



Cours de Mathématiques élémentaires
autographe.

Cours de Trigonométrie rectiligne,
avec de nombreuses exercices
et leur application au levé de plans,
par

A. Carême,

Ancien élève de l'École polytechnique,
Professeur de mathématiques.

Paris,

Gauthier Villars, successeur de Mallet-Bachelier.
Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes de l'École Polytechnique.
Quai des grands-Augustins, 55.

1864.

Ouvrages de M^o. Carême.

Cours autographe d'Algèbre élémentaire, 5, ^F 50

Cours _____ id _____ de Trigonométrie rectiligne, 3, ^F 50

Les autres parties du Cours complet de mathématiques élémentaires
paraîtront successivement.

Cours de Mathématiques élémentaires
autographe

Cours de Trigonométrie rectiligne,
avec de nombreux exercices
en leur application au levé de plans,

par

A. Carême,

Ancien élève de l'École polytechnique,
Professeur de mathématiques.

Paris,

Gauthier-Villars, successeur de Wallet-Bachelier
Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes de l'École Polytechnique,
Quai des grands-Augustins, 55.

1864.



312 395

Présuné du Cours de Trigonométrie rectiligne.

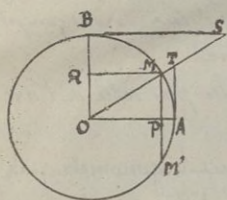
§1. Notions préliminaires.

But de la Trigonométrie.

1. La Trigonométrie a pour objet immédiat la résolution numérique des triangles, c.à.d. le calcul des différents éléments d'un triangle, avec des données suffisantes : de là la division de cette science en deux branches, trigonométrie rectiligne ou sphérique, suivant qu'il s'agit de la résolution d'un triangle rectiligne ou d'un triangle sphérique ; nous ne nous occuperons dans ce cours que de la 1^{re}. Plus généralement, la Trigonométrie se propose d'introduire les angles dans le calcul, ce qui permet d'atteindre autant qu'on le veut la précision des constructions géométriques.

Lignes trigonométriques.

2. Comme on ne peut établir de relation directe entre les côtés et les angles d'un triangle, on a remplacé la connaissance des angles par celle de certaines quantités qui sont déterminées quand les angles sont connus, et réciproquement ; ce sont les lignes trigonométriques.



Soit un angle aigu AOM : du sommet O, comme centre, on décrit un arc AM, d'une extrémité M on abaisse une perpend. MP sur le rayon OA qui passe par l'autre ; ce rapport $\frac{MP}{OM}$ est constant pour un même angle, quel que soit le rayon ; on nomme ce rapport le sinus de l'angle AOM ou de l'arc AM qui lui sert de mesure. On dit aussi que c'est le nombre qui exprime la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc, M, sur le rayon qui passe par l'origine A, le rayon étant pris pour unité, on écrit ainsi $\frac{MP}{OM} = \sin AOM$; ou, si l'on fait $OM=1$, $MP = \sin AM$.

Il faudra se rappeler, une fois pour toutes, que, dans ce qui suivra, en trigonométrie, il est toujours entendu que les lignes ou les arcs sont mesurés avec le rayon du cercle qui sert à décrire ces derniers, pris pour unité.

La tangente de l'angle AOM est la perpendiculaire élevée par l'origine A au rayon OA, jusqu'au rayon prolongé qui passe par l'extrémité M : ainsi on écrira $AT = \tan AM$, ou $AT = \tan AOM$.

La sécante de l'angle AOM est la distance du centre à l'extrémité de la tangente ; ainsi on écrira :

$$OT = \sec AM.$$

Mesure des arcs.

Les arcs étant mesurés avec le rayon pris pour unité, la circonférence sera représentée par 2π , la demi-cir. par π , le quadrant par $\frac{\pi}{2}$, l'arc de 45° par $\frac{\pi}{4}$, &c.

L'arc BM étant le complément de AM, les lignes trigonométriques sont les lignes complémentaires de AM, et réciproquement ; le sinus, la tangente et la sécante de BM s'appellent respectivement le cosinus, la cotangente et la cosécante de AM, et se désignent par les abréviations cos. ou cosin., coty ou cotang., et csc.

$$\frac{\pi}{2} - x.$$

Arcs complémentaires.

Ainsi, soit $AM = x$, on a par définition :

$$(1) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \\ \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x \\ \sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc x \end{cases}$$

Remarques.

3. La figure précédente montre que 1^o $\cos x = MR = OP$, distance du centre au pied du sinus.

2^o $MP = \frac{1}{2} MM'$, c.à.d. le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double.

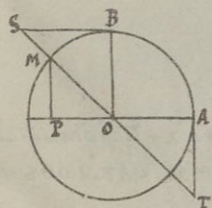
On désignait autrefois AP, distance de l'origine au pied du sinus, sous le nom de sinus-verse de AM.

Extension des définitions précédentes aux arcs plus grands que $\frac{\pi}{2}$.

4. Pour généraliser ces définitions, et les étendre à des arcs ou à des angles plus grands que $\frac{\pi}{2}$, on établit des conventions, qui permettent de réduire le nombre des formules.

1^o Soit l'arc $AM > 90^\circ$ et $< 180^\circ$, ou a qui on appelle un arc du 2^e quadrant. — Le sinus a la même définition que précédemment. Le cosinus se définit moins la distance du centre au pied du sinus, $\cos AM = -OP$, et remarquons que ce cosinus est compté en sens contraire du cosinus du 1^{er} quadrant.

On appelle tangente de AM, moins la ligne AT, mesurée en sens contraire du cas précédent. La sécante, dont la valeur absolue OT est encore la distance du centre à l'extrémité de la tangente, est comptée ici dans le sens de M vers O, c.à.d. de l'extrémité de l'arc vers le centre, au lieu d'être mesurée, comme dans le 1^{er} quadrant, dans le sens du centre vers l'extrémité de l'arc ; nous la définirons, dans le cas qui nous occupe, moins la distance du centre à l'extrémité de la tangente. — L'arc étant plus grand que 90° , n'a pas de complément, il ne devrait donc pas avoir une cotangente ou une cosécante, pas plus qu'un cosinus ; la remarque 1^{re} du n^o 3 nous a néanmoins fourni le moyen de donner de l'extension à la définition de

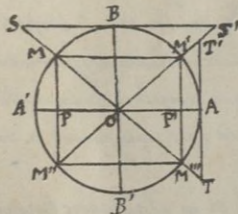


cette dernière ligne, nous allons en faire autant pour les 2 autres lignes complémentaires. La cotangente de l'arc AM sera BS, c.à.d. moins la perpendiculaire menée par le point B, origine des complémentaires, jusqu'à la rencontre du diamètre prolongé qui passe par l'extrