{wst}\,a - 4\,\text{wst}^3 a \quad (7),$$

$$\text{dos}\,3a = 4\,\text{dos}^3 a - 3\,\text{dos}\,a \quad (8).$$

Podobnym rachunkiem otrzymamy wartości $\text{wst}\,4a$, $\text{dos}\,4a$, $\text{wst}\,5a$, $\text{dos}\,5a$, i t. d., w funkcyi $\text{wst}\,a$ i $\text{dos}\,a$.

Zresztą można wywieśdź formułę (8) z (7), podstawiając w tej ostatniej $\frac{1}{2}\pi - a$ zamiast a.

Radzę wszystkim moim kolegom nie zaniedbywać tych rachunków, które będą dla nich wyśmienitem ćwiczeniem.

DZIELENIE ŁUKÓW.

18. W formułach (5) i (6) podstawmy łuk $\frac{1}{2}a$ zamiast a, otrzymamy :

$$\text{wst}\, a = 2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a, \qquad \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{dos}^2\,\tfrac{1}{2}a - \text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a.$$

Jeśli, mając daną $\text{dos}\, a$, chcemy znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy mniejszego, to jest $\text{wst}\,\frac{1}{2}a$, $\text{dos}\,\frac{1}{2}a$, należy wziąć dwa równania

$$\text{dos}^2\,\tfrac{1}{2}a - \text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = \text{dos}\, a,$$

$$\text{dos}^2\,\tfrac{1}{2}a + \text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = 1,$$

i raz je odejmując drugi raz dodając stronami, otrzymamy

$$2\,\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = 1 - \text{dos}\, a, \quad \text{i} \quad 2\,\text{dos}^2\,\tfrac{1}{2}a = 1 + \text{dos}\, a;$$

zkąd wynikają ostatecznie dwie formuły żądane w funkcyi $\text{dos}\, a$:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{dos}\, a}{2}} \quad (9),$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{dos}\, a}{2}} \quad (10).$$

Niewiadome $\text{wst}\,\frac{1}{2}a$, $\text{dos}\,\frac{1}{2}a$ mają każda dwie wartości równe i znaków przeciwnych. Przyczyna tego łatwo się tłumaczy. Jakoż, daną jest dostawa łuku a nie zaś łuk a, a wiadomo że łuki odpowiedające danej dostawie są zawarte w formule $2k\pi \pm \alpha$, w której α oznacza najmniejszy łuk dodatny mający dostawę daną, a zaś k jest liczbą całkowitą dodatną albo odjemną i nawet zero. Powinniśmy przeto otrzymać wstawę i dostawę połowy wszystkich tych łukow, to jest mieć

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \text{wst}\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{i} \quad \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{dos}\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right).$$

Zatem biorąc $k = 0$, będzie

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a, \qquad \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a;$$

biorąc zaś $k=1$, wiemy że odejmując liczbę nieparzystą półokręgów π należy tylko zmienić znak wstawy i dostawy, co daje

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \text{wst}\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a,$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{dos}\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a.$$

Gdyby za k podstawiono dwie inne liczby całkowite po sobie idące, dodatne albo odjemne, otrzymanoby widocznie te same wartości. Więc $\text{wst}\,\frac{1}{2}a$, $\text{dos}\,\frac{1}{2}a$ w funkcyi $\text{dos}\,a$ mają tylko każda dwie wartości równe i znaków przeciwnych; co było do okazania.

19. Niech będzie teraz daną $\text{wst}\,a$; aby znaleźć $\text{wst}\,\frac{1}{2}a$, $\text{dos}\,\frac{1}{2}a$, możnaby zastąpić w formułach (9), (10) $\text{dos}\,a$ przez $\pm\sqrt{1-\text{wst}^2 a}$. Wynikłoby ztąd, dla każdej z linij szukanych, cztery wartości równe po dwie, ale znaków przeciwnych. Rachunek następujący jest prostszym.

Weźmy dwa równania

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a + \text{dos}^2\tfrac{1}{2}a = 1, \qquad 2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a\ \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{wst}\,a,$$

i raz dodając stronami, drugi raz odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy

$$(\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a + \text{wst}\,\tfrac{1}{2}a)^2 = 1 + \text{wst}\,a \qquad (\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a - \text{wst}\,\tfrac{1}{2}a)^2 = 1 - \text{wst}\,a;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek kwadratowy, wynika

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a + \text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{1+\text{wst}\,a},$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a - \text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{1-\text{wst}\,a}.$$

Dodając stronami ostatnie równania i odejmując, mamy ostatecznie

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,a} \quad (11),$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,a} \quad (12).$$

Jako widać, każda z niewiadomych szukanych ma cztery wartości.

Wynik ten łatwo się usprawiedliwia. Jakoż, dan est wstawa łuku a nie zaś łuk α; a wiadomo że łuki odpowiedające danej wstawie zawierają się w dwóch formułach $2k\pi+\alpha$ i $(2k+1)\pi-\alpha$. Powinniśmy przeto znaleźć wstawę i dostawę połowy wszystkich tych łuków, co daje

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a=\text{wst}\left(k\pi+\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{i} \quad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}a=\text{wst}\left(k\pi+\frac{\pi-\alpha}{2}\right),$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a=\text{dos}\left(k\pi+\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{i} \quad \text{dos}\,\tfrac{1}{2}a=\text{dos}\left(k\pi+\frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

Biorąc tedy $k=0$, będzie

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\frac{\alpha}{2}, \quad \text{i} \quad \text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\text{dos}\frac{\alpha}{2};$$

$$\text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\frac{\alpha}{2}, \quad \text{i} \quad \text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\text{wst}\frac{\alpha}{2}.$$

Biorąc zaś $k=1$, i odejmując od łuku półokrąg π, będzie

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=-\text{wst}\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{i wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\text{dos}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=-\text{dos}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{i dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\text{wst}\frac{\alpha}{2}.$$

Gdyby za k podstawiono dwie inne liczby całkowite po sobie idące, dodatne albo odjemne, otrzymanoby oczywiście te same cztery wartości dla każdej z niewiadomych wst $\frac{1}{2}a$, dos $\frac{1}{2}a$. Więc te niewiadome, wyrażone w funkcyi wst a, mają tylko cztery wartości : co właśnie było do okazania.

Ale gdy łuk a jest danym, wtedy naprzód wiemy że tylko jedna jest wartość dla wst $\frac{1}{2}a$, i jedna dla dos $\frac{1}{2}a$. Te jedyne wartości wyznaczymy za pomocą następujących uwag które rozwiniemy na przykładzie.

Przypuśćmy, jedynie dla utkwienia myśli, że łuk $a=1024^\circ$, i szukajmy wst $\frac{1}{2}a$. Znak szukanej wstawy jest znany, bo mamy $\text{wst}\frac{1024^\circ}{2}=\text{wst}\,512^\circ=\text{wst}\,152^\circ=\text{wst}\,28^\circ$. Wstawa szukana jest *dodatną*; przeto wyłączamy zaraz wartości odjemne z pomiędzy czterech wartości, które są te same dla wst $\frac{1}{2}a$ i dos $\frac{1}{2}a$ jeno w odmiennym porządku, dwie dodatne i dwie odjemne. Aby wiedzieć która z dwóch wartości pozostałych dodatnych odpowieda naszej wstawie, uważajmy że ta wstawa, równa wst 28°, jest mniejszą od wst 45°, to jest od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Co pokazuje że trzeba wziąć dwa pierwiastki ze znakami przeciwnemi.

Nadto, ponieważ wst $a =$ wst $1024^\circ =$ wst 304° jest *odjemną*, drugi pierwiastek $\sqrt{1-\text{wst}\,a}$ jest większy od pierwszego $\sqrt{1+\text{wst}\,a}$. Więc

$$\text{wst}\,\frac{1024^\circ}{2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,1024^\circ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,1024^\circ}.$$

Rozumując podobnie znajdziemy że

$$\text{dos}\,\frac{1024^\circ}{2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,1024^\circ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,1024^\circ}.$$

20. Szukajmy jeszcze wst $\frac{1}{3}a$ i dos $\frac{1}{3}a$, mając dane wst a i dos a.

Jeśli w formułach

$$\text{wst}\,3a = 3\,\text{wst}\,a - 4\,\text{wst}^3 a, \qquad \text{dos}\,3a = 4\,\text{dos}^3 a - 3\,\text{dos}\,a,$$

podstawimy $\frac{1}{3}a$ zamiast a, otrzymamy

$$\text{wst}\,a = 3\,\text{wst}\,\tfrac{1}{3}a - 4\,\text{wst}^3\,\tfrac{1}{3}a,$$

$$\text{dos}\,a = 4\,\text{dos}^3\,\tfrac{1}{3}a - 3\,\text{dos}\,\tfrac{1}{3}a.$$

Przypuśćmy że wst $a = b$, oznaczając wst $\frac{1}{3}a$ przez x, będziemy mieli równanie

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}b = 0.$$

Wiemy z Algebry że to równanie 3° stopnia ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, ponieważ tutaj warunek $(-\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{8})^2 < 0$ jest dopełniony. Można też dowieśdź że te trzy pierwiastki są rzeczywiste za pomocą samej trygonometryi.

Jakoż, łuki odpowiedające danej wstawie b są zawarte w dwóch formułach $2k\pi + \alpha$, $(2k+1)\pi - \alpha$, przeto rachunek powinien dać, dla niewiadomej x, wstawy wszystkich łuków zawartych w formułach

$$\frac{2k\pi+\alpha}{3}, \quad \frac{(2k+1)\pi-\alpha}{3}.$$

Dosyć będzie w każdej z tych formuł podstawić za k trzy liczby całkowite po sobie idące; a ponieważ łuki otrzymane tym sposobem, tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest $\frac{1}{3}\pi$, podstawiając za k liczby całkowite następujące, otrzymanoby te same łuki powiększone lub zmniejszone liczbą całkowitą okręgów, co daje te same linie trygonometryczne.

Dając liczbie k wartości 0, 1, 2 w formułach $\frac{2k\pi+\alpha}{3}$, i $\frac{(2k+1)\pi-\alpha}{3}$, będziemy mieli łuki

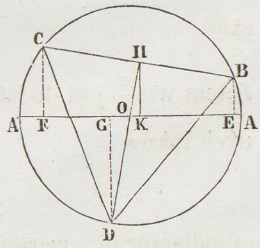
$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3};$$

$$\text{i} \quad \frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}, \quad \pi-\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}.$$

Ale łuki $\frac{\alpha}{3}$ i $\pi-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ i $\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, jako spełniające, mają te same wstawy; podobnie łuki $\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ i $\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, których summa czyni liczbę nieparzystą półokręgów, mają te same wstawy. Więc niewiadoma x ma zawsze trzy wartości rzeczywiste

$$\text{wst}\,\frac{\alpha}{3}, \quad \text{wst}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), \quad \text{wst}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Uwaga I. — Trzy pierwiastki zadanego równania łatwo się geometrycznie wyobrażają.



Niech będzie koło nakreślone promieniem OA wziętym za jedność, i łuk $AB=\frac{\alpha}{3}$. Jeśli wpiszemy trójkąt równoboczny BCD mający punkt B za wierzchołek, prostopadłe BE, CF, DG, spuszczone z wierzchołków B, C, D na średnicę AA', będą wyobrażały trzy pierwiastki $\text{wst}\frac{\alpha}{3}$, $\text{wst}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$, $\text{wst}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$;

bo łuk $AB=\frac{\alpha}{3}$, $AC=\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}$, $ACD=\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}$.

Jest więcej jeszcze. Można łatwo okazać że summa trzech wstaw jest zero. Jakoż, figura pokazuje że jedna z tych wstaw jest znaku przeciwnego dwoch innych. Zatem dosyć dowieśdź że $DG=BE+GF$. Poprowadźmy średnicę DH i spuśćmy prostopadłę HK na średnicę AA′. W trapezie BEFC, $BE+CF=2HK$. Nadto trójkąty prostokątne DGO, OHK podobne dają $\frac{DG}{HK}=\frac{OD}{OH}$. A że apotema $OH=\frac{1}{2}OD$; więc $HK=\frac{1}{2}DG$. A zatem $DG=BE+CF$.

Uwaga II.—Gdy wstawa b jest dodatną i mniejszą od jedności, mamy

$$\alpha<90^\circ \quad \text{zatem} \quad \tfrac{1}{3}\alpha<30^\circ,$$

i oczywiście

$$\text{wst}\frac{\alpha}{3}<\frac{1}{2}.$$

Łuk $\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}$ jest zawartym między 120° i 150°; przeto $\text{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ jest dodatną i większą od $\frac{1}{2}$. Trzeci łuk $\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}$ jest zawartym między 240° i 270°; zatem $\text{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$ jest odjemną, i jej wartość liczebna jest większą od $\frac{1}{2}$.

Jeśli zaś wstawa b jest odjemną, będziemy mieli

$$270^\circ>\alpha>180^\circ,$$

zkąd

$$90^\circ>\frac{\alpha}{3}>60^\circ.$$

Zatem $\text{wst}\frac{\alpha}{3}$ jest dodatną i większą od $\frac{1}{2}$. Wstawy dwóch innych łuków

$$\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3},$$

są odjemnemi; wartość liczebna pierwszej jest mniejszą od

$\frac{1}{2}$, a przeciwnie wartość liczebna drugiej jest większa od $\frac{1}{2}$.

Za pomocą tej uwagi, łatwo się odróżni między pierwiastkami równania

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}b = 0,$$

ten który ma się wziąć za wartość wst $\frac{\alpha}{3}$; przywodząc potem łuk $\frac{\alpha}{3}$ do pierwszego ćwiercianu, zobaczymy czy wartość liczebna tej wstawy jest większą lub mniejszą od ułamka $\frac{1}{2}$, który wyraża wst 30°.

Niech będzie na przykład $a = 390°$, będziemy mieli łuk $\frac{\alpha}{3} = 130°$, którego spełnienie jest 50°. Ponieważ wst 130° jest dodatną i większą od $\frac{1}{2}$, trzeba wziąć na wartość tej wstawy z równania

$$x^3 - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}b = 0,$$

pierwiastek dodatny większy od $\frac{1}{2}$.

21. Takim samym sposobem można dyskutować równanie 3ᵉ stopnia

$$4 \operatorname{dos}^3 \frac{a}{3} - \operatorname{dos} \frac{a}{3} = \operatorname{dos} a$$

które wyznaczy wartość dos $\frac{1}{3}a$ gdy dos a jest daną.

Dla skrócenia, uczyńmy dos $\frac{1}{3}a = x$ i wst $a = b$; będzie do rozwiązania równanie

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0.$$

Ponieważ dostawa dana b odpowiada łukom $2k\pi \pm \alpha$, powinniśmy otrzymać dla niewiadomej x, dostawy wszystkich łuków objętych formułami

$$\frac{2k\pi + \alpha}{3}, \quad \frac{2k\pi - \alpha}{3},$$

w których dosyć będzie, jako już wiadomo, położyć za k trzy liczby całkowite po sobie idące 0, 1, 2. Co czyniąc otrzymamy łuki

$$\frac{\alpha}{3},\quad \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3},\quad \frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3};$$

$$-\frac{\alpha}{3},\quad \frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{3},\quad \frac{4\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}.$$

Ale łuki $\frac{\alpha}{3}$ i $-\frac{\alpha}{3}$, równe i znaków przeciwnych, mają te same dostawy; podobnie $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, których summy czynią liczbę okręgów, mają także te same dostawy. Więc niewiadoma x ma trzy wartości rzeczywiste, i więcej ich mieć nie może, a one są:

$$\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3},\quad \operatorname{dos}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Czytelnik, przypuszczając naprzód dos a dodatną a potem odjemną, łatwo znajdzie że powyższe trzy pierwiastki równania, uważane co do wartości liczebnej, są zawarte między liczbami 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1. Nie trudno więc będzie, mając dany łukdos b, wiedzieć który z tych pierwiastków odpowieda dos $\frac{a}{3}$, bo wtedy znak szukanej dostawy i łuk α są wiadomemi.

Kończąc dodamy że summa trzech rzeczonych dostaw jest zero; co po prostu geometrycznie okazać się może. Jakoż, biorąc ostatnią figurę, widzimy że dostawa OE jest dodatną, a zaś dostawy OF, OG odjemnemi. Aże $KE = KF$, a trójkąty podobne DGO, HKO dają $OG = 2OK$, więc $OE = OF' + OG$; etc.

Możnaby jeszcze podobnym rachunkiem znaleźć, chociaż dosyć mozolnie, równania które dają wst $4a$, dos $4a$,... wst $5a$, dos $5a$,... a następnie wst $\frac{a}{4}$, dos $\frac{a}{4}$, wst $\frac{a}{5}$... w funkcyi wst a, dos a; ale jest na to znakomita formuła o której później mówić będziemy.

22. Rozwiążmy teraz te same zagadnienia dla stycznych.

Szukajmy naprzód stycznej summy dwóch łuków a, b, znając styczną każdego z tych łuków.

Mamy

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dos}\,(a+b)}=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dos}\,b+\text{dos}\,a\ \text{wst}\,b}{\text{dos}\,a\ \text{dos}\,b-\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b};$$

zkąd, dzieląc przez dos a dos b oba wyrazy ułamku, wynika

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}+\dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dos}\,b}}{1-\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,b}\cdot\dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dos}\,b}};$$

albo, co to samo,

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,b}{1-\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}\ (1).$$

Znajdzie się podobnie

$$\text{sty}\,(a-b)=\frac{\text{sty}\,a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}\ (2).$$

Gdy $b=a$, formuła (1) staje się

$$\text{sty}\,2a=\frac{2\,\text{sty}\,a}{1-\text{sty}^2 a}\ (3).$$

Jeśli $b=2a$, mamy

$$\text{sty}\,3a=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,2a}{1-\text{sty}\,a\ \text{sty}\,2a}.$$

Zastępując sty $2a$ przez jej wartość $\dfrac{2\,\text{sty}\,a}{1-\text{sty}^2 a}$, i uproszczając, będzie

$$\text{sty}\,3a=\frac{3\,\text{sty}\,a-\text{sty}^3 a}{1-3\,\text{sty}^3 a}\ (4).$$

Podobny rachunek da wartość sty $4a$, sty $5a$, i t.d. w funkcyi sty a.

23. Aby znaleźć sty $\frac{a}{2}$ znając sty a, połóżmy $\frac{a}{2}$ zamiast a w formule (3); będziemy mieli

$$\text{sty}\,a=\frac{2\,\text{sty}\,\frac{a}{2}}{1-\text{sty}^2\frac{a}{2}}.$$

Znosząc mianownik, otrzymamy równanie stopnia drugiego

$$\text{sty}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\text{sty}\,a}\,\text{sty}\,\frac{a}{2}-1=0\ (5),$$

zkąd $$\text{sty}\,\frac{a}{2}=\frac{1}{\text{sty}\,a}\left(-1\pm\sqrt{1+\text{sty}^2 a}\right).$$

Równanie (5) pokazuje że niewiadoma $\text{sty}\,\frac{a}{2}$ ma dwie wartości rzeczywiste, których iloczyn równa się -1; co się łatwo sprawdza trygonometryą.

Jakoż, powinniśmy znaleźć dla niewiadomej $\text{sty}\,\frac{a}{2}$, styczne wszystkich łuków $\frac{k\pi+\alpha}{2}$; aże, podług tego jak k jest parzystem albo nieparzystem, mamy $\text{sty}\,\frac{k\pi+\alpha}{2}=\text{sty}\,\frac{a}{2}$,

albo

$$\text{sty}\,\frac{k\pi+\alpha}{2}=\text{sty}\,\frac{\pi+\alpha}{2}=-\text{dot}\,\frac{\alpha}{2},$$

więc dwie wartości stycznej łuku $\frac{a}{2}$ są: $\text{sty}\,\frac{\alpha}{2}$ i $-\text{dot}\,\frac{\alpha}{3}$ których

iloczyn $$\text{sty}\,\frac{a}{2}\times-\text{dot}\,\frac{a}{2}=-1.$$

Jeśli chcemy otrzymać $\text{sty}\,\frac{1}{3}a$, znając $\text{sty}\,a$, uczynimy $\text{sty}\,\frac{1}{3}a=x$, $\text{sty}\,a=b$; formuła (4) da nam

$$b=\frac{3x-x^3}{1-3x^2};$$

zkąd, znosząc mianownik, wynika równanie 3° stopnia

$$x^3-3bx^2-3x+b=0$$

które wyznacza trzy wartości dla $\text{sty}\,\frac{a}{3}$. W samej rzeczy, danej stycznej b odpowiedają łuki $k\pi+\alpha$; przeto rachunek powinien dać dla niewiadomej x styczne wszystkich łuków $\frac{k\pi+\alpha}{3}$.

Aby otrzymać wszystkie wartości sty $\frac{a}{3}$, dosyć jest podstawić za k trzy liczby po sobie idące 0, 1, 2; bo łuki otrzymane tym sposobem, tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest $\frac{1}{3}\pi$; przeto kładąc za k następujące liczby, otrzymamy te same łuki powiększone albo zmniejszone liczbą całkowitą półokręgów; co nie daje nówych wartości dla sty $\frac{a}{3}$. Mamy tedy trzy wartości rzeczywiste szukane:

$$\text{sty}\,\frac{\alpha}{3},\quad \text{sty}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \text{sty}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Uwaga. — Gdy styczna dana b jest dodatną i skończoną, wtedy łuk $\alpha < 90°$; zkąd

$$0<\frac{\alpha}{3}<30°,\quad 60°<\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}<90°,\quad 120°<\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}<150°.$$

Zatem $\quad \text{sty}\,\frac{\alpha}{3}<1,\quad \text{sty}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)>1,$

a zaś $\text{sty}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$ jest odjemną.

Jeśli dana styczna b jest odjemną, ale zawsze skończoną, wtedy łuk α jest zawarty między 90° i 180°;

zkąd $\quad 30°<\frac{\alpha}{3}<60°,\quad 90°<\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}<120°,\quad 150°<\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}<180°.$

Zatem $\text{sty}\,\frac{\alpha}{3}$ jest dodatną; $\text{sty}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$ jest odjemną i liczebnie większą od jedności; nakoniec $\text{sty}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$ jest także odjemną, ale liczebnie mniejszą od jedności.

Opierając się na tej uwadze, łatwo można odróżnić między trzema pierwiastkami równania ten który wziąć należy gdy łuk a jest danym. Albowiem znając łuk a, znamy zaraz znaki sty a i sty $\frac{a}{3}$, i wiemy naprzód czy niewiadoma sty $\frac{a}{3}$ jest liczebnie mniejszą albo większą od jedności.

Przykład następny posłuży na objaśnienie.

Przypuśćmy $a = 300^\circ$. Sty 300 jest odjemną; co pokazuje że równanie $x^3 - 3bx^2 - 3x + b = 0$ ma jeden pierwiastek dodatny a dwa odjemne: aże sty $100 = -$sty 80 jest odjemną i większą liczebnie od jedności; więc wartością niewiadomej sty $\frac{a}{3}$ jest ten z dwóch pierwiastkow odjemnych równania który ma wartość bezwzględną większą.

Formuły służące do zamienienia summy lub różnicy dwóch linij trygonometrycznych na iloczyn.

24. Ze czterech ogólnych formuł

$$\text{wst}(a+b) = \text{wst}\, a \,\text{dos}\, b + \text{dos}\, a \,\text{wst}\, b,$$
$$\text{wst}(a-b) = \text{wst}\, a \,\text{dos}\, b - \text{dos}\, a \,\text{wst}\, b,$$
$$\text{dos}(a+b) = \text{dos}\, a \,\text{dos}\, b - \text{wst}\, a \,\text{wst}\, b,$$
$$\text{dos}(a-b) = \text{dos}\, a \,\text{dos}\, b + \text{wst}\, a \,\text{wst}\, b,$$

otrzymujemy, raz dodając a drugi raz odejmując, cztery następujące, często używane

$$\text{wst}(a+b) + \text{wst}(a-b) = 2\,\text{wst}\, a \,\text{dos}\, b,$$
$$\text{wst}(a+b) - \text{wst}(a-b) = 2\,\text{dos}\, a \,\text{wst}\, b,$$
$$\text{dos}(a+b) + \text{dos}(a-b) = 2\,\text{dos}\, a \,\text{dos}\, b,$$
$$\text{dos}(a-b) - \text{dos}(a+b) = 2\,\text{wst}\, a \,\text{wst}\, b.$$

Jeśli zaś uczynimy

$$a+b = p, \qquad a-b = q,$$

zkąd $$a = \frac{p+q}{2}, \qquad b = \frac{p-q}{2},$$

ostatnie cztery formuły staną się

$$\text{wst}\, p + \text{wst}\, q = 2\,\text{wst}\frac{p+q}{2}\,\text{dos}\frac{p-q}{2} \quad (1),$$
$$\text{wst}\, p - \text{wst}\, q = 2\,\text{dos}\frac{p+q}{2}\,\text{wst}\frac{p-q}{2} \quad (2),$$
$$\text{dos}\, p + \text{dos}\, q = 2\,\text{dos}\frac{p+q}{2}\,\text{dos}\frac{p-q}{2} \quad (3),$$
$$\text{dos}\, q - \text{dos}\, p = 2\,\text{wst}\frac{p+q}{2}\,\text{wst}\frac{p-q}{2} \quad (4).$$

Te formuły pokazują jak się zamienia na iloczyn summa i różnica dwóch wstaw albo dwóch dostaw. I na wzajem.

Można także zamienić na iloczyn summę i różnicę dwóch stycznych albo dwóch siecznych. Jakoż,

$$\text{sty}\,a \pm \text{sty}\,b = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a} \pm \frac{\text{wst}\,b}{\text{dos}\,b} = \frac{\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b \pm \text{dos}\,a\,\text{wst}\,b}{\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b},$$

więc $$\text{sty}\,a \pm \text{sty}\,b = \frac{\text{wst}\,(a \pm b)}{\text{dos}\,a\ \text{dos}\,b}\ (5).$$

Podobnie

$$\text{sie}\,a + \text{sie}\,b = \frac{1}{\text{dos}\,a} + \frac{1}{\text{dos}\,b} = \frac{\text{dos}\,b + \text{dos}\,a}{\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b}$$

$$= \frac{2\,\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b}\ (6),$$

$$\text{sie}\,a - \text{sie}\,b = \frac{1}{\text{dos}\,a} - \frac{1}{\text{dos}\,b} = \frac{\text{dos}\,b - \text{dos}\,a}{\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b}$$

$$= \frac{2\,\text{wst}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b}\ (7).$$

Gdybyśmy mieli do zamienienia na iloczyn $\text{wst}\,a + \text{dos}\,b$, dosyć byłoby zastąpić $\text{dos}\,b$ przez $\text{wst}\,(90^\circ - b)$; albo $\text{wst}\,a$ przez $\text{dos}\,(90^\circ - a)$. Biorąc pierwszą, będzie

$$\text{wst}\,a + \text{dos}\,b = \text{wst}\,a + \text{wst}\,(90^\circ - b)$$

$$= 2\,\text{wst}\left(45^\circ + \frac{a-b}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{a+b}{2} - 45^\circ\right).$$

25. Wiadomo że nie można za pomocą logarytmów odbywać dodawania ani odejmowania. Trzeba więc umieć zamienić summę algebryczną na jednomian aby zastosować logarytmy do rachunku trygonometrycznego. Niech będzie tedy, na pierwszy przykład, summa $a + b$ dwóch wyrazów zawierających linie trygonometryczne jakiekolwiek.

Mamy widocznie $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, a biorąc teraz kąt po-

3

mocniczy φ taki aby $\operatorname{sty}\varphi=\frac{b}{a}$, co się znajduje za pomocą tablic linij trygonometrycznych o których nie długo mówić będziemy, otrzymamy

$$a+b=a(1+\operatorname{sty}\varphi)=a\left(1+\frac{\operatorname{wst}\varphi}{\operatorname{dos}\varphi}\right)=\frac{a}{\operatorname{dos}\varphi}(\operatorname{dos}\varphi+\operatorname{wst}\varphi);$$

owoż,

$$\operatorname{dos}\varphi+\operatorname{wst}\varphi=\operatorname{wst}(90^\circ-\varphi)+\operatorname{wst}\varphi=2\operatorname{wst}45^\circ\operatorname{dos}(45^\circ-\varphi);$$

więc

$$a+b=\frac{2a\operatorname{wst}45^\circ\operatorname{dos}(45^\circ-\varphi)}{\operatorname{dos}\varphi}=\frac{a\sqrt{2}\operatorname{dos}(45^\circ-\varphi)}{\operatorname{dos}\varphi}.$$

Sposób powyższy, służący do zamiany dwumianu na jednomian, jakakolwiek jest wielkość i znaki wyrazów a i b, może się sprościć w szczególnych przypadkach. I tak, jeśli naprzód wiadomo że ilości a i b są obie dodatne, można uczynić

$$\frac{b}{a}=\operatorname{sty}^2\varphi \quad \text{co daje } a+b=a(1+\operatorname{sty}^2\varphi)=\frac{a}{\operatorname{dos}^2\varphi}.$$

Jeśli $a>0$ $b<0$, i nadto $\frac{b}{a}<1$, wtedy można uczynić

$$\frac{b}{a}=-\operatorname{dos}^2\varphi;\ \text{co daje } a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1-\operatorname{dos}^2\varphi)=a\operatorname{wst}^2\varphi.$$

Niech będzie teraz wyrażenie $a-b+c-d+$ i t. d. zawierające tyle wyrazów ile się podoba; będzie można zawsze, podług tego co poprzedza, sprowadzić dwa z tych wyrazów do jednego. Przy każdem z tych działań liczba wyrazów zmniejsza się o jeden, i nareszcie dojdzie się do wyrażenia zawierającego tylko jeden wyraz. Aby dać przykład tych przekształceń, weźmy równanie 2° stopnia, i uważajmy naprzód przypadek

$$x^2+px-q=0$$

w którym pierwiastki $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ są rzeczywiste i znaków przeciwnych.

Można zaraz tym pierwiastkom następującą dać formę

$$x=\frac{p}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+\frac{4q}{p^2}}\right).$$

Niech będzie φ kąt pomocniczy taki aby $\text{sty}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$, co możebne bo $q > 0$: podstawiając tę wartość otrzymamy

$$x = \frac{p}{2}(-1 \pm \text{sie}\,\varphi);$$

zkąd, biorąc znak $+$, mamy

$$x' = \frac{p}{2}\left(\frac{1-\text{dos}\,\varphi}{\text{dos}\,\varphi}\right) = \frac{p\,\text{wst}^2\frac{\varphi}{2}}{\text{dos}\,\varphi};$$

a biorąc znak $-$, będzie

$$x'' = \frac{-p}{2}\left(\frac{1+\text{dos}\,\varphi}{\text{dos}\,\varphi}\right) = \frac{-p\,\text{dos}^2\frac{\varphi}{2}}{\text{dos}\,\varphi}.$$

Uważajmy teraz równanie $x^2 + px + q = 0$ które daje

$$x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Aby pierwiastki były rzeczywiste i nierówne, trzeba mieć $\frac{4q}{p^2} < 1$; więc w tem przypuszczeniu możemy położyć $\frac{4q}{p^2} = \text{wst}^2\varphi$. Podstawiając, będzie

$$x = \frac{p}{2}(-1 \pm \text{dos}\,\varphi);$$

zkąd $\quad x = -p\,\text{wst}^2\frac{\varphi}{2}, \quad$ i $\quad x = -p\,\text{dos}^2\frac{\varphi}{2}.$

26. Formuły (1), (2), (3), (4) z nº (24) dają:

$$\frac{\text{wst}\,p + \text{wst}\,q}{\text{wst}\,p - \text{wst}\,q} = \frac{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \frac{\text{sty}\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\text{sty}\left(\frac{p-q}{2}\right)} \quad (8);$$

$$\frac{\text{wst}\,p + \text{wst}\,q}{\text{dos}\,p + \text{dos}\,q} = \frac{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \text{sty}\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad (9);$$

$$\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{\text{dos}\,q-\text{dos}\,p}=\frac{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}=\text{dot}\left(\frac{p-q}{2}\right)\ (10);$$

$$\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{\text{dos}\,p+\text{dos}\,q}=\frac{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}=\text{sty}\left(\frac{p-q}{2}\right)\ (11);$$

$$\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{\text{dos}\,q-\text{dos}\,p}=\frac{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}\right)}=\text{dot}\left(\frac{p+q}{2}\right)\ (12);$$

$$\frac{\text{dos}\,p+\text{dos}\,q}{\text{dos}\,q-\text{dos}\,p}=\frac{2\,\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\,\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$=\text{dot}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{dot}\left(\frac{p-q}{2}\right)\ (13).$$

Do tych formuł dodajemy jeszcze następujące :

$$\text{wst}^2 a-\text{wst}^2 b=(\text{wst}\,a+\text{wst}\,b)\,(\text{wst}\,a-\text{wst}\,b)$$

$$=2\,\text{wst}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{a-b}{2}\right)\times 2\,\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$=\text{wst}\,(a+b)\,\text{wst}\,(a-b)\ (14).$$

I także $\text{dos}^2 a-\text{dos}^2 b=\text{wst}(a+b)\,\text{wst}\,(a-b).$

Formuła (8), która niedługo będzie zastosowaną do rozwiązania trójkątów, może się wysłowić następującym sposobem.

Summa dwóch wstaw ma się do ich różnicy jako styczna połowy summy łuków odpowiednych ma się do stycznej połowy różnicy tychże łuków.

27. Zakończymy ten rozdział dając jeszcze dwie równości które zasługują na uwagę.

Niech będą a, b, c, trzy łuki których summa równa się π albo liczbie nieparzystej półokręgów, $(2k+1)\,\pi$, będziemy mieli :

$1^\circ \quad \mathrm{dos}^2 a + \mathrm{dos}^2 b + \mathrm{dos}^2 c + 2\,\mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c = 1.$

Bo równanie $\quad a + b + c = (2k+1)\pi \quad$ daje

$$\mathrm{dos}\,(b+c) = \mathrm{dos}\,(\pi - a) = -\mathrm{dos}\,a;$$

zkąd $\quad \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c - \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c = -\mathrm{dos}\,a,$

albo $\quad \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c + \mathrm{dos}\,a = \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c.$

Podnosząc do kwadratu i zastępując $\mathrm{wst}^2 b$, $\mathrm{wst}^2 c$, przez $(1-\mathrm{dos}^2 b)$, $(1-\mathrm{dos}^2 c)$, otrzymamy

$$\mathrm{dos}^2 b\,\mathrm{dos}^2 c + \mathrm{dos}^2 a + 2\,\mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c$$
$$= 1 - \mathrm{dos}^2 b - \mathrm{dos}^2 c + \mathrm{dos}^2 b\,\mathrm{dos}^2 c,$$

albo $\quad \mathrm{dos}^2 a + \mathrm{dos}^2 b + \mathrm{dos}^2 c + 2\,\mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c = 1.$

Można teraz zapytać się jakie są łuki które zadosyć czynią ostatniemu równaniu?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozwiążmy rzeczone równanie *np.* na $\mathrm{dos}\,a$, będzie

$$\mathrm{dos}\,a = -\mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c \pm \sqrt{\mathrm{dos}^2 b\,\mathrm{dos}^2 c + 1 - \mathrm{dos}^2 b - \mathrm{dos}^2 c}.$$

Podstawiając za $\mathrm{dos}^2 b$, $\mathrm{dos}^2 c$ ich wartości $1-\mathrm{wst}^2 b$, $1-\mathrm{wst}^2 c$, i wykonywając działania, otrzymamy

$$\mathrm{dos}\,a = -\mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c \pm \sqrt{\mathrm{wst}^2 b\,\mathrm{wst}^2 c},$$

czyli, co to samo,

$$\mathrm{dos}\,a = -\mathrm{dos}\,(b+c),$$

albo jeszcze $\quad \mathrm{dos}\,(\pi - a) = \mathrm{dos}\,(b+c).$

Aby te dwie dostawy były sobie równe, trzeba, jako wiadomo, żeby różnica albo summa ich łuków równała się liczbie parzystej półokręgów. Co daje

$$a + b + c - \pi = 2k\pi$$
$$\text{i} \quad b + c - a + \pi = 2k\pi,$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$a + b + c = (2k+1)\pi \quad (1)$$
$$\text{i} \quad b + c - a = (2k+1)\pi \quad (2).$$

Gdybyśmy rozwiązali równanie na $\operatorname{dos} b$ albo na $\operatorname{dos} c$, otrzymalibyśmy podobnie

$$a+c-b=(2k+1)\pi \quad (3)$$

$$a+b-c=(2k+1)\pi \quad (4).$$

Więc wszystkie łuki które sprawdzają równanie

$$\operatorname{dos}^2 a+\operatorname{dos}^2 b+\operatorname{dos}^2 c+2\operatorname{dos} a \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c=1$$

są zawarte w jednej ze czterech sum powyższych.

2° $\quad \operatorname{sty} a+\operatorname{sty} b+\operatorname{sty} c=\operatorname{sty} a \operatorname{sty} b \operatorname{sty} c.$

Bo równość $\quad a+b+c=\pi \quad$ daje

$$\operatorname{sty}(a+b)=-\operatorname{sty} c, \quad \text{zkąd} \quad \frac{\operatorname{sty} a+\operatorname{sty} b}{1-\operatorname{sty} a \operatorname{sty} b}=-\operatorname{sty} c,$$

a znosząc mianownik otrzymamy

$$\operatorname{sty} a+\operatorname{sty} b=-\operatorname{sty} c+\operatorname{sty} a \operatorname{sty} b \operatorname{sty} c; \text{ etc.}$$

Rozumując jako w poprzednim paragrafie znajdzie się łatwo że łuki sprawdzające równanie

$$\operatorname{sty} a+\operatorname{sty} b+\operatorname{sty} c=\operatorname{sty} a \operatorname{sty} b \operatorname{sty} c$$

zawierają się w jednej ze czterech sum

$$a+b+c=k\pi,$$

$$b+c-a=k\pi,$$

$$a+c-b=k\pi,$$

$$a+b-c=k\pi,$$

w których k jest liczbą całkowitą jakąkolwiek.

KSIĘGA DRUGA

UKŁAD TABLIC TRYGONOMETRYCZNYCH.

28. Aby linie trygonometryczne mogły posłużyć nietylko do rozwiązania trójkątów ale i do innych zastosowań, trzeba znać ich wartości liczebne, z przybliżeniem dostatecznem, odpowiedające łukom idącym co $10''$.

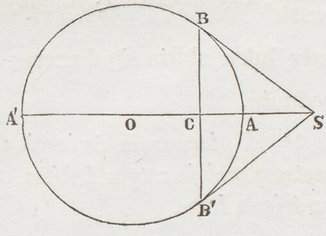
Co się tyczy wielkości i znaków tychże wartości, ponieważ, jakośmy widzieli, linie trygonometryczne w pierwszym ćwierćianie biorą wszystkie wartości liczebne, jakie tylko wedle swej natury brać mogą; dosyć przeto wyrachować te wartości dla linij odpowiedających łukom zawartym pomiędzy $0°$ i $90°$; a nawet można ograniczyć ten rachunek na łuku $45°$, z przyczyny linij dopełniających.

Bo, na przykład, wst $72°$ równa się dos $18°$. Mamy więc tylko do obrachowania różne linie trygonometryczne łuków zawartych pomiędzy $0°$ i $45°$.

A ponieważ związki, które istnieją pomiędzy liniami trygonometrycznemi jednego łuku, pozwalają otrzymać wszystkie te linie gdy wstawa jest znaną, należy naprzód zająć się wyznaczeniem tej ostatniej linii.

Najmniejszy łuk który uważać należy, jest łuk $10''$; wyznaczenie wstawy tego łuku polega na następujących twierdzeniach.

1° *W pierwszym ćwierćianie, wszelki łuk jest większym od swej wstawy a mniejszym od swej stycznej.*



Weźmy łuk $AB' = AB$, i przez skrajności B, B' poprowadźmy styczne które się spotkają w punkcie S średnicy AA'. Mamy widocznie łuk BAB' większy od cięciwy BB', a mniejszy od linii BS+SB'. Więc łuk AB jest większy od swej wstawy BC, ale mniejszy od swej stycznej BS.

2° *Jeśli łuk, zawarty w pierwszym ćwiercianie, maleje aż do zera, stosunek tego łuku do wstawy maleje także, i ma za granicę jedność.*

Aby dowieśdź naprzód że stosunek łuku do wstawy maleje gdy łuk staje się coraz mniejszym, dosyć jest okazać że

$$\frac{a+b}{\text{wst}\,(a+b)} > \frac{a}{\text{wst}\,a}.$$

Owoż, ta nierówność jest tą samą co

$$(a+b)\,\text{wst}\,a > a\,\text{wst}\,(a+b),$$

albo $a\,\text{wst}\,a + b\,\text{wst}\,a > a\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b + a\,\text{dos}\,a\,\text{wst}\,b.$

Aże widocznie $a\,\text{wst}\,a > a\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b$, dosyć przeto będzie sprawdzić nierówność

$$b\,\text{wst}\,a > a\,\text{dos}\,a\,\text{wst}\,b.$$

Dzieląc przez dos a, która jest dodatną, będzie

$$b\,\text{sty}\,a > a\,\text{wst}\,b,$$

nierówność oczywista, bo łuk $b >$ wst b i sty $a > a$. Więc, etc.

Dowiedźmy teraz że, *w pierwszym ćwiercianie, stosunek łuku do wstawy ma za granicę jedność, gdy łuk dąży do zera.*

Wiemy że

$$\text{sty}\,a > \text{łuk}\,a > \text{wst}\,a.$$

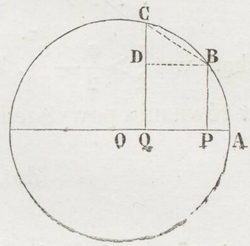
Dzieląc przez wst a, będzie także

$$\text{sie}\,a > \frac{a}{\text{wst}\,a} > 1.$$

Gdy łuk a maleje dążąc do zera, sie a dąży do jedności, i może się od niej różnić tak mało jak się podoba. Więc stosunek $\frac{a}{\text{wst}\,a}$, ciągle zawarty między sie a i 1, dąży także do jedności, gdy łuk a zbliża się do zera; więc granicą stosunku $\frac{a}{\text{wst}\,a}$ jest jedność.

3° *W pierwszym ćwiercianie, różnica między łukiem i jego wstawą maleje z tym łukiem, i jest mniejszą od czwartej części sześcianu łuku.*

Biorąc promień OA za jedność, BP jest wstawą łuku AB, a CQ wstawą łuku AC. Trzeba okazać że



$$AB - BP < AC - CQ.$$

albo, co to samo, że

$$CQ - BP < AC - AB,$$

albo jeszcza że $CD <$ łuku BC.

Ostatnia nierówność jest oczywistą; więc, etc.

Aby dowieśdź że, w pierwszym ćwiercianie, różnica między łukiem i jego wstawą jest mniejszą od ćwierci sześcianu tego łuku, uważajmy że, nazywając a łuk rzeczony, mamy

$$\text{wst}\,a = 2\,\text{wst}\frac{a}{2}\,\text{dos}\,\frac{a}{2},$$

albo $$\text{wst}\,a = 2\,\text{sty}\frac{a}{2}\,\text{dos}^2\frac{a}{2} = 2\,\text{sty}\frac{a}{2}\left(1 - \text{wst}^2\frac{a}{2}\right).$$

Podstawiając w drugiej stronie łuki zamiast linij trygonometrycznych, oba czynniki staną się mniejszemi, a tem samem ich iloczyn. Więc

$$\text{wst}\,a > a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right);$$

zkąd $$a - \text{wst}\,a < \frac{a^3}{4}.$$

To pokazuje że błąd który się popełnia, zastępując łuk przez wstawę, jest mniejszym od ćwierci sześcianu tego łuku (*).

4° *W pierwszym ćwiercianie dostawa łuku* a *jest większą niż* $1 - \frac{a^2}{2}$, *a mniejszą niż* $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$.

Jakoż, $$\text{dos}\,a = \text{dos}^2\frac{a}{2} - \text{wst}^2\frac{a}{2} = 1 - 2\text{wst}^2\frac{a}{2}.$$

Ztąd, podstawiając łuk $\frac{a}{2}$ za wst $\frac{a}{2}$, wynika

$$\text{dos}\,a > 1 - \frac{a^2}{2}.$$

(*) Zobacz notę *A*.

Na mocy poprzedniego twierdzenia (3°), mamy $a - \text{wst}\, a < \frac{a^3}{4}$;

zkąd $\text{wst}\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$. Zatem, podstawiając $\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$ zamiast $\text{wst}\frac{a}{2}$ w równaniu powyższem $\text{dos}\, a$, będzie

$$\text{dos}\, a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{16}\right)^2,$$

to jest $$\text{dos}\, a < 1 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{8.16};$$

więc tem bardziej $$\text{dos}\, a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

29. Szukajmy teraz wartości łuku 10″ którego promień bierzemy za jedność. W tem przypuszczeniu długość łuku 180°, wyrażona liczbą π, jest

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots..$$

Aże $$180° = 648000'';$$

więc łuk $$10'' = \frac{\pi}{64800} = 0,00004\ 84813\ 68110\ldots..$$

Ale wst 10″ jest mniejszą od łuku 10″; przeto

$$\text{wst}\, 10'' < 0,00004\ 84813\ 68110\ldots..\ (1).$$

Mamy nadto łuk 10″ $< 0,00005$, zkąd

$$\tfrac{1}{4}(\text{łuku}\ 10'')^3 < 0,00000\ 00000\ 00032.$$

Wynika ztąd że

$$\text{wst}\, 10'' > \left\{\begin{array}{l} 0,00004\ 84813\ 68110\ldots.. \\ -\ 0,00000\ 00000\ 40032 \end{array}\right\}$$

albo, uskuteczniając odejmowanie,

$$\text{wst}\, 10'' > 0,00004\ 84813\ 68078\ \ldots..\ (2)$$

Nierówności (1) i (2) pokazują nam że różnica między łukiem 10″ i jego wstawą jest mniejszą od połowy jedności trzynastego rzędu dziesiętnego; biorąc tedy

$$\text{wst}\, 10'' = 0,00004\ 84813\ 681,$$

błąd popełniony będzie mniejszym od pół jedności ostatnie dziesiętnej zachowanej.

Możnaby teraz otrzymać wartość dos 10″, wkładając wartość wst 10″, wyżej znalezioną, w formule dos $10'' = \sqrt{1 - \text{wst}^2 10''}$. Ale daleko jest prościej, do wyznaczenia dos 10″, użyć formuły przybliżonej

$$\text{dos}\,10'' = 1 - \tfrac{1}{2}(\text{łuk}\,10'')^2.$$

Jakoż, na mocy twierdzenia 4°, błąd który się popełnia biorąc $1 - \frac{a^2}{2}$ za dos a jest mniejszym od $\frac{a^4}{16}$. W naszym rachunku łuk $10'' < \frac{1}{2.10^4}$, a następnie $\frac{(\text{łuk}\,10'')^4}{16} < \frac{1}{256.10^{16}} < \frac{1}{2.10^{18}}$.
Więc, używając formuły powyżej wskazanej do wyznaczenia wartości dos 10″, popełnimy błąd mniejszy od połowy jedności ośmnastego rzędu dziesiętnego. Bezpiecznie tedy możemy otrzymać, dla wartości dos 10″, trzynaście pierwszych cyfer dziesiętnych których potrzebujemy. Znajdziemy tym sposobem

$$\text{dos}\,10'' = 0{,}99999\,99988\,248.....$$

30. Trzeba teraz wyrachować wstawy i dostawy łuków zawartych w pierwszej połowie ćwiercianu, biorąc te łuki co 10″.

Formuły

$$\text{wst}\,(a+b) + \text{wst}\,(a-b) = 2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b,$$
$$\text{dos}\,(a+b) + \text{dos}\,(a-b) = 2\,\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b,$$

dają, czyniąc $a = mb$,

$$\text{wst}\,(m+1)b = 2\,\text{dos}\,b\ \text{wst}\,mb - \text{wst}\,(m-1)b \quad (1),$$
$$\text{dos}\,(m+1)b = 2\,\text{dos}\,b\ \text{dos}\,mb - \text{dos}\,(m-1)b \quad (2).$$

Formuła (1) pokazuje że, jeśli znamy wstawy dwóch wielokrotników po sobie idących $(m-1)b$, mb łuku b, otrzymamy wstawę wielokrotnika $(m+1)b$, bezpośrednio wyższego, mnożąc wst mb przez 2 dos b, i odejmując od iloczynu wst $(m-1)b$.

Jeśli weźmiemy $b = 10''$, będziemy mieli, kładąc następnie za m liczby 1, 2, 3...,

$$\text{wst}\,20'' = 2\,\text{dos}\,10''\,\text{wst}\,10'' - \text{wst}\,0^\circ = 2\,\text{dos}\,10''\,\text{wst}\,10'',$$

$$\text{dos}\,20'' = 2\,\text{dos}\,10''\,\text{dos}\,10'' - \text{dos}\,0^\circ = 2\,\text{dos}^2 10'' - 1,$$

$$\text{wst}\, 30'' = 2 \,\text{dos}\, 10'' \text{wst}\, 20'' - \text{wst}\, 10'',$$
$$\text{dos}\, 30'' = 2 \,\text{dos}\, 10'' \text{dos}\, 20'' - \text{dos}\, 10'',$$

. . . .

. . . .

Można uprościć rachunek iloczynów wstaw albo dostaw następującym sposobem:

Czynnik $2 \,\text{dos}\, 10''$ różni się mało od dwóch jedności, ponieważ różnica $1 - \text{dos}\, 10''$ jest bardzo małą. Połóżmy więc

$$2 \,\text{dos}\, 10'' = 2 - k, \quad \text{zkąd} \quad k = 0{,}00000\ 00023\ 504.....$$

Zastępując w formułach (1), (2), $2 \,\text{dos}\, b$ przez $2 - k$, będziemy mieli dwie formuły które podał angielski Matematyk, Tomasz Simpson.

$$\text{wst}\,(m+1)\,b = (2-k)\,\text{wst}\, mb - \text{wst}\,(m-1)\,b,$$
$$\text{dos}\,(m+1)\,b = (2-k)\,\text{dos}\, mb - \text{dos}\,(m-1)\,b,$$

albo

$$\text{wst}(m+1)\,b - \text{wst}\, mb = \text{wst}\, mb - \text{wst}(m-1)\,b - k\, \text{wst}\, mb \ (3),$$
$$\text{dos}\,(m+1)\,b - \text{dos}\, mb = \text{dos}\, mb - \text{dos}(m-1)\,b - k\,\text{dos}\, mb \ (4).$$

Gdy różnica $\text{wst}\,(m+1)\,b - \text{wst}\, mb$ będzie znaną, powiększając ją ilością $\text{wst}\, mb$, otrzymamy żądaną $\text{wst}\,(m+1)\,b$.

Ale formuła (3) pokazuje, że ta różnica równa się różnicy $\text{wst}\, mb - \text{wst}\,(m-1)\,b$, już wyrachowanej, mniej iloczynem $k\,\text{wst}\, mb$, w którym czynnik k jest niezmiennym. Można skrócić działanie robiąc naprzód iloczyny liczby k przez dziesięć cyfer znaczących, 1, 2, ... 9. Będziemy więc mieli iloczyny cząstkowe, składające każdy z iloczynów takich jako $k\,\text{wst}\, mb$, które tym sposobem łatwo się wyznaczą.

Formuła (4) posłuży do wyrachowania podobnym sposobem dostawy łuków co $10''$, od $0°$ aż do $45°$.

31. W tak długich rachunkach błąd łatwo się wcisnąć może. Należy przeto sprawdzać otrzymane wyniki, rachując wprost wstawy i dostawy łuków co $9°$.

Oto sposób znalezienia tych wartości.

Ponieważ wstawa $18°$ równa się połowie boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w koło, czyniąc $\text{wst}\, 10° = x$, będzie

$$1 : 2x :: 2x : 1 - 2x; \quad \text{zkąd} \quad x^2 + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}.$$

Opuszczając wartość odjemną, która nam tu nie jest potrzebną, mamy

$$x = \text{wst}\,18 = \text{dos}\,7\text{-}^{\circ} = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\text{dos}\,18^{\circ} = \text{wst}\,72^{\circ} = \sqrt{1-\text{wst}^2 18^{\circ}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Te wartości prowadzą zaraz do wst 36° i dos 36°, bo mamy

$$\text{wst}\,36^{\circ} = \text{dos}\,54^{\circ} = 2\,\text{wst}\,18^{\circ}\,\text{dos}\,18^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$\text{dos}\,36^{\circ} = \text{wst}\,54^{\circ} = \text{dos}^2 18^{\circ} - \text{wst}^2 18^{\circ} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Formuły które wyznaczają wstawę i dostawę połowy łuku, w funkcyi wstawy tego łuku, dają

$$\text{wst}\,9^{\circ} = \text{dos}\,81^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\text{dos}\,9^{\circ} = \text{wst}\,81^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Podstawiając w te same formuły, zamiast wst a, wartość wst $54^{\circ} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, otrzymamy

$$\text{wst}\,27^{\circ} = \text{dos}\,63^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\text{dos}\,27^{\circ} = \text{wst}\,63^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Nakoniec, jeśli do znalezionych wartości dołączymy już wiadomą wst $45^{\circ} = \text{dos}\,45^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$, uformujemy następującą tabellę

$$\text{wst}\,0^{\circ} = 0 \qquad \text{dos}\,0^{\circ} = 1,$$

$$\text{wst}\,9^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\text{dos}\,9^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\text{wst}\,18^{\circ} = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\text{dos}\,18^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\text{wst } 27^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\text{dos } 27^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\text{wst } 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\text{dos } 36^\circ = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$

$$\text{wst } 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{dos } 45^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Te formuły, które dają wstawy i dostawy łuków co 9°, przez wyciąganie pierwiastków kwadratowych, pozwalają otrzymać je z takiem przybliżeniem jak się podoba.

Porównywając te wyniki z wartościami znalezionemi w rachunku wstaw i dostaw co 10°, będziemy wiedzieli na jaką liczbę dziesiętnych dokładnych liczyć można.

32. W zastosowaniach liczebnych trygonometryi, używa się zwykle logarytmów wstaw, stycznych, dostaw i dotycznych, i dlatego zrobiono tablice które zawierają logarytmy tych czterech linij trygonometrycznych dla łuków co 10″.

Ale wstawy i dostawy są ułamkami, a przeto ich logarytmy są odjemnemi. Dla uniknienia logarytmów odjemnych, których rachunek przedstawia pewną niedogodność, w tablicach dodano 10 do każdego logarytmu wstawy i dostawy; przez co te logarytmy stają się dodatnemi dla wszystkich łuków jakich zastosowanie wymagać może (*). Co się tycze logarytmu stycznej,

(*) Nazwijmy x łuk którego wstawa jest mniejszą od $\frac{1}{10^{10}}$. Wiemy że

$$\text{wst } 10'' > 0{,}00004\ 84813\ 680.$$

Zatem
$$\frac{x}{\left(\frac{1}{10^{10}}\right)} < \frac{\text{łuk } 10''}{\text{wst } 10''} < \frac{\text{łuk } 10''}{0{,}00004\ 84813},$$

zkąd
$$x < \frac{\text{łuk } 10''}{484813}, \text{ a tem bardziej } \quad x < \frac{\text{łuk } 1'}{10000}.$$

Więc, jeśli logarytm wstawy jest odjemnym, chociaż został powiększony liczbą 10, kąt odpowiedający będzie mniejszym niż *jedna dziesięciotysiączna część sekundy.*

ponieważ styczna łuku mniejszego od 45° jest ułamkiem, a przeto ma logarytm odjemny, w tablicach Kalleta (*Callet*) dodano 10 do logarytmu stycznej łuków mniejszych od 45°, a zostawiono nietykalnemi logarytmy stycznej łuków większych od 45°, jako same przez się dodatne.

Wyznaczywszy logarytmy wstaw i dostaw, można otrzymać logarytmy stycznych i dotycznych za pomocą formuł

$$\text{sty}\,a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}, \qquad \text{dot}\,a = \frac{\text{dos}\,a}{\text{wst}\,a},$$

które dają

$$\log \text{sty}\,a = \log \text{wst}\,a + \text{D}^{\text{e}} \log \text{dos}\,a - 10,$$

$$\log \text{sty}\,a = \log \text{dos}\,a + \text{D}^{\text{e}} \log \text{wst}\,a - 10.$$

Sieczne i dosieczne są odwrotnościami dostaw i wstaw: nie ma przeto potrzeby umieszczać ich logarytmów w tablicach, bo one łatwo się znajdą za pomocą formuł

$$\text{sie}\,a = \frac{1}{\text{dos}\,a}, \qquad \text{dosie}\,a = \frac{1}{\text{wst}\,a},$$

które dają

$$\log \text{sie}\,a = \text{D}^{\text{e}} \log \text{dos}\,a,$$

$$\log \text{dosie}\,a = \text{D}^{\text{e}} \log \text{wst}\,a.$$

UKŁAD I UŻYCIE TABLIC TRYGONOMETRYCZNYCH KALLETA (CALLET).

33. W tablicach Kalleta postawiono naprzód logarytmy *wstaw* i *stycznych* łuków co sekunda, dla *pięciu* stopni ćwiercianu, a tem samem logarytmy *dostaw i dotycznych* łuków zawartych pomiędzy 90° i 85°. Po czem znajdują się logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych co 10″, od 0° do 90°.

Stopnie są oznaczone na górze i na dole każdej stronicy, minuty w pierwszym i ostatnim rzędzie, sekundy w drugim i przedostatnim.

Gdy kąt lub łuk jest mniejszym od 45°, szuka się liczby stopni u góry stronicy, a zaś minut i dziesiątków sekund w dwóch pierwszych rzędach po lewej stronie leżących. Gdy kąt przechodzi 45°, bierze się liczbę stopni na dole stronicy, a zaś minuty i dziesiątki sekund w dwóch ostatnich rzędach leżących na prawo, idąc do góry.

Postępując wedle takowego oznaczenia, znajdzie się bez żadnej trudności

$$\log \text{wst}\, 6^\circ 32' 30'' = 9{,}0566218,$$
$$\log \text{dot}\, 81^\circ 46' 20'' = 9{,}1601596.$$

Jeżeli kąt dany zawiera jedności *sekund* i ich ułamki, trzeba się udać do różnic, i działać tym samym sposobem, jako szukając logarytmów liczb które się nie znajdują w tablicach. Przypuszcza się wtedy, że różnice logarytmów wstaw, dostaw, etc. są proporcyonalne różnicom łukow odpowiednych. To przypuszczenie nie jest zupełnie prawdziwem, ale daje w ogóle przybliżenie dostateczne we zwyczajnych zastosowaniach. Aby dać lepiej rzecz tę zrozumieć, przyłączamy tu kilka przykładów.

I. Zagadnienie. — *Mając dany łuk, znaleźć logarytm jego linij trygonometrycznych.*

1° *Znaleźć logarytm* wst $40^\circ 33' 26'',5$.

Nazwijmy, dla skrócenia mowy, Δ różnicę tablicową dwóch logarytmów po sobie idących.

log wst $40^\circ 33' 20''$	$=$	$9{,}8130370$	$\Delta = 246$
dla	$6''$	$147{,}6$	
dla	$0'',5$	$12{,}3$	
log wst $40^\circ 33' 26'',5$	$=$	$9{,}8130530$	

2° *Znaleźć logarytm* dos $36^\circ 35' 36'',2$

log dos $36^\circ 35' 40''$	$=$	$9{,}9046481$	$\Delta = 156$
dla	$3''$	$46{,}8$	
dla	$0'',8$	$12{,}48$	
log dos $36^\circ 35' 36'',2$	$=$	$9{,}9046540$	

3° *Znaleźć logarytm* sty $26^\circ 24' 35'',7$:

log sty $26^\circ 24' 30''$	$=$	$9{,}6959941$	$\Delta = 529$
dla	$5''$	$264{,}5$	
dla	$0'',7$	$37{,}03$	
log sty $26^\circ 24' 35'',7$	$=$	$9{,}6960243$	

4° *Znaleźć logarytm* dot 23° 17′ 22″,4

log dot 23° 17′ 30″	= 0,3660313		Δ = 580
dla	7″	406	
dla	0″6	34,8	
log dot 23° 17′ 22″,4	= 0,3660754		

Rozwiążemy teraz zagadnienie odwrotne:

II. Zagadnienie. — *Mając dany logarytm linii trygonometrycznej wyznaczyć kąt odpowiedający.*

Przypuśćmy naprzód że chcemy znaleźć łuk którego log wst, równy 9,3541803, znajduje się w tablicach. Szuka się tego logarytmu w jednej z dwóch kolumn noszących, na górze albo na dole, tytuł *sin* (wst); znalazłszy go, spostrzegamy że tytuł *sin* jest na górze kolumny; idzie się przeto do kolumny znajdującej się na lewo, w tej samej linii co liczba dziesiętna 3541803, i tam czytamy 50″; posuwamy się potem do następnej kolumny, i w tej samej linii nie znajdujemy nic, ale idąc w górę spotykamy 3′; nakoniec na górze stronicy, na zewnątrz ramy, znajdujemy 13 stopni.

Więc kąt szukany jest 13° 3′ 50″.

Przypuśćmy teraz że logarytm linii trygonometrycznej, której łuku szukamy, nie znajduje się w tablicach. Niech będzie, na przykład, log wst x = 9,7293441.

W tablicach pomiędzy logarytmami wstaw, mniejszemi od 9,7293441, najbliższy jest 9,7293229, który odpowieda kątowi 32° 25′ 30″. Ten logarytm różni się od danego ilością 212; różnica tablicowa, to jest różnica dwóch logarytmów po sobie idących które zawierają logarytm dany, jest 331; przeto podzielimy 2120 przez 331, biorąc dziesiątą część ilorazu na sekundy; ten podział daje 6″,4, co trzeba dodać do 32° 24′ 30″.

Więc x = 32° 25′ 36″,4.

Rachunek może być następnie rozporządzonym

1° log wst x = 9,7293441 Δ = 331

9,7293229 daje 32° 25′ 30″.

I^{sza} reszta zakończona zerem 2120 daje 6″,

II^{ga} reszta zakończona zerem 1340 daje 0″,4;

więc $x = 30°25'36'',4$

2° Weźmy jeszcze, dla lepszego wyjaśnienia, następujące przykłady

$$\log \operatorname{dos} x = 9{,}7293441 \qquad \Delta = 332$$

9,7263560 daje 57°34′20″

I^{sza} reszta zakończona zerem 1190 daje 3″,

II^{ga} reszta zakończona zerem 1940 daje 0″,6

$$x = 57°34'23'',6.$$

3° $\log \operatorname{sty} x = 9{,}6960243 \qquad \Delta = 529$

9,6959941 daje 26°24′30″

I^{sza} reszta zakończona zerem 3020 daje 5″,

II^{ga} reszta zakończona zerem 5750 daje 0″,7

$$x = 26°24'35'',7.$$

4° $\log \operatorname{dot} x = 9{,}6960243 \qquad \Delta = 529$

9,6960470 daje 63°35′20″

I^{sza} reszta zakończona zerem 2270 daje 4″,

II^{ga} reszta zakończona zerem 1580 daje 0″,2.

$$x = 63°35'24'',2.$$

KSIĘGA TRZECIA

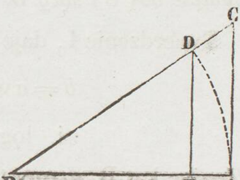
ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTOW.

Związki istniejące pomiędzy bokami i kątami trójkątów prostolinijnych.

Dla skrócenia, będziemy oznaczali kąty trójkąta wielkiemi literami A, B, C; a zaś boki przeciwne tym kątom małemi, a, b, c.

34. Twierdzenie I. — *W trójkącie prostokątnym, każdy bok kąta prostego równa się przeciwprostokątnej pomnożonej przez wstawę kąta przeciwnego.*

Niech będzie ABC trójkąt prostokątny w A; z punktu B nakreślmy promieniem BA łuk koła AD, i spuśćmy z punktu D prostopadłę DE na AB. Trójkąty podobne ABC, EBD dają



$$\frac{AC}{BC}=\frac{DE}{BD}.$$

Aże $\text{wst}\,B=\frac{DE}{BD}$, więc $\frac{b}{a}=\text{wst}\,B$,

albo $b=a\,\text{wst}\,B$, albo jeszcze, co to samo, $b=a\,\text{dos}\,C$.

Dowiedzie się podobnie, że

$$c=a\,\text{wst}\,C=a\,\text{dos}\,B.$$

35. Twierdzenie II. — *W trójkącie prostokątnym, każdy bok kąta prostego równa się drugiemu bokowi pomnożonemu przez styczną kąta przeciwnego pierwszemu bokowi.*

Jakoż $\frac{AC}{AB}=\text{sty}\,B$; więc $b=c\,\text{sty}\,B$.

Tak samo $c=b\,\text{sty}\,C$.

Uwaga. — Twierdzenie II może się wyprowadzić z twierdzenia I, ponieważ równości $b = a \text{ wst B}$, $c = a \text{ dos B}$, podzielone stronami, dają $\frac{b}{a} = \text{sty B}$, albo $b = c \text{ sty B}$.

Rozwiązanie trójkątów prostokątnych.

36. Za pomocą dwóch powyższych twierdzeń można rozwiązać wszystkie cztery przypadki trójkątów prostokątnych.

I. Przypadek. — *Mając daną przeciwprostokątnę* a *i kąt ostry* B, *znaleźć boki* b, c i *kąt* C.

Mamy $C = 90° - B$; i, podług twierdzenia I

$$b = a \text{ wst B}, \quad c = a \text{ wst C}, \text{ zkąd}$$
$$\log b = \log a + \log \text{wst B} - 10 \ (*),$$
$$\log c = \log a + \log \text{wst C} - 10.$$

Otrzymawszy boki b, c, mamy sprawdzenie $b^2 + c^2 = a^2$.

II Przypadek. — *Mając daną przeciwprostokątnę* a *i bok* b, *znaleźć bok* c *i kąty* B, C.

Twierdzenie I, daje

$$b = a \text{ wst B}; \quad \text{zkąd} \quad \text{wst B} = \frac{b}{a},$$
$$\text{i} \quad \log \text{wst B} = \log b + \text{D}^e \log a.$$

Znając kąt B, mamy teraz kąt $C = 90° - B$.

Bok c otrzymuje się z równania $c = a \text{ wst C}$, zkąd $\log c = \log a + \log \text{wst C} - 10$.

Uwaga. — Można wprost otrzymać bok c.

Bo $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

Bok c, otrzymany dwoma sposobami, posłuży do sprawdzenia całego rachunku.

(*) Czytelnik zechce sobie przypomnieć, że w tablicach Kalleta dodano 10 do logarytmu linij trygonometrycznych które są ułamkami, jako wstawa i dostawa wszelkich kątów, i styczna kąta mniejszego od 45° albo dotyczna kąta większego od 45°. Dla tego właśnie odciągnęliśmy 10 od logarytmów wst B i wst C.

III Przypadek. — *Mając dany bok* b *kąta prostego i kąt ostry* B, *wyznaczyć boki* a, c *i kąt* C.

Mamy natychmiast $C = 90^\circ - B$.

Twierdzenie I daje

$$b = a \operatorname{wst} B, \quad \text{zkąd} \quad a = \frac{b}{\operatorname{wst} B};$$

$$\text{i} \quad \log a = \log b + D^e \log \operatorname{wst} B.$$

Twierdzenie II daje

$$c = b \operatorname{sty} C, \quad \text{albo} \quad c = b \operatorname{dot} B;$$

zkąd, stosując logarytmy do ostatniego równania, otrzymujemy

$$\log c = \log b + \log \operatorname{dot} B - 10.$$

Uwaga. — Odjęliśmy 10 od log dot B w przypuszczeniu że kąt $B > 45^\circ$. Gdy kąt $B < 45^\circ$, wtedy log dot B jest prawdziwy w tablicach, nie trzeba więc od niego odejmować 10.

IV Przykład. — *Mając dane dwa boki kąta prostego* b, c, *wyznaczyć przeciwprostokątnę* a *i kąty* B, C.

Naprzód kąt B otrzyma się za pomocą formuły

$$b = c \operatorname{sty} B$$

która daje

$$\operatorname{sty} B = \frac{b}{c}; \quad \text{zkąd} \quad \log \operatorname{sty} B = \log b + D^e \log c - 10\cdot$$

Uwaga. — Jeśli $b < c$ nie trzeba odejmować 10.

Mając kąt B, otrzymamy kąt $C = 90^\circ - B$; a następnie

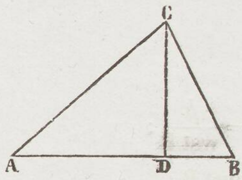
$$a = \frac{b}{\operatorname{wst} B}, \quad \text{zkąd} \quad \log a = \log b + D^e \log \operatorname{wst} B.$$

Możnaby dla sprawdzenia rachunków które poprzedzają, wyznaczyć bok a za pomocą równości $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Twierdzenia służące do rozwiązania trójkątów jakichkolwiek.

37. Twierdzenie I. — *W każdym trójkącie prostolinijnym, boki mają się jako wstawy kątów przeciwnych.*

Niech będzie trójkąt jakikolwiek. Spuśćmy z wierzchołka C prostopadłę CD na bok przeciwny AB. Jeśli prostopadła padnie

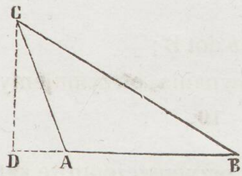


wewnątrz trójkąta ABC, trójkąty prostokątne BCD, ACD dadzą

$$CD = a \text{ wst } B, \quad \text{i} \quad CD = b \text{ wst} A;$$

zkąd $\quad a \text{ wst } B = b \text{ wst } A.$

Zatem $\quad a : b :: \text{wst } A : \text{wst } B.$



Jeśli prostopadła pada zewnątrz trójkąta ABC, wtedy trójkąty prostokątne CBD i ACD dadzą

$$CD = a \text{ wst } B, \text{ i } CD = b \text{ wst } CAD,$$

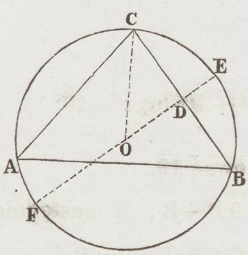
albo $\quad CD = b \text{ wst } A,$

bo kąt A trójkąta ABC jest spełnieniem kąta ostrego CAD.

Zatem, porównawszy dwie wartości boku CD, znajdziemy jako wyżej

$$a : b :: \text{wst } A : \text{wst } B.$$

To twierdzenie może się dowieśdź następującym sposobem.



Opiszmy koło na trójkącie ABC, i potem poprowadźmy średnicę EF prostopadłą do cięciwy BC. Kąt wpisany A równa się kątowi COE; więc

$$\text{wst } A = \frac{CD}{OC} = \frac{a}{2R},$$

zkąd $$\frac{a}{\text{wst } A} = 2R.$$

Równanie to okazuje że w każdym trójkącie stosunek boku do wstawy kąta przeciwnego równa się średnicy koła opisanego.

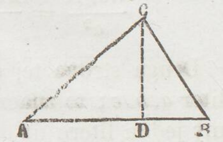
Więc $$\frac{a}{\text{wst} A} = \frac{b}{\text{wst } B} = \frac{c}{\text{wst } C} = 2R.$$

38. Twierdzenie II. — *W każdym trójkącie prostolinijnym, kwadrat z jednego boku równa się summie kwadratów z dwóch innych boków, mniej podwójnym iloczynem z tych dwóch boków przez dostawę kąta niemi zawartego.*

To jest, w każdym trójkącie prostolinijnym, mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos A} \quad (1).$$

Niech będzie ABC trójkąt uważany. Z wierzchołka C spuśćmy CD prostpadłę na AB.



Jeśli kąt A jest ostrym, mamy, na mocy znanego twierdzenia geometryi elementarnej,

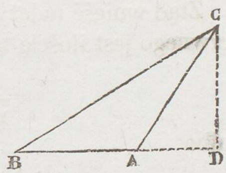
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB\,.\,AD,$$

albo $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$

Ale trójkąt prostokątny ACD daje

$$AD = b \text{ dos A}.$$

Więc $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos A}.$



Jeśli kąt A jest rozwartym, mamy także, jako wiadomo, $\quad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AB \times AD,$

albo $\quad a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD.$

Ale trójkąt prostokątny ACD daje

$$AD = a \text{ dos CAD}.$$

Nadto, kąt CAD jest spełnieniem kąta A trójkąta ABC, przeto dos CAD $= -$ dos A. Więc ostatecznie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos A}.$$

Ta formuła, przystosowana następnie do każdego z boków trójkąta, daje trzy równania:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos A} \quad (1),$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ dos B} \quad (2),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ dos C} \quad (3),$$

za pomocą których można wyrachować trzy z sześciu części trójkąta, gdy trzy inne są wiadome, z warunkiem, aby przynajmniej jeden bok znajdował się między danemi.

Uwaga. — Twierdzenie I może się wyprowadzić z twierdzenia II.

Jakoż równanie (1) daje

$$\text{dos A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

zkąd

$$\mathrm{wst}^2\mathrm{A} = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \left(\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right);$$

wykonywając, otrzymamy

$$\frac{\mathrm{wst}^2\mathrm{A}}{a^2} = \frac{2a^2b^2+2a^2c^3+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Druga strona tej ostatniej równości jest symetryczną co do liter a, b, c; to znaczy, że nie zmienia wartości, gdy zamienimy jedną literę na drugą, i nawzajem: np. a na b i b na a. Ztąd wnieść należy, że stosunek boku do wstawy kąta przeciwnego jest ilością tą samą w danym trójkącie. Więc

$$\frac{a}{\mathrm{wst\,A}} = \frac{b}{\mathrm{wst\,B}} = \frac{c}{\mathrm{wst\,C}},$$

albo

$$a : b : c :: \mathrm{wst\,A} : \mathrm{wst\,B} : \mathrm{wst\,C}.$$

I nawzajem, można z twierdzenia I wyprowadzić formułę

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,\mathrm{dos\,A}.$$

Jakoż, w trójkącie ABC summa kątów $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C} = 180°$; zatem

$$\mathrm{wst\,C} = \mathrm{wst}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{wst\,A\,dos\,B} + \mathrm{dos\,A\,wst\,B} \quad (1).$$

Z proporcyj

$$a : b :: \mathrm{wst\,A} : \mathrm{wst\,B}, \qquad a : c :: \mathrm{wst\,A} : \mathrm{wst\,C}$$

wyprowadzamy

$$\mathrm{wst\,B} = \frac{b\,\mathrm{wst\,A}}{a}, \quad \mathrm{wst\,C} = \frac{c\,\mathrm{wst\,A}}{a};$$

a następnie $$\mathrm{dos\,B} = \pm\frac{\sqrt{a^2-b^2\,\mathrm{wst}^2\mathrm{B}}}{a}.$$

Zastępując wst B, dos B, wst C przez ich wartości, w równaniu (1), będziemy mieli

$$\frac{c\,\mathrm{wst\,A}}{a} = \pm\frac{\mathrm{wst\,A}\sqrt{a^2-b^2\,\mathrm{wst}^2\mathrm{A}}}{a} + \frac{b\,\mathrm{wst\,A\,dos\,A}}{a};$$

albo, znosząc czynnik $\frac{\mathrm{wst\,A}}{a}$, spólny wszystkim wyrazom, będzie

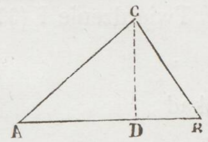
$$c = \pm\sqrt{a^2-b^2\,\mathrm{wst}^2\mathrm{A}} + b\,\mathrm{dos\,A}.$$

Ztąd, odosobniając pierwiastnik, podnosząc do kwadratu i uproszczając, wynika ostatecznie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos A}.$$

C. b. d. o.

39. Twierdzenie III. — *W trójkącie prostolinijnym, każdy bok jest summą rzutów dwóch innych.*



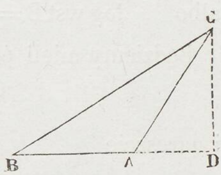
Jakoż trójkąty prostokątne ACD, BCD dają (34) AD = AC dos A,

BD = BC dos A;

zkąd, biorąc summę algebryczną, wynika

$$AB = AC \text{ dos A} + BC \text{ dos B},$$

albo $c = a \text{ dos B} + b \text{ dos A}$. (1).



Otrzyma się podobnie

$$a = b \text{ dos C} + c \text{ dos B} \quad (2),$$

$$b = c \text{ dos A} + a \text{ dos C} \quad (3).$$

Uwaga. — Te trzy formuły wywodzą się ze trzech formuł twierdzenia poprzedzającego.

Jakoż, aby mieć formułę (2) dosyć jest dodać dwie ostatnie formuły twierdzenia poprzedzającego, co daje

$$0 = a^2 - ac \text{ dos B} - ab \text{ dos C};$$

zkąd, dzieląc przez a, wynika

$$a = b \text{ dos C} + c \text{ dos B}.$$

Rozwiązanie trójkątów jakichkolwiek.

40. Pierwszy Przypadek. — *Mając dane bok* a *i dwa kąty trójkąta, wyznaczyć boki* b, c, *i kąt trzeci.*

Jakiekolwiek są dwa kąty dane, otrzyma się trzeci odejmując od 180° summę dwóch pierwszych; potem mamy podług twierdzenia I

$$b : a :: \text{wst B} : \text{wst A}, \quad c : a :: \text{wst C} : \text{wst A};$$

zkąd $b = \dfrac{a \text{ wst B}}{\text{wst A}}, \quad c = \dfrac{a \text{ wst C}}{\text{wst A}}.$

A biorąc logarytmy będzie

$$\log b = \log a + \log \text{wst B} + \text{D}^e \log \text{wst A} - 10,$$

$$\log c = \log a + \log \text{wst C} + \text{D}^e \log \text{wst A} - 10.$$

41. Drugi Przypadek. — *Mając dane dwa boki* a, b, i *kąt* A *przeciwny jednemu z nich, znaleźć kąty* B, C, *i trzeci bok* c.

Poszukajmy naprzód kąta B.

Twierdzenie I (37) daje

$$\text{wst B} : \text{wst A} :: b : a,$$

zkąd

$$\text{wst B} = \frac{b \text{ wst A}}{a} \quad (1),$$

albo

$$\log \text{wst B} = \log b + \log \text{wst A} + \text{D}^e \log a - 10.$$

Będziemy mieli potem

$$\text{C} = 180^\circ - (\text{A} + \text{B}) \quad (2);$$

i nareszcie

$$c = \frac{a \text{ wst C}}{\text{wst A}} \quad (3),$$

albo

$$\log c = \log a + \log \text{wst C} + \text{D}^e \log \text{wst A} - 10.$$

Dyskussya. — Równanie (1) wyznacza wartość wst B, byle było $\frac{b \text{ wst A}}{a} < 1$, albo w logarytmach, $\log b + \log \text{wst A} - \log a < 10$.

Tablice dadzą dla kąta B wartość $\text{B}' < 90^\circ$. Aże spełnienie kąta B′, które jest $180^\circ - \text{B}' = \text{B}''$, ma tę samą wstawę; znajdziemy więc dwa kąty B′, B″ spełniające które odpowiedają wst B.

Podstawiając tedy za B wartości B′ i B″, otrzymamy kąt $\text{C}' = 180^\circ - (\text{A} + \text{B}')$, i kąt $\text{C}'' = 180^\circ - (\text{A} + \text{B}'')$.

Ponieważ wartości na trzeci kąt C muszą być dodatne, trzeba aby kąty B′, B″ zadość czyniły nierównościom

$$\text{A} + \text{B}' < 180^\circ, \qquad \text{A} + \text{B}'' < 180^\circ.$$

Jeśli te dwa warunki są dopełnione, wstawy kątów C′, C″ będą dodatnemi, i kładąc je w równanie (3), otrzymamy dla boku c dwie wartości dodatne

$$c' = \frac{a \text{ wst C}'}{\text{wst A}}, \qquad c'' = \frac{a \text{ wst C}''}{\text{wst A}}.$$

Jedyne przeto warunki konieczne są

$$\text{A} + \text{B}' < 180^\circ, \qquad \text{A} + \text{B}'' < 280^\circ.$$

Zobaczmy teraz w jakim razie te warunki mogą być dopełnione.

1° Jeśli kąt dany A jest rozwartym lub prostym, będziemy mieli

$$A + B'' > 180^\circ;$$

przeto wartość $B'' > 90^\circ$ musi być odrzuconą.

Aby kąt ostry B' był przyzwoitym, trzeba i dosyć jest żeby

$$A + B' < 180^\circ, \quad \text{albo} \quad B' < 180^\circ - A.$$

Ztąd wniesiemy że

$$\text{wst}\, B' < \text{wst}\, A; \quad \text{albo} \quad \frac{b \,\text{wst}\, A}{a} < \text{wst}\, A;$$

co wymaga aby było $b < a$.

Więc gdy kąt dany jest rozwartym lub prostym, zagadnienie możę mieć tylko jedno rozwiązanie, i aby to rozwiązanie istniało, trzeba i dosyć jest, żeby bok przeciwny kątowi danemu był większym od boku przyległego temuż kątowi.

2° Jeśli kąt dany A jest ostrym, będziemy mieli

$$A + B' < 180^\circ;$$

zatem kąt ostry B' czyni zawsze zadosyć danemu zagadnieniu.

Warunek $A + B'' < 180^\circ$ czyli $A < 180^\circ - B''$, daje

$$\text{wst}\, A < \text{wst}\, B'', \quad \text{albo} \quad \text{wst}\, A < \frac{b \,\text{wst}\, A}{a}.$$

Zatem $a < b$.

Więc, aby było dwa rozwiązania, trzeba żeby bok przeciwny kątowi ostremu A był mniejszym od boku przyległego. Ten warunek konieczny jest widocznie dostatecznym, byle tylko było zawsze $\dfrac{b \,\text{wst}\, A}{a} < 1.$

Gdy

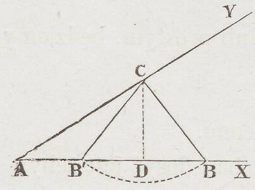
$$\frac{b \,\text{wst}\, A}{a} = 1,$$

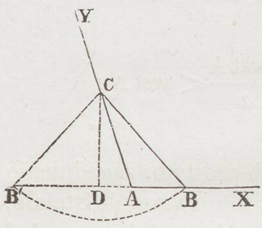
mamy $B' = 90^\circ, \quad B'' = 90^\circ.$

Nierówności, $A + B' < 180^\circ$, $A + B'' < 180^\circ$, sprawdzają się, bo kąt dany A jest ostrym; i znajdujemy tylko jedno rozwiązanie.

Dyskussya geometryczna obecnego zagadnienia prowadzi do tego samego wyniku.

Jakoż, niech będzie kąt $XAY = A$, i bok $AC = b$; punkta A, C, będą dwa wierzchołki trójkąta szukanego. Trzeci wierzchołek będzie na spotkaniu linii prostej AX z okręgiem nakreślonym ze środka C, promieniem równym a. Aby te dwie linie się spotkały, trzeba żeby promień był przynajmniej równym prostopadłej CD, spuszczonej z punktu C na kierunek AX. Ale, trójkąt prostokątny CAD daje $CD = b \operatorname{wst} A$; trzeba przeto aby bok a był przynajmniej równym $b \operatorname{wst} A$; albo co jest to samo, $\frac{b \operatorname{wst} A}{a}$ nie ma być większym od 1. Przypuszczając $\frac{b \operatorname{wst} A}{a} < 1$, będziemy mieli





$CD < a$; zatem koło przetnie w dwóch punktach B′, B″ kierunek linii prostej AX, przedłużonej, jeśli tego trzeba, po drugiej stronie wierzchołka A. Punkta B′, B″, tak otrzymane, wtedy tylko czynią zadosyć zagadnieniu gdy się znajdują na ramieniu AX danego kąta A, a nie na jego przedłużeniu. Przeto liczba rozwiązań będzie równą liczbie punktów spotkań leżących na samem ramieniu AX danego kąta A.

To zrozumiawszy, przypuśćmy naprzód że kąt A jest rozwartym. Spodek prostopadłej D padnie na przedłużeniu ramienia AX, tak jako i punkt B′. Więc punkt B′ nie uczyni zadosyć zagadnieniu. Aby punkt B dał rozwiązanie, trzeba żeby było,

$$DB > DA; \quad \text{zkąd} \quad CB > CA, \quad \text{albo} \quad a > b.$$

Gdy kąt dany A jest prostym, punkta przecięć B, B′ będą równie oddalone od A; jeden z nich pada na ramieniu AX, a drugi na jego przedłużeniu. Będzie więc jedno tylko rozwiązanie gdy $a > b$, albo żadne gdy ten warunek nie jest dopełnionym.

Gdy kąt A jest ostrym, punkt B padnie na ramieniu AX, i trójkąt CAB rozwiąże zagadnienie. Aby punkt B′ znajdował się także na ramieniu AX, trzeba aby było

$$DB' < DA; \quad \text{a ztąd} \quad CB' < CA, \quad \text{to jest} \quad a < b.$$

Nakoniec, gdy $CD=a$, to jest $\frac{b \text{ wst} A}{a}=1$, koło jest stycznem w punkcie D linii prostej AX, dostatecznie przedłużonej. Wtedy zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie gdy kąt A jest ostrym; a jest niemożebnem gdy kąt A jest rozwartym albo prostym.

42. W rozwiązaniu poprzedniem wyznaczyliśmy naprzód kąty B, C; potem otrzymaliśmy bok c, za pomocą wartości tych kątów. Można wprost znaleźć bok c w funkcyi danych a, b, A, jako następuje:

Na mocy twierdzenia II (38) mamy

$$a^2=b^2+c^2-2bc \text{ dos} A \quad \text{albo} \quad c^2-2b \text{ dos} A \,.\, c+b^2-a^2=0.$$

Rozwiązując to ostatnie równanie znajdujemy

$$c=b \text{ dos} A \pm \sqrt{a^2-b^2 \text{ dos}^2 A},$$

albo ostatecznie

$$c=b \text{ dos} A \pm \sqrt{a^2-b^2 \text{ wst}^2 A}.$$

Wartości boku c powinny być rzeczywiste i dodatne, co wymaga aby a^2 równało się przynajmniej wartości $b^2 \text{ wst}^2 A$; zatem musi być $\frac{b \text{ wst} A}{a} < 1$, albo $\frac{b \text{ wst} A}{a} = 1$.

Przypuszczając że $\frac{b \text{ wst} A}{a} < 1$, wtedy dwie wartości boku c są rzeczywiste i nierówne. Zostaje jeszcze do zobaczenia w jakim one przypadku są dodatne. Gdy kąt $A > 90°$, dos A jest odjemną; w tym razie pierwiastnik powinien być wziętym tylko ze znakiem $+$.

Nierówność $b \text{ dos} A + \sqrt{a^2-b^2 \text{wst} A} > 0$ da następnie

$$\sqrt{a^2-b^2 \text{ wst} A} > -b \text{ dos} A, \quad a^2-b^2 \text{ wst}^2 A > b^2 \text{ dos}^2 A, \quad a^2 > b^2,$$

a ostatecznie $\qquad a > b.$

Gdy $A=90°$, będziemy mieli

$$\text{dos} A=0, \quad \text{wst} A=1 \quad \text{i} \quad c=\sqrt{a^2-b^2};$$

zkąd $\qquad a > b.$

Gdy $A < 90^\circ$, wtedy $\operatorname{dos} A > 0$,

i wartość $$b \operatorname{dos} A + \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{wst}^2 A},$$
jako dodatna, zadosyć czyni zagadnieniu.

Aby druga wartość

$$b \operatorname{dos} A - \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{wst}^2 A},$$

zadosyć uczyniła, trzeba mieć

$$\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{wst}^2 A} < b \operatorname{dos} A, \quad \text{albo} \quad a^2 - b^2 \operatorname{wst}^2 A < b^2 \operatorname{dos}^2 A;$$

zkąd $a^2 < b^2(\operatorname{wst}^2 A + \operatorname{dos}^2 A)$, a nakoniec $a < b$.

Znajdujemy tym sposobem warunki już otrzymane w pierwszej dyskussyi zagadnienia. Zresztą, można wprost, nie rozwiązując równania $c^2 - 2b \operatorname{dos} A \, . \, c + b^2 - a^4 = 0$ dojść, daleko łatwiej, do tych samych warunków.

43. Aby zastosować logarytmy do formuły

$$c = b \operatorname{dos} A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{wst}^2 A},$$
trzeba sprowadzić drugą stronę do jednomianu.

Za pomocą przekształcenia bardzo prostego, mamy naprzód

$$c = b \operatorname{dos} A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \operatorname{wst}^2 A}{a^2}} \quad (1).$$

Przypuszczając pierwiastnik rzeczywistym, ilość $\frac{b^2 \operatorname{wst}^2 A}{a^2}$ jest mniejszą od jedności; przeto można wyznaczyć kąt pomocniczy φ taki aby jego wartość była $\operatorname{wst} \varphi = \frac{b \operatorname{wst} A}{a}$.

Wynika ztąd

$$\sqrt{1 - \frac{b^2 \operatorname{wst}^2 A}{a^2}} = \sqrt{1 - \operatorname{wst}^2 \varphi} = \operatorname{dos} \varphi.$$

Nadto, równość $\operatorname{wst} \varphi = \frac{b \operatorname{wst} A}{a}$ daje

$$b = \frac{a \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst} A}.$$

Zastępując b i $\sqrt{1-\frac{b^2 \operatorname{wst}^2 A}{a^2}}$ przez ich wartości w (1), będzie

$$c \frac{a \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dos} A}{\operatorname{wst} A} \pm \operatorname{dos} \varphi = \frac{a \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dos} a \pm a \operatorname{dos} \varphi \operatorname{wst} A}{\operatorname{wst} A},$$

albo nareszcie

$$c = \frac{a \operatorname{wst}(\varphi \pm A)}{\operatorname{wst} A} \quad (2).$$

Wyrażenie to może się oczywiście wyrachować za pomocą logarytmów.

Trzeba uważać że wartości kąta pomocniczego φ mniejsze od 180°, wyznaczone formułą $\operatorname{wst} \varphi = \frac{b \operatorname{wst} A}{a}$, są właśnie wartościami kąta B, w trójkącie który jest dany do rozwiązania; ponieważ $\operatorname{wst} B = \frac{b \operatorname{wst} A}{a}$. Znajdziemy więc dla kąta φ wartości $B' + 2k\pi$, i $B'' + 2k\pi$. Podstawiając te wartości w równaniu

$$c = \frac{a \operatorname{wst}(\varphi \pm A)}{\operatorname{wst} A},$$

wyniknie

$$c = \frac{a \operatorname{wst} B' + 2k\pi \pm A}{\operatorname{wst} A} \quad \text{i} \quad c = \frac{a \operatorname{wst}(B'' + 2k\pi \pm A)}{\operatorname{wst} A}.$$

Te dwa wyrażenia sprowadzają się zaraz do

$$c = \frac{a \operatorname{wst}(B' \pm A)}{\operatorname{wst} A}, \quad \text{i} \quad c = \frac{a \operatorname{wst}(B'' \pm A)}{\operatorname{wst} A}.$$

Co więcej, $\operatorname{wst}(B' - A) = \operatorname{wst}(B'' + A)$, bo summa kątów $B' - A$, i $B'' + A$ jest równą 180°. Dla tej samej przyczyny $\operatorname{wst}(B'' - A) = \operatorname{wst}(B' + A)$.

Więc będziemy mieli tylko dwie wartości różne

$$c = \frac{a \operatorname{wst}(B + A)}{\operatorname{wst} A}, \quad \text{i} \quad c = \frac{a \operatorname{wst}(B'' + A)}{\operatorname{wst} A}.$$

Spełnieniami kątów, $B' + A$, $B'' + A$, są wartości C', C'' kąta C w trójkącie szukanym; więc ostatecznie

$$c' = \frac{a \operatorname{wst} C'}{\operatorname{wst} A}, \quad \text{i} \quad c' = \frac{a \operatorname{wst} C''}{\operatorname{wst} A}.$$

Widzimy tu, że drugie rozwiązanie, otrzymane za pomocą kąta pomocniczego φ, nie różni się od pierwszego w którym naprzód wyznaczyliśmy kąty B, C.

44. Trzeci Przypadek. — *Mając dane dwa boki* a, b, *i kąt zawarty* C, *znaleźć dwa inne kąty* A, B *i trzeci bok* c.

Mamy, na mocy twierdzenia I, (37)

$$a : b :: \text{wst}\,A : \text{wst}\,B;$$

zkąd

$$a + b : a - b :: \text{wst}\,A + \text{wst}\,B : \text{wst}\,A - B.$$

Ale, jako wiadomo (n° 26, *formuła* 8),

$$\text{wst}\,A + \text{wst}\,B : \text{wst}\,A - \text{wst}\,B :: \text{sty}\,\frac{A+B}{2} : \text{sty}\,\frac{A-B}{2},$$

więc
$$a + b : a - b :: \text{sty}\,\frac{A+B}{2} : \text{sty}\,\frac{A-B}{2}.$$

Ta proporcya daje styczną połowy różnicy kątów A, B; albowiem z równości $A + B = 180^\circ - C$, mamy

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \text{zatem} \quad \text{sty}\,\frac{A+B}{2} = \text{dot}\,\tfrac{1}{2}\,C,$$

a następnie
$$\text{sty}\,\frac{A-B}{2} = \frac{(a-b)\,\text{dot}\,\frac{C}{2}}{a+b}.$$

Wyznaczywszy tym sposobem wartość $\frac{A-B}{2}$, otrzymamy kąty A, B, znając połowę ich summy i połowę różnicy.

Potem, proporcya $c : a :: \text{wst}\,C : \text{wst}\,A$, daje

$$c = \frac{a\,\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}.$$

Formuła $c = \frac{a\,\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}$ wymaga szukania trzech nowych logarytmów, to jest $\log a$, $\log \text{wst}\,C$ i $\log \text{wst}\,A$. Działając jako następuje, będziemy mieli do znalezienia dwa tylko logarytmy.

Jakoż, mamy ciąg stosunków równych

$$\frac{a}{\text{wst}\,A} = \frac{b}{\text{wst}\,B} = \frac{c}{\text{wst}\,C} = \frac{a+b}{\text{wst}\,A + \text{wst}\,B},$$

zkąd
$$c = \frac{(a+b)\,\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A + \text{wst}\,B}.$$

ale, $$\text{wst}\,C = 2\,\text{wst}\,\frac{C}{2}\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{wst}A + \text{wst}B = 2\,\text{wst}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{dos}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Zatem, podstawiając, będzie

$$c = \frac{(a+b)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}C}{\text{dos}\left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

Formuła ta zawiera $a+b$, której logarytm już był znalezionym w poprzednim rachunku.

45. Można także znaleźć wprost bok c za pomocą danych a, b, c. Jakoż, formuła

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{dos}\,C$$

daje $$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,\text{dos}C};$$

Można zrobić formułę $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,\text{dos}C}$, wyrachowalną przez logarytmy, następującym sposobem.

Pomnóżmy $a^2 + b^2$ przez summę $\text{dos}^2\frac{C}{2} + \text{wst}^2\frac{C}{2}$ która się równa jedności, i zamiast dos C, połóżmy jej wartość $\text{dos}^2\frac{C}{2} - \text{wst}^2\frac{C}{2}$; otrzymamy naprzód

$$c = \sqrt{(a^2+b^2)\left(\text{dos}^2\frac{C}{2} + \text{wst}^2\frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\text{dos}^2\frac{C}{2} - \text{wst}^2\frac{C}{2}\right)},$$

albo $$c = \sqrt{(a+b)^2\,\text{wst}^2\frac{C}{2} + (a-b)^2\,\text{dos}^2\frac{C}{2}};$$

Wyrażenie to może wziąć następującą formę

$$c = (a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2\,\text{dot}^2\,\frac{C}{2}}{(a+b)^2}};$$

zkąd, nazywając φ kąt pomocniczy taki aby było

$$\text{sty}\,\varphi = \frac{(a-b\,\text{dot}\,\frac{C}{2}}{a+b},$$ wyniknie

$$c=(a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}\sqrt{1+\text{sty}^2\varphi}=(a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}\,\text{sie}\,\varphi,$$

albo jeszcze

$$c=\frac{(a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}}{\text{dos}\,\varphi}.$$

Co było do okazania.

Z resztą, to drugie rozwiązanie dające bok c nie różni się od poprzedzającego.

Jakoż, kąt pomocniczy φ, równa się $\frac{A-B}{2}$; bo, jakośmy widzieli,

$$\text{sty}\,\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\,\text{dot}\,\frac{C}{2}}{(a+b)}.\ \text{Zatem}$$

$$c=\frac{(a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}}{\text{dos}\,\varphi}=\frac{(a+b)\,\text{wst}\,\frac{C}{2}}{\text{dos}\left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

46. Czwarty Przypadek. — *Mając dane trzy boki* a, b, c, *znaleźć trzy kąty* A, B, C.

Poszukajmy naprzód kąta A.

Twierdzenie II (38) daje

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,\text{dos}\,A;\quad \text{zkąd}\quad \text{dos}\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Ale trzeba jeszcze zamienić wyrażenie $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ na inne, któreby za pomocą logarytmów wyrachować można.

Widzimy zaraz że, odejmując od 1 wartość dos A, i sprowadzając do jednego mianownika, będzie

$$1-\text{dos}\,A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}.$$

Licznik, jako różnica dwóch kwadratów, równa się iloczynowi z summy przez różnicę ich pierwiastków, to jest

$$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c);$$

a zaś $$1 - \text{dos}\,A = 2\,\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Więc $$2\,\text{wst}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

zkąd

$$\text{wst}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c(a-b+c)}{4bc}}.$$

Uczyńmy, jako zwykle dla skrócenia, $a+b+c=2p$, wyniknie ztąd

$$a-b+c=2(p-b), \quad \text{i} \quad a+b-c=2(p-c);$$

co podstawiając otrzymamy

$$\text{wst}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (1).$$

Można otrzymać podobnym rachunkiem dostawę $\frac{1}{2}A$. Jakoż, dodając jedność do obydwóch stron równania

$$\text{dos}\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

otrzymamy

$$1+\text{dos}\,A = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

albo

$$2\,\text{dos}^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

zkąd, używając skróceń powyżej wyłożonych, wynika ostatecznie

$$\text{dos}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (2);$$

Formuły (1), (2) dają natychmiast, dzieląc jedną przez drugą,

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Formuła ta pokazuje że, *aby otrzymać styczną połowy jednego z kątów szukanego trójkąta, trzeba odjąć od połowy obwodu, kolejno, każdy z dwóch boków które ten kąt zawierają; potem podzielić iloczyn tych dwóch różnic przez iloczyn z półobwodu i różnicy między półobwodem i trzecim bokiem; nakoniec, wyciągnąć z ilorazu pierwiastek kwadratowy który będzie szukaną styczną.*

Stosując to prawidło do kątów B i C znajdziemy

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

We wszystkich tych formułach wst $\frac{1}{2}$A, dos $\frac{1}{2}$A, sty $\frac{1}{2}$A, trzeba wziąć pierwiastnik ze znakiem $+$, ponieważ linie trygonometryczne kątów ostrych $\frac{1}{2}$A, $\frac{1}{2}$B, $\frac{1}{2}$C są koniecznie dodatnemi.

Stosując logarytmy do tych trzech różnych formuł, mamy

$$\log \text{wst}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\{\log(p-b) + \log(p-c) + D^e \log b + D^e \log c\},$$

$$\log \text{dos}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\{\log p + \log(p-a) + D^e \log b + D^e \log c\},$$

$$\log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\{\log(p-b) + \log(p-c) + D^e \log p + D^e \log(p-a)\}.$$

Jeśli jeden tylko jest kąt do wyznaczenia, ponieważ każda ze trzech formuł rzeczonych wymaga szukania czterech logarytmów, jest prawie obojętną rzeczą użyć ktorejkolwiek z nich; chociaż ściśle mówiąc, w tym przypadku formuła (2) cokolwiek mniej wymaga rachunku niż dwie inne. Ale, gdy trzeba wyrachować trzy kąty, najkorzystniej jest użyć formuły (3), bo wtedy dosyć znaleźć logarytmy liczb p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, aby otrzymać trzy kąty trójkąta; gdy przeciwnie, używając formuły (1), lub formuły (2), trzebaby szukać sześciu logarytmów dla pierwszej, a siedmiu dla drugiej.

Dyskussya — Ponieważ wartość wst $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ powinna być rzeczywistą i mniejszą od jedności, trzeba żeby iloraz $\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ był dodatnym i mniejszym od jedności. Pierwszy z tych warunków wymaga, aby różnice, $p-b$, $p-c$, były obie razem dodatne albo odjemne, to jest $(p-b)>0$, i $(p-c)>0$, albo $(p-b)<0$, i $(p-c)<0$. Ale dwie ostatnie nierówności nie mogą istnieć jednocześnie, bo dodając je znajdziemy

$$2p-b-c<0, \quad \text{albo} \quad a<0;$$

to jest bok a musiałby być odjemnym, co niemożebne.

Z nierówności $(p-b)>0$, $(p-c)>0$, wynika $b<p$, $c<p$, albo $2b<a+b+c$, $2c<a+b+c$, co daje $b<a+c$, $c<a+b$.

Drugi warunek $\frac{(p-b)(p-c)}{bc}<1$, prowadzi do

$$(p-b)(p-c)<bc;\quad \text{zkąd}\quad p^2-p(b+c)+bc<bc.$$

Znosząc wyraz spólny bc, i dzieląc przez czynnik p który jest dodatnym, otrzymamy.

$$p-(b+c)<0;\quad \text{zkąd}$$

$$2p-2b-2c<0,\quad \text{albo}\quad a<b+c.$$

Dyskutujmy teraz formułę

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Dostawa kąta $\frac{1}{2}A$ powinna być rzeczywistą i mniejszą od jedności: przeto trzeba aby było

$$1>\frac{p(p-a)}{bc}>0.$$

Pierwsza z tych nierówności daje zaraz

$$a<p;\quad \text{zkąd}\quad a<b+c.$$

Z drugiej nierówności przychodzi

$$p(p-a)<bc.$$

Zastępując p przez jego wartość $\frac{a+b+c}{2}$ otrzymamy

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}<bc,$$

a następnie $(b+c)^2-a^2<4bc$, albo $(b-c)^2<a^2$.

Ztąd, przypuszczając $b<c$, wynika ostatecznie

$$b-c<a,\quad \text{albo}\quad b<a+c;$$

a nadto $c<a+b$, bo $c<b$ z przypuszczenia.

Co do trzeciej formuły

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

da ona dla kąta A wartość rzeczywistą i mniejszą od 180°, jeśli $\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$ jest ilością dodatną i skończoną.

Ten warunek wymaga aby licznik i mianownik były ilościami skończonemi, i oba tych samych znaków. Uważajmy nadto że dwie różnice którekolwiek, jako $p-a$, $p-b$, nie mogą być odjemne, bo dodając je, mielibyśmy $2p-a-b<0$, zkąd $c<0$; co oczywiście niemożebne. Ztąd wnosimy że wszystkie trzy różnice: $p-a$, $p-b$, $p-c$, muszą być dodatne; p jest oczywiście liczbą dodatną. Zatem $p>a$, $p>b$, $p>c$; a ztąd $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$.

Otrzymujemy tedy, za pomocą trygonometryi, te same warunki możebności trójkąta, którego trzy boki są dane, jakie wskazuje Geometrya elementarna.

47. Wiadomo z Geometryi że znajomość trzech kątów trójkąta nie jest dostateczną do jego wyznaczenia, daje ona tylko stosunek boków. Można tego wprost dowieśdź za pomocą samej trygonometryi.

Jakoż, w każdym trójkącie, mamy (39)

$$a = b \operatorname{dos} C + c \operatorname{dos} B \quad (1),$$

$$b = c \operatorname{dos} A + a \operatorname{dos} C \quad (2),$$

$$c = a \operatorname{dos} B + b \operatorname{dos} A \quad (3).$$

Wyrugujmy niewiadomę c między pierwszem i trzeciem równaniem, otrzymamy

$$a = b\,(\operatorname{dos} C + \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B) + a \operatorname{dos}^2 B,$$

albo $$\operatorname{dos} C + \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B = \frac{a}{b} \operatorname{wst}^2 B \quad (4).$$

Aby wyrugować wprost c między drugiem i trzeciem równaniem, uważajmy że równanie (1) staje się (2), jeśli w niem przemienimy B na A, a na b i b na a.

Więc $$\operatorname{dos} C + \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B = \frac{b}{a} \operatorname{wst}^2 A \quad (5).$$

Wynika z równań (4) i (5) że powinno być

$$\frac{a}{b} \operatorname{wst}^2 B = \frac{b}{a} \operatorname{wst}^2 A, \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\operatorname{wst} A} = \frac{b}{\operatorname{wst} B},$$

co właśnie ma miejsce w każdym trójkącie.

Więc równania (4) i (5) są tosame; zatem między bokami a i b niema tylko jedno równanie, i dlatego boki te zostają *niewyznaczone*. Ale przeciwnie ich stosunek $\frac{a}{b}$ jest wyznaczonym, ponieważ $\frac{a}{b}=\frac{\text{dos A dos B}+\text{dos C}}{\text{wst}^2\,\text{B}}$.

Kończąc, zwracamy baczność czytelnika na powyższy sposób dowodzenia, który pokazuje jak z równań (1), (2), (3) można łatwo wyprowadzić zasadnicze równania

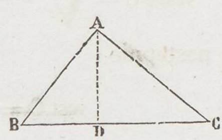
$$\frac{a}{\text{wst A}}=\frac{b}{\text{wst B}}=\frac{c}{\text{wst C}}.$$

WYZNACZENIE POWIERZCHNI TRÓJKĄTA, PROMIENI KÓŁ OPISANEGO I WPISANYCH.

48. Aby uzupełnić rozwiązanie trójkątów, należy jeszcze pokazać jak się otrzymuje ich powierzchnia w funkcyi ilości danych, w każdym ze czterech przypadków.

1° *Są dane bok* a *i dwa kąty* B, C.

Nazwijmy S powierzchnię trójkąta ABC, będzie



$$\text{S}=\tfrac{1}{2}a\times\text{AD}.$$

W trójkącie prostokątnym ABD, mamy

$$\text{AD}=c\,\text{wst B}.$$

Aże $\frac{c}{a}=\frac{\text{wst C}}{\text{wst A}}=\frac{\text{wst C}}{\text{wst (B+C)}}$; zatem $\text{AD}=\frac{a\,\text{wst B wst C}}{\text{wst (B+C)}}$.

Więc $$\text{S}=\frac{a^2\,\text{wst B wst C}}{2\,\text{wst (B+C)}}.$$

2° *Są dane dwa boki* a, b *i kąt* C *niemi zawarty*.

Mamy $$\text{S}=\tfrac{1}{2}a\times\text{AD}.$$

Trójkąt prostokątny ACD daje

$$\text{AD}=b\,\text{wst C}.$$

Więc $$\text{S}=\tfrac{1}{2}ab\,\text{wst C}.$$

3° *Są dane dwa boki* a, b *i kąt* A *przeciwny jednemu z nich.*

Na mocy powyższego przypadku,

$$S = \tfrac{1}{2} bc \,\mathrm{wst}\, A.$$

Ale wartość boku c, w funkcyi części danych trójkąta, jest już wiadomą (42)

$$c = b \,\mathrm{dos}\, A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \,\mathrm{wst}^2 A};$$

więc $$S = \tfrac{1}{2} b \,\mathrm{wst}\, A \left(b \,\mathrm{dos}\, A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \,\mathrm{wst}^2 A}\right).$$

Wiemy już w jakim razie dwie wartości otrzymane czynią zadosyć zagadnieniu, i jak można zrobić formułę wyrachowalną przez logarytmy.

4° *Są dane trzy boki* a, b, c *trójkąta.*

Aby znaleźć powierzchnię trójkąta w funkcyi boków, za pomocą formuły $S = \dfrac{ab \,\mathrm{wst}\, C}{2}$, poszukajmy naprzód wartości wst C.

Owoż mamy $$\mathrm{wst}\, C = 2 \,\mathrm{wst}\, \tfrac{1}{2} C \,\mathrm{dos}\, \tfrac{1}{2} C.$$

Ale na mocy wiadomych formuł

$$\mathrm{wst}\, \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \qquad \mathrm{dos}\, \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

a następnie

$$\mathrm{wst}\, C = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

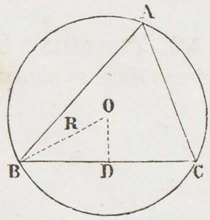
zatem $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Więc, aby wyznaczyć powierzchnię trójkąta w funkcyi trzech jego boków, trzeba od połowy obwodu odciągnąć kolejno każdy z tych boków; zrobić potem iloczyn ze trzech reszt i z połowy obwodu, i nakoniec wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z otrzymanego wyniku.

Rozwiążemy jeszcze kilka zagadnień, aby tem lepiej pokazać użycie trygonometryi w kwestyach geometrycznych.

49. Zagadnienie I. — *Mając dane boki trójkąta, znaleźć promienie kół, opisanego, wpisanego i zawpisanych.*

Aby znaleźć promień R koła opisanego na trójkącie ABC, mamy widocznie w trójkącie BOD,



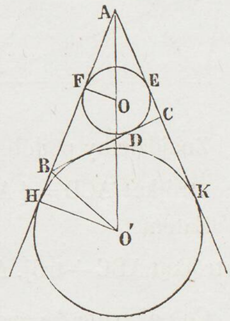
$$\frac{a}{2} = \text{R wst BOD} = \text{R wst A}.$$

Nadto, $\text{wst A} = 2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}\text{A}.$

Więc

$$\text{R} = \frac{a}{4\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{A}}$$

$$= \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$



50. Niech będą D, E, F punkta zetknięć koła wpisanego, którego promień OF nazwiemy r. Ponieważ summa trzech odcinków nieprzyległych AF, BD, CD równa się widocznie połowie obwodu trójkąta, mamy

$$\text{AF} = p - (\text{BD} + \text{CD}) = p - a.$$

Więc w trójkącie AOF

$$r = (p-a)\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\text{A}$$

albo $r = (p-a)\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$

51. Nazywając α promień O'H koła *zawpisanego*, które jest stycznem w kącie A trójkąta ABC, mamy w trójkącie AO'H

$$\text{O'H} = \text{AH sty}\,\tfrac{1}{2}\text{A}, \quad \text{albo} \quad \alpha = p\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\text{A};$$

zkąd $\alpha = p\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$

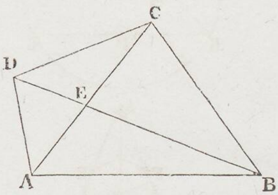
Nazywając podobnie β, γ promienie kół zawpisanych stycznych do kątow B, C, będzie

$$\beta = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

POWIERZCHNIA CZWOROBOKU.

52. ZAGADNIENIE II. — *Znaleźć powierzchnię czworoboku* ABCD *którego dane są obie przekątne* AC, BD, *i kąt niemi zawarty* AEB.

Mamy



$$\text{trójkąt } ABE = \tfrac{1}{2} AE \, . \, BE \text{ wst } AEB;$$
$$\text{trójkąt } BEC = \tfrac{1}{2} CE \, . \, BE \text{ wst } BEC.$$

Dodając te dwie równości i bacząc że kąty spełniające AEB, BEC mają tę samą wstawę, będzie

$$\text{trójkąt } ABC = \tfrac{1}{2} AC \, . \, BE \text{ wst } AEB.$$

Znajdziemy podobnie

$$\text{trójkąt } ACD = \tfrac{1}{2} AC \, . \, DE \text{ wst } AED = \tfrac{1}{2} AC \, . \, DE \text{ wst } AEB.$$

Zatem

$$\text{trójkąt } ABC + \text{trój. } ACD \text{ albo } ABCD = \tfrac{1}{2} AC \, . \, BD \text{ wst } AEB.$$

Co pokazuje, że *powierzchnia czworoboku jakiegokolwiek równa się połowie iloczynu z dwóch przekątnych przez wstawę kąta zawartego.*

53. ZAGADNIENIE III. — *Wyznaczyć przekątne i powierzchnię czworoboku wpisalnego, którego są dane cztery boki.*

Niech będzie ABCD czworobok wpisany w koło, którego boki AB, BC, CD, AD nazwiemy a, b, c, d.

Kąty przeciwne B, D, jako spełniające, mają dostawy równe i znaków przeciwnych, a trójkąty ABC, ACD dają

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ dos } B \quad (1),$$
$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \text{ dos } B \quad (2);$$

zkąd $\quad a^2 + b^2 - 2ab \text{ dos } B = c^2 + d^2 + 2cd \text{ dos } B,$

a zatem

$$\text{dos } B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \quad (3).$$

Zastępując tę wartość dos A, w równaniu (1), znajdziemy

$$\overline{AC}^2 = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

albo $$AC = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \quad (4).$$

Takim samym sposobem znajdzie się

$$BD = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} \quad (5).$$

Z równań (4), (5) można wnieść zaraz

$$BD \times AC = ac+bd \quad \text{i} \quad \frac{BD}{AC} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Co daje dwa znane twierdzenia Geometryi.

W czworoboku wpisanym w koło, 1° prostokąt z przekątnych równa się summie prostokątów z boków przeciwnych; 2° przekątne mają się do siebie jako summy prostokątów z boków które schodzą się przy ich skrajnościach.

Formuła (3), dająca kąt B w funkcyi czterech boków, nie jest wyrachowalną przez logarytmy; ale można z niej wywieśdź inną temu rachunkowi dogodną.

Jakoż, $\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \text{dos}\, B}{2}$, $\text{dos}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 + \text{dos}\, B}{2}$,

podstawiając wartość dos B, będzie

$$\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{4(ab+cd)} = \frac{(b+c+d-a)(a+c+d-b)}{4(ab+cd)},$$

$$\text{dos}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{4(ab+cd)} = \frac{(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}.$$

Uczyńmy $2p$ obwód czworoboku, będziemy mieli

$$a+b+c-d = 2(p-d), \text{ etc.} \quad \text{Zatem}$$

$$\text{wst}\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}} \quad (6),$$

$$\text{dos}\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}} \quad (7);$$

zkąd, dzieląc stronami, otrzymujemy formułę żądaną

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}} \quad (8).$$

Aby znaleźć powierzchnię czworoboku ABCD wpisanego, uważajmy że, na mocy (48, 2°), mamy

$$\text{trójkąt ABC} = \tfrac{1}{2}ab \text{ wst B}, \qquad \text{trójkąt ACD} = \tfrac{1}{2}cd \text{ wst B},$$

zatem czworobok $\text{ABCD} = \tfrac{1}{2}(ab+cd) \text{ wst B}$.

Ale, mnożąc stronami równania (6), (7), mamy

$$\text{wst B} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

więc, podstawiając, otrzymamy

$$\text{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (9).$$

Gdy bok $d = 0$, czworobok zmienia się na trójkąt, którego trzy boki są a, b, c, i znajduje się formuła już znana

$$\text{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

54. Można jeszcze wyznaczyć promień R koła opisanego w funkcyi czterech boków.

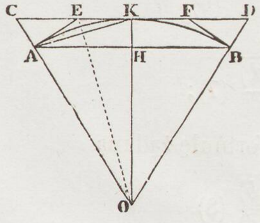
Bo, w trójkącie ABC, jako już wiadomo,

$$\text{R} = \frac{\text{AC}}{2 \text{ wst B}}.$$

Więc $$\text{R} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} \quad (10).$$

Dla ćwiczenia, i zarazem aby pokazać obszerniejsze użycie trygonometryi, dajemy tu jeszcze kilka zagadnień, które się łatwo rozwiązują geometrycznie.

55. Zagadnienie IV. — *Mając daną liczbę boków* n *wielokąta foremnego wpisanego w koło, którego promień jest* R, *wyznaczyć bok wielokąta, i w funkcyi tego boku znaleźć : 1° bok wielokąta foremnego opisanego, tej samej liczby boków; 2° boki wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, podwójnej liczby boków.*



Niech będą b, B boki AB, CD wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, mających n boków; ma się oczywiście

$$\text{AH} = \text{OA wst AOH}, \quad \text{CK} = \text{OK sty COK},$$

czyli

1° $\quad b = 2\,\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n},\quad \mathrm{B} = 2\,\mathrm{R}\,\mathrm{sty}\,\frac{\pi}{n}.$

Te dwie równości dają natychmiast

$$\mathrm{B} = \frac{b}{\mathrm{dos}\,\frac{\pi}{n}}.$$

A jeśli zechcemy uważać że

$$\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n} = \frac{b}{2\,\mathrm{R}},\quad \text{zkąd}\quad \mathrm{dos}\,\frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,\mathrm{R}^2}},$$

otrzymamy $\quad \mathrm{B} = \dfrac{2\,\mathrm{R}b}{\sqrt{4\,\mathrm{R}^2 - b^2}}.$

2° Nazwijmy teraz b', B' boki wielokątów foremnych wpisanego i opisanego, mających $2n$ boków. Będziemy mieli naprzód

AK czyli $b' = 2\,\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}$, 2EK czyli $\mathrm{B}' = 2\,\mathrm{R}\,\mathrm{sty}\,\frac{\pi}{2n}$.

Owoż, $\quad \mathrm{wst}\,\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n}} - \sqrt{1 - \mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n}}\right),$

albo $\quad \mathrm{wst}\,\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{b}{2\,\mathrm{R}}} - \sqrt{1 - \frac{b}{2\,\mathrm{R}}}\right),$

więc $\quad b' = \mathrm{R}\left(\sqrt{1 + \frac{b}{2\,\mathrm{R}}} - \sqrt{1 - \frac{b}{2\,\mathrm{R}}}\right).$

Mamy nadto

$$\mathrm{sty}\,\frac{\pi}{2n} = \frac{\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}}{\mathrm{dos}\,\frac{\pi}{2n}} = \frac{\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}\,.\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}}{\mathrm{dos}\,\frac{\pi}{2n}\,.\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}} = \frac{2\,\mathrm{wst}^2\,\frac{\pi}{2n}}{\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n}}.$$

Zastępując w tej ostatniej równości, $\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2n}$ i $\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{n}$, przez ich wartości, znajdziemy

$$\mathrm{sty}\,\frac{\pi}{2n} = \frac{2\,\mathrm{R}}{b}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,\mathrm{R}^2}}\right);$$

więc nakoniec $\quad \mathrm{B}' = \dfrac{4\,\mathrm{R}^2}{b}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,\mathrm{R}^2}}\right).$

56. Zagadnienie V. — *Mając powierzchnie* s, S *wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego liczby* n *boków, znaleźć powierzchnie* s', S' *wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego podwójnej liczby boków.*

Poprzednia figura daje łatwo

$$s = n\,\text{trój. ABO}, \qquad S = n\,\text{trój. CDO}.$$

Ale $\quad \text{trój. ABO} = \tfrac{1}{2}\text{OA}\,.\,\text{OB wst AOB} = \tfrac{1}{2}R^2 \text{ wst } \frac{2\pi}{n};$

a zaś $\quad \text{trój. CDO} = \text{OK}\,.\,\text{CK} = R^2 \text{ sty } \frac{\pi}{n}.$

Zatem $\quad s = \tfrac{1}{2}nR^2 \text{ wst} \frac{2\pi}{n} \;(1), \qquad S = nR^2 \text{ sty} \frac{\pi}{n} \;(2).$

Zastępując w tych dwóch formułach n przez $2n$, będziemy mieli

$$s' = nR^2 \text{ wst } \frac{\pi}{n} \;(3), \qquad S' = 2nR^2 \text{ sty} \frac{\pi}{2n} \;(4).$$

Za pomocą tych formuł łatwo rozwiązuje się zadana kwestya. Jakoż, dzieląc stronami, wynika naprzód

$$\frac{s}{s'} = \frac{\text{wst}\frac{2\pi}{n}}{2\,\text{wst}\frac{\pi}{n}} = \text{dos}\frac{\pi}{n}, \qquad \frac{s'}{S} = \frac{\text{wst}\frac{\pi}{n}}{\text{sty}\frac{\pi}{n}} = \text{dos}\frac{\pi}{n},$$

zkąd $\quad \frac{s}{s'} = \frac{s'}{S}, \quad$ albo $\quad s' = \sqrt{Ss}.$

A potem mamy także

$$\frac{s'}{S'} = \frac{\text{wst}\frac{\pi}{n}}{2\,\text{sty}\frac{\pi}{2n}} = \frac{\text{wst}\frac{\pi}{2n}\text{ dos}\frac{\pi}{2n}}{\text{sty}\frac{\pi}{2n}} = \text{dos}\frac{2\pi}{2n} = \frac{1 + \text{dos}\frac{\pi}{n}}{2}.$$

Ale, z powyższego rachunku, $\quad \text{dos}\frac{\pi}{n} = \frac{s}{s'};$

zatem $\quad \frac{s'}{S'} = \frac{1 + \frac{s}{s'}}{2} = \frac{s + s'}{2s'};$

a następnie $\quad S' = \frac{2s'^2}{s + s'}; \quad$ więc $\quad S' = \frac{2Ss}{s + s'}.$

57. Zagadnienie VI.— *Znaleźć powierzchnię trójkąta, znając : 1° kąty i obwód; 2° kąty i promień jednego z kół wpisanych; 2° kąty i promień koła opisanego.*

Niech będą A, B, C, trzy kąty trójkąta; S jego powierzchnia; r, R promienie kół wpisanego i opisanego; α, β, γ promienie kół zawpisanych.

Wiemy że

$$\text{sty}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \text{sty}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\text{sty}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Wynika ztąd

$$\text{sty}\frac{A}{2}\,\text{sty}\frac{B}{2}\,\text{sty}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=\frac{S}{p^2};$$

a zatem

1° $$S=p^2\,\text{sty}\frac{A}{2}\,\text{sty}\frac{B}{2}\,\text{sty}\frac{C}{2}.$$

2° Rugując p w dwóch równaniach

$$S=pr \quad \text{i} \quad S=p^2\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A\,\text{sty}\tfrac{1}{2}B\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C$$

otrzymujemy

$$S=\frac{r^2}{\text{sty}\frac{1}{2}A\,\text{sty}\frac{1}{2}B\,\text{sty}\frac{1}{2}C}.$$

Podobnie, rugując p między równaniami numeru 5°

$$\alpha=p\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A,\quad \beta=p\,\text{sty}\tfrac{1}{2}B,\quad \gamma=p\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{i}\quad S=p^2\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A\,\text{sty}\tfrac{1}{2}B\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C,$$

wyniknie

$$S=\frac{\alpha^2\,\text{sty}\frac{1}{2}B\,\text{sty}\frac{1}{2}C}{\text{sty}\frac{1}{2}A},$$

$$S=\frac{\beta^2\,\text{sty}\frac{1}{2}A\,\text{sty}\frac{1}{2}C}{\text{sty}\frac{1}{2}A},$$

$$S=\frac{\gamma^3\,\text{sty}\frac{1}{2}A\,\text{sty}\frac{1}{2}B}{\text{sty}\frac{1}{2}C}.$$

3° Nareszcie równania

$$S = \tfrac{1}{2}\,bc \text{ wst A}, \quad S = \tfrac{1}{2}ac \text{ wst B}, \quad S = \tfrac{1}{2}ab \text{ wst C},$$

pomnożone przez siebie, dają

$$S^3 = \tfrac{1}{8}a^2 b^2 c^2 \text{ wst A wst B wst C}.$$

Ale, jako wiadomo, $abc = 4\,\mathrm{RS}$; więc, podstawiając, mamy

$$S^3 = 2R^2S^2 \text{ wst A wst B wst C},$$

albo
$$S = 2\,R^2 \text{ wst A wst B wst C}.$$

Co daje rozwiązanie zagadnienia.

58. Zagadnienie VII.—*Jakie powinny być dwa łuki* α, β, *których summa* $\alpha+\beta$ *jest stałą, aby iloczyn ich wstaw*, $\text{wst}\,\alpha \times \text{wst}\,\beta$, *był największym możebnym?*

Nazwijmy m summę daną dwóch łuków zmiennych α, β; będziemy mieli

$$\text{wst}\,\alpha\ \text{wst}\,\beta = \tfrac{1}{2}\left\{\text{dos}\,(\alpha-\beta) - \text{dos}\,m\right\}.$$

Więc, aby iloczyn $\text{wst}\,\alpha\ \text{wst}\,\beta$, był największym możebnym, musi być $(\alpha-\beta)=1$. Co wymaga aby

$$\alpha - \beta = 2k\pi;$$

wyrażając przez k liczbę całkowitą, dodatną albo odjemną, która może być zerem.

Z równości $\alpha+\beta=m$, $\alpha-\beta=2k\pi$, mamy

$$\alpha = \frac{m}{2} + k\pi, \qquad \beta = \frac{m}{2} - k\pi.$$

Zastępując, w tych dwóch formułach, k przez 0, 1, 2, ..., aż do największej liczby całkowitej zawartej w $\frac{m}{2\pi}$, będziemy mieli wszystkie wartości α, β, odpowiedające szukanemu *maximum*, które jest $\tfrac{1}{2}(1-\text{dos}\,m) = \text{wst}^2\,\frac{m}{2}$.

Gdy summa dana m jest mniejszą od okręgu, k nie może mieć za wartość tylko zero, wtedy

$$\alpha = \frac{m}{2} = \beta.$$

Więc w tym razie jedno tylko jest rozwiązanie.

59. Zagadnienie VIII. — *Ze wszystkich trójkątów mających ten sam bok* a *i kąt mu przeciwny* A, *który jest największym?*

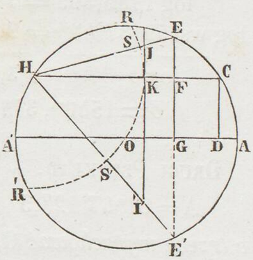
Kąty przyległe B i C nie są znane, ale ich summa jest wiadomą, bo $B+C=180°-A$. Biorąc tedy powierzchnię trójkąta szukanego w funkcyi boku a i kąta mu przeciwnego A, mamy

$$S=\frac{\frac{1}{2}a^2 \text{ wst B wst C}}{\text{wst A}}.$$

To pokazuje, że kwestya zadana przywodzi się do znalezienia maximum iloczynu, wst B wst C, wstaw kątów B, C których summa jest stałą. Aby otrzymać to maximum, trzeba wziąć $B=C$, jakośmy to dopiero co widzieli.

Więc ze wszystkich trójkątów mających bok i kąt mu przeciwny spólny, największym jest ten w którym dwa kąty zmienne są sobie równe.

60. Można dowieśdź geometrycznie że *Summa wstaw dwóch łuków ma się do różnicy tychże wstaw, jako styczna połowy summy łuków odpowiednych do stycznej połowy ich różnicy.*



Niech będą AE i AC dwa łuki jakiekolwiek, które nazwiemy a i b; mamy $EG=\text{wst}\,a$, $CD=\text{wst}\,b$. A jeśli poprowadzimy CH równoległą do AA′, i przedłużymy EG aż do spotkania z okręgiem w punkcie E′, będzie

$$CE=a-b, \quad CE'=a+b,$$

$$EF=\text{wst}\,a-\text{wst}\,b, \quad E'F=\text{wst}\,a+\text{wst}\,b.$$

To zrobiwszy, poprowadźmy jeszcze prostę EH, i z punktu H jako środka, promieniem koła OA, nakreślmy łuk RR′; jeśli poprowadzimy IKI′ prostopadłą do CH, odcinki KI, KI′ będą stycznemi łuków KS i KS′. Lecz kąt CHE ma za miarę z jednej strony łuk KS, a z drugiej połowę łuku CE, i te dwa łuki są nakreślone tym samym promieniem; zatem łuk KS jest połową łuku CE. Dowiedzie się podobnie że łuk KS′ jest połową łuku CE′. Wynika ztąd że

$$KI=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b), \quad KI'=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Owoż, podług twierdzenia dawno nam znanego, trójkąt EHE′ daje proporcyę $FE' : FE :: KI' : KI$;

więc $\text{wst}\,a + \text{wst}\,b : \text{wst}\,a - \text{wst}\,b :: \text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b) : \text{sty}\tfrac{1}{2}(a-b)$.

Co było do dowodzenia.

ZASTOSOWANIA LICZEBNE.

61. Dla wprawy rachunku liczebnego, dajemy tu przykład jednego przypadku trójkąta prostokątnego, i jeden przykład każdego ze czterech przypadków trójkątów jakichkolwiek; w jednym z nich dołączamy powierzchnię trójkąta.

PIERWSZY PRZYKŁAD. — *Są dane w trójkącie prostokątnym*

$$A = 90^\circ. \quad a = 1785^m,395; \quad B = 59^\circ 37' 42''$$

a trzeba znaleźć b, c, C.

Odejmując kąt B od 90°, mamy kąt $C = 30^\circ 22' 18''$. Boki b, c rachują się jako następuje

Rachunek boku b.

$b = a\,\text{wst}\,B$

log 1785,395	= 3,2517343
log wst 59° 37′ 42″	= 9,9358919
log b	= 3,1876262

$b = 1540^m,374$.

Rachunek boku c.

$c = a\,\text{dos}\,B$.

log 1785,395	= 3,2517343
log dos 59° 37′ 42″	= 9,7038132
log c	= 2,9555475

$c = 902^m,708$.

DRUGI PRZYKŁAD. — *Są dane*

$$A = 81^\circ 47' 12'',5 \quad B = 38^\circ 12' 47'',5 \quad a = 701^m 224$$

a trzeba wyrachować C, b, c.

Mamy najpierw kąt $C = 180^\circ - A - B = 60^\circ$.

Oto wzór rachunku boków b i c.

Rachunek boku b.

$$b = \frac{a\,\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A}.$$

log 701,224	=2,8458568
log wst 38°12′47″,5	=9,7914024
D^{el}. wst 81°47′12″,5	=0,0044774
log b	= 2,6417366

$b = 438^m,265$.

Rachunek boku c.

$$c = \frac{a\,\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}.$$

log 701,224	=2,8458568
D^{el}. wst 81°47′12″,5	=0,0044774
log wst 60°	=9,9375306
log c	=2,7878648

$c = 613^m,571$.

Trzeci Przykład. — *Są dane*

$a = 424^m,096$; $b = 371^m,084$; $C = 21^\circ 47' 12'',5$;

wyrachować A, B *i c*.

Rachunek kąta $\frac{1}{2}$(A — B),

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\,\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C.$$

$a - b = 53,012$

$a + b = 795,18$

$\frac{1}{2}C' = 10^\circ 53' 36''$

$$\begin{aligned}
\log(a-b) &= 1,7243742\\
D^e \log(a+b) &= 7,0995346\\
\log \text{dot}\,\tfrac{1}{2}C &= 0,7156816\\
\hline
\log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9,5395904\\
\tfrac{1}{2}(A-B) &= 19^\circ 6' 23'',75
\end{aligned}$$

Rachunek kątów A *i* B.

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 79^\circ 6' 23'',75$$
$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 19^\circ 6' 23'',75$$

zkąd, dodając i odejmując,

$$A = 98^\circ 12' 47'',5.$$
$$B = 60^\circ.$$

Rachunek wprost boku c.

$$c = \frac{(a+b)\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C}{\text{dos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\begin{aligned}
\log(a+b) &= 2,9004654\\
\log \text{wst}\,\tfrac{1}{2}C &= 9,2764213\\
D^e \log \text{dos}\,\tfrac{1}{2}(A-B) &= 0,0246099\\
\hline
\log c &= 2,2014966
\end{aligned}$$

$$c = 159^m,036.$$

Czwarty Przykład. — *Są dane dwa boki* a, b *i kąt* A *przeciwny jednemu z nich; znaleźć kąty* B, C, *i bok* c.

Niech będzie $a = 5467^m,48$, $b = 5784^m,59$, $A = 66^\circ 18' 42''$.

Rachunek kąta B,

$$\text{wst}\,B = \frac{b\,\text{wst}\,A}{a}.$$

$$\log 5784^m,59 = 3,7622726$$
$$\log \text{wst}\, 66^\circ 18' 42'' = 9,9617743$$
$$D^e \log 5467^m,48 = 6,2622128.$$

$$\log \text{wst B} = 9,9862597,$$

kąty odpowiedające są: $B' = 75^\circ 39' 47'',6$ $B'' = 104^\circ 20' 12'',4$.

Te dwie wartości czynią zadosyć zagadnieniu, ponieważ mamy

$A < 90$, i $a > b$ wst A albo $\log a > \log b + \log \text{wst A} - 10$.

Pierwsze rozwiązanie

$$B = 75^\circ 39' 47'',6.$$

Rachunek kąta C.

$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$A = 66^\circ 18' 42''$$
$$B = 75^\circ 39' 47'',6$$
$$A + B = 141^\circ 58' 29'',6$$
$$C = 38^\circ 1' 30'',4.$$

Rachunek boku c.

$$c = \frac{a \text{ wst C}}{\text{wst B}}.$$

$$\log 5467,48 = 3,7377872$$
$$\log \text{wst}\, 38^\circ 1' 30'',4 = 9,7895855$$
$$D^e \text{l. wst}\, 66^\circ 18' 42'' = 0,0382257$$
$$\log c = 3,5655984$$
$$c = 3677^m,88.$$

Drugie rozwiązanie

$$B = 104^\circ 20' 12'',4.$$

Rachunek kąta C.

$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$A = 66^\circ 18' 42''$$
$$B = 104^\circ 20' 12'',4$$
$$A + B = 170^\circ 38' 54'',4$$
$$C = 9^\circ 21' 5'',6.$$

Rachunek boku c

$$c = \frac{a \text{ wst C}}{\text{wst B}}.$$

$$\log 5467,48 = 3,7377872$$
$$\log \text{wst}\, 9^\circ 21' 5'',6 = 9,2108313$$
$$D^e \text{l. wst}\, 66^\circ 18' 42'' = 0,0382257$$
$$\log c = 2,9868442$$
$$c = 970^m,16.$$

Piąty Przykład. — *Są dane trzy boki*

$$a = 2854,031; \quad b = 3246,927; \quad c = 2543,246;$$

znaleźć trzy kąty A, B, C, *i powierzchnię* S.

Rachunek przygotowawczy.

$p = 4322,102$	$D^e \log p = 6,3643050$
$p - a = 1468,071$	$\log(p - a) = 3,1667472$
$p - b = 1075,175$	$\log(p - b) = 3,0314793$
$p - c = 1778,856$	$\log(p - c) = 3,2501409$

Rachunek kąta A.

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 3{,}0314793\\
\log(p-c) &= 3{,}2501409\\
D^e \log p &= 6{,}3643050\\
D^e \log(p-a) &= 6{,}8332528\\
\hline
&\ 19{,}4791780
\end{aligned}$$

$$\log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}A = 9{,}7395890$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}A &= 28^\circ 46' 3'',8\\
A &= 57^\circ 22' 7'',6
\end{aligned}$$

Rachunek kąta C.

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 3{,}1667472\\
\log(p-b) &= 3{,}0314793\\
D^e \log p &= 6{,}3643050\\
D^e \log(p-c) &= 6{,}7498591\\
\hline
&\ 19{,}3123906
\end{aligned}$$

$$\log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}C' = 9{,}6561953$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}C &= 24^\circ 22' 31'',2\\
C &= 48^\circ 45'\ 2'',4
\end{aligned}$$

Rachunek kąta B.

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 3{,}1667472\\
\log(p-c) &= 3{,}2501409\\
D^e \log p &= 6{,}3643050\\
D^e \log(p-b) &= 6{,}9685207\\
\hline
&\ 19{,}7497138
\end{aligned}$$

$$\log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}B = 9{,}8748569$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}B &= 36^\circ 51' 25''\\
B &= 73^\circ 42' 50''
\end{aligned}$$

Sprawdzenie $A + B + C = 180^\circ$.

Rachunek powierzchni S.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\begin{aligned}
\log p &= 3{,}6356950\\
\log(p-a) &= 3{,}1667472\\
\log(p-b) &= 3{,}0314793\\
\log(p-c) &= 3{,}2501409\\
\hline
&\ 13{,}0840624
\end{aligned}$$

$$\log S = 6{,}5420312$$

$$S = 3183623^{\text{m.kw.}}$$

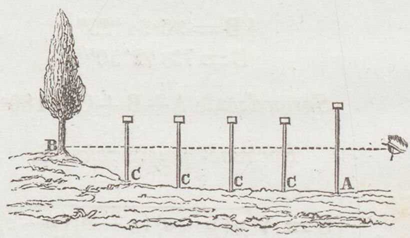
ZASTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO DZIAŁAŃ NA GRUNCIE.

62. Nim będziemy mówili o głównych zastosowaniach trygonometryi, opiszemy naprzód i wskażemy użycie kilku narzędzi nieodzownie potrzebnych do działań praktycznych.

Działania trygonometryi wymagają abyśmy umieli wyznaczyć dwie rzeczy konieczne, 1° kierunek i miarę odległości dwóch punktów danych; 2° miarę kątów utworzonych liniami prostemi które łączą punkta dane na gruncie.

O tyczkach i łańcuchu metrycznym.

Do wytknięcia kierunku linii prostej poprowadzonej przez dwa punkta których chcemy wyznaczyć odległość, używa się *tyczki*, to jest kawałka drzewa formy zwyczajnej graniastonowej, zakończonej krańcem żelaznym, który się wtyka w ziemię. Aby wytknąć kierunek, trzeba przynajmniej dwóch osób. Jedna z nich staje tak aby jej oko było na płaszczyznie pionowej, przechodzącej przez dwa punkta dane A i B; druga zaś wtyka, w pewnych odległościach pomiędzy znakami A, B, tyczki C, C, C,..., tak aby się znajdowały na płaszczyznie pionowej przechodzącej przez oko pierwszej osoby i przedmioty A, B. Takim sposobem wytyka się linia prosta.



Aby wymierzyć odległość AB, używa się zwyczajnie *łańcucha metrycznego* którego długość jest 10 metrów. Ten łańcuch składa się z ogniw prostych, na 10 decymetrów długich. Każdy metr składa się z pięciu ogniw, i oznacza się kółkiem mosiężnem. W środku łańcucha widać mały kawałek żelaza, który oznacza odległość 5 metrów. Tak sporządzony łańcuch bierze jeszcze nazwisko *dekametra.*

Dwóch ludzi idzie z tym łańcuchem rozciągniętym w kierunku linii prostej już wytkniętej, począwszy od A do B.

Ten który idzie naprzód, niesie dziesięć *czopków* żelaznych, które wtyka w ziemię, jeden po drugim, za każdym razem jak łańcuch jest rozciągniętym i jego krańce są na linii poziomej, jakiekolwiek jest z resztą położenie gruntu. Potem łańcusznik, który idzie wtyle, podnosi te czopki w miarę jak do nich przychodzi; i ile ich ma na końcu działania, tyle razy było 10 metrów wymierzonych. Linia tak zmierzona na gruncie nazywa się *podstawą*.

Liniał drewniany, długości dwóch metrów, zastępuje korzystnie łańcuch gdy chodzi o wymierzenie małej odległości, albo gdy się działa w miejscach małej rozciągłości.

Dodajemy tutaj że miara podstawy jest najgłówniejszą rzeczą w działaniach trygonometrycznych. Aby być pewnym większej dokładności działania, powtarza się kilka razy wymierzenie tej podstawy, robi się potem summa wyników otrzymanych, i dzieli się przez ich liczbę; tym sposobem otrzymuje się wartość dla podstawy tak dokładną jak możebnie.

O narzędziach służących do mierzenia kątów.

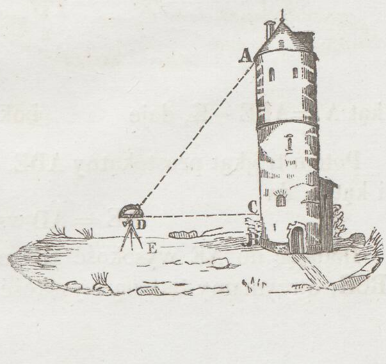
Główne narzędzia których się używa do mierzenia wielkości kątów są: *grafometr*, *busola*, *koło powtarzające*, *teodolit*, *sextan i reflektor kołowy*.

Samo proste widzenie tych instrumentów więcej nauczy niż ich opis, choćby nawet najdrobniejsze zawierał szczegóły. Dlatego też odsyłamy ciekawego czytelnika do dzieł specyalnych, jako Astronomia, Geodezya, Żegluga, gdzie takowe instrumenta są przedstawione dokładnym i skrupulatnym rysunkiem. — W przykładach które damy, przypuścimy że czytelnik umie użyć Grafometra do mierzenia kątów, i wskażemy wykonanie rachunków potrzebnych.

Przystąpmy teraz do przykładów.

63. Zagadnienie IX. — *Wyznaczyć wysokość budynka.*

Przypuśćmy naprzód, że podstawa budynku jest przystępną i że grunt jest prawie płaskim. Jeśli jest mowa na przykład o wieży, aby wymierzyć jej wysokość AB, staje się w pewnej odległości od stopy wieży, w punkcie D, gdzie się stawia grafometr. Prowadzi się potem promień oczny poziomy do boku AB wieży, i drugi pro-



mień do jej szczytu A. W tym celu stawia się koło, podzielone na stopnie, prostopadle wedle pionu który powinien się przykładać do płasczyzny instrumentu. Przywodzi się potem linię stałą grafometru do poziomu; co wymaga aby pion padał na kierunek 90° koła podzielonego. Gdy linia ruchoma została ustalona w kierunku AD, czyta się kąt ADC i mierzy potem odległość CD = BE. Wtedy znamy w trójkącie prostokątnym ACD kąt ADC i bok DC kąta prostego; będzie więc można wyrachować bok AC, to jest wysokość wierzchołka wieży nad płasczyzną poziomą która przechodzi przez środek grafometru, a to za pomocą równości AC = CD sty ADC. Dodawszy wysokość narzędzia DE do AC, będziemy mieli wysokość żądaną AB.

Przykład. — $DE = 1^m,10$; $BE = 61^m,28$; $D = 41°31'25''$. będziemy mieli

$$AC = 61,28 \times \text{sty}\ 41°31'25''$$

$$\log 61,28 = 1,7873188$$

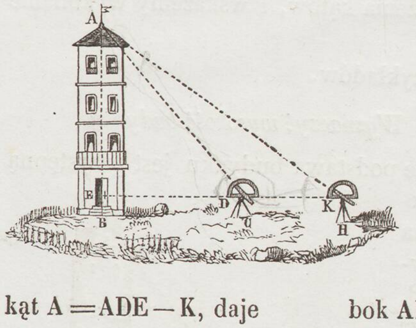
$$\log \text{sty}\ 41°31'25'' = 9,9471690$$

$$\log AC = 1,7344878$$

$$AC = 54^m,261,$$

zatem wysokość $AB = 55^m,361.$

Jeśli spodek wieży jest niedostępnym, wtedy wyprowadzimy linię prostą BCH przechodzącą przez oś wieży; weźmiemy dwie stacye C i H na tej linii prostej; i nakoniec wymierzymy podstawę CH = DK, i kąty ADE, AKE.



Trójkąt ADK, w którym znane są bok DK, kąt K, i kąt A = ADE — K, daje bok $AD = DK \frac{\text{wst}\,K}{\text{wst}\,A}$.

Potem trójkąt prostokątny ADE, w którym znane są bok AD i kąt D, da

$$AE = AD\ \text{wst}\ D.$$

Dodając do AE wysokość CD narzędzia nad linią poziomą BCH, otrzymamy żądaną wysokość AB.

Przykład. — Niech będą następujące dane :

$DK = 14^m,762$, kąt $ADE = 41^\circ 29'$, i kąt $K = 33^\circ 17'$.

Odciągając kąt K od ADE znajdziemy kąt $A = 8^\circ 12'$.

Rachunek boku AD.

$$\log DK = 1,1691452$$
$$\log \text{wst}\, K = 9,7393980$$
$$D^e \log \text{wst}\, A = 0,8457924$$
$$\log AD = 1,7543356$$
$$AD = 56^m,798.$$

Rachunek wysokości AE.

$$\log AD = 1,7543356$$
$$\log \text{wst}\, ADE = 9,8211217$$
$$\log AE = 1,5754573$$
$$AE = 37^m,623$$

Więc wysokość $AB = 38^m,723$.

Uwaga. — W działaniach na gruncie trzeba unikać kątów zbyt ostrych; bo nawet mały błąd popełniony na innych kątach trójkąta może sprowadzić znaczny błąd na boki przyległe. Aby to lepiej okazać, przypuśćmy że, mierząc wysokość wieży, nie popełniamy błędu jeno na samych kątach. Dla skrócenia, nazwijmy D kąt ADE prawdziwy, a zaś $D + \alpha$ kąt ADE wymierzony grafometrem, h wysokość prawdziwą AE. Wysokość wyrachowana będzie

$$DE \,\text{sty}\,(D+\alpha), = h \,\text{dot}\, D \,\text{sty}\,(D+\alpha).$$

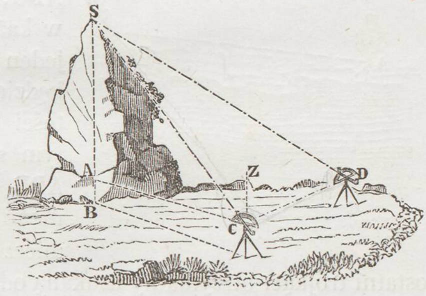
Więc błąd δ w wyznaczeniu wysokosci AE jest

$$\delta = \frac{h\,\text{sty}\,(D+\alpha) - \text{sty}\,D}{\text{sty}\,D} = \frac{h\,\text{wst}\,\alpha}{\text{dos}\,(D+\alpha)\,\text{wst}\,D} = \frac{2h\,\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}\,(2D+\alpha) - \text{wst}\,\alpha}.$$

Przypuszczając błąd α stałym, widzimy że δ będzie tém mniejsze im $\text{wst}\,(2D+\alpha)$ będzie większą. Zatem minimum dla δ odpowieda wartości maximnm dla $\text{wst}\,(2D+\alpha)$, zkąd $2D+\alpha = 90^\circ$; a ponieważ α jest bardzo małe, więc, aby błąd δ był najmniejszym możebnym, trzeba żeby kąt obserwowany był blisko 45°.

64. Zagadnienie X. — *Wymierzyć wysokość góry.*

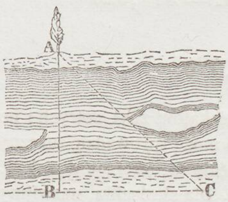
Weźmiemy naprzód podstawę CD, której wymierzymy długość, i przy obydwóch jej skrajnościach wyznaczymy kąty SCD, SDC. Znając wtedy, w trójkącie SCD, bok CD i dwa kąty wyrachujemy bok CS.



Potem, z punktu C, wyznaczymy kąt SCZ utworzony wierzchołkową CZ i promieniem ocznym CS. Znając tedy w trójkącie ACS przeciwprostokątnę CS, kąt ostry S, wyrachujemy bok AS, który jest wysokością wierzchołka S ponad instrumentem, za pomocą równości AS=CS dos S; dodając AB, znajdziemy wysokość żądaną BS.

65. Zagadnienie XI. — *Wyznaczyć odległość punktu danego* B *od innego punktu niedostępnego* A; *jako* np. *wymierzyć szerokość rzeki.*

Mierzy się na gruncie podstawa jakakolwiek BC i dwa kąty ABC, ACB. Wtedy trzeci kąt BAC trójkąta ABC jest znanym, i odległość szukana AB otrzyma się przez proporcyę



AB : BC : : wst C : wst A.

Niech będzie dla rachunku liczebnego

$BC = 247^m,49$; $B = 62°41'$; $C = 59°42'$.

Wywodzi się ztąd kąt $C = 57°37'$.

Rachunek odległości AB.

$$\begin{aligned} \log 247,49 &= 2,3935577 \\ \log \text{wst}\, 62°41' &= 9,9362098 \\ D^e \log \text{wst}\, 57°37' &= 0,0734087 \\ \hline \log AB &= 2,4031762 \end{aligned}$$

Odległość szukana $AB = 253^m,032$.

66. Zagadnienie XII. — *Wyznaczyć odległość dwóch punktów niedostępnych* A, B, *ale widocznych.*

Mierzy się na gruncie podstawa CD i kąty ACD, BCD, ADB, ADC, BDC. Zna się wtedy w każdym z trójkątów ACD, jeden bok i dwa kąty; przeto będzie można wyznaczyć wartości boków BD, DA; mamy tym sposobem, w trójkącie ADB, dwa boki DB, DA i kąt niemi zawarty ADB który był mierzonym. Rozwiązując ten ostatni trójkąt, otrzymamy szukaną odległość AB.

Rozwiązanie trójkątów ACD, BCD daje logarytmy boków AD i BD, nie zaś same boki. Następujący sposób pokazuje, jak, nie przechodząc do liczb, i za pomocą samych jeno logarytmów boków AD, BD i kąta niemi zawartego, można znaleźć żądaną odległość AB.

Uczyńmy, dla skrócenia, bok DB$=a$, AD$=b$ i kąt ADB=D, będziemy mieli proporcyę

$$a+b : a-b :: \operatorname{dot}\frac{D}{2} : \operatorname{sty}\frac{A-B}{2};$$

zkąd

$$\operatorname{sty}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{dot}\frac{D}{2} = \frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}} \times \operatorname{dot}\frac{D}{2}.$$

Weźmy kąt pomocniczy φ, taki aby $\operatorname{sty}\varphi = \dfrac{b}{a}$; kąt φ wyznaczy się za pomocą logarytmów linij trygonometrycznych.

Wyniknie ztąd

$$\operatorname{sty}\frac{A-B}{2} = \frac{1-\operatorname{sty}\varphi}{1+\operatorname{sty}\varphi} \times \operatorname{dot}\frac{D}{2}.$$

Ale znana formuła

$$\operatorname{sty}(a-b) = \frac{\operatorname{sty}a-\operatorname{sty}b}{1+\operatorname{sty}a\operatorname{sty}b} \quad \text{daje,}$$

przypuszczając $a=45^\circ$, a tem samem $\operatorname{sty} a = 1$,

$$\operatorname{sty}(45^\circ - b) = \frac{1-\operatorname{sty}b}{1+1\operatorname{sty}b}.$$

Kładąc w tej ostatniej φ zamiast b, i podstawiając otrzymaną wartość, znajdziemy nakoniec

$$\operatorname{sty}\frac{A-B}{2} = \operatorname{sty}(45^\circ-\varphi)\operatorname{dot}\frac{D}{2}.$$

To ostatnie równanie wyznaczy wartość połowy różnicy kątów A, B trójkąta ADB. Połowa summy tych dwóch kątów jest z resztą wiadomą, ponieważ równa się połowie spełnienia kąta ADB który był mierzonym na gruncie.

Tak więc kąty A i B wyznaczą się za pomocą połowy ich summy i połowy różnicy.

Aby wyrachować odległość AB, weźmiemy proporcyę

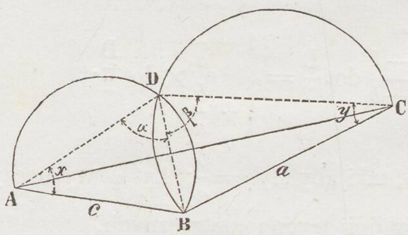
$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} :: \mathrm{wst\,ADB} : \mathrm{wst\,B};$$

zkąd

$$\log \mathrm{AB} = \log \mathrm{AD} + \log \mathrm{wst\,ADB} + \mathrm{D^e} \log \mathrm{wst\,B} - 10.$$

67. Zagadnienie XIII. — *Mając dane trzy punkta widoczne* A, B, C *na karcie krajowej, wyznaczyć położenie czwartego* D *z którego widać proste* AB, BC *pod kątami wiadomemi.*

Punkt D przypuszcza się tu na płasczyznie ABC i w kącie C.



Aby rozwiązać zagadnienie graficznie, nakreślmy na prostych AB, BC odcinki kół obejmujące kąty dane ADB, BDC, z tej strony obydwóch linij z której punkt D ma się znajdować. Łuki tych dwóch odcinków kół będą miały punkt B spólny, a ich drugim punktem przecięcia będzie oczywiście punkt szukany D.

Jeśli odcinki kół, obejmujące kąty dane, mieszają się z sobą, zagadnienie jest niewyznaczonem. Ten szczególny przypadek istnieje gdy kąty dane ADB, BDC są odpowiednio równe kątom ACB, BAC trójkąta ABC.

Jeśli zaś łuki tych odcinków mają tylko punkt B spólny, zagadnienie jest niemożebnem w całem znaczeniu tego wyrazu; ponieważ punkt D powinien się znajdować wewnątrz kąta ABC.

Aby rozwiązać to samo zagadnienie rachunkiem, dosyć wyznaczyć kąty BAD, BCD. Albowiem, gdy te kąty będą znane, łatwo znaleźć wszystkie części czworoboku ABCD, ponieważ w każdym z trójkątów BAD, BCD będziemy mieli wiadome jeden bok i dwa kąty.

Dla skrócenia, uczyńmy $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{AB} = b$, kąt $\mathrm{BDA} = \alpha$, $\mathrm{BDC} = \beta$ i $\mathrm{ABC} = \mathrm{B}$; kąt niewiadomy $\mathrm{BAD} = x$ i $\mathrm{BCD} = y$.

Będzie naprzód

$$x + y = 360^\circ - (\mathrm{B} + \alpha + \beta);$$

nadto

$$\mathrm{wst}\,x : \mathrm{wst}\,\alpha :: \mathrm{BD} : c, \quad \text{i} \quad \mathrm{wst}\,y : \mathrm{wst}\,\beta :: \mathrm{BD} : a;$$

zkąd wynika $\dfrac{\text{wst}\, x}{\text{wst}\, y} = \dfrac{a\, \text{wst}\, \alpha}{c\, \text{wst}\, \beta}\ \dfrac{a}{d}$,

kładąc $\dfrac{c\, \text{wst}\, \beta}{\text{wst}\, \alpha} = d$; liczba d łatwo się wyrachuje przez logarytmy, za pomocą położonego równania.

Poczem równanie $\dfrac{\text{wst}\, x}{\text{wst}\, y} = \dfrac{a}{d}$ daje następnie

$$\frac{\text{wst}\, x - \text{wst}\, y}{\text{wst}\, x + \text{wst}\, y} = \frac{a-d}{a+d}, \quad \text{albo} \quad \frac{\text{sty}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\text{sty}\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{a-d}{a+d};$$

zkąd $$\text{sty}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a-d}{a+d}\, \text{sty}\left(\frac{x+y}{2}\right);$$

a nakoniec $$\text{sty}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{d-a}{a+d}\, \text{sty}\left(\frac{\text{B}+\alpha+\beta}{2}\right).$$

Ta ostatnia równość wyznacza wartość $\dfrac{x-y}{2}$. Będziemy przeto znali połowę różnicy i połowę summy kątów x, y, a następnie wartości tych dwóch kątów.

Musimy tutaj zwrócić uwagę na to, że wartość niewiadomej $\text{sty}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ wzięłaby formę $0 \times \infty$, gdybyśmy mieli zarazem $a = d$, $\text{B} + \alpha + \beta = 180°$. Ta szczególna okoliczność, jako łatwo się widzi, odpowieda przypadkowi w którym odcinki kół, obejmujące kąty dane, schodzą się w jeden; wtedy

$$\alpha = \text{ACB} \quad \text{i} \quad \beta = \text{BAC}.$$

Jakoż, nazwijmy A, C kąty BAC, ACB, będziemy mieli

$$\text{A} + \text{B} + \text{C} = 180° = \text{B} + \alpha + \beta,$$

zkąd $$\text{A} + \text{C} = \alpha + \beta.$$

Nadto, równość przypuszczona $a = d$ i trójkąt ABC dają

$$\frac{\text{wst}\, \alpha}{\text{wst}\, \beta} = \frac{c}{a} = \frac{\text{wst}\, \text{C}}{\text{wst}\, \text{A}};$$

ztąd wywodzimy następujący wynik:

$$\frac{\text{wst}\,\alpha + \text{wst}\,\beta}{\text{wst}\,\alpha - \text{wst}\,\beta} = \frac{\text{wst}\,C + \text{wst}\,A}{\text{wst}\,C - \text{wst}\,A},$$

albo

$$\frac{\text{sty}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\text{sty}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{\text{sty}\left(\frac{C+A}{2}\right)}{\text{sty}\left(\frac{C-A}{2}\right)}.$$

Aże z powyższego $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{C+A}{2}$, zatem $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{C-A}{2}$;

więc $\alpha = C$, i $\beta = A$.

Czego właśnie trzeba było dowieśdź.

ĆWICZENIA.

I. Okazać że łuk sie $b = 2k\pi + \alpha$; a zaś łuk dosie $b = 2k\pi + \alpha$ i łuk dosie $b = (2k+1)\pi - \alpha$.

II. Wyrachować wstawy i dostawy łuku $\frac{\pi}{20}$ i jego wielokrotników.

III. Dowieśdź że, jeśli $a + b + c = (2k+1)\pi$, wtedy

$$\text{wst}\,a + \text{wst}\,b + \text{wst}\,c = 4\,\text{dos}\,\frac{a}{2}\,\text{dos}\,\frac{b}{2}\,\text{dos}\,\frac{c}{2}.$$

IV. Dowieśdź że w każdym trójkącie

$$\text{wst}\,A + \text{wst}\,B + \text{wst}\,C = \frac{p}{R},$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{p}{4R};$$

$$\text{wst}\,A\,\text{wst}\,B\,\text{wst}\,C = \frac{pr}{R^2},$$

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{4R},$$

$$\text{dot}\,\frac{A}{2} + \text{dot}\,\frac{B}{2} + \text{dot}\,\frac{C}{2} = \text{dot}\,\frac{A}{2}\,\text{dot}\,\frac{B}{2}\,\text{dot}\,\frac{C}{2} = \frac{2S}{r^2}.$$

p oznacza połowę obwodu trójkąta, R i r promienie kół opisanego i wpisanego.

V. Dowieśdź że stosunek $\frac{\text{sty}\, x}{x}$ rośnie ciągle od 1 do ∞ gdy łuk rośnie od 0 do $\frac{1}{2}\pi$.

VI. Wyznaczyć granicę do której dąży iloczyn

$$\text{dos}\, a \,\text{dos}\, \frac{a}{2} \,\text{dos}\, \frac{a}{2^2} \,\text{dos}\, \frac{a}{2^3} \ldots \,\text{dos}\, \frac{a}{2^n},$$

gdy n rośnie nieskończenie.

VII. Wyrachować za pomocą tablic pierwiastki rzeczywiste równania

$$a \,\text{wst}\, x + b \,\text{dos}\, x = c.$$

VIII. Cztery punkta niedostępne A, B, C, D, leżące w linii prostej, są widziane z punktu O na którym się znajduje Miernik. Wyznaczyć odległość BC, znając odległości AB i CD.

IX. Rozwiązać trójkąt którego znaną jest podstawa, wysokość i różnica kątów przy podstawie.

X. Rozwiązać trójkąt którego dane są trzy wysokości.

XI Rozwiązać trójkąt mając dane promienie trzech kół zawpisanych.

XII. Przez punkt O, wzięty zewnątrz koła C, poprowadzono sieczną OAB. Dowieśdź że iloczyn sty $\frac{1}{2}$ ACO sty $\frac{1}{2}$ BCO jest stałym, to jest nie zależy od położenia siecznej OAB.

XIII. Pęk czterech prostych przecięto poprzeczną która spotyka te proste w punktach A, B, C, D. Dowieśdź że stosunek nieharmoniczny $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$ jest stałym.

XIV. Cztery płaszczyzny, przechodzące przez jedną linię prostą, przecięto poprzeczną która spotyka te płaszczyzny w punktach A, B, C, D. Dowieśdź że stosunek nieharmoniczny $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$ jest stałym.

XV. Dowieśdź że wszelka poprzeczna, spotykająca kierunki trzech boków trójkąta, wyznacza na nich sześć odcinków takich że iloczyn trzech odcinków nieprzyległych równa się iloczynowi trzech innych.

XVI. Dowieśdź że stosunek $\frac{\operatorname{wst}(x+b)-\operatorname{wst}x}{h}$ ma za granicę dos x gdy h maleje aż do zera.

XVII. Mając dany wielokąt foremny i punkt M na jego płaszczyznie; dowieśdź że summa kwadratów odległości tego punktu od wszystkich wierzchołków wielokąta zależy od samej tylko odległości punktu M od środka wielokąta.

Zobacz, do tych różnych zadań, GEOMETRYĘ pana G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

KONIEC TRYGONOMETRYI PŁASKIEJ.

KSIĘGA CZWARTA

TRYGONOMETRYA SFERYCZNA

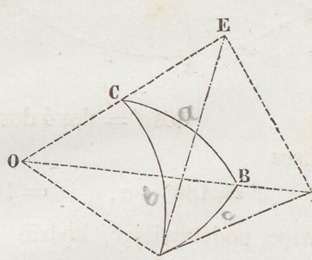
Związki między bokami i kątami trójkąta sferycznego.

68. Trygonometrya sferyczna ma za cel rozwiązanie trójkątów sferycznych.

Boki i kąty trójkąta sferycznego, wykreślonego na danej sferze, są wyznaczone gdy jest znana liczba stopni każdego z nich. Rozwiązanie trójkąta sferycznego zależy więc od związków które zachodzą między liczbami trygonometrycznemi, to jest wstawami, dostawami, etc. boków i kątów. Dlatego właśnie wskażemy naprzód formułę fundamentalną która wyraża związek między jednym kątem i trzema bokami, a z której wywodzą się wszystkie inne rozwiązania trójkątów sferycznych, gdy daną jest dostateczna liczba części wiadomych.

Jako zwykle, oznaczać będziemy boki trójkąta małemi literami a, b, c, a kąty im przeciwne wielkiemi A, B, C.

Formuła fundamentalna. — Niech będzie trójkąt ABC nakreślony na danej sferze która ma środek w punkcie O. Do boków AB, AC kąta A poprowadźmy styczne AD, AE, i przypuśćmy że spotykają, w punktach D, E, promienie OB, OC dostatecznie przedłużone.



Biorąc promień OA za jedność, będziemy mieli

$$AD = \text{sty}\, c, \quad AE = \text{sty}\, b, \quad OD = \text{sie}\, c, \quad OE = \text{sie}\, b.$$

Nadto, kąt stycznych DAE jest właśnie kątem A trójkąta sferycznego, a zaś kąt DOE ma za miarę bok a tego trójkąta.

To zrozumiawszy, trójkąty prostolinijne DAE i DOE, dają

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD\,.\,AE \operatorname{dos} DAE$$

$$\text{i } \overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD\,.\,OE \operatorname{dos} DOE;$$

zkąd, odejmując pierwszą równość od drugiej, bacząc że

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = 1, \quad \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = 1,$$

i dzieląc przez 2, będzie

$$0 = 1 - \operatorname{sie} b \operatorname{sie} c \operatorname{dos} a + \operatorname{sty} b \operatorname{sty} c \operatorname{dos} A.$$

Ale

$$\operatorname{sie} b = \frac{1}{\operatorname{dos} b}, \quad \operatorname{sie} c = \frac{1}{\operatorname{dos} c}, \quad \operatorname{sty} b = \frac{\operatorname{wst} b}{\operatorname{dos} b}, \quad \operatorname{sty} c = \frac{\operatorname{wst} c}{\operatorname{dos} c};$$

mamy przeto

$$1 - \frac{\operatorname{dos} a}{\operatorname{dos} b \operatorname{dos} c} + \frac{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A}{\operatorname{dos} b \operatorname{dos} c} = 0,$$

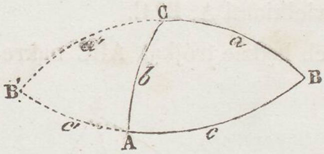
albo

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c + \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A. \quad (1).$$

Związek istniejący między kątem A i trzema bokami trójkąta.

Dowodzenie poprzednie przypuszcza że boki b, c są mniejsze od ćwiercianu, ale znaleziona formuła (1) jest ogólną.

Jakoż, przypuśćmy naprzód że bok $c > 90°$, ale $b < 90°$; przedłużmy boki a, c aż do ich spotkania w B′. Jeśli uczynimy bok $AB' = c'$, $CB' = a'$; trójkąt AB′C, w którym boki c', b są obydwa mniejsze od ćwiercianu, da



$$\operatorname{dos} a' = \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c' + \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c' \operatorname{dos} B'.$$

Lecz

$$a' = 180° - a, \quad c' = 180° - c, \quad B'AC = 180° - A;$$

więc, podstawiając, będzie

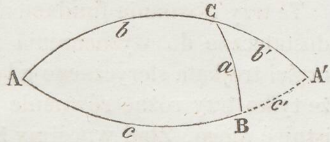
$$-\operatorname{dos} a = -\operatorname{dos} b \operatorname{dos} c - \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A,$$

albo

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c + \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A.$$

Co jest właśnie formułą (1).

Przypuśćmy teraz że boki b, c są oba większe od 90°, i przedłużmy je aż do spotkania się w A'. Ponieważ spełnienia b', c', tych boków, są mniejszemi od 90°, będziemy więc mieli, w trójkącie BA'C,



$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} b' \operatorname{dos} c' + \operatorname{wst} b' \operatorname{wst} c' \operatorname{dos} A';$$

a podstawiając za b', c' ich wartości $180-b$, $180-c$, i uważając że kąt $A' = A$, otrzymamy formułę (1).

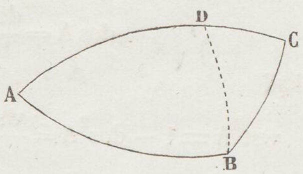
Gdy oba boki b, c są ćwiercianami, formuła (1) redukuje się do

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} A;$$

ta równość jest oczywistą, bo wtedy punkt A jest biegunem boku a, zatem kąt A ma za miarę łuk a.

Nakoniec, jeśli jeden z dwóch boków, jako c, równa się 90°, a drugi b różny od 90°, formuła jest jeszcze prawdziwą.

Na dowodzenie tego, weźmy na AC łuk AD = 90°, i poprowadźmy łuk wielkiego koła BD. Jeśli BD = 90°, punkt B jest biegunem łuku AC, i mamy zarazem $a = 90°$, $b = 90°$ i $A = 90°$; wtedy formuła (1) przywodzi się do tosamości $0 = 0$.



Jeśli zaś łuk BD jest różnym od 90°, wtedy trójkąt BCD, na mocy tego co poprzedza, daje

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} BD \operatorname{dos} CD + \operatorname{wst} BD \operatorname{wst} CD \operatorname{dos} BDC.$$

Ale $\operatorname{dos} BDC = 0$, $\operatorname{dos} CD = \operatorname{dos}(90° - b) = \operatorname{wst} b$, $\operatorname{dos} BD = \operatorname{dos} A$; więc $\operatorname{dos} a = \operatorname{wst} b \operatorname{dos} A$.

Owoż, do tej właśnie równości przywodzi się formuła (1), gdy w niej przypuścimy $c = 90$. Więc ta formuła zostaje dowiedzioną we wszystkich przypadkach.

69. 1° *Związek między trzema bokami i jednym kątem.* Daje ten związek fundamentalna formuła (1) z której, prostą przemianą liter, wywodzą się dwie inne; mamy więc razem

$$(1)\quad \begin{aligned} \operatorname{dos} a &= \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c + \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A \\ \operatorname{dos} b &= \operatorname{dos} a \operatorname{dos} c + \operatorname{wst} a \operatorname{wst} c \operatorname{dos} B \\ \operatorname{dos} c &= \operatorname{dos} a \operatorname{dos} b + \operatorname{wst} a \operatorname{wst} b \operatorname{dos} C. \end{aligned}$$

Te trzy równania fundamentalne trygonometryi sferycznej są dostateczne do wyznaczenia trzech którychkolwiek z sześciu części trójkąta sferycznego gdy trzy z nich są dane. Idzie zatem że tylko trzy różne równania między temi sześcioma częściami istnieć mogą. Ztąd wnosimy że wszystkie inne związki, między bokami i kątami, ze trzech powyższych równań wywieśdź się, przekształceniem algebrycznem, będą mogły.

70. 2° *Związek pomiędzy dwoma bokami i dwoma kątami przeciwnemi.*

Aby otrzymać związek pomiędzy dwoma bokami a, b i kątami przeciwnemi A, B, dosyć jest wyrugować bok c między dwoma pierwszemi równaniami (1). Można też dojść do tego związku następującym sposobem, już użytym w trygonometryi prostolinijnej.

Pierwsze z równań (1) daje

$$\text{dos}\,A = \frac{\text{dos}\,a - \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c}{\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c};$$

zkąd

$$\text{wst}^2 A = 1 - \text{dos}^2 A = \frac{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c - (\text{dos}\,a - \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c)^2}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c},$$

$$= \frac{(1 - \text{dos}^2 b)(1 - \text{dos}^2 c) - (\text{dos}\,a - \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c)^2}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c}$$

$$= \frac{1 - \text{dos}^2 a - \text{dos}^2 b - \text{dos}^2 c + 2\,\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b\,\text{dos}\,c}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c};$$

zatem

$$\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2 A} = \frac{\text{wst}\,a^2\,\text{wst}\,b^2\,\text{wst}\,c^2}{1 - \text{dos}^2 a - \text{dos}^2 b - \text{dos}^2 c + 2\,\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b\,\text{dos}\,c}.$$

Ta wartość $\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2 A}$ jest symetryczną względem liter a, b, c; to jest nie zmienia się gdy te litery przemieniają się jedne na drugie; więc

$$\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2 A} = \frac{\text{wst}^2 b}{\text{wst}^2 B} = \frac{\text{wst}^2 c}{\text{wst}^2 C}.$$

A nakoniec, ponieważ boki i kąty są mniejsze od 180°, mamy

$$(2)\qquad \frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,A}=\frac{\text{wst}\,b}{\text{wst}\,B}=\frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,C};$$

co wyraża że *w każdym trójkącie sferycznym wstawy boków są proporcyonalne wstawom kątów przeciwnych.*

71. 3° *Związek między dwoma bokami, kątem zawartym i kątem przeciwnym jednemu z nich.* Aby otrzymać związek między a, b, C i A dosyć jest wyrugować c między pierwszem i ostatniem równaniem (1). Posługując się równaniem (2) rachunek jest prostszy. Rugując najpierwej $\text{dos}\,c$ znajdujemy

$$\text{dos}\,a=\text{dos}\,a\,\text{dos}^2 b+\text{dos}\,b\,\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{dos}\,C+\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c\,\text{dos}\,A;$$

poczem, przenosząc $\text{dos}\,a\,\text{dos}^2 b$ na pierwszą stronę, zastępując $1-\text{dos}^2 b$ przez $\text{wst}^2 b$, i dzieląc przez $\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b$, będzie

$$\text{dot}\,a\,\text{wst}\,b=\text{dos}\,b\,\text{dos}\,C+\frac{\text{wst}\,c\,\text{dos}\,A}{\text{wst}\,a};$$

zkąd, z przyczyny $\dfrac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,a}=\dfrac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}$ wynika

$$\text{dot}\,a\,\text{wst}\,b=\text{dos}\,b\,\text{dos}\,C+\text{wst}\,c\,\text{dot}\,A,$$

formułá szukana z której, prostą przemianą liter, wywodzą się pięć innych podobnych. Mamy przeto razem sześć następujących równań:

$$\begin{aligned}
&\text{dot}\,a\,\text{wst}\,b=\text{dos}\,b\,\text{dos}\,C+\text{wst}\,C\,\text{dot}\,A,\\
&\text{dot}\,b\,\text{wst}\,a=\text{dos}\,a\,\text{dos}\,C+\text{wst}\,C\,\text{dot}\,B,\\
(3)\quad &\text{dot}\,a\,\text{wst}\,c=\text{dos}\,c\,\text{dos}\,B+\text{wst}\,B\,\text{dot}\,A,\\
&\text{dot}\,c\,\text{wst}\,a=\text{dos}\,a\,\text{dos}\,B+\text{wst}\,B\,\text{dot}\,C,\\
&\text{dot}\,b\,\text{wst}\,c=\text{dos}\,c\,\text{dos}\,A+\text{wst}\,A\,\text{dot}\,B,\\
&\text{dot}\,c\,\text{wst}\,b=\text{dos}\,b\,\text{dos}\,A+\text{wst}\,A\,\text{dot}\,C.
\end{aligned}$$

72. 4° *Związek między jednym bokiem i trzema kątami.* Możnaby ten związek wyprowadzić z formuł fundamentalnych (1), rugując między niemi dwa ze trzech boków; lecz jest prościej użyć trójkąta biegunowego.

Niech więc będą A′, B′, C′ kąty, i a', b', c' boki trójkąta biegunowego który spełnia trójkąt dany; mamy

$$\text{dos}\,a'=\text{dos}\,b'\,\text{dos}\,c'+\text{wst}\,b'\,\text{wst}\,c'\,\text{dos}\,A'.$$

Podstawiając za a', b', c', A' ich wartości $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$, $180°-a$, i zamieniając znaki, wyniknie

$$\text{dos}\,A = -\text{dos}\,B\ \text{dos}\,C + \text{wst}\,B\ \text{wst}\,C\ \text{dos}\,a.$$

Stosując tę samą formułę do dwóch innych boków b, c, otrzymamy podobnie dwa nowe równania: co razem czyni trzy następujące:

$$(4)\quad \begin{aligned} \text{dos}\,A &= -\text{dos}\,B\ \text{dos}\,C + \text{wst}\,B\ \text{wst}\,C\ \text{dos}\,a,\\ \text{dos}\,B &= -\text{dos}\,A\ \text{dos}\,C + \text{wst}\,A\ \text{wst}\,C\ \text{dos}\,b,\\ \text{dos}\,C &= -\text{dos}\,A\ \text{dos}\,B + \text{wst}\,A\ \text{wst}\,B\ \text{dos}\,c. \end{aligned}$$

FORMUŁY I WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH PROSTOKĄTNYCH.

73. Trójkąt sferyczny jest prostokątnym gdy ma jeden kąt prosty. Bok przeciwny temu kątowi nazywa się przeciwprostokątną.

Wiemy że trójkąt sferyczny może być *dwuprostokątnym* i nawet *trójprostokątnym*; to jest, może mieć dwa kąty proste, a nawet wszystkie trzy kąty proste. W pierwszym przypadku, dwa boki są ćwiercianami, a zaś trzeci bok jest miarą kąta przeciwnego. W drugim przypadku, wszystkie trzy boki są ćwiercianami; przeto dwa te przypadki nie tworzą żadnego zagadnienia.

Uważać zatem będziemy na przyszłość trójkąty prostokątne w których tylko jeden kąt jest prostym; dwa zaś inne kąty, ostre lub rozwarte, nazywać będziemy pochyłemi.

Aby mieć formuły służące do rozwiązania trójkątów prostokątnych, dosyć jest w formułach ogólnych, któreśmy powyżej otrzymali, przypuścić kąt $A=90°$; wynikną ztąd żądane równania następujące:

$$(5)\quad \text{dos}\,a = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,c,$$

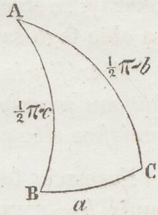
$$(6)\quad \text{wst}\,b = \text{wst}\,a\ \text{wst}\,B, \qquad \text{wst}\,c = \text{wst}\,a\ \text{wst}\,C,$$

$$(7)\quad \begin{aligned} \text{sty}\,b &= \text{sty}\,a\ \text{dos}\,C, & \text{sty}\,c &= \text{sty}\,a\ \text{dos}\,B,\\ \text{sty}\,b &= \text{wst}\,c\ \text{sty}\,B, & \text{sty}\,c &= \text{wst}\,b\ \text{sty}\,C, \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} \text{dos}\,a &= \text{dot}\,B\ \text{dot}\,C, & \text{dos}\,B &= \text{wst}\,C\ \text{dos}\,b,\\ \text{dos}\,C &= \text{wst}\,B\ \text{dos}\,c. \end{aligned}$$

Jest sposób pamięciowy za pomocą którego wszystkie dziesięć formuł powyższych (5)...(8) łatwo się znaleźć mogą. Dajemy go wedle lekkiej modyfikacyi Pana G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, jako następuje.

W trójkącie sferycznym ABC, na ramionach kąta prostego, zamiast boków b, c, pisze się ich dopełnienia $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$; wtedy, nie uważając kąta prostego A, pięć ilości a, B, $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - b$, C formują ciąg zamknięty. Otoż, rzeczone formuły zawierają się w tej jednej ustawie spostrzeżonej przez NEPERA.



Dostawa każdej z pięciu ilości równa się iloczynowi wstaw dwóch ilości odosobnionych, albo też *iloczynowi dotycznych dwóch ilości przyległych.*

Uważajmy teraz że biorąc *trzy* którekolwiek z *pięciu* ilości, jest zawsze jedna z nich albo odosobniona od dwóch innych, albo im przyległa; przeto, na mocy ustawy wysłowionej, znajdziemy łatwo związek między temi trzema ilościami.

I tak, weźmy na przykład ilości a, b, c. Ponieważ na obwodzie trójkąta sferycznego ilość a jest odosobniona od b i c, mamy

$$\text{dos}\,a = \text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\pi - b)\,\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\pi - c), \quad \text{albo} \quad \text{dos}\,a = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c.$$

Jeśli zaś szukamy związku między b, c, B; ponieważ ilość $\frac{1}{2}\pi - c$ przytyka do B i do $\frac{1}{2}\pi - b$, bo kąt prosty A nie liczy się, mamy

$$\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}\pi - c) = \text{dot}\,(\tfrac{1}{2}\pi - b)\,\text{dot}\,\text{B}, \quad \text{albo} \quad \text{sty}\,b = \text{wst}\,c\,\text{sty}\,\text{B}.$$

74. Powyższe równania (5)... (8) wskazują niektóre własności trójkątów prostokątnych które nie źle będzie uważać. I tak:

1° Formuła $\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c$ pokazuje że dostawy trzech boków są wszystkie trzy dodatne albo dwie tylko odjemne a trzecia dodatna. Więc

W każdym trójkącie sferycznym prostokątnym, wszystkie trzy boki są zarazem mniejszemi od 90°, *albo też jeden z tych boków jest mniejszym od* 90° *a dwa inne większemi.*

2° *I nawzajem*, gdy trzy boki trójkąta zadosyć czynią równaniu

$$\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c,$$

ten trójkąt jest prostokątnym i ma bok a za przeciwprostokątną. Ta sama uwaga ściąga się także do każdego z równań (5)... (8).

3° Ponieważ wstawy boków b, c są dodatne, równania

$$\mathrm{sty}\, b = \mathrm{wst}\, c\, \mathrm{sty}\, B \quad \text{i} \quad \mathrm{sty}\, c = \mathrm{wst}\, b\, \mathrm{sty}\, C$$

okazują że styczna kąta pochyłego i styczna boku przeciwnego są obie tego samego znaku. Ztąd wnosimy że

W trójkącie sferycznym prostokątnym, ramie kąta prostego i kąt mu przeciwny są zawsze oba jednego rodzaju, to jest oba mniejsze albo oba większe od 90°.

Nareszcie formuła $\mathrm{wst}\, b = \mathrm{wst}\, a\, \mathrm{wst} B$ jest podobna do formuły $b = a\, \mathrm{wst} B$ która ma miejsce w trójkącie prostokątnym płaskim.

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH PROSTOKĄTNYCH.

75. Będziemy się teraz zajmowali rozwiązaniem różnych przypadków trójkątów sferycznych prostokątnych; te przypadki są w liczbie sześciu.

Pierwszy Przypadek. — *Mając dane przeciwprostokątnę* a *i bok* b *kąta prostego, znaleźć bok* c *i dwa kąty pochyłe* B, C.

Formuła (5) daje, do wyrachowania boku c, $\mathrm{dos}\, c = \dfrac{\mathrm{dos}\, a}{\mathrm{dos}\, b}$;
a do wyrachowania kątów B, C, pierwsze z równań (6) i pierwsze z równań (7), dają $\mathrm{wst} B = \dfrac{\mathrm{wst}\, b}{\mathrm{wst}\, a}$, $\mathrm{dos}\, C = \dfrac{\mathrm{sty}\, b}{\mathrm{sty}\, a}$.

Uwaga. — Zagadnienie może jedno tylko mieć rozwiązanie, chociaż kąt B jest dany przez wstawę; bo, jako wiadomo z uwagi 3°, kąt B powinien być tego samego rodzaju co bok b który mu jest przeciwległym.

Drugi Przypadek. — *Mając dane dwa boki* b, c *kąta prostego, wyznaczyć* a, B, C.

Z formuł (1) i (7) wyprowadza się

$$\mathrm{dos}\, a = \mathrm{dos}\, b\, \mathrm{dos}\, c, \quad \mathrm{sty}\, B = \frac{\mathrm{sty}\, b}{\mathrm{wst}\, c}, \quad \mathrm{sty}\, C = \frac{\mathrm{sty}\, c}{\mathrm{wst}\, b}.$$

Trzeci Przypadek. — *Znając przeciwprostokątnę* a *i kąt* B, *znaleźć* b, c, C.

Mamy podług formuł (6), (7), (8)

$$\text{wst}\, b = \text{wst}\, a\, \text{wst}\, \text{B}, \quad \text{sty}\, c = \text{sty}\, a\, \text{dos}\, \text{B}, \quad \text{dot}\, \text{C} = \frac{\text{dos}\, a}{\text{dot}\, \text{B}}.$$

Zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie; bo bok b, dany przez wstawę, musi być tego samego rodzaju co kąt mu przeciwny B.

Czwarty Przypadek. — *Znając bok* b *kąta prostego i kąt przyległy* C, *wyznaczyć* a, c, B.

Za pomocą formuł (7) i (8) mamy

$$\text{sty}\, a = \frac{\text{sty}\, b}{\text{dos}\, \text{C}}, \quad \text{sty}\, c = \text{wst}\, b\, \text{sty}\, \text{C}, \quad \text{dos}\, \text{B} = \text{wst}\, \text{C}\, \text{dos}\, b.$$

Piąty Przypadek. — *Znając bok* b *kąta prostego i kąt mu przeciwny* B, *wyznaczyć* a, c, C.

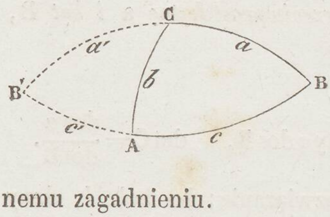
Formuły (6), (7), (8) dają

$$\text{wst}\, a = \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, \text{B}}, \quad \text{wst}\, c = \frac{\text{sty}\, b}{\text{sty}\, \text{B}}, \quad \text{wst}\, \text{C} = \frac{\text{dos}\, \text{B}}{\text{dos}\, b}.$$

Dyskussya. — Aby zagadnienie było możebnem, trzeba żeby wartości znalezione dla trzech wstaw były mniejsze od jedności; to jest, trzeba i dosyć jest aby kąt dany B był zawartym między b i $\pi - b$. Gdy ten warunek jest dopełniony, wtedy każda ze trzech niewiadomych a, c, C ma dwie wartości spełniające.

Jako już wiadomo, wartości boku c i kąta mu przeciwnego C, powinny być wzięte obie jednego rodzaju. Co do wartości przeciwprostokątnej a; ponieważ w trójkącie prostokątnym wszystkie trzy boki są mniejsze od 90°, albo jeden tylko mniejszy a dwa inne większe od 90°; więc, jeśli bok $b < 90°$, wtedy a i c mogą być wzięte oba mniejsze albo oba większe od 90°; a jeśli przeciwnie $b > 90°$, wtedy boki a i c muszą być wzięte jeden mniejszy drugi większy od 90°. Jest przeto w obydwóch razach dwa rozwiązania. Można to łatwo geometrycznie usprawiedliwić.

Jakoż, niech będzie trójkąt ABC rozwiązujący zagadnienie;



jeśli przedłużymy boki BA, BC aż do ich spotkania B', uformujemy drugi trójkąt AB'C którego boki AB', CB' są spełnieniami boków c, a, i który oczywiście zadość czyni zadanemu zagadnieniu.

Gdy $\mathrm{B}=b$, każda ze trzech wstaw, wst$a$, wst$c$, wstC równa się jedności; wtedy, $a=c=\mathrm{C}=90^\circ$, trójkąt szukany jest dwój-prostokątnym przy A i C, i zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Szósty Przypadek. — *Znając dwa kąty pochyłe* B, C, *znaleźć trzy boki* a, b, c.

Formuła (8) daje

$$\operatorname{dos} a=\operatorname{dot}\mathrm{B}\operatorname{dot}\mathrm{C},\qquad \operatorname{dos} b=\frac{\operatorname{dos}\mathrm{B}}{\operatorname{wst}\mathrm{C}},\qquad \operatorname{dos} c=\frac{\operatorname{dos}\mathrm{C}}{\operatorname{wst}\mathrm{B}}.$$

Wiadomo z Geometryi że w każdym trójkącie sferycznym jest $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}>\pi$, a zarazem $\mathrm{A}+\pi>\mathrm{B}+\mathrm{C}$ i $\mathrm{C}+\pi>\mathrm{A}+\mathrm{B}$, przypuszczając $\mathrm{C}<\mathrm{B}$. Zkąd, podstawiając $\mathrm{A}=\frac{1}{2}\pi$, otrzymamy

$$\mathrm{B}+\mathrm{C}>\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{i} \quad \mathrm{B}+\mathrm{C}<\tfrac{3}{2}\pi,\quad \mathrm{B}-\mathrm{C}<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Te trzy warunki konieczne są dostatecznemi. Jeśli więc dwa kąty dane B, C zadosyć im czynią, zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Uwaga. — Jest jedna ważna uwaga do zrobienia która się tyczy zastosowania logarytmów w rachunkach linij trygonometrycznych. Trafia się często że trzeba wyznaczyć kąt dany przez dostawę albo przez styczną. Gdy wartość tej dostawy albo tej stycznej jest odjemną, nie można użyć logarytmów; wtedy zamiast kąta szukanego, należy wyrachować kąt spełniający który ma tę samą dostawę albo styczną ale znaku przeciwnego. Znając kąt spełniający, łatwo się znajduje kąt żądany.

I tak, gdybyśmy szukali kąta B danego przez równanie $\operatorname{sty}\mathrm{B}=\frac{\operatorname{dot}\mathrm{C}}{\operatorname{dos} a}$, w którem przeciwprostokątna $a>90^\circ$; biorąc $\log\operatorname{dos}(\pi-a)$, i wykonywając rachunek, otrzymamy spełnienie kąta B, po czem łatwo znajdziemy sam kąt B.

Gdyby zaś była do wyrachowania wartość $\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c$, a boki b, c były oba większe od ćwiercianu; w takim razie dosyć jest wziąć dostawy spełnień boków danych b, c, co bynajmniej nie zmienia wartości $\operatorname{dos} a$.

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH JAKICHKOLWIEK.

76. Pierwszy Przypadek. — *Mając dane trzy boki* a, b, c, *wyznaczyć trzy kąty* A, B, C.

Kąt A otrzyma się za pomocą formuły

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c + \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{dos} A,$$

która daje

$$\operatorname{dos} A = \frac{\operatorname{dos} a - \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}.$$

Ta formuła nie jest wyrachowalną przez logarytmy, ale można z niej wyprowadzić inne temu rachunkowi dogodne.

Podstawmy powyższą wartość dos A w formule

$$\operatorname{wst} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dos} A}{2}}\text{; otrzymamy}$$

$$\operatorname{wst} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c + \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c - \operatorname{dos} a}{2 \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}} = \sqrt{\frac{\operatorname{dos}(b-c) - \operatorname{dos} a}{2 \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}};$$

albo, ponieważ

$$\operatorname{dos}(b-c) - \operatorname{dos} a = 2 \operatorname{wst}\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \operatorname{wst}\left(\frac{a+c-b}{2}\right),$$

mamy
$$\operatorname{wst} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}\left(\frac{a+c-b}{2}\right) \operatorname{wst}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}.$$

Połóżmy, dla skrócenia, $a + b + c = 2p$, zkąd

$$\frac{a+c-b}{2} = p - b, \qquad \frac{a+b-c}{2} = p - c;$$

zatem
$$\operatorname{wst} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}.$$

Podobny rachunek daje

$$\operatorname{dos} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a)}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}.$$

Dzieląc pierwszą przez drugą, otrzymamy

$$\operatorname{sty} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a)}}.$$

W tych trzech formułach, podobnych formułom otrzymanym do rozwiązania trójkąta prostolinijnego którego trzy boki są dane, pierwiastniki powinny być wzięte dodatnie, bo kąt $\frac{1}{2}A$ jest ostrym.

Gdy mamy do wyrachowania trzy kąty trójkąta sferycznego, dobrze jest użyć ostatniej formuły, z przyczyny że wtedy czterech tylko logarytmów szukać trzeba. Należy pamiętać że, mając dane trzy boki, można nakreślić na sferze dwa trójkąty symetryczne; ale te dwa trójkąty, mające te same boki i kąty, uważają się za jedno rozwiązanie.

Dyskusya. — Roztrząsnijmy teraz formułę

$$\operatorname{sty} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a)}}$$

w której dane boki a, b, c są łukami mniejszemi od półokręgu koła.

Aby wartość $\operatorname{sty} \frac{1}{2}A$ była rzeczywistą, ilość pod pierwiastnikiem, $\frac{\operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a)}$, powinna być dodatną; co wymaga aby wszystkie czynniki były dodatnemi, albo żeby odjemne były w liczbie parzystej. Owoż, przypuszczenie dwóch którychkolwiek czynników odjemnych jest niemożebnem. Bo, dajmy na to że $\operatorname{wst} p < 0$ i $\operatorname{wst}(p-a) < 0$; wyniknie ztąd

$$\operatorname{wst} p + \operatorname{wst}(p-a) < 0 \quad \text{albo} \quad \operatorname{wst}\frac{b+c}{2} \operatorname{dos}\frac{a}{2} < 0.$$

Ale $\frac{b+c}{2} < 180°$, $\frac{a}{2} < 90°$, a następnie $\operatorname{wst}\frac{b+c}{2} > 0$ i $\operatorname{dos}\frac{a}{2} > 0$; przeto nie może być $\operatorname{wst}\frac{b+c}{2} \operatorname{dos}\frac{a}{2} < 0$. Więc nierówności $\operatorname{wst} p < 0$, i $\operatorname{wst}(p-a) < 0$ istnieć razem nie mogą.

Zobaczmy teraz czy nie można mieć zarazem $\operatorname{wst}(p-a)<0$ i $\operatorname{wst}(p-b)<0$.

Jeśli to możebne, powinno być także w następstwie

$$\operatorname{wst}\frac{c}{2}\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}<0;$$

Ale $\frac{c}{2}<90°$, $\frac{a-b}{2}<90°$; zatem $\operatorname{wst}\frac{c}{2}>0$, $\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}>0$, i $\operatorname{wst}\frac{c}{2}\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}>0$. Więc dwa czynniki, jako $\operatorname{wst}(p-a)$, $\operatorname{wst}(p-b)$, nie mogą być oba razem odjemnemi.

Ztąd wnosimy że wszystkie cztery czynniki $\operatorname{wst}p$, $\operatorname{wst}(p-a)$, $\operatorname{wst}(p-b)$, $\operatorname{wst}(p-c)$ są dodatnemi.

Nadto, żaden łuk, jako $p-a$, nie może być odjemnym: albowiem przypuśćmy $p-a<0$; ponieważ $\operatorname{wst}(p-a)>0$, byłoby $a-p>180°$, zatem bok $a>180°$. Co niemożebne, bo każdy bok wielokąta sferycznego jest mniejszym od półokręgu.

Mamy więc zarazem

$$p>0,\quad p-a>0,\quad p-b>0,\quad p-c>0.$$

Pierwsza z tych czterech nierówności, dlatego że $\operatorname{wst}p>0$, daje

$$p<180° \quad \text{albo} \quad a+b+c<360°.$$

Ze trzech następnych wynika

$$a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b.$$

To pokazuje że warunki konieczne i dostateczne możebności trójkąta sferycznego są:

1° Summa trzech boków danych musi być mniejszą od okręgu koła wielkiego.

2° Każdy z boków musi być mniejszym od summy dwóch innych.

Dyskussya formuł

$$\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst}b\operatorname{wst}c}},$$

$$\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{wst}p\operatorname{wst}(p-a)}{\operatorname{wst}b\operatorname{wst}c}}$$

do tych samych prowadzi wyników.

77. DRUGI PRZYPADEK.— *Mając dane dwa boki* a, b *i kąt niemi zawarty* C, *znaleźć* A, B, c.

W tym przypadku trójkąt jest zawsze możebnym. Szukajmy naprzód kąta A. Mamy

$$\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,C + \text{wst}\,C\ \text{dot}\,A;$$

zkąd

$$\text{dot}\,A = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b - \text{dos}\,b\ \text{dos}\,C}{\text{wst}\,C} = \frac{\text{dot}\,a}{\text{wst}\,C}\left(\text{wst}\,b - \frac{\text{dos}\,C\ \text{dos}\,b}{\text{dot}\,a}\right).$$

Weźmy teraz kąt pomocniczy φ taki aby $\text{sty}\,\varphi = \frac{\text{dos}\,C}{\text{dot}\,a}$, co zawsze możebne; będzie

$$\text{dot}\,A = \frac{\text{dot}\,a}{\text{wst}\,C}\left(\frac{\text{wst}\,b\ \text{dos}\,\varphi - \text{wst}\,\varphi\ \text{dos}\,b}{\text{dos}\,\varphi}\right) = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,(b-\varphi)}{\text{dos}\,\varphi\ \text{wst}\,C}.$$

Formuła wyrachowalna przez logarytmy.

Znajdzie się podobnie kąt B, za pomocą formuły

$$\text{dot}\,B = \frac{\text{dot}\,b\ \text{wst}\,(a-\psi)}{\text{dos}\,\psi\ \text{wst}\,C},$$

w której kąt pomocniczy ψ wyznacza się równaniem

$$\text{sty}\,\psi = \frac{\text{dos}\,C}{\text{dot}\,b}.$$

Aby wyznaczyć bok c, bierze się formuła

$$\text{dos}\,c = \text{dos}\,a\ \text{dos}\,b + \text{wst}\,a\ \text{wst}\,b\ \text{dos}\,C$$

która się przerabia na inną, zastosowaniu logarytmów dogodną, sposobem następującym

$$\text{dos}\,c = \text{dos}\,a\ (\text{dos}\,b + \text{wst}\,b\ \text{sty}\,a\ \text{dos}\,C),$$

albo $$\text{dos}\,c = \text{dos}\,a\ (\text{dos}\,b + \text{sty}\,\varphi\ \text{wst}\,b) = \frac{\text{dos}\,a\ \text{dos}\,(\varphi - b)}{\text{dos}\,\varphi}.$$

Kąt pomocniczy φ już wyżej użyty.

UWAGA.— Można łatwo okazać co wyobraża geometrycznie kąt pomocniczy φ w szukanym trójkącie ABC. Z punktu B spuśćmy prostopadłę BH na bok AC. W trójkącie prostokątnym BCH (który sobie sam czytelnik nakreśli), mamy

$$\text{dos}\,C = \text{dot}\,a\ \text{sty}\,CH;\qquad \text{więc}\qquad \varphi = CH.$$

78. Trzeci Przypadek. — *Dane są dwa boki* a, b *i kąt* A *przeciwny jednemu z nich, znaleźć* B, C, c.

Kąt B wyznaczy się za pomocą formuły $\text{wst}\,B = \dfrac{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,A}{\text{wst}\,a}$.

Aby znaleźć kąt C, użyjemy formuły

$$\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,C + \text{wst}\,C\ \text{dot}\,A,$$

która daje

$$\text{wst}\,C + \frac{\text{dos}\,b}{\text{dot}\,A}\,\text{dos}\,C = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b}{\text{dot}\,A}.$$

Niech będzie φ kąt pomocniczy taki aby $\text{sty}\,\varphi = \dfrac{\text{dos}\,b}{\text{dot}\,A}$; będzie

$$\text{wst}\,C + \frac{\text{wst}\,\varphi\ \text{dos}\,C}{\text{dos}\,\varphi} = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b}{\text{dot}\,A},$$

albo $$\text{wst}\,C\ \text{dos}\,\varphi + \text{wst}\,\varphi\ \text{dos}\,C = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b\ \text{dos}\,\varphi}{\text{dot}\,A},$$

zkąd $$\text{wst}\,(C + \varphi) = \frac{\text{dot}\,a\ \text{wst}\,b\ \text{dos}\,\varphi}{\text{dot}\,A}.$$

Ta ostatnia równość daje kąt $C + \varphi$, a następnie kąt C odciągając φ od $C + \varphi$.

Bok c otrzymuje się za pomocą formuły

$$\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,c + \text{wst}\,b\ \text{wst}\,c\ \text{dos}\,A,$$
$$= \text{dos}\,b\,(\text{dos}\,c + \text{sty}\,b\ \text{dos}\,A\ \text{wst}\,c),$$

która, biorąc kąt pomocniczy ψ, tak aby $\text{sty}\,b\ \text{dos}\,A = \text{dot}\,\psi$, staje się

$$\text{dos}\,a = \frac{\text{dos}\,b}{\text{wst}\,\psi}\,(\text{wst}\,\psi\ \text{dos}\,c + \text{dos}\,\psi\ \text{wst}\,c) = \frac{\text{dos}\,b\ \text{wst}\,(\psi + c)}{\text{wst}\,\psi},$$

zkąd $$\text{wst}\,(c + \psi) = \frac{\text{dos}\,a\ \text{wst}\,\psi}{\text{dos}\,b}.$$

Ta równość daje $c + \psi$, a następnie bok c.

Uwaga. — Niewiadome B, $C + \varphi$, $c + \psi$ są dane przez wstawy; aby więc trójkąt szukany mógł istnieć, trzeba przede wszystkiem żeby znalezione logarytmy dla tych wstaw były mniejsze od 10. Gdy ten warunek będzie dopełnionym, każda ze trzech formuł da dla niewiadomej odpowiedniej dwa łuki spełniające. Ale wiadomo że w trójkącie sferycznym naprzeciw boku mniejszego leży kąt mniejszy, trzeba więc aby dwie różnice $a-b$ i $\text{A}-\text{B}$ były obie jednego znaku. Jeśli żadna wartość kąta B, porównana z kątem A, nie czyni zadość temu warunkowi, oczywiście trójkąt żądany nie istnieje: gdy zaś jedna albo dwie wartości kąta B zadość czynią rzeczonemu warunkowi, wtedy zagadnienie ma jedno albo dwa rozwiązania; co właśnie później okażemy dyskutując szczegółowo ten przypadek.

79. Czwarty Przypadek. — *Mając dane dwa kąty* A, B *z bokiem przyległym* c, *znaleźć* a, b, C.

Otrzymamy kąt C za pomocą formuły

$$\begin{aligned}\text{dos}\,\text{C} &= -\text{dos}\,\text{A}\,\text{dos}\,\text{B} + \text{wst}\,\text{A}\,\text{wst}\,\text{B}\,\text{dos}\,c\\ &= \text{dos}\,\text{A}\,(-\text{dos}\,\text{B} + \text{sty}\,\text{A}\,\text{dos}\,c\,\text{wst}\,\text{B});\end{aligned}$$

zkąd, czyniąc $\text{sty}\,\text{A}\,\text{dos}\,c = \text{dot}\,\varphi$, wynika

$$\text{dos}\,\text{C} = \text{dos}\,\text{A}\,(-\text{dos}\,\text{B} + \text{wst}\,\text{B}\,\text{dot}\,\varphi),$$

albo

$$\text{dos}\,\text{C} = \frac{\text{dos}\,\text{A}\,\text{wst}\,(\text{B}-\varphi)}{\text{wst}\,\varphi}.$$

Bok a wyznacza się formułą

$$\begin{aligned}\text{dot}\,a\,\text{wst}\,c &= \text{dos}\,c\,\text{dos}\,\text{B} + \text{wst}\,\text{B}\,\text{dot}\,\text{A};\\ &= \text{dos}\,c\left(\text{dos}\,\text{B} + \text{wst}\,\text{B}\,\frac{\text{dot}\,\text{A}}{\text{dos}\,c}\right)\\ &= \text{dos}\,c\,(\text{dos}\,\text{B} + \text{wst}\,\text{B}\,\text{sty}\,\varphi);\end{aligned}$$

zkąd wynika

$$\text{dot}\,a = \frac{\text{dot}\,c\,\text{dos}\,(\text{B}-\varphi)}{\text{dos}\,\varphi}.$$

Kąt pomocniczy φ jest ten sam co wyżej użyty.

Znajdziemy tak samo

$$\text{dot}\,b = \frac{\text{dot}\,c\,\text{dos}\,(\text{A}-\psi)}{\text{wst}\,\psi},$$

ψ jest kąt wyznaczony równaniem

$$\frac{\text{dot}\,\text{B}}{\text{dos}\,c} = \text{dot}\,\psi.$$

80. Piąty Przypadek. — *Mając dane dwa kąty* A, B *i bok* a *przeciwny jednemu z nich*, *znaleźć* b, c, C.

Będziemy zaraz mieli

$$\text{wst}\, b = \frac{\text{wst}\, a\ \text{wst B}}{\text{wst A}}.$$

Bok c otrzymamy za pomocą formuły

$$\text{dot}\, a\ \text{wst}\, c = \text{dos}\, c\ \text{dos B} + \text{wst B dot A},$$

z której wynika

$$\frac{\text{dot}\, a}{\text{dos B}}\ \text{wst}\, c - \text{dos}\, c = \text{sty B dot A}.$$

Jeśli weźmiemy kąt pomocniczy φ taki aby $\text{dot}\, \varphi = \dfrac{\text{dot}\, a}{\text{dos B}}$, będzie

$$\text{wst}\, c\ \text{dos}\, \varphi - \text{dos}\, c\ \text{wst}\, \varphi = \frac{\text{sty B}}{\text{sty A}}\text{wst}\, \varphi,$$

albo

$$\text{wst}\,(c-\varphi) = \frac{\text{sty B}}{\text{sty A}}\ \text{wst}\, \varphi.$$

Ta formuła da $c-\varphi$, a tem samem bok c.

Do wyznaczenia kąta C, użyjemy formuły

$$\text{dos A} = -\text{dos B dos C} + \text{wst B wst C dos}\, a,$$

która daje

$$\text{wst C sty B dos}\, a - \text{dos C} = \frac{\text{dos A}}{\text{dos B}};$$

ztąd, jeśli położymy jako zwykle,

$\text{sty B dos}\, a = \text{dot}\, \psi$, otrzymamy $\text{wst}\,(\text{C}-\psi) = \dfrac{\text{dos A}}{\text{dos B}}\ \text{wst}\, \psi.$

Będziemy tedy mieli kąt $\text{C}-\psi$, a następnie kąt C.

Uwaga. — Ten przypadek, tak jak trzeci, może mieć dwa rozwiązania. Dyskussya ta sama.

81. Szósty Przypadek. — *Mając dane trzy kąty* A, B, C, *znaleźć trzy boki* a, b, c.

Bok a wyznaczy się równaniem

$$\text{dos A} = -\text{dos B dos C} + \text{wst B wst C dos}\, a$$

które daje

$$\text{dos}\, a = \frac{\text{dos A} + \text{dos B dos C}}{\text{wst B wst C}}.$$

Ale, aby otrzymać formuły wyrachowalne przez logarytmy, poszukamy wartości wst$\frac{1}{2}a$, dos$\frac{1}{2}a$, sty$\frac{1}{2}a$.

Owoż, mamy

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{dos}\,a}{2}}=\sqrt{\frac{\text{wst B wst C}-\text{dos B dos C}-\text{dos A}}{2\,\text{wst B wst C}}}$$

$$=\sqrt{\frac{-\text{dos A}-\text{dos}(\text{B}+\text{C})}{2\,\text{wst B wst C}}}.$$

Lecz

$$\text{dos A}+\text{dos}(\text{B}+\text{C})=2\,\text{dos}\left(\frac{\text{A}+\text{B}+\text{C}}{2}\right)\text{dos}\left(\frac{\text{B}+\text{C}-\text{A}}{2}\right);$$

więc

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\text{dos}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\text{C})\,\text{dos}(\text{B}+\text{C}-\text{A}}{\text{wst B wst C}}}.$$

Podobnie, $\text{dos}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst B wst C}+\text{dos B dos C}+\text{dos A}}{2\,\text{wst B wst C}}}$

$$=\sqrt{\frac{\text{dos A}+\text{dos}(\text{B}-\text{C})}{2\,\text{wst B wst C}}}=\sqrt{\frac{\text{dos}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C})\,\text{dos}\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}+\text{C})}{\text{wst B wst C}}}.$$

Albo, czyniąc dla skrócenia $\text{A}+\text{B}+\text{C}-180^\circ=2\text{S}$, będzie

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst S wst}(\text{A}-\text{S})}{\text{wst B wst C}}},$$

$$\text{dos}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst}(\text{B}-\text{S})\,\text{wst}(\text{C}-\text{S})}{\text{wst B wst C}}}.$$

Zkąd, dzieląc stronami, mamy także

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst S wst}(\text{A}-\text{S})}{\text{wst}(\text{B}-\text{S})\,\text{wst}(\text{C}-\text{S})}}.$$

Prostą zmianą liter, z tych trzech formuł, wywodzą się sześć innych które służą do rachunku boków b, c.

Można, biorąc jedną którąkolwiek ze trzech formuł, i rozumując jako w numerze (76), łatwo dowieśdź że w każdym trójkącie sferycznym

1° Summa kątów dwójściennych zawiera się między *dwoma* i *sześcioma* kątami prostemi.

2° Każdy kąt dwójścienny powiększony dwoma prostemi jest większym od summy dwóch innych dwójściennych.

3° Nareszcie te warunki koniecznie są dostatecznemi.

Radzimy czytelnikowi aby, dla ćwiczenia i nabycia biegłości w przerabianiu formuł trygonometrycznych, bez czego żaden postęp w umiejętnościach nie jest możebnym, sam starannie dowiódł wymienionych twierdzeń, opierając się na samej tylko analizie.

Uwaga. — Rozwiązaliśmy wprost sześć przypadków które się znajdują w trójkątach sferycznych. Ale uważać należy że można było nie wykonywać podobnych rachunków we trzech ostatnich przypadkach, których rozwiązanie przywodzi się do trzech pierwszych, za pomocą trójkątów biegunowych.

Zajmiemy się teraz okazaniem formuł które znakomitą grają rolę w trygonometryi sferycznej.

FORMUŁY DELAMBRA I NEPERA.

82. Formuły Delambra. — Jeśli w formułach

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \text{wst}\tfrac{1}{2}A \,\text{dos}\tfrac{1}{2}B \pm \text{dos}\tfrac{1}{2}A \,\text{wst}\tfrac{1}{2}B,$$

$$\text{dos}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \text{dos}\tfrac{1}{2}A \,\text{dos}\tfrac{1}{2}B \mp \text{wst}\tfrac{1}{2}A \,\text{wst}\tfrac{1}{2}B,$$

zastąpimy $\text{wst}\tfrac{1}{2}A$, $\text{wst}\tfrac{1}{2}B$, $\text{dos}\tfrac{1}{2}A$, $\text{dos}\tfrac{1}{2}B$, przez ich wartości znalezione w numerze (76), będziemy mieli

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\text{wst}(p-b) \pm \text{wst}(p-a)}{\text{wst}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst}\,p\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b}},$$

$$\text{dos}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\text{wst}\,p \mp \text{wst}(p-c)}{\text{wst}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)}{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b}},$$

albo

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\text{wst}(p-b) \pm \text{wst}(p-a)}{\text{wst}\,c}\,\text{dos}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{dos}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\text{wst}\,p \mp \text{wst}(p-c)}{\text{wst}\,c}\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C.$$

Zamieniając nareszcie

$$\text{wst}\,(p-b) \pm \text{wst}\,(p-a) \quad \text{i} \quad \text{wst}\,p \pm \text{wst}\,(p-c)$$

na iloczyny, otrzymamy cztery następujące formuły *Delambra*.

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{dos}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dos}\frac{1}{2}c}, \\ \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dos}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c}, \\ \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{dos}\frac{1}{2}c}, \\ \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c}. \end{aligned}$$

83. Analogïe Nepera.

Jeśli podzielimy pierwszą formułę *Delambra* przez trzecią, drugą przez czwartą, potem czwartą przez trzecią i drugą przez pierwszą, otrzymamy cztery następujące, znane pod nazwiskiem *analogij* albo *proporcyj* Nepera.

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{dot}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dos}\frac{1}{2}(a+b)}, \\ \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dot}\frac{1}{2}C} &= \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)}, \\ \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\frac{1}{2}c} &= \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dos}\frac{1}{2}(A+B)}, \\ \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sty}\frac{1}{2}c} &= \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}. \end{aligned}$$

Uwaga. — Każda z formuł *Nepera* zawiera tylko pięć części trójkąta sferycznego, gdy tymczasem każda z formuł *Delambra* zawiera sześć takowych części.

Zastosowanie analogij Nepera *do rozwiązania trójkątów sferycznych.*

84. Analogïe *Nepera* służą do sproszczenia rozwiązania trójkątów sferycznych; można albowiem, stosując je, uniknąć kątów pomocniczych. Co właśnie pokażemy następującemi przykładami:

Drugi Przypadek. — *Mając dane dwa boki* a, b, *i kąt zawarty* C, *znaleźć* A, B, *c*.

Analogie *Nepera* dają zaraz

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{dos}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dos}\,\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)};$$

zkąd się wyliczą wartości $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$, a następnie kąty A i B.

Wyrachowawszy tym sposobem kąty A, B, otrzymamy bok c z proporcyi

$$\text{wst}\,c : \text{wst}\,a :: \text{wst}\,C : \text{wst}\,A.$$

Można jeszcze, jeśli chcemy, wyrachować bok c za pomocą formuły

$$\text{sty}\,\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\text{wst}\,S\,\text{wst}\,(C-S)}{\text{wst}(A-S)\,\text{wst}\,(B-S)}}.$$

Widzimy że zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Trzeci Przypadek. — *Mając dane dwa boki* a, b *i kąt* A *przeciwny jednemu z nich, wyznaczyć* B, C, c.

Jako już wiadomo, kąt B wyznacza się formułą

$$\text{wst}\,B=\frac{\text{wst}\,A\,\text{wst}\,b}{\text{wst}\,a}.$$

Potem analogie *Nepera* dają dla kąta C i boku c:

$$(1)\qquad \text{sty}\,\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sty}\,\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$(3)\quad \text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Widzieliśmy w uwadze nº 78 że dwie różnice $a-b$ i A—B muszą być obie jednego znaku. Dodaliśmy potem że zagadnienie jest możebnem i ma jedno albo dwa rozwiązania, jeśli, ze znalezionych dwóch wartości dla kąta B, jedna albo obie zadosyć czynią rzeczonym różnicom. Cośmy tam zapowiedzieli możemy tu łatwo udowodnić.

Jakoż, ze znalezionego teraz kąta C i dwóch danych boków a, b które go zawierają, można zawsze zbudować trójkąt. Nazwijmy c', A', B' trzeci bok i dwa inne kąty tego trójkąta; będziemy mieli w zbudowanym trójkącie

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{sty}\tfrac{1}{2}(A'-B')}.$$

Aże, na mocy rachunku kąta C, mamy także

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B)};$$

więc $$A'-B' = A-B.$$

W tym samym trójkącie mamy jeszcze

$$\frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,b} = \frac{\text{wst}\,A'}{\text{wst}\,B'};$$

zkąd $$\frac{\text{wst}\,a+\text{wst}\,b}{\text{wst}\,a-\text{wst}\,b} = \frac{\text{wst}\,A'+\text{wst}\,B'}{\text{wst}\,A'-\text{wst}\,B'},$$

albo $$\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\tfrac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(A'+B')}{\text{sty}\tfrac{1}{2}(A'-B')}.$$

Aże znowu, na mocy rachunku kąta B, mamy także

$$\frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,b} = \frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,B},\quad \text{zkąd}\quad \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\tfrac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B)};$$

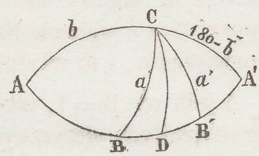
a zaś dopiero co otrzymaliśmy $A'-B' = A-B$;

więc $$A'+B' = A+B.$$

Zatem $$A' = B,\quad B' = B.$$

To pokazuje że trójkąt szukany istnieje rzeczywiście, jeśli rachunek wyznacza dla kąta B wartość która nadaje różnicy $A-B$ znak różnicy $a-b$. Jeśli dwie znalezione wartości dla kąta B czynią obie zadosyć temu warunkowi, wtedy wyznaczy się osobno dwie wartości dla boku c, i dwie odpowiedne dla kąta C; natenczas otrzymuje się dwa trójkąty które rozwiązują zagadnienie. — (Dowodzenie to wyjęliśmy z trygonometryi PP. Briot i Bouquet).

Dyskussya. — Aby umieć naprzód rozpoznać możebność zagadnienia, przedłużmy ramiona kąta danego A aż do spotkania się w punkcie A'; uczyńmy bok AC=b, i z punktu C spuśćmy prostopadłę sferyczną CD na ramie AB.



Uważajmy teraz że 1° na mocy znanego już twierdzenia, *w trójkącie sferycznym prostokątnym* ACD, *ramie* CD *kąta prostego i kąt mu przeciwny są oba jednego rodzaju, to jest oba mniejsze albo oba większe od* 90°.

2° *Prostopadła sferyczna* CD *jest najmniejszym albo największym łukiem wielkiego koła, podług tego jak kąt* A *jest ostrym albo rozwartym.*

Na tych dwóch uwagach opiera się cała dyskussya trzech różnych przypadków zagadnienia.

I. Gdy bok a zawiera się między bokiem b i jego spełnieniem 180°—b, trójkąt jest zawsze możebnym, jakikolwiek jest kąt A, i ma jedno tylko rozwiązanie.

Bo wtedy okrąg nakreślony z punktu C jako bieguna, promieniem sferycznym a, spotyka łuk CA i przedłużenie łuku CA', albo naodwrot; a więc w obydwóch razach przecina półokrąg ADA' w jednym punkcie B.

II. Gdy bok a jest mniejszym albo większym od boku b i od jego spełnienia 180°—b, wtedy należy odróżnić dwa poddziały.

1° Jeśli bok a i kąt przeciwny A nie są oba jednego rodzaju, trójkąt szukany nie istnieje: co oczywiste na mocy twierdzenia 2° wyżej przytoczonego.

2° Jeśli zaś bok a i kąt mu przeciwny są oba jednego rodzaju, zagadnienie jest o tyle możebnem, o ile rachunek wyznaczy wartość rzeczywistą dla kąta B.

Jakoż, $$\text{wst}\,B = \frac{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,A}{\text{wst}\,a},$$

a w trójkącie prostokątnym ACD, $\text{wst}\,CD = \text{wst}\,b\ \text{wst}\,A$;

zatem $$\text{wst}\,B = \frac{\text{wst}\,CD}{\text{wst}\,a}.$$

Ztąd wnosimy, że jeśli rachunek daje wst B <1, bok a jest zawartym między mniejszą i większą prostopadłą sferyczną, spuszczoną z wierzchołka C na bok AB. Więc trójkąt ma dwa rozwiązania, i to właśnie stanowi przypadek *wątpliwy*.

A jeśli wst B $=1$, wtedy bok a równa się jednej z tych dwóch prostopadłych sferycznych, i jedno tylko jest rozwiązanie.

Trójkąt jest widocznie niemożebnym jeśli wst B jest urojoną, to jest gdy rachunek daje wst B >1.

III. Gdy bok a równa się bokowi b albo jego spełnieniu $180^\circ - b$, trójkąt ma jedno rozwiązanie, albo też nie ma żadnego; według tego jak bok a i kąt mu przeciwny A są oba, albo nie są, jednego rodzaju. Co przez się widoczne.

Należy tu uważać szczególny przypadek w którym boki równe a, b są ćwiercianami. Ponieważ wtedy trójkąt szukany powinien być dwójprostokątnym; więc, jeśli kąt A nie jest prostym, zagadnienie nie jest możebnem; a jeśli zaś kąt A jest prostym, to wtedy zagadnienie zostaje niewyznaczonem, i ma nieskończoną liczbę rozwiązań.

Tę dyskussyę tak prostą i tak ogólną wyjęliśmy prawie całą z Geometryi Pana G.-H. Niewęgłowskiego.

Chociaż powyższa dyskussya obejmuje dokładnie wszystkie przypadki zadanego zagadnienia, przytaczamy jednak poniżej tablicę tych przypadków, zwykle dawaną w dziełach trygonometryi, aby czytelnik sam się naocznie przekonał o trudności dyskussyi tego zagadnienia, i tém lepiej umiał ocenić jej wartość. Oto rzeczona tablica:

$$A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{ll}
b < 90^\circ & \left\{ \begin{array}{l}
a < b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dwa rozwiązania,} \\
a = b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ jedno rozwiązanie,} \\
a > b \text{ i } a + b < 180^\circ \ldots \text{ jedno rozwiązanie,} \\
a > b \text{ i } a + b = 180^\circ \text{ albo } a + b > 180^\circ, \text{ żadne.}
\end{array} \right. \\
b = 90^\circ & \left\{ \begin{array}{l}
a < b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dwa rozwiązania,} \\
a = b \text{ albo } a > b \ldots\ldots \text{ żadne rozwiązanie.}
\end{array} \right. \\
b > 90^\circ & \left\{ \begin{array}{l}
a < b \text{ i } a + b < 180^\circ \ldots \text{ dwa rozwiązania,} \\
a < b \text{ i } a + b = 180^\circ \text{ albo } a + b > 180^\circ, \text{ jedno,} \\
a = b \text{ albo } a > b \ldots\ldots \text{ żadne.}
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

$$
A=90^\circ \begin{cases}
b<90^\circ \begin{cases} a<b \text{ albo } a=b. \;.\;.\;.\;. & \text{żadne rozwiązanie,} \\ a>b \text{ i } a+b<180^\circ. \;.\;. & \text{jedno,} \\ a>b \text{ i } a+b=180^\circ \text{ albo } a+b>180^\circ. & \text{żadne.} \end{cases} \\[2ex]
b=90^\circ \begin{cases} a<b \text{ albo } a>b. \;.\;.\;.\;. & \text{żadne rozwiązanie,} \\ a=b. \;.\;.\;.\;. & \text{nieskończona liczba rozwiązań.} \end{cases} \\[2ex]
b>90^\circ \begin{cases} a<b \text{ i } a+b>180^\circ. \;.\;. & \text{jedno rozwiązanie,} \\ a<b \text{ i } a+b<180^\circ \text{ albo } a+b=180^\circ. & \text{żadne,} \\ a=b \text{ albo } a>b. \;.\;.\;.\;. & \text{żadne.} \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
A>90^\circ \begin{cases}
b<90^\circ \begin{cases} a<b \text{ albo } a=b. \;.\;.\;.\;. & \text{żadne rozwiązanie,} \\ a>b \text{ i } a+b>180^\circ. \;.\;. & \text{dwa rozwiązania.} \\ a>b \text{ i } a+b=180^\circ \text{ albo } a+b<180^\circ. & \text{żadne.} \end{cases} \\[2ex]
b=90^\circ \begin{cases} a<b \text{ albo } a=b. \;.\;.\;.\;. & \text{żadne rozwiązanie,} \\ a>b. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{dwa rozwiązania.} \end{cases} \\[2ex]
b>90^\circ \begin{cases} a<b \text{ i } a+b>180^\circ. \;.\;. & \text{jedno rozwiązanie,} \\ a<b \text{ i } a+b=180^\circ \text{ albo } a+b<180^\circ. & \text{żadne,} \\ a=b \text{ i } a+b>180^\circ. \;.\;. & \text{jedno,} \\ a=b \text{ i } a+b=180^\circ \text{ albo } a+b<180^\circ. & \text{żadne.} \\ a>b. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{dwa rozwiązania.} \end{cases}
\end{cases}
$$

Czwarty Przypadek.—*Mając dany bok* c *i dwa kąty przyległe* A, B, *znaleźć* a, b, C.

Formuły *Nepera dają*

$$\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)=\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A+B)},$$

$$\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(a-b)=\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(A+B)}.$$

Wyznaczywszy tym sposobem boki a, b, będziemy mieli kąt C z proporcyi

$$\mathrm{wst}\,C : \mathrm{wst}\,A :: \mathrm{wst}\,c : \mathrm{wst}\,a.$$

Kąt C może się jeszcze otrzymać za pomocą formuły

$$\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)}{\mathrm{wst}\,p\,\mathrm{wst}(p-c)}}.$$

Piąty Przypadek. —*Mając dane dwa kąty* A, B *i bok* a *przeciwny jednemu z nich, znaleźć* b, c, C.

Bok b wyrachuje się zaraz formułą

$$\text{wst}\,b = \frac{\text{wst}\,a\ \text{wst}\,B}{\text{wst}\,A}.$$

Potem formuły *Nepera* dadzą, dla boku c i kąta C,

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)},$$

$$\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

Zagadnienie może mieć dwa rozwiązania; jest więc przypadek wątpliwy. Dyskussya jest zupełnie ta sama co w przypadku *trzecim*, do którego obecny przypadek może się przyprowadzić, za pomocą trójkąta biegunowego; jakośmy już powiedzieli.

Z FORMUŁ TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ WYWIEŚDŹ FORMUŁY TRYGONOMETRYI PŁASKIEJ.

85. Niech będzie trójkąt sferyczny nakreślony na sferze promienia R; nazywając a', b', c' linie których długość równa się łukom odpowiednym a, b, c tego trójkąta, mamy

$$a = \frac{a'}{R}, \quad b = \frac{b'}{R}, \quad c = \frac{c'}{R}.$$

Wyobraźmy teraz że promień R zwiększa się nieograniczenie, ale długość boków a', b', c' zostaje niezmienną, trójkąt sferyczny będzie się zbliżał nieskończenie do trójkąta prostolinijnego który jest jego granicą. Łuki a, b, c dążyć będą do zera, a iloczyny R wst a, R wst b, R wst c do a', b', c'. Jakoż, $R\,\text{wst}\,a = \frac{a'\,\text{wst}\,a}{a}$;

aże, gdy łuk a dąży do zera, $gr.\ \frac{\text{wst}\,a}{a} = 1$; więc $gr.\ R\,\text{wst}\,a = a'$.

Tak samo, $gr.\ R\,\text{wst}\,b = b'$. $Gr.\ R\,\text{wst}\,c = c'$.

To zrozumiawszy, łatwo widzimy że formuły trygonometryi sferycznej

$$\frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,A} = \frac{\text{wst}\,b}{\text{wst}\,B} = \frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,C},$$

które można pisać

$$\frac{a'}{\text{wst}\,A}\cdot\frac{\text{wst}\,a}{a} = \frac{b'}{\text{wst}\,B}\cdot\frac{\text{wst}\,b}{b} = \frac{c'}{\text{wst}\,C}\cdot\frac{\text{wst}\,c}{c},$$

stają się, gdy promień R rośnie nieskończenie,

$$\frac{a'}{\text{wst}\,A} = \frac{b'}{\text{wst}\,B} = \frac{c'}{\text{wst}\,C}.$$

Weźmy jeszcze formułę fundamentalną

$$\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,c + \text{wst}\,b\ \text{wst}\,c\ \text{dos}\,A$$

w której zamiast dos$a$, dos$b$, dos$c$, połóżmy $1-2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a$, $1-2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b$, $1-\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c$; otrzymamy

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = \text{wst}^2\tfrac{1}{2}b + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b\ \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,b\ \text{wst}\,c\ \text{dos}\,A;$$

albo pod inną formą

$$\left(\frac{a'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{2}a}\right)^2 = \left(\frac{b'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}b}{\tfrac{1}{2}b}\right)^2 + \left(\frac{c'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\tfrac{1}{2}c}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2R^2}\left(\frac{b'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}b}{\tfrac{1}{2}b}\right)^2\left(\frac{c'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\tfrac{1}{2}c}\right)^2 - 2b'c'\frac{\text{wst}\,b}{b}\ \frac{\text{wst}\,c}{c}\ \text{dos}\,A.$$

Gdy R rośnie nieskończenie, ostatnia formuła przywodzi się do znanej

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\ \text{dos}\,A.$$

W trójkącie sferycznym prostokątnym

$$\text{wst}\,b = \text{wst}\,a\ \text{wst}\,B, \qquad \text{albo} \qquad \frac{b'\,\text{wst}\,b}{b} = \frac{a'\,\text{wst}\,a}{a}\,\text{wst}\,B.$$

Gdy R staje się nieskończenie wielkim, z ostatniego równania wynika

$$b' = a'\ \text{wst}\,B,$$

znana formuła trójkąta prostolinijnego.

Można się jeszcze zapytać, jakiej własności trójkąta prostolinijnego odpowieda formuła

$$\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\ \text{dos}\,c.$$

Aby rozwiązać to pytanie, zamieńmy dostawy na wstawy; będzie

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = \text{wst}^2\tfrac{1}{2}b + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b\ \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c;$$

albo

$$\left(\frac{a'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{2}a}\right)^2 = \left(\frac{b'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}b}{\tfrac{1}{2}b}\right)^2 + \left(\frac{c'\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c}{\tfrac{1}{2}c}\right)^2 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b\left(\frac{c'\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\tfrac{1}{2}c}\right)^2.$$

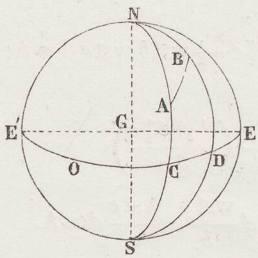
Ta ostatnia, gdy $R = \infty$, daje

$$a'^2 = b'^2 + c'^2.$$

KILKA ZASTOSOWAŃ TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ.

86. Zagadnienie I.—*Znając długość i szerokość dwóch punktów globu, znaleźć odległość tych punktów.*

Niech będą A, B dwa punkta leżące na sferze ziemskiej; N biegun północny, ECE′ równik; O punkt znany od którego liczą się długości. Przypuśćmy że długość wschodnia idzie w stronę OE, a długość zachodnia w stronę OE′. Niech będą NAS, NBS południki przechodzące przez dwa punkta dane A, B których mamy szerokości AC, BD, i długości OC, OD. Poprowadźmy łuk koła wielkiego AB. W trójkącie sferycznym ABN, znamy boki AN, BN jako *dopełnienia* szerokości AC, BD; znamy także kąt zawarty N który ma za miarę różnicę albo summę długości danych, według tego jak one są obie wschodniemi albo zachodniemi, albo też jedna wschodnią a druga zachodnią. Rozwiązawszy ten trójkąt, będziemy wiedzieli liczbę stopni łuku AB które łatwo zamieniają się na metry, i dają odległość AB żądaną. Następujący przykład lepiej jeszcze to wszystko wyjaśni.



Niech będzie

$$\text{Dla punktu A} \begin{cases} \text{szerokość północna AC} = 4°56'15'' \\ \text{długość zachodnia OC} = 54°35'. \end{cases}$$

$$\text{Dla punktu B} \begin{cases} \text{szerokość północna BD} = 48°23'14'' \\ \text{długość zachodnia OD} = 6°49'. \end{cases}$$

Wynika ztąd

$$\text{BN} = 90° - 48°23'14'' = a,$$
$$\text{AN} = 90° - 4°56'15'' = b,$$
$$\text{kąt N} = 54°35' - 6°49' = 47°46'.$$

Poczem szuka się boku AB $= n$ za pomocą formuły

$$\text{dos}\, n = \text{dos}\, a\ \text{dos}\, b + \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b\ \text{dos N}.$$

Aby zastosować logarytmy, używa się, jako wiadomo, kąta pomocniczego φ, kładąc $\text{wst}\, b\ \text{dos N} = \text{dos}\, b\ \text{dot}\, \varphi$.

Przez co formuła powyższa staje się

$$\mathrm{dos}\, n = \frac{\mathrm{dos}\, b \ \mathrm{wst}\,(a+\varphi)}{\mathrm{wst}\,\varphi}.$$

Rachunek kąta φ.

$$\begin{aligned} \mathrm{g\,sty}\, b \text{ albo } \log \mathrm{dot}\, 4^\circ 56' 15'' &= 1{,}0635386 \\ \log \mathrm{dos} N &= 9{,}8274671 \\ \hline \log \mathrm{dot}\, \varphi &= 0{,}8910057 \\ \varphi &= 7^\circ 19' 25''. \\ a+\varphi &= 48^\circ 56' 12''. \end{aligned}$$

Rachunek boku n *w stopniach.*

$$\begin{aligned} \log \mathrm{dos}\, b &= 8{,}9348468 \\ \log \mathrm{wst}\,(a+\varphi) &= 9{,}8773621 \\ D^e \log \mathrm{wst}\, \varphi &= 8{,}8945642 \\ \hline \log \mathrm{dos}\, n &= 9{,}7067731 \\ n &= 59^\circ 23' 54'',38. \end{aligned}$$

Wiemy tedy że łuk AB ma $59^\circ 23' 54'',38$. Aby wyrachować długość tego łuku w metrach, przypomnijmy sobie że ćwierć południka ziemskiego zawiera 10 000 000 metrów. Zatém, jeden stopień zawiera $\frac{10000000}{90}$ metrów, a następnie łuk AB zawiera

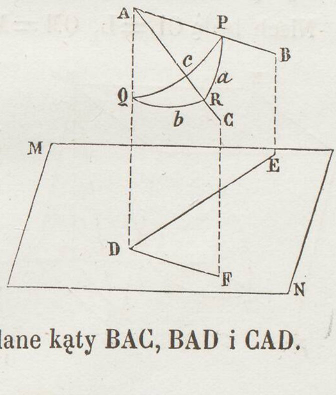
$$\frac{1000000^{\mathrm{m}}}{9} \times 59^\circ 23' 54'',38 = 6599839 \text{ metrów}.$$

Albo, licząc 5000 metrów na milę zwyczajną, odległość AB ma $1319^{\mathrm{mil}},968$.

(Rachunki tego zagadnienia wyjęte z trygonometryi Pana Lefébure de Fourcy).

87. Zagadnienie II. — *Przywieśdź kąt do horyzontu.*

Niech będą AB, AC dwa ramiona kąta A leżącego na płaszczyznie pochylonej do horyzontu; z wierzchołka A tego kąta, i z punktów B, C, wziętych dowolnie na jego ramionach, spuśćmy, na płaszczyznę horyzontalną MN, prostopadłe AD, BE, CF, i połączmy DE, DF. Otoż, kąt EDF, rzut kąta BAC na płaszczyznie horyzontalnej, nazywa się *kątem przywiedzionym do horyzontu*, który właśnie wyrachować trzeba, mając dane kąty BAC, BAD i CAD.



Aby rozwiązać to zagadnienie, przypuśćmy że z punktu A, jako środka, promieniem jakimkolwiek, nakreślono sferę. Trzy płasczyzny BAC, BAD, CAD wyznaczą na sferze trójkąt PQR w którym boki PQ, PR, QR będą miarami kątów danych, a kąt Q będzie kątem szukanym.

Wyznaczymy kąt Q za pomocą formuły

$$\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}Q = \sqrt{\frac{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a)}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}.$$

$$\log\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}\{\log\operatorname{wst} p + \log\operatorname{wst}(p-a) + D^e\log\operatorname{wst} b + D^e\log\operatorname{wst} c\}.$$

Niech będzie na przykład kąt $BAC = 37°19'40'' = a$;

$CAD = 67°24'25'' = b$; $BAD = 58°42'35'' = c$.

Mamy $a + b + c = 2p = 158°26'40,$

$p = 79°13'20''$; $(p-a) = 41°53'40''$.

Rachunek kąta Q.

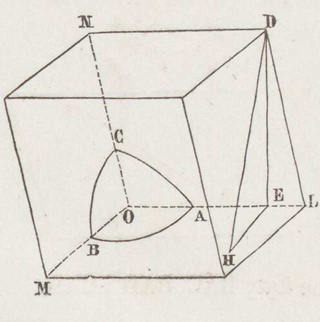
log wst 79° 13′ 20″	=	9,9922706
log wst 41° 53′ 40″	=	9,8246206
D^e log wst 67° 24′ 25″	=	0,0346775
D^e log wst 53° 42′ 35″	=	0,0936494
2 log dos ½ Q	=	19,9452181

$Q = 40°16'20''$.

(Rachunek wyjęty z trygon. PP. Delisle i Gerono, wyd. 3[e]).

88. Zagadnienie III.— *Wyrachować objętość równoległościanu pochyłego, znając długości krawędzi i kąty tych krawędzi.*

Niech będą $OL = L$, $OM = M$, $ON = N$ trzy krawędzie przyległe równoległościanu. Z punktu O, promieniem wziętym za jedność, nakreślmy sferę która przetnie ściany kąta trójściennego O wedle boków trójkąta sferycznego ABC. Boki a, b, c i kąty A, B, C tego trójkąta są wiadome jako mierzące kąty płaskie i kąty dwójścienne trójścianu O, które są dane.



Równoległobok LOM ma za miarę LM wst$c$; a jeśli z wierzchołka D spuścimy prostopadłę DH na podstawę LM, i prostopadłę DE na krawędź OL; będzie kąt DEH $=$ A, i trójkąty prostokątne DEL, DEH dadzą

$$\mathrm{DE} = \mathrm{N}\,\mathrm{wst}\,b, \qquad \mathrm{DH} = \mathrm{DE}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A} = \mathrm{N}\,\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A}.$$

Więc objętość V równoległościanu jest

$$\mathrm{V} = \mathrm{LMN}\,\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A}.$$

Owoż, czyniąc $a+b+c=2p$, mamy, jako wiadomo (76),

$$\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c}},$$

$$\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,p\,\mathrm{wst}(p-a)}{\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c}};$$

zkąd

$$\mathrm{wst}\,\mathrm{A} = \frac{1}{2\,\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c}\sqrt{\mathrm{wst}\,p\,\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}.$$

Zatém ostatecznie

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\mathrm{LMN}\sqrt{\mathrm{wst}\,p\,\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}.$$

(To zagadnienie wyjęte z trygonometryi Pana Serret).

KSIĘGA PIĄTA

ZASTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO ALGEBRY.

Formuła Moivra, *i jej zastosowania.*

89. Formuła *Moivra* zależy na równości następującej:

$$(1)\quad (\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, a)^m = \text{dos}\, ma + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, ma,$$

która wyraża że, aby podnieść do potęgi jakiejkolwiek m dwumian $\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, a$, dosyć jest pomnożyć łuk a przez wykładnik m potęgi. Dowodzenie tej formuły rozłożymy na trzy przypadki.

Uważajmy naprzód przypadek w którym wykładnik m jest całkowitym i dodatnym.

Mnożąc $\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, a$ przez $\text{dos}\, b + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, b$, wedle prawideł ugodnych na ilości urojone, znajdziemy iloczyn

$$\text{dos}\, a\, \text{dos}\, b - \text{wst}\, a\, \text{wst}\, b + \sqrt{-1}\, (\text{wst}\, a\, \text{dos}\, b + \text{dos}\, a\, \text{wst}\, b),$$

albo

$$\text{dos}\, (a+b) + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, (a+b).$$

To pokazuje że mnożenie dwóch czynników urojonych, formy $\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, a$, $\text{dos}\, b + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, b$, odbywa się prostem dodaniem do siebie łuków a i b.

Jeśli ostatni iloczyn pomnożymy przez nowy czynnik tej samej formy, $\text{dos}\, c + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, c$, otrzymamy, na mocy wskazanego prawidła, iloczyn

$$\text{dos}\, (a+b+c) + \sqrt{-1}\, \text{wst}\, (a+b+c).$$

I tak dalej, jakakolwiek jest liczba czynników.

Więc, jeśli przypuścimy że jest m czynników i wszystkie równe między sobą, będziemy mieli

$$(1)\quad (\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m = \operatorname{dos} ma + \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma.$$

Uważajmy teraz przypadek w którym wykładnik jest liczbą ułamkową dodatną. Kładąc łuk $\frac{a}{m}$ zamiast a, w formule (1), mamy

$$\left(\operatorname{dos}\frac{a}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{wst}\frac{a}{m}\right)^m = \operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek m^{ty}, wynika

$$(2)\quad \left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^{\frac{1}{m}} = \operatorname{dos}\frac{a}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{wst}\frac{a}{m}.$$

Co dowodzi formuły *Moavra* na wykładnik $\frac{1}{m}$.

Nietrudno teraz dowieśdź tej formuły na wykładnik ułamkowy $\frac{m}{n}$.

Jakoż, na mocy formuł (1) i (2), mamy

$$\left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^{\frac{m}{n}} \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{\left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^m}$$

$$= \sqrt[n]{\operatorname{dos} ma + \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma} = \operatorname{dos}\frac{ma}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{wst}\frac{ma}{n}. \quad (3)$$

Nakoniec, jeśli wykładnik potęgi jest odjemnym, uważajmy że

$$\left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^m}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{dos} ma + \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma};$$

Pomnóżmy teraz oba wyrazy ostatniego ułamku przez

$\operatorname{dos} ma - \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma$; ponieważ mianownik staje się $\operatorname{dos}^2 ma + \operatorname{wst}^2 ma = 1$, znajdziemy

$$(4)\quad \left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a\right)^{-m} = \operatorname{dos} ma - \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma$$

$$= \operatorname{dos}(-ma) + \sqrt{-1} \operatorname{wst}(-ma).$$

Tym sposobem formuła *Moawra* zostaje dowiedzioną dla wszelkiej wartości wykładnika potęgi.

90. Ale jest tu ważna uwaga do zrobienia gdy wykładnik jest ułamkowym; wtedy albowiem pierwsza strona formuły *Moawra*, jako pierwiastnik, daje wiele wartości, gdy tymczasem druga strona przedstawia jedną tylko. Aby poprawić tę niedokładność, uważajmy naprzód wykładnik ułamkowy $\frac{1}{m}$ (dodatny); mamy

$$\sqrt[m]{\operatorname{dos} a+\sqrt{-1}\operatorname{wst} a}=\operatorname{dos}\frac{a}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{a}{m}.$$

Widzimy tu że pierwiastnik $\sqrt[m]{\operatorname{dos} a+\sqrt{-1}\operatorname{wst} a}$ ma m różnych wartości czyli *wyznaczeń*, gdy tymczasem druga strona równania, $\frac{a}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{a}{m}$, jedną tylko przedstawia wartość. Aby druga strona miała wszystkie m wartości pierwszej, dosyć w niej, zamiast łuku a, położyć łuki $a+2k\pi$ mające z tym łukiem te same wstawę i dostawę.

Formuła powyższa, tak zmodyfikowana,

$$\sqrt[m]{\operatorname{dos} a+\sqrt{-1}\operatorname{wst} a}=\operatorname{dos}\frac{a+2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{a+2k\pi}{m}$$

jest dokładną.

Jakoż, każda z wartości drugiej strony, podniesiona do potęgi m^{tej}, daje pierwszą stronę $\operatorname{dos} a+\sqrt{-1}\operatorname{wst} a$.

Powtóre, jeśli za k podstawimy m liczb całkowitych po sobie idących jakichkolwiek, jako $0, 1, 2, 3, \ldots m-1$, druga strona będzie miała m różnych wartości. Bo, dwa łuki nie mogą mieć zarazem tej samej wstawy i dostawy, tylko wtedy gdy ich różnica jest wielokrotnikiem okręgu; to jest, nazywając k'' i k' dwie różne wartości podstawione za k, musi być

$$\frac{2(k''-k')\pi}{m}=2i\pi, \quad \text{zkąd} \quad k''=k'+im.$$

Więc, jeśli za k podstawimy m liczb po sobie idących, formuła (3) da m różnych wartości, i nie da ich więcej. Zatem jest ogólną.

91. Nakoniec gdy wykładnik jest ułamkiem *niezredukowalnym* $\frac{m}{n}$, aby formuła (3) była ogólną należy, zamiast łuku ma, położyć łuki $ma + 2k\pi$ które mają z nim te same wstawę i dostawę; co daje

$$\left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1}\operatorname{wst} a\right)^{\frac{m}{n}} = \operatorname{dos}\frac{ma+2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{ma+2k\pi}{n}.$$

Druga strona równania, jeśli w niéj zamiast k podstawimy n liczb całkowitych po sobie idących, jako $0, 1, 2 \ldots n-1$, daje wszystkie n wartości różne pierwszej strony, i nie daje ich więcej; co właśnie dowodzi ogólności tej formuły tak zmodyfikowanej. Wszystko to łatwo się sprawdza powtarzając rozumowanie dopiero co wyżej użyte.

Jednakże winniśmy ostrzedz czytelnika że ostatnie uwagi mają miejsce tylko wtedy gdy ułamek $\frac{m}{n}$ zostaje do najprostszej przywiedziony formy: inaczej albowiem, gdyby ułamek $\frac{m}{n}$ nie był uproszczonym, druga strona równania przedstawiałaby więcej wartości niż pierwsza, i formuła nie byłaby zupełnie prawdziwą. Użycie przeto formuły *Moawra* wymaga pewnych ostrożności na które pilnie w zastosowaniu baczyć trzeba.

Mnożenie łuków.

92. Formuła *Moawra* daje wartości wstawy, dostawy i stycznej wielokrotników łuku w funkcyi wstawy, dostawy i stycznej tego łuku.

Jakoż, jeśli rozwiniemy drugą stronę równania

$$\operatorname{dos} ma + \sqrt{-1}\operatorname{wst} ma = \left(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1}\operatorname{wst} a\right)^m$$

oddzielając część rzeczywistą od urojonej, otrzymamy

$$\operatorname{dos} ma + \sqrt{-1}\operatorname{wst} ma = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{dos}^{m-2} a \operatorname{wst}^2 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{dos}^{m-4} a \operatorname{wst}^4 a - \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} m\operatorname{dos}^{m-1} a \operatorname{wst} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{dos}^{m-3} a \operatorname{wst}^3 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{dos}^{m-5} a \operatorname{wst}^5 a - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Ztąd wynika

$$(1)\quad \operatorname{dos} ma = \begin{cases} \operatorname{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}^{m-2} a \operatorname{wst}^2 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \operatorname{dos}^{m-4} a \operatorname{wst}^4 a \text{ i t. d.} \end{cases}$$

$$(2)\quad \operatorname{wst} ma = \begin{cases} m \operatorname{dos}^{m-1} a \operatorname{wst} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} \operatorname{dos}^{m-3} a \operatorname{wst}^3 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{dos}^{m-5} a \operatorname{wst}^5 a \text{ i t. d.} \end{cases}$$

Ustawa, wedle której wywodzą się wyrazy tych dwóch formuł, jest widocznie łatwą. Oba rozwinięcia są skończone, bo m jest liczbą całkowitą dodatną. Formuły te pokazują że dos ma może się wyrazić funkcyą całkowitą dos a. Co się tycze wst ma, ona może się także wyrazić funkcyą całkowitą wst a, ale tylko wtedy gdy m jest nieparzystem.

93. Można jeszcze wyrazić dos ma i wst ma pod inną postacią, w poszukiwaniach wyższej Analizy dogodną.

Jakoż, jeśli w formule

$$\operatorname{dos} ma + \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma = (\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m$$

zamiast a położymy $-a$, będzie

$$\operatorname{dos} ma - \sqrt{-1} \operatorname{wst} ma = (\operatorname{dos} a - \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m;$$

z tych dwóch równań wywodzi się

$$\operatorname{dos} ma = \frac{(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m + (\operatorname{dos} a - \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m}{2},$$

$$\operatorname{wst} ma = \frac{(\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m - (\operatorname{dos} a - \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)^m}{2\sqrt{-1}}.$$

94. Dzieląc stronami równania (1), (2), mamy

$$\frac{\operatorname{wst} ma}{\operatorname{dos} ma} = \frac{m \operatorname{dos}^{m-1} a \operatorname{wst} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{dos}^{m-3} a \operatorname{wst}^3 a + \ldots}{\operatorname{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}^{m-2} a \operatorname{wst}^2 a + \ldots}$$

Dzieląc przez $\operatorname{dos}^m a$ oba wyrazy ułamku który stanowi drugą stronę, i uważając że $\dfrac{\text{wst}\, ma}{\text{dos}\, ma} = \text{sty}\, ma$, znajdujemy

$$(3)\quad \text{sty}\, ma = \frac{m\,\text{sty}\, a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\text{sty}^3 a + \ldots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\text{sty}^2 a + \ldots}$$

Ta formuła daje sty ma w funkcyi stosunkowej sty a.

Dzielenie łuków.

95. *Znaleźć* dos $\frac{a}{m}$ *znając* dos $a = b$.

Jeśli w formule (1), numeru 92, zamienimy a na $\frac{a}{m}$ i uczynimy dos $\frac{a}{m} = x$, wst $\frac{a}{m} = \sqrt{1-x^2}$, dos $a = b$, otrzymamy równanie stopnia m^{tego} formy

$$Ax^m + Bx^{m-2} + Cx^{m-4} + \ldots + Hx^2 - b = 0.$$

Wszystkie m pierwiastki tego równania są rzeczywiste i, ogólnie mówiąc, różne. Jakoż, łuki odpowiedające danej dostawie b zawierają się w formule $2k\pi \pm \alpha$; przeto uczynimy zadosyć równaniu biorąc za x dostawę jednego z łuków

$$\frac{2k\pi + \alpha}{m}, \quad \frac{2k\pi - \alpha}{m},$$

w których k jest liczbą całkowitą jakąkolwiek.

Uważajmy teraz że, kładąc za k, w pierwszem wyrażeniu łuków, k', a w drugiem wartość dopełniającą $m - k'$, mamy

$$\text{dos}\,\frac{2k'\pi + \alpha}{m} = \text{dos}\,\frac{2(m-k')\pi - \alpha}{m},$$

bo summa dwóch łuków jest 2π. To pokazuje że niema potrzeby brać obydwóch wyrażeń. Aże, jeśli podstawimy za k dwie wartości różniące się wielokrotnikiem z m, otrzymamy dwa łuki które, różniąc się wielokrotnikiem z okręgu, mają te same dostawy; więc dosyć jest za k podstawić m wartości po sobie idących, jako 0, 1, 2... $m-1$. Ztąd wnosimy że wszystkie m pierwiastki równania są rzeczywiste i ogólnie różne. — Ale zajmować się wyznaczeniem tych pierwiastków nie tu jest miejsce.

96. *Znaleźć* wst $\frac{a}{m}$ *znając* wst $a = b$.

Jeśli w formule (2), numeru 92, zamienimy a na $\frac{a}{m}$, i uczynimy wst $\frac{a}{m} = x$, dos $\frac{a}{m} = \sqrt{1-x^2}$, wst $a = b$, otrzymamy równanie którego pierwiastniki będą wartościami wst $\frac{a}{m}$.

Trzeba tu odróżnić dwa przypadki. Jeśli m jest liczbą nieparzystą, rzeczona formuła (2) da równanie stopnia m^{tego} którego wszystkie wyrazy są stopnia nieparzystego. Ale, jeśli m jest *parzystem*, trzeba równanie (2) podnieść do kwadratu, aby znieść pierwiastnik $\sqrt{1-x^2}$; otrzyma się ztąd równanie stopnia $2m$, w którem niewiadoma x ma tylko potęgi parzyste; a zatém pierwiastki są po dwa równe i znaków przeciwnych.

Aby mieć wyraźniejsze rozwiązanie zagadnienia, nazwijmy α najmniejszy łuk dodatny którego wstawą jest b. Wszystkie wartości dla x będą się zawierały w dwóch formułach

$$x = \text{wst}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m}, \quad \text{i} \quad x = \text{wst}\,\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{m},$$

w których, jako wiadomo, dosyć, za k, podstawić m liczb całkowitych po sobie idących, jako $0, 1, 2 \ldots\ldots m-1$.

W tym ciągu podstawień dla k, łuki każdej formuły idą w postępni arytmetycznej której stosunkiem jest $\frac{2\pi}{m}$; zatém dwa łuki jednej z formuł nie mogą mieć spólnej wstawy, bo ich summa nie równa się liczbie nieparzystej półokręgów (9), a ich różnica jest oczywiście mniejszą od okręgu.

Zobaczmy teraz czy dwa łuki wzięte z obydwóch formuł, jako $\frac{2k\pi + \alpha}{m}$ i $\frac{(2k'+1)\pi - \alpha}{m}$ mogą mieć te samą wstawę. Różnica tych łuków, zawierając α, nie może być, ogólnie mówiąc, wielokrotnikiem okręgu; a zaś ich summa, $\frac{(2k+2k'+1)\pi}{m}$, nie może się równać liczbie nieparzystej półokręgów, jeśli m jest *parzystem*. Więc, gdy m jest parzystem, x może mieć $2m$ różnych wartości, które są po dwie równe i znaków przeciwnych.

Ale, jeśli m jest *nieparzystem*, można zawsze, jakakolwiek jest liczba k zawarta między o i m, znaleźć drugą liczbę k' także zawartą między o i m, tak aby summa $2k+2k'+1$ równała się liczbie m; dosyć albowiem wziąć $k'=\frac{m-1}{2}-k$: wtedy druga formuła wchodzi w pierwszą. Więc gdy m jest nieparzystem, x może mieć tylko m wartości.

97. Rozumując, jako powyżej, łatwo się widzi że dos $\frac{a}{m}$ w funkcyi wst a, jest daną równaniem stopnia $2m$; a zaś wst $\frac{a}{m}$ w funkcyi dos a, równaniem stopnia $2m$ albo m, według tego jak m jest nieparzystem albo parzystem. Nakoniec, sty $\frac{a}{m}$ w funkcyi sty a zależy zawsze od równania stopnia m.

Formuły dające dos$^m a$ *i* wst$^m a$,
w funkcyi dostaw i wstaw wielokrotników łuku a.

98. Aby łatwiej otrzymać te formuły, uczyńmy

$$\text{dos}\,a+\sqrt{-1}\,\text{wst}\,a=u,\qquad \text{dos}\,a-\sqrt{-1}\,\text{wst}\,a=v.$$

Wynika ztąd

$$2\,\text{dos}\,a=u+v,\quad \text{i}\quad 2\sqrt{-1}\,\text{wst}\,a=u-v.$$

Zajmując się najpierwej dostawą, otrzymamy

$$2^m\,\text{dos}^m\,a=(u+v)^m=u^m+mu^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^{m-2}+muv^{m-1}+v^m.$$

Należy tu odróżnić dwa przypadki:

1° Jeśli m jest parzystem, rozwinięcie ma liczbę nieparzystą wyrazów, wtedy wyraz środkowy jest

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots..\left(\frac{m}{2}+1\right)u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\ldots..\frac{m}{2}}.$$

Zbliżając wyrazy skrajne, i te które są od nich po dwa równie oddalone, otrzymamy

$$2^m \operatorname{dos}^m a = \left\{\begin{array}{l} (u^m + v^m) + muv(u^{m-2} + v^{m-2}) \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots\ldots \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right) u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m}{2}}. \end{array}\right.$$

To ustanowiwszy, równości

$$\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a = u, \quad \operatorname{dos} a - \sqrt{-1} \operatorname{wst} a = v,$$

dają, oznaczając przez p wykładnik jakikolwiek,

$$u^p = \operatorname{dos} pa + \sqrt{-1} \operatorname{wst} pa, \quad v^p = \operatorname{dos} pa - \sqrt{-1} \operatorname{wst} pa;$$

zkąd

$$u^p + v^p = 2 \operatorname{dos} pa.$$

Nadto,

$$\begin{aligned} uv &= (\operatorname{dos} a + \sqrt{-1} \operatorname{wst} a)(\operatorname{dos} a - \sqrt{-1} \operatorname{wst} a) \\ &= (\operatorname{dos}^2 a + \operatorname{wst}^2 a) = 1; \end{aligned}$$

więc

$$u^p v^p = 1.$$

Na mocy tych uwag, powyższe równanie staje się

$$2^m \operatorname{dos}^m a = 2 \operatorname{dos} ma + 2m \operatorname{dos}(m-2) + \frac{2m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}(m-4)a + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m}{2}};$$

albo, dzieląc przez 2 obie strony,

$$(1)\quad 2^{m-1} \operatorname{dos}^m a = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos} ma + m \operatorname{dos}(m-2)a \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}(m-4)a + \ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{2}.\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m}{2}}. \end{array}\right.$$

Formuła (1) wyznacza $\operatorname{dos}^m a$, w funkcyi dostaw wielokrotników ma, $(m-2)a$, i t. d., łuku a, gdy wykładnik m jest parzystym.

2° Gdy wykładnik m jest nieparzystym, rozwinięcie $(u+v)^m$ ma liczbę parzystą wyrazów; wtedy są dwa wyrazy środkowe.

Ustawiając odpowiednio wyrazy równie oddalone od skrajnych, znajdujemy

$$2^m \operatorname{dos}^m a = \begin{cases} (u^m + v^m) + muv\,(u^{m-2} + v^{m-2}) \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}} u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} (u+v). \end{cases}$$

A zatem, mając wzgląd na związki ogólne

$$u^p + v^p = 2\operatorname{dos} pa, \quad \text{i} \quad u^p v^p = 1,$$

i dzieląc przez 2, będziemy mieli

$$(2)\quad 2^{m-1} \operatorname{dos}^m a = \begin{cases} \operatorname{dos} ma + m\operatorname{dos}(m-2)a + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{dos}(m-4)a \ldots \\ \ldots\ldots + \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.2\ldots\frac{m-1}{2}} \operatorname{dos} a. \end{cases}$$

Formuła (2) daje $\operatorname{dos}^m a$ w funkcyi dostaw wielokrotników łuku a, gdy wykładnik m jest nieparzystym.

99. Aby znaleźć formuły odpowiedające $\operatorname{wst}^m a$, używa się równości $2\sqrt{-1}\operatorname{wst} a = u - v$, która daje

$$2^m (\sqrt{-1})^m \operatorname{wst}^m a = (u-v)^m = \begin{cases} u^m - mu^{m-1}v + \dfrac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 \ldots\ldots \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2}u^2 v^{m-2} \mp muv^{m-1} \pm v^m. \end{cases}$$

Trzeba jeszcze odróżnić dwa przypadki, podług tego jak m jest liczbą parzystą lnb nieparzystą.

1° Uważmy m parzyste. Wtedy oczywiście $(\sqrt{-1})^m = (-1)^{\frac{m}{2}}$, i w rozwinięciu znajduje się jeden wyraz środkowy który jest

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right) u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}.$$

Zbierając, po dwa, wyrazy równie oddalone od skrajnych, mamy

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^m \text{ wst}^m a = \left\{ \begin{array}{l} (u^m + v^m - muv\,(u^{m-2} + v^{m-2} \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-5}) + \ldots\ldots \\ \pm \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right) u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\ldots.\frac{m}{2}}. \end{array} \right.$$

A za pomocą związków

$$u^p + v^p = 2 \operatorname{dos} pa, \qquad u^p v^p = 1,$$

otrzymamy, dzieląc przez 2 obie strony,

$$(3) \quad (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1} \text{ wst}^m a = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{dos} ma - m \operatorname{dos} (m-2) a \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos} (m-4)\, a - \ldots\ldots \\ \pm \dfrac{1}{2} . \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}. \end{array} \right.$$

Ta formuła daje $\text{wst}^m a$ w funkcyi wstaw wielokrotników łuku a gdy m jest parzystem.

2° Jeśli wykładnik m jest nieparzystym, wtedy

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \times \sqrt{-1}.$$

Zbierając, po dwa, wyrazy równie oddalone od skrajnych, mamy

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\, 2^m \sqrt{-1} \text{ wst}^m a = \left\{ \begin{array}{l} (u^m - v^m) - muv\,(u^{m-2} - v^{m-2}) \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} - v^{m-4}) + \ldots \\ \pm \dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)} u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} (u-v). \end{array} \right.$$

Ale ze związków

$$u^p = \operatorname{dos} pa + \sqrt{-1} \operatorname{wst} pa, \quad v^p = \operatorname{dos} pa - \sqrt{-1} \operatorname{wst} pa,$$

wyprowadza się

$$u^p - v^p = 2\sqrt{-1} \operatorname{wst} pa, \quad \text{i} \quad u^p v^p = 1.$$

Za pomocą dwóch ostatnich równości, i dzieląc wszystkie wyrazy przez $2\sqrt{-1}$, otrzymana formuła staje się,

$$(4)\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \operatorname{wst}^m a = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{wst} ma - m \operatorname{wst}(m-2)a \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{wst}(m-4)a + \ldots\ldots \\ \pm \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)} \operatorname{wst} a. \end{array} \right.$$

Formuła (4) wyznacza $\operatorname{wst}^m a$ w funkcyi wstaw wielokrotników łuku a, gdy wykładnik m jest nieparzystym.

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ DWUMIENNYCH I TRÓJMIENNYCH ZA POMOCĄ TABLIC.

100. Niech będzie równanie dwumienne $y^m = \pm A$.

Uważajmy naprzód przypadek w którym A jest ilością rzeczywistą dodatną; nazywając a wartość arytmetyczną pierwiastku m^{tego} liczby A, i czyniąc $y = ax$, równanie $y^m = A$ staje się

$$a^m x^m = A \quad \text{albo} \quad x^m = 1.$$

Wiadomo z Algebry że, jeśli $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ jest pierwiastkiem równania o spółczynnikach rzeczywistych, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ jest także jego pierwiastkiem. Te dwa pierwiastki dają $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Jakoż, podstawiając, mamy

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m = 1, \quad (\alpha - \beta\sqrt{-1})^m = 1;$$

mnożąc te dwa równania stronami, wyniknie $(\alpha^2 + \beta^2)^m = 1$. A że $\alpha^2 + \beta^2$ jest ilością rzeczywistą i dodatną, więc $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Gdy pierwiastek równania $x^m - 1 = 0$ jest rzeczywistym, wtedy $\beta = 0$, $\alpha = \pm 1$; zatem $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Ponieważ tedy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ilości α, β mogą się wziąć za dostawę i wstawę tego samego łuku; położymy przeto

$$x = \operatorname{dos}\varphi + \sqrt{-1} \operatorname{wst}\varphi.$$

Aby wyznaczyć łuk φ, mamy, na mocy formuły *Moawra*,

$$x^m = \operatorname{dos} m\varphi + \sqrt{-1} \operatorname{wst} m\varphi;$$

więc

$$\operatorname{dos} m\varphi + \sqrt{-1} \operatorname{wst} m\varphi = 1.$$

To równanie wymaga oczywiście aby było $\operatorname{wst}\varphi = 0$, i dos $m\varphi = 1$. Pierwszemu warunkowi, wst $m\varphi = 0$, uczyni się zadosyć, biorąc za łuk $m\varphi$ jakikolwiek wielokrotnik półokręgu; ale z przyczyny drugiego warunku, dos $m\varphi = 1$, łuk $m\varphi$ musi być wielokrotnikiem parzystym półokręgu; trzeba więc wziąć

$$m\varphi = 2k\pi, \quad \text{zkąd} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{m}.$$

A zatem

$$x = \text{dos}\,\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2k\pi}{m}.$$

Wiemy już zkąd inąd że równanie $x^m - 1 = 0$ ma m pierwiastków, i że wszystkie są nierówne; dowiedziemy teraz że formuła powyższa wyznacza je wszystkie.

Liczba k jest całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną. Aby otrzymać wszystkie m wartości różne, które są pierwiastkami równania $x^m = 1$, dosyć jest za k podstawić $m - 1$ liczb po sobie idących, $0, 1, 2 \ldots m-1$. Jakoż, otrzymane tym sposobem m wartości będą różne, bo największa różnica dwóch łuków, jako $\frac{2(m-1)}{m}\pi$ i 0, jest mniejszą od okręgu; zatem między temi łukami niema dwóch któreby miały zarazem tę samą wstawę i dostawę.

Podstawiając inne liczby zamiast k nie otrzymamy nowych wartości. I tak, biorąc $k = m + i$ $i < m$, będzie

$$\text{dos}\frac{2(m+i)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2(m+i)\pi}{m} = \text{dos}\,\frac{2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2i\pi}{m};$$

co jest to samo jak podstawiając $k = i$.

Jeśli zaś weźmiemy $k = -i$, $i < m$; będzie także

$$\text{dos}\frac{-2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\frac{-2i\pi}{m} = \text{dos}\frac{2(m-i)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\frac{2(m-i)\pi}{m},$$

co jest to samo jak podstawiając $k = m - i$. — Żadna więc z tych dwóch wartości nie jest różną od otrzymanych powyżej.

Ztąd wnosimy że podstawiając za k ciąg m liczb po sobie idących jakichkolwiek, znaleziona formuła da wszystkie m wartości różne i nie da ich więcej.

Ale można o połowę zmniejszyć liczbę rzeczonych podstawień. Uważajmy albowiem że dwie wartości k, równie oddalone od skrajnych 0 *i* $m-1$, dają dwie wartości dla x które się różnią samym tylko znakiem wstawy.

Jakoż, nazywając k' i $m-k'$ takie dwie wartości, mamy

$$x = \operatorname{dos}\frac{2k'\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k'\pi}{m}, \text{ i}$$

$$x = \operatorname{dos}\frac{2(m-k')\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2(m-k')\pi}{m}$$

$$= \operatorname{dos}\frac{2k'\pi}{m} - \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k'\pi}{m}.$$

Ztąd wnosimy że, biorąc formułę

$$(1) \quad x = \operatorname{dos}\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{m},$$

dosyć jest, aby otrzymać wszystkie m różne wartości x, podstawić za k liczby po sobie idące 0, 1, 2... aż do największej całkowitej która nie przechodzi $\frac{m}{2}$.

A teraz, jeśli wykładnik m jest parzystym, zastąpimy liczbę k przez $0, 1, 2, \ldots \frac{m}{2}$; podstawienie $k=0$, da $x=1$; na $k=\frac{m}{2}$, znajdziemy $x=-1$. Wartości pośrednie 1, 2, i t. d. dadzą pierwiastki urojone sprzężone, w liczbie $m-2$,

$$x = \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m},$$

$$x = \operatorname{dos}\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{4\pi}{m},$$

. . . .

Otrzymamy tym sposobem dwa pierwiastniki rzeczywiste ± 1, i $m-2$ pierwiastków urojonych równania parzystego $x^m=1$.

Gdy m jest nieparzystem, podstawi się za k liczby 0, 1, 2.... aż do $\frac{m-1}{2}$. Na $k=0$ będziemy mieli $x=1$; inne podstawienia $k=1, =2, \ldots\ldots = \frac{m-1}{2}$, wyznaczą pierwiastki urojone w liczbie $m-1$.

$$x = \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m},$$

$$x = \text{dos}\,\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{4\pi}{m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x = \text{dos}\,\frac{(m-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Znajdziemy tym sposobem jeden pierwiastek rzeczywisty $x=1$, i $m-1$ pierwiastków urojonych, sprzężonych po dwa; co być powinno, gdyż stopień równania $x^m=1$ jest nieparzystym.

101. Uważajmy teraz równanie dwumienne $y^m=-A$, w którem A jest ilością rzeczywistą. Niech będzie a wartość arytmetyczna pierwiastku m^{tego} z A; czyniąc $y=ax$, będziemy mieli

$$a^m x^m = -A \quad \text{albo} \quad x^m = -1.$$

Biorąc
$$x = \text{dos}\,\varphi + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,m\varphi,$$

będzie
$$x^m = \text{dos}\,m\varphi + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,m\varphi.$$

Zatem
$$\text{dos}\,m\varphi + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,m\varphi = -1.$$

Ostatnie równanie wymaga, aby było zarazem:

$$\text{wst}\,m\varphi = 0, \quad \text{i} \quad \text{dos}\,m\varphi = -1.$$

Co pokazuje że łuk $m\varphi$ musi być wielokrotnikiem nieparzystym półokręgu. Oznaczając ten wielokrotnik przez $(2k+1)\pi$, otrzymamy

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{m}.$$

Więc
$$x = \text{dos}\,\frac{(2k+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{(2k+1)\pi}{m}.$$

Powtarzając rozumowanie wyżej użyte, łatwo się dowiedzie że, podstawiając za k ciąg m liczb po sobie idących, jako $0, 1, 2, \dots m-1$, formuła otrzymana da wszystkie m pierwiastki różne równania $x^m+1=0$, i nie da ich więcej.

Ale, jako poprzednio tak i tu, można zmniejszyć liczbę podstawień za k. Jakoż, podstawmy za k dwie liczby k' i $m-k'-1$ których summa czyni $m-1$; będzie

$$x = \text{dos}\,\frac{(2k'+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{(2k'+1)\pi}{m}, \quad \text{i}$$

$$x = \text{dos}\,\frac{(2m-2k'-1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{(2m-2k'=1)\pi}{m}$$

$$= \text{dos}\,\frac{(2k'+1)\pi}{m} - \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{(2k'+1)\pi}{m}.$$

Te dwie wartości dla x różnią się tylko znakiem wyrazu urojonego. Więc, biorąc formułę

$$(2)\qquad x = \text{dos}\,\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{(2k+1)\pi}{m},$$

i podstawiając za k liczby po sobie idące 0, 1, 2,.... aż do największej całkowitej która nie przechodzi $\frac{m-1}{2}$, otrzymamy wszystkie m różne pierwiastki równania $x^m+1=0$.

A teraz, jeśli wykładnik m jest parzystym, zastępując liczbę k przez 0, 1, 2, ..., $\frac{m-2}{2}$, otrzymamy m pierwiastków równania $x^m+1=0$, które są wszystkie urojone.

$$x = \text{dos}\,\frac{\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{\pi}{m},$$

$$x = \text{dos}\,\frac{3\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{3\pi}{m},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$x = \text{dos}\,\frac{(m-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Jeśli m jest nieparzystem, trzeba podstawić za k liczby 0, 1, 2, ..., $\frac{m-1}{2}$; co daje

$$x = \text{dos}\,\frac{\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{\pi}{m},$$

$$x = \text{dos}\,\frac{3\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{3\pi}{m},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$x = -1.$$

Jeden tylko jest pierwiastek rzeczywisty -1, a wszytkie inne $m-1$ są urojone. Co być pawinno, ponieważ stopień równania $x^m+1=0$ jest nieparzystym.

102. *Własności pierwiastków równania dwumiennego* $x^m - 1 = 0$.

TWIERDZENIE I.

Pierwiastki urojone równania $x^m - 1 = 0$ *są po dwa sprzężone i wzajemne.*

To pokazuje oczywiście formuła

$$x = \text{dos}\,\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2k\pi}{m}.$$

TWIERDZENIE II.

Iloczyn dwóch pierwiastków równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$ *jest jednym z pierwiastków tego równania.*

Jakoż, niech będą dwa pierwiastki

$$x_a = \text{dos}\,\frac{2a\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2a\pi}{m},$$

$$x_b = \text{dos}\,\frac{2b\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2b\pi}{m};$$

ich iloczyn, na mocy formuły *Moawra*, jest

$$x_a\,x_b = \text{dos}\,\frac{2(a+b)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2(a+b)\pi}{m}.$$

Co pokazuje że $x_a\,x_b$ jest pierwiastkiem który odpowieda wartości $a+b$ danej dla k.

WNIOSEK I. — Wynika ztąd że *potęgi jednego pierwiastku równania dwumiennego* $x^m - 1 = 0$ *są także pierwiastkami tegoż równania.*

II. — *Iloraz dwóch pierwiastków równania dwumiennego* $x^m - 1 = 0$ *jest jednym z pierwiastków tego równania.*

Bo iloraz $\frac{x_a}{x_b} = \text{dos}\,\frac{2(a-b)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\frac{2(a-b)\pi}{m}$

jest pierwiastkiem odpowiedającym wartości $a-b$ danej dla k.

Twierdzenie III.

Jeśli iczba a *jest pierwszą z* m, *pierwiastek* x_a *wydaje, przez swoje potęgi, wszystkie pierwiastki równania dwumiennego* $x^m - 1 = 0$.

Niech będzie pierwiastek

$$x_a = \text{dos}\,\frac{2a\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2a\pi}{m}$$

w którym liczby a i m są pierwszemi między sobą.

Aby otrzymać potęgi po sobie idące $0, 1, 2, \ldots m-1$ tego pierwiastku, dosyć jest, na mocy formuły *Moawra*, pomnożyć łuk $\frac{2a\pi}{m}$ przez wykładniki $0, 1, 2, \ldots m-1$.

Aże, jako wiadomo, dzieląc przez m wielokrotniki po sobie idące $0a$, $1a$, $2a, \ldots (m-1)a$ liczby a pierwszej z m, otrzymamy, w porządku jakimkolwiek, m reszt różnych $0, 1, 2, \ldots m-1$; więc tym sposobem mamy wszystkie m pierwiastki równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$.

Uwaga. — Jeśli liczby a i m mają największy spólny dzielnik d, wtedy pierwiastek x_a, przez swoje potęgi, nie wydaje wszystkich ale tylko $\frac{m}{d}$ pierwiastków równania $x^{\frac{m}{d}} - 1 = 0$.

Jakoż, niech będzie $a = da'$, $m = dm'$; mamy

$$x_a = \text{dos}\,\frac{2a\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2a\pi}{m} = \text{dos}\,\frac{2a'\pi}{m'} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2a'\pi}{m'}.$$

To pokazuje że x_a, pierwiastek równania $x^m - 1$, jest także pierwiastkiem równania dwumiennego $x^{m'} - 1 = 0$: aże liczby a' i m' są pierwszemi między sobą, więc x_a, przez swoje potęgi, wydaje tylko $\frac{m}{d}$ pierwiastków równania $x^{\frac{m}{d}} - 1 = 0$.

Określenie. — *Pierwiastkami pierwotnemi* równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$, nazywają się te które, przez swoje potęgi po sobie idące, wydają wszystkie inne pierwiastki tego równania.

Wynika z twierdzenia powyższego że *równanie dwumienne* $x^m - 1 = 0$ *ma tyle pierwiastków pierwotnych ile jest liczb mniejszych od* m *i pierwszych* z m.

Na mocy tego co poprzedza, łatwo wnosimy że pierwiastki pierwotne równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$ noszą tę główną cechę, iż nie są pierwiastkami żadnego równania dwumiennego stopnia mniejszego od m.

Jeśli m jest liczbą pierwszą, wtedy, wyjąwszy tylko samą jedność, wszystkie inne pierwiaslki m^{te} jedności są pierwotnemi.

Twierdzenie IV.

Jeśli m *i* n *są pierwszemi między sobą, otrzyma się wszystkie pierwiastki równania* $x^{mn} - 1 = 0$, *mnożąc wszystkie piérwiastki równania* $x^m - 1 = 0$ *przez każdy pierwiastek równania* $x^n - 1 = 0$.

Jakoż, niech będzie

$$x = \operatorname{dos} \frac{2k\pi}{mn} + \sqrt{-1} \operatorname{wst} \frac{2k\pi}{mn}$$

jeden z pierwiastków równania $x^{mn} - 1 = 0$.

Ponieważ m i n są pierwszemi między sobą, można zawsze znaleźć dwie liczby całe λ i μ takie aby było

$$m\lambda + n\mu = k \quad \text{albo} \quad \frac{2\lambda\pi}{n} + \frac{2\mu\pi}{m} = \frac{2k\pi}{mn}.$$

Więc mamy

$$x = \left(\operatorname{dos} \frac{2\lambda\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{wst} \frac{2\lambda\pi}{n}\right)\left(\operatorname{dos} \frac{2\mu\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{wst} \frac{2\mu\pi}{m}\right).$$

Ztąd wnosimy że wszelki pierwiastek równania $x^{mn} - 1 = 0$ jest iloczynem z jednego pierwiastku równania $x^m - 1 = 0$ przez jeden równania $x^n - 1 = 0$. Zatem, otrzymamy wszystkie mn pierwiastki równania $x^{mn} - 1 = 0$, mnożąc każdy pierwiastek równania $x^m - 1 = 0$ przez każdy równania $x^n - 1 = 0$.

Wniosek. — Gdy m i n są pierwszemi między sobą, otrzyma się *pierwiastki* pierwotne *równania* $x^{mn} - 1 = 0$, *mnożąc wszystkie pierwiastki* pierwotne *równania* $x^m - 1 = 0$ *przez każdy* pierwotny *równania* $x^n - 1 = 0$.

To wynika z formuły

$$x=\left(\operatorname{dos}\frac{2\lambda\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\lambda\pi}{n}\right)\left(\operatorname{dos}\frac{2\mu\pi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\mu\pi}{m}\right).$$

Jakoż, jeśli λ jest pierwszem z n, i μ pierwszem z m, summa dwóch ułamków $\frac{\lambda}{n}+\frac{\mu}{m}$ jest ułamkiem $\frac{k}{mn}$ niezredukowalnym; więc

$$x=\operatorname{dos}\frac{2k\pi}{mn}+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{mn}$$

jest pierwiastkiem pierwotnym równania $x^{mn}-1=0$.

Uwaga. — Twierdzenie powyższe i jego wniosek mają wielką wagę, bo za pomocą nich rozwiązanie równania $x^{pqr\cdots}-1=0$, w którem p, q, r są liczbami po dwie pierwszemi między sobą, przywodzi się do rozwiązania równań $x^p-1=0$, $x^q-1=0$, $x^r-1=0$,... Dosyć jest wyznaczyć jeden pierwiastek *pierwotny* w każdem z tych równań, ich iloczyn będzie pierwiastkiem *pierwotnym* zadanego równania; a wiadomo że taki pierwiastek, przez swoje potęgi, daje wszystkie inne pierwiastki równania.

103. Niech będzie teraz do rozwiązania równanie dwumienne ogólne

$$(1)\quad x^m=\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}$$

w którem A i B są liczby dane jakiekolwiek dodatne, odjemne a nawet i zero.

Można nadać inną formę drugiej stronie.

Jakoż,

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\left(\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}+\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}\sqrt{-1}\right).$$

Ponieważ $\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ i $\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ są dwa ułamki których summa kwadratów daje jedność, wolno jest położyć

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\operatorname{dos}\alpha,\quad \text{i}\quad \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\operatorname{wst}\alpha;$$

i czyniąc także, dla skrócenia, $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}=\rho$, mamy

$$x^m=\rho(\operatorname{dos}\alpha+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\alpha).$$

A teraz położywszy $x = r(\text{dos}\varphi + \sqrt{-1}\ \text{wst}\varphi)$, będzie

$$r^m(\text{dos}\, m\varphi + \sqrt{-1}\ \text{wst}\, m\varphi) = \rho(\text{dos}\,\alpha + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\alpha);$$

Ażeby temu równaniu zadość uczynić, trzeba i dosyć jest aby było: $\quad r^m = \rho, \quad m\varphi = \alpha + 2k\pi;$

zkąd $\quad r = \sqrt[m]{\rho}, \quad \varphi = \dfrac{2k\pi + \alpha}{m}.$

Więc pierwiastki równania danego (1) otrzymują się formułą

$$(2) \quad x = \sqrt[m]{\rho}\left(\text{dos}\frac{2k\pi + \alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\frac{2k\pi + \alpha}{m}\right)$$

w której k oznacza liczbę całkowitą jakąkolwiek.

Owoż, aby dwie wartości dane dla k odpowiedały dwom równym pierwiastkom, trzeba i dosyć jest, jako już wiadomo, aby różnica łuków odpowiednych była wielokrotnikiem z m; więc jeśli za k podstawimy ciąg m liczb po sobie idących jakichkolwiek, *np.* 0, 1, 2,.. $m-1$, formuła (2) da nam wszystkie m pierwiastki różne równania zadanego, i nie da ich więcej.

Można jeszcze pisać formułę (2) jako następuje

$$x = \sqrt[m]{\rho}\left(\text{dos}\frac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\frac{\alpha}{m}\right)\left(\text{dos}\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\frac{2k\pi}{m}\right).$$

Czynnik $\sqrt[m]{\rho}\left(\text{dos}\dfrac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\dfrac{\alpha}{m}\right)$ jest jednym z pierwiastków równania (1), a zaś czynnik $\text{dos}\dfrac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\dfrac{2k\pi}{m}$ wyraża wszystkie m^{te} pierwiastki jedności. Ztąd wynika że otrzymuje się wszystkie m pierwiastki równania (1), mnożąc jeden z nich przez każdy m^{ty} pierwiastek jedności.

Jeśli nakoniec przypomnimy sobie że formuła pierwiastków m^{tych} jedności jest także $\quad \text{dos}\dfrac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\dfrac{2k\pi}{m}$, możemy jeszcze formule (2) dać następną postać

$$(3) \quad x = \sqrt[m]{\rho}\left(\text{dos}\frac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\frac{\alpha}{m}\right)\left(\text{dos}\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\frac{2k\pi}{m}\right),$$

wtenczas za k dosyć jest podstawić wartości 0, 1, 2,... $\frac{m}{2}$, jeśli m jest parzystem; a zaś 0, 1, 2,... $\frac{m-1}{2}$, jeśli jest nieparzystem.

104. W szczególnym przypadku w którym $B=0$, mamy $\rho=\pm A$; z pierwszym znakiem trzeba wziąć $\alpha=0$, a z drugim $\alpha=\pi$.

Zatem pierwiastki równania

$$x^m=A$$

są dane formułą

$$(4)\quad x=\sqrt[m]{A}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{m}\right);$$

a pierwiastki równania

$$x^m=-A$$

formułą

$$(5)\quad x=\sqrt[m]{A}\left(\operatorname{dos}\frac{(2k+1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{(2k+1)\pi}{m}\right).$$

W tych dwóch formułach, dosyć jest za k podstawić liczby całkowite po sobie idące od 0 do $\frac{m}{2}$. To wszystko już wiadome (100, 101).

105. Niech będzie teraz równanie trójmienne

$$(1)\quad x^{2m}+px^n+q=0$$

które daje

$$(2)\quad x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Jako widzimy, rzecz cała przywodzi się do rozwiązania dwóch równań dwumiennych. Co już umiemy.

Uważajmy szczególny przypadek w którym p i q są rzeczywiste, a zaś pierwiastnik $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ urojony, $\frac{p^2}{4}<q$.

Jeśli więc uczynimy

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\rho(\operatorname{dos}\alpha+\sqrt{-1}\operatorname{wst}\alpha);$$

będziemy mieli, jako wiadomo,

$$\rho = \sqrt{q}, \qquad \text{dos}\,\alpha = \frac{-p}{2\sqrt{q}}, \qquad \text{wst}\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4q}}.$$

Po czem równanie (2) stanie się

$$x^m = q^{\frac{1}{2}}\,(\text{dos}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\alpha).$$

Owoż, pierwiastki równania $x^m = q^{\frac{1}{2}}\,(\text{dos}\,\alpha + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\alpha)$ są dane formułą

$$x = q^{\frac{1}{2m}}\left(\text{dos}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m}\right),$$

w której za k podstawi się wartości $0, 1, 2, \ldots m - 1$.

Tak samo pierwiastki równania $x^m = q^{\frac{1}{2}}\,(\text{dos}\,\alpha - \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\alpha)$ mogą się wyrazić formułą

$$x = q^{\frac{1}{2m}}\left(\text{dos}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m} + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2k\pi - \alpha}{m}\right),$$

w której za k podstawi się wartości $0, -1, -2, \ldots -(m-1)$.

Więc wszystkie $2m$ pierwiastki równania trójmiennego danego zawierają się w jednej formule

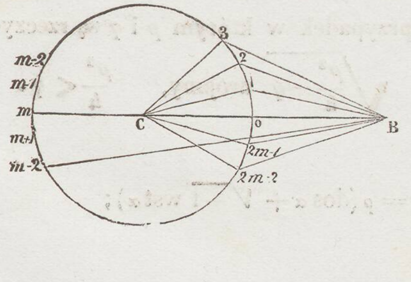
$$x = q^{\frac{1}{2m}}\left(\text{dos}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m} \pm \sqrt{-1}\ \text{wst}\,\frac{2k\pi + \alpha}{m}\right),$$

w której dosyć jest za k podstawić m liczb całkowitych po sobie idących.

TWIERDZENIE KOTESA I MOAWRA.

106 Twierdzenie *Kotesa* (Cotes) ma za cel przedstawienie geometryczne dzielników rzeczywistych dwumianu $x^m \pm 1$.

Podzielmy okrąg koła na liczbę parzystą $2m$ części równych, w punktach oznaczonych przez $0, 1, 2, \ldots (2m-1)$; i punkta podziału połączmy z punktem jakimkolwiek B, leżącym na kierunku promienia Co.



Powiadam że: 1° Iloczyn m linij prostych B_0,

B_2, B_4,... B_{2m-2}, które łączą punkt B z punktami podziału porządku parzystego 0, 2,... $(2m-2)$, równa się różnicy potęg m^{tych} z odległości BC i promienia koła.

2° Iloczyn m prostych B_1, B_3,... B_{2m-1}, które odpowiedają punktom podziału porządku nieparzystego 1, 3,... $(2m-1)$, równa się summie potęg m^{tych} odległości BC i promienia koła.

To jest, biorąc promień koła uważanego za jedność, oznaczając przez x odległość BC, przez y_0, y_2,.. y_{2m} odległości B_0, B_2, B_4..., a przez y_1, y_3,... y_{2n-1} odległości B_1, B_3,..., mamy dwa równania

$$(1)\quad y_0,\ y_2 \ldots\ y_{2m-4},\ y_{2m-2} = x^m - 1,$$

$$(2)\quad y_1,\ y_3,\ldots\ y_{2m-3},\ y_{2m-1} = x^m + 1.$$

Dla większej ścisłości dowodzenia, odróżnimy dwa przypadki: m parzyste albo nieparzyste.

Jeśli liczba m jest parzystą, odległość y_m jest jednym z czynników pierwszej części równania (1),

bo $$y_m = BC + Cm = x + 1.$$

Aże $$y_0 = BC - Co = x - 1;$$

więc $$y_0\ y_m = x^2 - 1.$$

Co pokazuje że iloczyn $y_0\ y_m$ jest czynnikiem drugiego stopnia, x^2-1, który odpowieda dwom pierwiastkom rzeczywistym $+1$, -1, równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$.

Nadto, pochyłe y_2 i y_{2m-2} są oczywiście sobie równe; podobnież pochyłe y_4 i y_{2m-4}; y_6 i y_{2m-6}, etc. są także sobie równe; zatem $y_2\ y_{2m-2} = y_2^2$; $y_4\ y_{2m-4} = y_4^2$; etc.

W trójkącie CB2, trzy boki BC, B2, C2 mają za wartości x, y_2, 1, i kąt przeciwny bokowi y_2 równa się $\frac{2\pi}{m}$; więc

$$y_2^2 = x^2 + 1 - 2x \operatorname{dos} \frac{2\pi}{m}.$$

Ale $y_2^2 = y_2\ y_{2m-2}$; a zaś $x^2 + 1 - 2x \operatorname{dos} \frac{2\pi}{m}$ jest iloczynem czynników linijnych, to jest pierwszego stopnia,

$$\left(x - \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} - \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m}\right), \left(x - \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m}\right),$$

odpowiedających dwom pierwiastkom urojonym sprzężonym równania $x^m - 1 = 0$, które są dane formułą

$$x = \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m}.$$

Więc iloczyn $y_2 y_{2m-2}$ wyobraża geometrycznie czynnik rzeczywisty drugiego stopnia, w równaniu $x^m - 1 = 0$, odpowiedający dwom jego pierwiastkom sprzężonym które się otrzymują z formuły ogólnej

$$x = \operatorname{dos}\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{m},$$

zastępując k przez 1.

Dowiedzie się tak samo że iloczyn $y_2 y_{2m-4}$ jest czynnikiem rzeczywistym drugiego stopnia, odpowiedającym dwom pierwiastkom urojonym sprzężonym, które się otrzymują zastępując w tej samej formule k przez 2; i t. d.

Więc (1) $y_0 y_2 y_4 \ldots\ldots y_{2m-4}\, y_{2m-2} = x^m - 1.$

Gdy m jest nieparzystem, liczba czynników iloczynu $y_0 y_2 \ldots\ldots y_{2m-2}$ jest także nieparzystą. Pierwszy czynnik $y_0 = x - 1$ odpowieda jedynemu pierwiastkowi rzeczywistemu $x = 1$, równania $x^m - 1 = 0$. Nadto, mamy zawsze

$$y_2\; y_{2m-2} = y_2^2 = x^2 + 1 - 2\operatorname{dos}\frac{2\pi}{m},$$

$$y_4\; y_{4m-4} = y_4^2 = x^2 + 1 - 2\operatorname{dos}\frac{4\pi}{m}.$$

Drugie strony tych równań są czynnikami rzeczywistemi drugiego stopnia, które odpowiedają pierwiastkom urojonym sprzężonym równania $x^m - 1 = 0$. Ztąd wnosimy, jako wprzódy,

(1) $y_0 y_2 y_4 \ldots\ldots y_{2m-4}\, y_{2m-2} = x^m - 1.$

Co do równania $y_1 y_3 \ldots\ldots y_{2m-3}\, y_{2m-1} = x^m + 1$, przypuszczając naprzód m parzystem, czynniki pierwszej strony są, po dwa, równe pomiędzy sobą; bo mamy oczywiście

$$y_1 = y_{2m-1},\quad y_3\, y_{2m-3}, \ldots;\ \text{zatem}$$

$$y_1\, y_{2m-1} = y_1^2,\quad y_3\, y_{2m-3} = y_3^2,\ \text{i t. d.}$$

Ale trójkąt CB, daje

$$y_1^2 = x^2 + 1 - 2x \operatorname{dos}\frac{\pi}{m} =$$

$$= \left(x - \operatorname{dos}\frac{\pi}{m} - \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{\pi}{m}\right)\left(x - \operatorname{dos}\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{\pi}{m}\right).$$

Co pokazuje że y_1^2 albo $y_1\, y_{2m-1}$, przedstawia geometrycznie czynnik rzeczywisty drugiego stopnia równania $x^m + 1 = 0$, odpowiedający dwóm pierwiastkom urojonym sprzężonym $x = \operatorname{dos}\frac{\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{\pi}{m}$, które się otrzymują zastępując w formule ogólnej

$$x = \operatorname{dos}\frac{(2k'+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{(2k+1)\pi}{m}$$

liczbę k przez 0.

Tak samo, iloczyn $y_3\, y_{2m-3}$ wyobraża czynnik rzeczywisty drugiego stopnia, odpowiedający dwom pierwiastkom urojonym sprzężonym, które się otrzymują z tej samej formuły biorąc $k = 1$; i t. d. Mamy więc

$$(2)\quad y_1\, y_3 \ldots\ldots y_{2m-3}\, y_{2m-1} = x^m + 1.$$

Przypuszczając nakoniec m nieparzyste, $y_m = x + 1$ jest czynnikiem iloczynu $y_1\, y_3 \ldots y_m \ldots y_{2m-3}\, y_{2m-1}$, i odpowieda jedynemu pierwiastkowi rzeczywistemu, $x = -1$, równania $x^m + 1 = 0$. Wszystkie inne czynniki idą parami czynników równych, $y_3 = y_{2m-3}$, $y_5 = y_{2m-5}, \ldots$; każda para formuje iloczyn, jako $y_3\, y_{2m-3}$, który, jakośmy już widzieli, wyobraża czynnik rzeczywisty drugiego stopnia równania $x^m + 1 = 0$, odpowiedający dwom pierwiastkom urojonym sprzężonym. Więc mamy zawsze

$$(3)\quad y_1\, y_3 \ldots\ldots y_{2m-3}\, y_{2m-1} = x^m + 1.$$

107. W dowodzeniach poprzedzających, przypuściliśmy że punkt B leży zewnątrz koła którego promień $Co = 1$; wtedy $x^m - 1$ jest ilością dodatną.

Jeśli punkt B znajduje się wewnątrz koła, równanie (1) staje się

$$(3)\quad y_0\, y_2 \cdots\cdots y_{2m-4}\, y_{2m-2} = 1 - x^m.$$

Nakoniec, gdy punkt B leży na okręgu, wtedy równanie (1) jest oczywistem; bo mamy zarazem $y_0 = 0$, i $1 - x^m = 0$.

Równanie (3) jest także oczywistem gdy punkt B leży we środku koła; bo wtedy $x=0$, i każda z prostych $y_0, y_1, \cdots y_{2m-2}$, równa się jedności.

(To dowodzenie twierdzenia Kotesa wyjęliśmy z trygonometryi PP. Delisle i Gérono, wyd. 3[e]).

TWIERDZENIE MOAWRA (*).

108. Twierdzenie Moawra (*Moivre*) przedstawia geometrycznie dzielniki drugiego stopnia, odpowiedające pierwiastkom sprzężonym, równania trójmiennego

$$x^{2m} \pm 2px^m \operatorname{dos} a + p^2 = 0.$$

Uważajmy naprzód równanie

$$x^{2m} - 2px^m \operatorname{dos} a + p^2 = 0 \quad (1).$$

Dwa czynniki linijne, odpowiedające dwom pierwiastkom sprzężonym tego równania, są ogólnie

$$x - \sqrt[m]{p}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

$$x - \sqrt[m]{p}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} - \sqrt{-1}\operatorname{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right).$$

Kładąc $\sqrt[m]{p} = \mathrm{R}$, dzielnik drugiego stopnia, odpowiedający tym pierwiastkom, wyrazi się przez

$$x^2 - 2\mathrm{R}x \operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + \mathrm{R}^2.$$

Aby otrzymać podobny dzielnik z równania

$$x^{2m} + 2px^m \operatorname{dos} a + p^2 = 0 \quad (2),$$

uważajmy że to równanie może się pisać

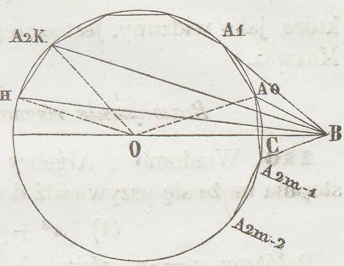
$$x^{2m} - 2px^m \operatorname{dos}(\pi + a) + p^2 = 0$$

(*) Dowodzenie twierdzenia Moawra, jako też rozwiązanie równań dwumiennych, wyjęto z rękopismu Pana G.-H. Niewęgłowskiego.

co je przywodzi do formy równania (1). Więc dzielnik drugiego stopnia, odpowiedający dwom pierwiastkom sprzężonym równania (2), jest

$$x^2 - 2Rx \operatorname{dos} \frac{(2k+1)\pi + a}{m} + R^2.$$

Niech będzie teraz koło O promienia R w które wpiszmy wielokąt foremny $A_0 A_1 \ldots A_{2m-1}$ mający $2m$ boków. Połączmy OA_0, i poprowadźmy prostę OC tak aby tworzyła z promieniem OA_0 kąt $COA_0 = \frac{a}{m}$; weźmy na tej linii OC, idąc od O do C, długość $OB = x$; i nakoniec, połączmy punkt B ze wszystkiemi wierzchołkami wielokąta liniami prostemi BA_0, BA_1, ... BA_{2k}.....



Trójkąt BOA_{2k} daje

$$\overline{BA}_{2k}^2 = x^2 - 2Rx \operatorname{dos} \frac{2k\pi + a}{m} + R^2,$$

a zaś trójkąt

$$\overline{BA}_{2k+1}^2 = x^2 - 2R \operatorname{dos} \frac{(2k+1)\pi + a}{m} + R^2.$$

Aże, podstawiając za k wartości 0, 1, 2,... $m-1$, otrzymujemy wszystkie pierwiastki równań (1) i (2), a tem samem wszystkie dzielniki drugiego stopnia odpowiedające tym pierwiastkom sprzężonym; więc

$$x^{2m} - 2px^m \operatorname{dos} a + p^2 = \overline{BA}_0^2 \cdot \overline{BA}_2^2 \cdot \overline{BA}_4^2 \ldots\ldots \overline{BA}_{2m-1}^2 \quad (3),$$

i $$x^{2m} + 2px^m \operatorname{dos} a + p^2 = BA_1^2 \cdot \overline{BA}_3^2 \cdot \overline{BA}_5^2 \ldots\ldots \overline{AD}_{2m-1}^2 \quad (4).$$

Otoż właśnie te dwa równania stanowią twierdzenie *Moawra*.

109. Jeśli kąt a jest zerem, wtedy B leży na promieniu OA_0, i pierwsze strony powyższych równości są kwadratami; wyciągając pierwiastek kwadratowy z obydwóch stron, otrzymamy

$$\pm(x^m - R^m) = BA_0 \cdot BA_2 \cdot BA_4 \ldots\ldots BA_{2m-1}$$

$$x^m + R^m = BA_1 \cdot BA_3 \cdot BA_5 \ldots\ldots BA_{2m-2};$$

weźmie się znak $+$ albo — podług tego jak punkt B leży zewnątrz albo wewnątrz koła.

Biorąc $R=1$, dwie ostatnie równości dają twierdzenie Kotesa,

$$\pm(x^m-1)=y_0\,y_2\ldots\ldots y_{4m-4}$$

$$x^m+1=y_1\,y_3\ldots\ldots x_{2m-2}$$

które, jako widzimy, jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Moawra.

Rozwiązanie równania trzeciego stopnia.

110. Wiadomo z Algebry że wszelkie równanie trzeciego stopnia może się przywieśdź do formuły

$$(1)\quad x^3+px+q=0.$$

Połóżmy $x=\rho z$, równanie stanie się

$$(2)\quad z^3+\frac{p}{\rho^2}z+\frac{q}{\rho^3}=0.$$

Można rozporządzić niewyznaczoną ρ tak aby było

$$\frac{p}{\rho^2}=-\frac{3}{4};\quad \text{zkąd}\quad \rho=2\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

jeśli nadto uczynimy

$$\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=b,$$

równanie (2) stanie się

$$(3)\quad z^3-\frac{3}{4}z-\frac{b}{4}=0.$$

Lecz, gdy b jest rzeczywistem i zawartem pomiędzy -1 i $+1$, wtedy równanie (3) jest właśnie tem którem już eśmy się zajmowali, gdy, mając daną $\text{dos}\,a=b$, szukaliśmy $\text{dos}\,\frac{a}{3}=x$. Jeśli przeto uczynimy

$$b=\text{dos}\,a,$$

i za łuk a weźmiemy łuk α, najmniejszy z łuków dodatnych które mają liczbę b za dostawę, wartości z będą

$$\text{dos}\frac{\alpha}{3},\quad \text{dos}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \text{dos}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Więc pierwiastki równania zadanego są

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3},\quad 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{dos}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Te pierwiastki są wszystkie trzy rzeczywistemi i mogą się wyrachować przez logarytmy. Co się zaś tyczy kąta α, wyrachujemy go za pomocą formuły

$$\operatorname{dos}\alpha=\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}.$$

Ale, jakośmy powiedzieli, to wszystko przypuszcza że b jest rzeczywistem i zawartem pomiędzy -1 i $+1$.

Aby wartość b była rzeczywistą, trzeba naprzód żeby p było odjemnem; nadto, aby ta wartość była zawartą pomiędzy -1 i $+1$, trzeba żeby jej kwadrat był mniejszym od 1: trzeba więc aby było

$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}<1 \quad \text{albo} \quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

Takim jest warunek który musi być dopełnionym, aby pierwiastki równania były rzeczywistemi i nierównemi.

Jeśli jest

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0, \quad \text{czyli} \quad b=\pm 1,$$

dwa pierwiastniki równania na z są równe $\pm\frac{1}{2}$: równanie zadane ma jeszcze wszystkie pierwiastniki rzeczywiste, ale dwa są równe między sobą.

111. Pozostaje nam toraz do roztrząsnienia następujący przypadek

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0;$$

lecz tu musimy przypomnieć czytelnikowi małe twierdzenie algebryczne do którego się odwoływać będziemy.

Równnnie dwumienne

$$z^3 - 1 = 0$$

ma trzy pierwiastki których sześcian równa się jedności; jeden tylko z nich jest rzeczywistym i równa się jedności. Dzieląc równanie przez $z-1$, otrzymamy

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

To równanie ma dwa pierwiastki urojone; nazywając je α i β, mamy

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

Łatwo widzieć że każdy z tych pierwiastków jest kwadratem z drugiego; jakoż, mamy oczywiście

$$\alpha\beta = 1, \quad \alpha^3 = 1, \quad \text{zatem} \quad \beta = \alpha^2.$$

Wynika ztąd, że trzy ilości, jako m, $m\alpha$, $m\beta$ mają wszystkie trzy ten sam sześcian m^3.

To ustanowiwszy, wróćmy do naszego równania

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

w którem, przypuszczając

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

odróżnimy dwa przypadki, p dodatne i p odjemne.

1° Przypuśćmy naprzód $p < 0$, i uczyńmy

$$x = \rho(\text{sty}\,\varphi + \text{dot}\,\varphi).$$

Podnosząc do sześcianu, otrzymamy

$$x^3 = \rho^3\{\text{sty}^3\varphi + \text{dot}^3\varphi + 3(\text{sty}\,\varphi + \text{dot}\,\varphi)\}.$$

Wynika ztąd że równanie

$$(2) \quad x^3 - 3\rho^2 x - \rho^3(\text{sty}^3\varphi + \text{dot}^3\varphi) = 0,$$

ma za pierwiastek

$$\rho(\text{sty}\,\varphi + \text{dot}\,\varphi).$$

Podobnie, jeżeli weźmiemy następnie

$$x = \rho(\alpha\,\text{sty}\,\varphi + \beta\,\text{dot}\,\varphi), \quad \text{i} \quad x = \rho(\beta\,\text{sty}\,\varphi + \alpha\,\text{dot}\,\varphi),$$

znajdziemy, podnosząc do sześcianu i przypominając sobie że $\alpha\beta = 1$,

$$x^3 = \rho^3 \left\{ \text{sty}^3 \varphi + \text{dot}^3 \varphi + 3 (\alpha \,\text{sty} \varphi + \beta \,\text{dot} \varphi) \right\},$$

$$\text{i} \quad x^3 = \rho^3 \left\{ \text{sty}^3 \varphi + \text{dot}^3 \varphi + 3 (\beta \,\text{sty} \varphi + \alpha \,\text{dot} \varphi) \right\}.$$

Zkąd wynika że równanie (2) ma także za pierwiastki

$$\rho (\alpha \,\text{sty} \varphi + \beta \,\text{dot} \varphi), \quad \text{i} \quad \rho (\beta \,\text{sty} \varphi + \alpha \,\text{dot} \varphi).$$

Lecz równanie (2) przywodzi się do równania (1), jeśli weźmiemy

$$\rho = \sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{i} \quad \text{sty}^3 \varphi + \text{dot}^3 \varphi = \frac{-q}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}};$$

więc pierwiastki równania (1) są

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} (\text{sty} \varphi + \text{dot} \varphi),$$

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} (\alpha \,\text{sty} \varphi + \beta \,\text{dot} \varphi),$$

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} (\beta \,\text{sty} \varphi + \alpha \,\text{dot} \varphi);$$

albo, zastępując α i β przez ich wartości, sty φ przez $\frac{\text{wst}\,\varphi}{\text{dos}\,\varphi}$, i dot φ przez $\frac{\text{dos}\,\varphi}{\text{wst}\,\varphi}$, te trzy pierwiastki wyrażą się przez

$$\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\text{wst}\,2\varphi}, \quad \text{i} \quad \frac{-\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\text{wst}\,2\varphi} \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{3}\,\text{dot}\,2\varphi.$$

Pierwszy pierwiastek jest rzeczywistym i wyrachowywalnym przez logarytmy: dwa zaś inne są urojone i sprzężone, ich część rzeczywista jest połową pierwiastku rzeczywistego wziętego ze znakiem przeciwnym; co się zaś tyczy części urojonej, ona jest łatwą do wyrachowania przez logarytmy. To wszakże przypuszcza, że kąt φ jest znanym.

Otoż jakim sposobem można ten kąt wyznaczyć: bierze się drugi kąt pomocniczy, który nazwiemy ω, tak aby było

$$\text{sty}\,\omega = \text{sty}^3 \varphi;$$

zkąd $\quad \text{wst}\,2\omega = 2\,\text{sty}\,\omega\,\text{dos}^2\omega = \frac{2\,\text{sty}^3\varphi}{1 + \text{sty}^6\varphi} = \frac{2}{\text{sty}^3\varphi + \text{dot}^3\varphi};$

Więc $$\text{wst}\,2\omega = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{-p^3}{27}},$$
ta wartość $\text{wst}\,2\omega$ jest zawartą pomiędzy -1 i $+1$ z przyczyny przypuszczenia $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$.

Tym sposobem łatwo się wyrachuje ω przez logarytmy, i następnie wartość kąta φ.

2° Uważajmy teraz drugi przypadek w którym $p>0$, i połóżmy
$$x=\rho(\text{dot}\,\varphi-\text{sty}\,\varphi);$$
ztąd, rozumując jako w poprzednim przypadku, wyprowadzimy
$$(3)\quad x^3+3\rho^2x-\rho^3(\text{dot}^3\varphi-\text{sty}^3\varphi)=0.$$

Widzimy łatwo, że trzy pierwiastki równania (3) są
$$\rho(\text{dot}\,\varphi-\text{sty}\,\varphi),\quad \rho(\alpha\,\text{dot}\,\varphi-\beta\,\text{sty}\,\varphi),\quad \text{i}\quad \rho(\beta\,\text{dot}\,\varphi-\alpha\,\text{sty}\,\varphi).$$

Aby ztosamić równania (3) i (1), dosyć jest wziąć
$$\rho=\sqrt{\frac{p}{3}},\quad \text{i}\quad \text{dot}^3\varphi-\text{sty}^3\varphi=\frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

Kąt φ wyznaczy się czyniąc, jako wprzódy, $\text{sty}\,\omega=\text{sty}^3\varphi$; co daje $\text{dot}\,2\omega=\frac{1}{2}(\text{dot}\,\omega-\text{sty}\,\omega)=\frac{1}{2}(\text{dot}^3\varphi-\text{sty}^3\varphi)$.

Więc $$\text{dot}\,2\omega=\frac{-q}{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$
formuła ta jest wyrachowalną przez logarytmy.

Postępując jako w poprzedzającym przypadku, łatwo znajdziemy że trzy pierwiastki równania są :
$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{dot}\,2\varphi,\quad \text{i}\quad -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{dot}\,2\varphi\pm\frac{\sqrt{p}}{\text{wst}\,2\varphi}\sqrt{-1}.$$

Pierwszy pierwiastek jest sam tylko rzeczywistym, dwa inne są urojonemi i sprzężonemi. Wszystkie trzy są wyrachowalne przez logarytmy.

ĆWICZENIA.

I. Wyrachować, w funkcyi trzech boków trójkąta sferycznego, promień koła wpisanego i opisanego.

II. Rozwiązać trójkąt sferyczny, znając trzy łuki kół wielkich które łączą środki boków z wierzchołkami przeciwnemi.

III. Rozwiązać trójkąt sferyczny, znając trzy wysokości.

IV. Dowieśdź że, jeśli α oznacza łuk wielkiego koła który łączy wierzchołek A trójkąta sferycznego ze środkiem boku przeciwnego, mamy

$$\mathrm{dos}\,\alpha = \frac{\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}(b+c)\ \mathrm{dos}\,\frac{1}{2}(b-c)}{\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}a}.$$

V. Dowieśdź że, w trójkącie sferycznym, wstawy trzech *wysokości* są odwrotnie proporcyonalnemi wstawom boków na które te wysokości są spuszczone.

VI. Rozwiązać trójkąt sferyczny prostokątny, znając przeciwprostokątnę i promień koła wpisanego.

VII. R przedstawia *promień sferyczny* koła opisanego na trójkącie ABC, r *promień* koła wpisanego, α *promień* koła zawpisanego które dotyka boku a, $2p$ obwód $a+b+c$; dowieśdź że:

$$\mathrm{dot}\,\mathrm{R} = 2\,\mathrm{dos}\,\tfrac{1}{2}a\ \mathrm{dos}\,\tfrac{1}{2}b\ \mathrm{dos}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\mathrm{wst}\,\mathrm{A}}{\mathrm{wst}\,a},$$

$$\mathrm{sty}\,r = \frac{\mathrm{wst}\,b\ \mathrm{wst}\,c\ \mathrm{wst}\,\mathrm{A}}{2\,\mathrm{wst}\,p},$$

$$\mathrm{sty}\,\alpha = \frac{\mathrm{wst}\,b\ \mathrm{wst}\,c\ \mathrm{wst}\,\mathrm{A}}{2\,\mathrm{wst}\,(p-a)}.$$

VIII. Wyrachować objętość czworościanu w funkcyi jego sześciu krawędzi.

KONIEC TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ.

NOTA *A*.

Granice, wyższa i niższa, między którémi zawiera się wstawa i dostawa łuków pierwszej ćwierci okręgu.

1° W znanej formule

$$\text{wst}\, a = 3\, \text{wst}\, \tfrac{1}{3} a - 4\, \text{wst}^3 \tfrac{1}{3} a$$

podstawmy, w ostatnim wyrazie, łuk $\frac{1}{3}a$ zamiast wst $\frac{1}{3}a$, będzie

$$\text{wst}\, a > 3\, \text{wst}\, \tfrac{1}{3} a - \frac{4a^3}{27}.$$

W tej nierówności zastąpmy wszędzie łuk a przez $\frac{1}{3}a$, otrzymamy

$$\text{wst}\, \frac{a}{3} > 3\, \text{wst}\, \frac{a}{3^2} - \frac{4a^3}{3^6}.$$

W ostatniej nierówności zastąpmy podobnie łuk a przez $\frac{1}{3}a$; i tak następnie w każdej otrzymanej nierówności; będziemy mieli

$$\text{wst}\, \frac{a}{3^2} > 3\, \text{wst}\, \frac{a}{3^3} - \frac{4a^3}{3^9},$$

$$\text{wst}\, \frac{a}{3^3} > 3\, \text{wst}\, \frac{a}{3^4} - \frac{4a^3}{3^{12}},$$

a ogólnie

$$\text{wst}\, \frac{a}{3^{n-1}} > 3\, \text{wst}\, \frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{3^{3n}}.$$

Pomnóżmy teraz drugą nierówność przez 3, trzecią przez 3^2, i tak dalej, ostatnią przez 3^{n-1}; dodajmy stronami, otrzymamy

$$\text{wst}\, a > 3^n\, \text{wst}\, \frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{27}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} \cdots + \frac{1}{9^n}\right).$$

W tym wyniku zróbmy $n = \infty$, i uważajmy że wtedy

$$Gran.\ 3^n\, \text{wst}\, \frac{a}{3^n} = Gran.\ \frac{a\, \text{wst}\, \dfrac{a}{3^\infty}}{\dfrac{a}{3^\infty}} = a.$$

Bo, gdy łuk maleje aż do *zera*, stosunek wstawy do łuku ma za granicę 1. Nadto, wyrazy w nawiasach stanowią postępnię geometryczną nieskończenie malejącą; przeto granica summy tych wyrazów jest, jako wiadomo, $\frac{1}{1-\frac{8}{9}}=\frac{9}{8}$; co daje, wykonywając $\frac{4a^3}{27}\times\frac{9}{8}=\frac{a^3}{6}$, ostatecznie

$$\text{wst}\, a > a-\frac{a^3}{6} \quad \text{albo} \quad a-\text{wst}\, a<\frac{a^3}{6}.$$

To znaczy że *biorąc mały łuk zamiast jego wstawy, popełnia się błąd mniejszy od szóstej części sześcianu tego łuku.*

Jako widzimy, wst$a$ jest zawartą między łukami a i $a-\frac{a^3}{6}$.

2° Nie trudno będzie teraz znaleźć dwie granice, wyższą i niższą, między któremi zawiera się dos$a$. Jakoż, mamy

$$\text{dos}\, a=1-2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a;$$

kładąc naprzód zamiast wst $\frac{a}{2}$ łuk $\frac{a}{2}$, znajdziemy

$$\text{dos}\, a>1-2\,.\,\frac{a^2}{4} \quad \text{albo} \quad \text{dos}\, a>1-\frac{a^2}{2}.$$

Potem, podstawiając w tej samej formule, zamiast wst $\frac{a}{2}$ różnicę $\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3$, znajdziemy przeciwnie

$$\text{dos}\, a<1-2\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\,\frac{a^3}{8}\right)^2 \quad \text{albo} \quad \text{dos}\, a<1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}-\frac{2a^6}{48^2},$$

a tem bardziej $\text{dos}\, a<1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$.

To pokazuje że, *w pierwszym ćwiercianie*, dos$a$ *jest zawartą między* $1-\frac{a^2}{2}$ i $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$; *więc, biorąc* $1-\frac{a^2}{2}$ *za* dos$a$, *popełnia się błąd mniejszy od dwudziestej czwartej części czwartej potęgi łuku* a.

NOTA *B*.

O przybliżeniu z jakiem wyrachowano wstawy i dostawy łuków idących co 10″.

Opierając się na poprzedniej nocie, nie trudno jest wyznaczyć błąd popełniony biorąc *łuk* 10″ za *wst* 10″.

Jakoż, wiemy (29) że *łuk* $10'' < \frac{5}{10^5}$; więc rzeczony błąd jest mniejszym od $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2.10^4}\right)^3$ a tém bardziej od $\frac{1}{4.10^{13}}$.

Ztąd wnosimy że wst10″ różni się od *łuku* 10″ dopiero w *trzynastej* cyfrze dziesiętnej, i to jeszcze mniej niż *jedną czwartą* jedności tej cyfry.

Co się zaś tycze dos 10″, biorąc $1 - \frac{1}{2}$ (*łuk* 10″)^2 za *dos* 10″, popełnia się widocznie błąd mniejszy od $\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2.10^4}\right)^4$, a tem bardziej mniejszy od $\frac{1}{3.10^{18}}$.

Do wyznaczenia wstaw i dostaw łuków pierwszego ćwiercianu, po sobie idących co 10″, można użyć wiadomych formuł *Tomasza Simpson*:

$$\text{wst}\,(m+1)\,10'' = 2\,\text{dos}\,10''\ \text{wst}\,(m\,.\,10'') - \text{wst}\,(m-1)\,10'',$$

$$\text{dos}\,(m+1)\,10'' = 2\,\text{dos}\,10''\ \text{dos}\,(m\,.\,10'') - \text{dos}\,(m-1)\,10'';$$

i obrachować obie linie dla łuków od 0° aż do 45°; albo jedną tylko, ale od 0° aż do 90°, czyli do 324000″. A ponieważ łuki idą co 10″, wykona się przeto 32400 działań.

Biorąc tedy *wst* 10″ i *dos* 10″ z dwunastoma dziesiętnemi dokładnemi, zachodzi pytanie na ile cyfer dokładnych, w ostatniej wstawie obrachowanej, liczyć należy.

Aby rozwiązać to pytanie, nazwijmy δ błąd popełniony brakiem, poprzestając na 12 cyfrach dziesiętnych wstawy 10″. Błąd popełniony na dos 10″, jako mniejszy od jedności *ośmnastego* rzędu dziesiętnego, może być zaniechanym obok błędu który jest *trzynastego* rzędu dziesiętnego.

Na mocy tej uwagi, i wedle formuły powyższej, błąd popełniony na wst $20''$ ma za granicę 2δ; tak samo, błąd uczyniony na wst $30''$ ma za granicę $4\delta - \delta = 3\delta$; a ogólnie, błąd uczyniony na wst $(m+1)\,10''$ jest $2m\delta - (m - 1\,\delta = (m+1)\,\delta$; bo wszystkie te błędy są *brakiem*.

Ztąd wynika że błąd popełniony na wst $(32400.10'')$ jest $32400\,\delta$; zatem jest mniejszym od $\frac{32400}{4\,.\,10^{18}}$, a tem bardziej od $\frac{1}{10^9}$.

Więc ostatnia wstawa, znaleziona po wykonaniu 32400 rachunków przybliżonych, zawiera jeszcze *dokładnych* 9 cyfer dziesiętnych. Więc 12 cyfer dziesiętnych wstawy i dostawy łuku $10''$ są dostatecznemi do wyznaczenia, na mniej niż pół jedności osmego rzędu dziesiętnego, wstaw i dostaw łuków pierwszego ćwiercianu, idących co $10''$.

W tak długich rachunkach błędy są nieuchronne; dlatego trzeba było często sprawdzać znalezione wartości na wstawach i dostawach wprost obrachowanych, jako wst 9°, wst 18°,... wst 30°. Co też własnie zrobiono.

NOTA *C*.

Rozwinięcie wstawy i dostawy wedle potęg łuku.

Dowiedziemy naprzód dwóch twierdzeń które nam później będą potrzebnemi.

Twierdzenie I.

Granicą stosunku $\frac{x^m}{1\,.\,2\,.\,3\,..,m}$, *gdy* m *rośnie nieskończenie, jest zero.*

Niech będzie k liczba równa albo większa od x; mamy

$$\frac{x^m}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\cdot\frac{x}{k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdots\cdot\frac{x}{m}.$$

Czynniki $\frac{x}{k+1}$, $\frac{x}{k+2}$ są ułamkami malejącemi, a jest ich $m-k$;

$$\text{więc} \qquad \frac{x^m}{1.2.3...m} < \frac{x^k}{1.2...k} \cdot \left(\frac{x}{k+1}\right)^{m-k}.$$

Aże, jako wiadomo, potęgi rosnące ułamka $\frac{x}{k+1}$ dążą coraz bardziej do zera;

$$\text{więc} \qquad Gran. \frac{x^m}{1.2.3...m} = 0.$$

Twierdzenie II.

Granicą $\cos^m \frac{x}{m}$, *gdy liczba całkowita* m *rośnie nieskończenie, jest jedność.*

$$\text{Mamy} \qquad \cos\frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m^2};$$

$$\text{zatem} \qquad \cos^m\frac{x}{m} > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m.$$

Rozwińmy drugą stronę wedle wstawy dwumianu. Aby przejść z jednego wyrazu do drugiego, trzeba mnożyć przez $\frac{x^2}{2m^2}$ i przez czynnik $\frac{m-n+1}{n}$ który najwięcej równa się m; więc, jeśli weźmiemy m tak aby było $\frac{x^2}{2m^2} < \frac{1}{m}$, czyli $m > \frac{x^2}{2}$, wyrazy drugiej strony, naprzemian dodatne i odjemne, mniejsze od jedności, będą ciagle malały.

$$\text{Zatem} \qquad \cos^m\frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m}.$$

$$\text{Aże} \quad \cos^m\frac{x}{m} < 1, \quad \text{więc} \qquad Gran. \cos^m\frac{x}{m} = 1.$$

Tę trudność uprzątnąwszy, przystępujemy do przedmiotu niniejszej noty.

Formuła *Moawra*, jako już wiadomo, daje

$$(1)\quad \text{dos}\, ma = \text{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1.2}\text{dos}^{m-2} a \,\text{wst}^2 a + \text{etc.}$$

$$(2)\quad \text{wst}\, ma = m\,\text{dos}^{m-1} a\,\text{wst}\, a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}\text{dos}^{m-3} a\,\text{wst}^3 a + \text{etc.}$$

Nazywając x łuk ma i biorąc $\text{dos}^m \frac{x}{m}$ na czynnik, te formuły mogą się wyrazić następującym sposobem:

$$\text{dos}\, x = \text{dos}^m \frac{x}{m}\left\{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\text{sty}^2 \frac{x}{m} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\text{sty}^4 \frac{x}{m} - + .. \right\}$$

$$\text{wst}\, x = \text{dos}^m \frac{x}{m}\left\{\frac{m}{1}\text{sty}\frac{x}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\text{sty}^3 \frac{x}{m} + - \quad ....\right\}$$

Albo, co to samo,

$$\text{dos}\, x = \text{dos}^m \frac{x}{m}\left\{1 - \frac{x^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2 + \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^4 - ...\right\}$$

$$\text{wst}\, x = \text{dos}^m \frac{x}{m}\left\{\frac{x}{1}\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right) - \frac{x^3}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^3 + ...\right\}$$

Zajmijmy się naprzód rozwinięciem dostawy.

W nawiasie, aby przejść z jednego wyrazu do następnego, trzeba mnożyć pierwszy: 1° przez iloczyn $\left(1 - \frac{2k}{m}\right)\left(1 - \frac{2k+1}{m}\right)$ który jest mniejszym od jedności, 2° przez czynnik $\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}$,

3° nakoniec przez stosunek $\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2$.

Uważajmy teraz że, gdy x zostając niezmienne m rośnie nieskończenie, stosunek $\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ maleje i dąży do jedności.

Jakoż, $Gr.\left(\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)=Gr.\left(\frac{\mathrm{wst}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)Gr.\,\mathrm{sie}.\frac{x}{m}=1.$

Zatem, zostawiając x niezmiennem, można wziąć m dosyć wielkiem aby stosunek $\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ był mniejszym od $1+\delta$, jakkolwiek małe jest δ; wtedy, jeśli weźmiemy $2k+1$ większe od $x(1+\delta)$, będzie widocznie cały mnożnik mniejszym od jedności, to jest będziemy mieli

$$\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}\left(1-\frac{2k}{m}\right)\left(1-\frac{2k+1}{m}\right)\left(\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2<\frac{x^2(1+\delta)^2}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Wynika ztąd, że wyrazy nawiasu, począwszy od tego którego mianownik zawiera $2k+1$, są mniejsze od jedności i maleją aż do zera gdy się m zwiększa nieskończenie (tw. I); a ponieważ one są naprzemian dodatnemi i odjemnemi, przeto zatrzymując szereg na jednym z nich, popełni się błąd mniejszy od wyrazu idącego po tym na którym poprzestajemy, i ten błąd będzie znaku przeciwnego. Więc

$$\cos x=\cos^m\frac{x}{m}\left\{1-\frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)+-\right.$$

$$\left.\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2n+1}{m}\right)\left(\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^{2n}(1-\theta)\right\},$$

θ oznacza liczbę dodatną mniejszą od jedności, azaś $2n>2k+2$.

Przypuśćmy teraz że m rośnie do nieskończoności; wtedy, jakośmy okazali, $\mathit{Gran.}\ \mathrm{dos}^{\mathrm{m}}\frac{x}{m}=1$; $\mathit{Gran.}\ \dfrac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}=1$;

liczba θ, mniejsza od jedności, dąży do pewnej granicy tém mniejszej im $2n$ jest większem; a zaś błąd pochodzący z wyrazów zaniedbanych jest mniejszym od $\frac{\theta x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$. Aże ta ostatnia ilość, gdy weźmiemy n dostatecznie wielkiem, może stać się tak małą jak się podoba, więc szereg jest zbieżnym i ma za summę $\mathrm{dos}\,x$; więc

$$\mathrm{dos}x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2..6}+-\ldots$$

Rozumując podobnie, znajdziemy

$$\mathrm{ws}\ x=x-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2\ldots 7}+-\text{ete.}$$

Dwa te szeregi mogą służyć do wyznaczenia wstaw i dostaw łuków pierwszego ćwiercianu z przybliżeniem żądanem; tém więcej że od 0° do 45° łuk $x<0{,}8$, co zapewnia dostateczną zbieżność obydwóch szeregów; zatem kilka tylko wyrazów rachować trzeba aby otrzymać wstawy i dostawy z przybliżeniem przyzwoitem.

Nadto, biorąc pewną liczbę wyrazów, popełniony błąd jest mniejszy od wyrazu idącego po tym na którym poprzestajemy.

Jakoż, wyrazy dwóch szeregów idą malejąc coraz bardziej, zatem biorąc tylko dwa pierwsze wyrazy, mamy widocznie, $\mathrm{dos}\,x>1-\frac{x^2}{2}$ i $\mathrm{dos}\,x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}$; więc biorąc $1-\frac{x^2}{2}$ za dos x, błąd jest mniejszy od $\frac{x^4}{24}$.

Tak samo, $\mathrm{wst}\,x>x-\frac{x^3}{1.2.3}$; zkąd $x-\mathrm{wst}\,x<\frac{x^3}{6}$.

Oba te wyniki są nam już znane.

Noty te winniśmy życzliwości Pana G.-H. Niewęgłowskiego.

KONIEC.

UKŁAD METRYCZNY

MIAR I WAG.

Układ miar i wag metryczny oparty na sposobie liczenia dziesiętnym, używany dzisiaj we Francyi, Belgii, Piemoncie, niektórych częściach Włoch, i nawet w Ameryce, jako jeden z najgodniejszych w tym rodzaju utworów, zasługuje na uwagę każdego człowieka. Kto tylko raz doznał ile niedogodności przedstawia rozmaitość wag, miar i monet różnych krajow, dla podróżujących i handlu, ten pewnie zapragnie szczerze aby wszędzie jednakowy wprowadzono układ miar, wag i pieniędzy. Pod tym względem dobrze jest poznać układ metryczny, bo on może niedługo w całej przynajmniej Europie, choć w części, zaprowadzonym zostanie.

1. Mierzyć jaką wielkość, jestto szukać jej stosunku z inną wielkością, tej samej natury, wziętą za *jedność*. Właściwie tedy mówiąc, musi być w miarach ta sama rozmaitość jaka jest w rzeczach które porównywamy. Ale tutaj zajmiemy się miarami samej figury ciał porównywanych, nie zaś ich gatunkiem; mówić przeto będziemy o miarach *długości*, *powierzchni*, *objętości*, a nareszcie o *wagach i pieniądzach*.

Wybor jednosci miar i wag nie jest rzeczą obojętną ani też łatwą. Trzeba aby te jedności nie tylko nie sprzeciwiały się bardzo już używanym, ale jeszcze znacznie ułatwiały rachunki. Gdyby do mierzenia rzeczy porównywanych samych tylko używać musiano jedności, wyrażenie tych miar byłoby często niedogodném. Jakoż, jeśli wielkość uważana zawiera bardzo wiele razy swoją jedność, wtedy liczba wyrażająca jej miarę jest bardzo wielką, i nie daje nam dokładnego wyobrażenia rzeczy uważanej. I tak : gdybyśmy powiedzieli komu że odległość dwóch miast wynosi milion stóp, nie mógłby od razu powziąć jasnego wyobrażenia tej odległości, bo stopa jest jednością za małą do mierzenia wielkich odległości. Gdybyśmy znowu do oznaczenia małej długości mieli tylko łokcie, musielibyśmy użyć ułamku, i mówić na przykład : ta długość ma $\frac{13}{200}$ łokcia ; taka miara nie dałaby nam prawie żadnego wyobrażenia wielkości, chociaż ta wielkość byłaby istotnie wyznaczoną.

Aby więc uniknąć tych obydwóch niedogodności, zrobiono z jedności pewne *wielokrotniki* i pewne potrzebne ułamki które osobnemi nazwano imionami. Te imiona, łatwo zrozumiałe, są zrobione wedle ustawy dziesiętnej naszego liczenia, aby tym sposobem rachunek miar był, ile można, najprostszym.

Tak właśnie rozumowali uczeni założyciele układu miar i wag metrycznych.

Nazwali tedy : *metrem* jedność linijną, *arem* jedność powierzchni, *metrem sześciennym* jedność objętości, a zaś *sterem* jedność objętości drew i drzewa do budowy ; *litrem* jedność objętości rzeczy płynnych i sypnych, nareszcie *gramem* jedność wagi, a nakoniec *frankiem* jedność pieniężną.

Zachowałem nazwiska miar i wag francuzkie, dlatego że je przepolszczyć byłoby nader trudno, a nawet bez żadnego pożytku, tutaj zwłaszcza gdzie nam chodzi raczej o poznanie układu metrycznego, nie zaś o jego w naszym kraju zastosowanie.

II. Zrobiono miary złożone z jedności, biorąc *dziesięć*, *sto*, *tysiąc* razy jedność ; a zaś miary ułamkowe biorąc *jedną dziesiątą*, *jedną setną*, *jedną tysiączną* część jedności.

Aby łatwo utkwić w pamięci, i sposobem nieomylnym, nazwiska miar wielokrotnych i ułamkowych, położono przed nazwiskiem jedności wyrazy greckie *deka*, *hekto*, *kilo*, na oznaczenie dziesięciu, stu, tysiąca jedności ; a zaś wyrazy łacińskie *deci*, *centi*, *milli*, na oznaczenie jednej dziesiątej, setnej, tysiącznej cręści jedności. I tak, mówi się: *dekametr*, 10 metrów; *hektometr* 100 metrów; *kilometr* 1,000 metrów; a nawet jeszcze *myriametr* 10,000 metrów (prawie dwie polskie mile).

A znowu *decymetr* to jest $\frac{1}{10}$ metra; *centymetr*, $\frac{1}{100}$ metra; *millimetr*, $\frac{1}{1000}$ metra.

Tak samo możnaby powiedzieć *dekar*, *hectar*, *kilar*, na oznaczenie 10, 100, 1,000 arów; a zaś *decyar*, *centyar*, *milliar* na oznaczenie $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ara; chociaż istotnie tylko *hektar* i *centyar* są używanemi.

Ster nie ma innych wielokrotników tylko *dekaster* i *decyster*.

Litr i *gram* mają: *dekalitr*, *hektolitr*, *kilolitr*, *decylitr*, *centilitr; dekagram*, *hektogram*, *kilogram*, *decygram*, *centigram*, *milligram*.

Co się zaś tyczy *franka*, on nie ma żadnych wielokrotników, a jego ułamkami są: *decym* i *centym*.

III. Aby nadać systemowi metrycznemu pewność i trwałość któraby nie podlegała zmianom społeczno-politycznym świata, przedsięwzięto oprzeć nowe miary na podstawie stałej, nieporuszalnej; tę podstawę wzięto w naturze samej. Uczeni francuzcy Delambre i Méchain zmierzyli łuk południka zawarty pomiędzy *Dunkierką* i *Barceloną*, i z wyniku swoich geodezycznych działań wnieśli długość ćwierci południka. Tę długość podzielono ne *dziewięć milionów* części równych, i zrobiono liniał z platyny, którego długość, w temperaturze lodu topniejącego, równa się właśnie jednej z tych części. Otoż taka długość którą wzięto za *jedność linijną*, i nazwano ją METREM.

Metr przeto jest dziesięć milionową częścią ćwierci południka przechodzącego *przez Dunkierkę*.

Metr służy także do mierzenia małych odległości; i chociaż, jakośmy już powiedzieli, jest miara hektometr, nie trzeba jednak mówić systematycznie: ta alea ma *trzy hektometry*, ale poprostu: ta alea ma trzysta metrów.

Do mierzenia znacznych odległości używa się kilometru, albo też nawet myryametru, i mówi się: odległość Paryża od Pekinu jest około osiemset dwadzieścia i jeden myryametrów.

Wynika z podziału metra że okrąg południka ziemskiego ma *czterdzieści milionów metrów*, czyli 40,000 kilometrów, albo 4,000 myryametrów.

Ar *jest kwadratem którego bok ma jeden dekametr;* przeto wartość ara jest sto metrów kwadratowych (*). Wynika ztąd centyar jest to metr kwadratowy.

Używa się *ara* i *hektara* do rozmiaru powierzchni pól; i mówi się, na przykład, że ta rola, ten las ma 2 hektary, 35 arów, 24 centyarów ($2^h,35^a,24$). Ale, aby wymierzyć małe powierzchnie, naprzykład w stolarstwie, w ciosełce, i t. p., używa się zawsze metra kwadratowego.

Metr kwadratowy zawiera sto decymetrów kwadratowych; decymetr kwadratowy dzieli się tak samo na sto centymetrów kwadratowych; a nakoniec centymetr kwadratowy, na sto millimetrów kwadratowych. Aby więc zamienić jakąkolwiek liczbę metrów kwadratowych na decymetry kwadratowe, albo na centymetry kwadratowe, albo nareszcie na millimetry kwadratowe, trzeba pomnożyć tę liczbe przez 100, albo przez 10,000, 1,000,000.

Wielkie powierzchie, jakoto prowincyi, państwa jakiego, części świata, mierzą się na *myryametry kwadratowe.*

Miary ułamkowe metra kwadratowego są : decymetr kwadratowy, który jest setną częścią metra kwadratowego; następnie centymetr kwadratowy, który jest setną częścią decymetra kwadratowego, a dziesięć tysięczną częścią metra kwadratowego; nakoniec millimetr kwadratowy, który jest setną częścią centymetra kwadratowego, dziesięć tysięczną częścią decymetra kwadratowego, a milionową częścią metra kwadratowego.

Jeśli więc chcemy powiedzieć : trzy metry kwadratowe, dwa decymetry, czterdzieści pięć centymetrów kwadratowych, należy pisać tę liczbę tak : $3^{m.k.},0245$.

Jeśli chcemy wiedzieć co znaczy liczba metrów kwadratowych napisana jako następuje: $6^{m.k.},76514$ należy ją czytać: sześć metrów kwadratowych, siedemdziesiąt sześć decymetrów, pię-

(*) Aby sobie jasno wyobrazić dlaczego *ar* zawiera sto metrów kwadratowych, wystawmy kwadrat którego bok zawiera dziesięć metrów długości, i przez punkta podziału wysokości poprowadźmy równoległe do podstawy, a zaś przez punkta podziału podstawy poprowadźmy równoległe do wysokości. To zrobiwszy, uważajmy że równoległe do podstawy dzielą kwadrat na dziesięć pasów, z których każdy zawiera dziesięć metrów kwadratowych; więc cały kwadrat, czyli *ar*, zawiera dziesięć razy dziesięć metrów kwadratowych, to jest sto metrów kwadratowych.

dziesiąt jeden centymetrów kwadratowych i $\frac{1}{10}$ jednego centymetra gwadratomego; albo jeszcze, dopisawszy zero, możemy powiedzieć: 6 metrów kwadratowych, 76 decymetrów, 51 centymetrów i 40 millimetrów kwadratowych.

Do wymierzenia objętości ciał, ogólnie mówiąc, używa się metra sześciennego (*). Metr sześcienny dzieli się na tysiąc decymetrów sześciennych (**); decymetr sześcienny dzieli się na tysiąc centymetrów sześciennych, a centymetr sześcienny, na tysiąc millimetrów sześciennych.

Aby zamienić jakąkolwiek liczbę metrów sześciennych na decymetry sześcienne, albo na centymetry sześcienne, albo na millimetry sześcienne, trzeba pomnożyć tę daną liczbę przez 1,000, albo przez 1,000,000, albo przez 1,000,000,000.

Metr sześcienny bierze nazwisko *steru* gdy się używa do miary drzewa na opał albo na ciołkę.

Litr jest miarą, formy walcowej, mającą objętość decymetra sześciennego. Wysokość litra jest dwa razy większą od średnicy podstawy.

Podług tego łatwo widzimy że oxeft zawierający 2340 litrów, ma objętość dwóch metrów, trzystu czterdziestu decymetrów sześciennych. Co się pisze tak : $2^{m.s.},34$.

Wina, wódki, alkohole i likiery mierzą się na litry albo hektolitry, podług tego jak się sprzedają w małej albo w znacznej ilości.

Rzeczy sypkie, jako zboże, mąka, jarzyny, mierzą się także na litry albo na hektolitry, dekalitry i podwójne dekalitry. Ale

(*) Sześcian jest to figura zamknięta sześcioma kwadratami równemi. Kostka do grania jest sześcianem. Jeśli każdy bok sześcianu ma metr, albo decymetr, i t. d., mówi się że to jest metr sześcienny, albo decymetr sześcienny, i t. d.

(**) Aby dobrze i łatwo pojąć dla czego metr sześcienny zawiera tysiąc decymetrów sześciennych, wystawmy sobie sześcian którego trzy krawędzie przyległe mają każda diugość jednego metra, czyli dziesięciu decymetrów. Przez punkta podziału tych trzech krawędzi poprowadzmy płaszczyzny równoległe do ścian przeciwnych sześcianu. Te płaszczyzny podzielą wysokość na dziesięć warstw równych, i każda warstwa zawierać będzie sto decymetrów sześciennych; bo podstawa została podzieloną na sto decymetrów kwadratowych, a na każdym takim kwadracie stoi decymetr sześcienny. Więc sześcian zawiera 10 razy 100 decymetrów sześciennych, co właśnie czyni tysiąc decymetrów sześciennych.

w tym razie, wysokość litra równa się średnicy podstawy; zatém jest różna od wysokości litra którym się mierzą ciecze. Używa się także decylitra, szczególniej w ogrodnictwie, do miary nasion.

Gram jest wagą, w próżni, centymetru sześciennego wody dystylowanéj, w temperaturze 4 stopni nad zerem termometru stu-stopniowego. Wybrano temperaturę 4 stopni ponad zerem, bo w tej temperaturze woda ma największą gęstość możebną, a przeto największą wagę.

Ważono na powietrzu, nie centymetr sześcienny, bo jego waga just za małą, lecz decymetr sześcienny wody; potem rachunkiem wyznaczono wagę jaką ten decymetr sześcienny wody powinien mieć w próżni. Wiadomo albowiem że, wedle ustawy Archimedesa, każde ciało, zauurzone w jakimkolwiek płynie, traci ze swojego ciężaru tyle, ile waży płyn przez niego wypchnięty.

Zrobiono tedy z platyny ciężar przedstawiający tak ściśle wyrachowaną wagę: tysiączna część tego ciężaru jest więc *gramem*, bo, jako już wiemy, decymetr sześcienny zawiera tysiąc centymetrów sześciennych.

Wszelkie ciężary, jako naprzykład naładowania okrętów, statków, ważą się na beczki albo na *centnary metryczne*.

Beczka waży tysiąc kilogramów, a *centnar metryczny* sto kigramów.

Do oszacowania małych ciężarów używa się kilogramu, dekagramu i gramu. A gdy chodzi o rzeczy bardzo wielkiej wymagające akuratności, jako lekarstwa medyczne, używa się decygramu i nawet centygramu.

Dla większej dogodności użycia miar i wag w handlu, ustawa toleruje dekalitr podwójny i półdekalitr, podwójny hektogram i półhektogram.

Wynika z określenia gramu że, aby znać wagę danej objętości wody, trzeba wyrazić tę objętość w centymetrach sześciennych. Wtedy, ile będzie tych centymetrów, tyle woda, czysta ma się rozumieć, ważyć będzie gramów.

Litr czystej wody waży tysiąc gramów albo jeden kilogram; a zaś beczka zawierająca tysiąc litrów albo jeden metr sześcienny, waży tysiąc kilogramów.

IV. Monety francuskie srebrne i złote robią się z alliażu, jako i w innych krajach.

Alliaż na monety francuskie srebrne składa się z dziewięciu części ciężarowych srebra a z dziesiątej części miedzi.

Alliaż na monety złote ma skład podobny; to jest, na dziesięciu częściach alliażu jest dziewięć części złota i jedna część miedzi. Ten alliaż nadaje monecie pewną twardość którejby nie miała, gdyby z samego jeno srebra lub złota fabrykowaną była; wtedy moneta, przez ciągły obieg, zcierałaby się prędko i zużywała.

Jednością monet francuskich jest frank. Frank jestto kawałek alliażu srebrnego formy kolistej, ważący *pięć* gramów.

Inne monety srebrne są: pięć franków, dwa franki, pół franka czyli 50 centymów, i piąta część franka czyli 20 centymów.

Z określenia franka wynika łatwy sposób znalezienia wagi gdy jest daną liczba franków, i nawzajem liczby franków, których wiadoma jest waga. I tak, widocznie 200 fr. ważą 200×5 gramów to jest kilogram. I nawzajem, worek zawierający srebrne pieniądze, i ważący 82,5 hektogramów, ma wartość $\dfrac{8250^{\text{gr.}}}{5^{\text{gr.}}}$, to jest 1650 franków.

Dla tego też bank francuski, gdy płaci *nowemi pieniędzmi*, nie rachuje ich, ale tylko waży.

Dla ustanowienia ceny złota, przyjęto we Francyi że stosunek wartości między złotem i srebrem, tej samej wagi, jest 15,5.

Ztąd wynika że, ponieważ 20 fr. w srebrze ważą 100 gramów, 20 fr. w złocie ważyć powinny $\dfrac{100^{\text{gr.}}}{15,5} = \dfrac{1000^{\text{gr.}}}{155}$.

To znaczy że 155 sztuk dwudziesto-frankowych ważą kilogram; więc każka taka sztuka waży $\dfrac{1000^{\text{gr.}}}{155} = 6^{\text{gr.}},4516$, niemal 6 gramów i pół.

Średnica sztuki 20 frankowej jest 21 millimetrów.

Inne pieniądze złote, dzisiaj we Francyi obieg legalny mające, są: 5 fr., 10 fr., 50 fr. i 100 fr.

Moneta miedziana robi się z bronzu który się składa z 0,94 miedzi, 0,04 cyny, 0,01 zynku.

Pieniądze bronzowe francuskie są: *centym* który waży gram, *dwa centymy*, *pięć centymów* i *dziesięć centymów*.

Monety francuskie, dzisiaj używane, składają się z 14 sztuk których średnicę i ciężar następująca okazuje tablica :

OZNACZENIE WARTOŚCI.	ŚREDNICA.	CIĘŻAR.
Moneta złota.	millimetry.	grammy.
Sztuka 100 frankowa	35	32,25806
— 50 —	28	16,12903
— 20 —	21	6,45161
— 10 —	19	3,22580
— 5 —	17	1,61290
Moneta srebrna.		
Sztuka 5 frankowa	37	25
— 2 —	27	10
— 1 —	23	5
— ½ (50 centymów).	18	2,5
— ⅕ (20 centymów).	15	1
Moneta bronzowa.		
Sztuka 10 centymów.	30	10
— 5 —	25	5
— 2 —	20	2
— 1 —	15	1

IV. Przedmioty fabrykowane ze złota albo ze srebra, zawierają zawsze metal tańszy, zwykle miedź, który im nadaje twardości, a przeto robi je trwalszemi. Ilość gramów czystego złota albo srebra na 1,000 gramów alliażu, nazywa się jego tytułem albo próbą. I tak, gdy się mówi że klejnot złoty jest próby 840, to oznacza że na 1,000 gramów tego klejnotu, jest 840 gramów czystego złota, a 160 gramów miedzi; albo że każdy gram klejnotu zawiera $0^{gr},84$ czystego złota a zaś $0^{gr},16$ miedzi. Gdy więc ten klejnot waży 50 gramów, to wtedy zawiera $0^{gr}84 \times 50 = 42^{gr}$ czystego złota, a przeto 8 gramów miedzi.

Monety francuskie są próby 900.

Trzy są próby legalne dla robót złotych, to jest : 920, 840, i 750; a tylko dwie dla robot srebnych, to jest : 950 i 800.

Te próby są wytłoczone na każdej robocie jubilerskiej, która nie może być puszczoną w handel, dopóki takim nie zostanie opatrzoną stęplem. Stępel odbija się w biurze kontroli, po ścisłym próby sprawdzeniu.. To właśnie daje kupującemu legalną rękojmię.

Ustawa z roku 1836 we Francyi oznacza 6 franków za kilogram złota, a 2 franki za kilogram srebra, jako koszta fabrykacyi monety, licząc w to stratę menniczną metalu. Podług tego, kilogram srebra próby 900, wart 200 fr. — 2 fr. = 198 fr.; zaś kilogram złota, tej samej próby, wart :

$$20 \times 155 - 6 \text{ fr.} = 3094 \text{ franków.}$$

Jeśli więc chcemy wiedzieć ile wart kilogram srebra, uważajmy tylko że, wedle powyższego rachunku, kilogram alliażu monety srebrnej, czyli 900 gramów czystego srebra wartają 198 franków. Zatem gram czystego srebra wart $\frac{198^{f}}{900} = 0^{f},22$; to jest 22 centymy; a zaś gram czystego złota wart $3^{f},43777$, czyli kilogram złota wart $3437^{f},77$.

Łatwo więc można oszacować przedmiot złoty lub srebrny, którego wiadoma jest próba i ciężar. I tak, przedmiot srebrny próby 950, ważący kilogram, wart $22^{cent} \times 950 = 209$ franków.

Tak samo oszacuje się wszelki przedmiot złoty, bacząc że cena złota jest $3437^{fr.},77$ za kilogram czystego złota. Próba złotych przedmiotów pokazuje ile na każdym kilogramie roboty zawiera się czystego złota; łatwo więc znajdzie się wartość takich przedmiotów.

Napływ niespodziany złota do Europy, zniżył cokolwiek obecnie jego cenę, w porównaniu ze srebrem, tem więcej jeszcze że srebro staje się coraz rzadszem. Kilogram złota nie wart przeto dzisiaj 3437 franków ; ale to zniżenie nie jest wielkie, i o niem mówić niema tu potrzeby.

Na tem kończymy rzecz o układzie miar i wag dziesiętnych, i ich zastosowaniu.

KONIEC.

TREŚĆ RZECZY

ZAWARTYCH W TEM DZIELE.

CZYTELNIK ZECHCE POPRAWIĆ NASTĘPUJĄCE ZNACZNIEJSZE OMYŁKI.

Stron.	*Wiersz.*	*Zamiast.*	*Czytaj.*
61	12	$\sqrt{a^2-b^2 \text{dos} A}$	$\sqrt{a^2 \text{dos}^2 A + a^2 - b^2}$
63	2	$a \,\text{wst}\, \omega \,\text{dos}\, a$	$a \,\text{wst}\, \varphi \,\text{dos}\, a$
63	14	$\frac{a \,\text{wst}\, B' + 2k\pi \pm A}{\text{wst}\, A}$	$\frac{a \,\text{wst}\,(B' + 2k\pi \pm A)}{\text{wst}\, A}$
63	5 od dołu	$a = \frac{a \,\text{wst}\,(B+A)}{\text{wst}\, A}$	$\frac{a \,\text{wst}\,(B'+A)}{\text{wst}\, A}$
65	8	a, b, c	$a, b,$ C
143	2 od dołu	pawinno	powinno
145	2	iczba	liczba
157	4 od dołu	toraz	teraz
165	4	$2m\delta-(m-1\delta$	$2m\delta-(m-1)\delta$
166	6 od dołu	$m > \overset{x^2}{} 2$	$m > \frac{x^2}{2}$
173	23	*dziewięć*	*dziesięć*
174	2	Wynika ztąd	Wynika ztąd że
175	2	gwadratowego	kwadratowego
175	15	na ciołkę	na ciesielkę.
176	11	just	jest
176	24	kigramów	kilogramów

81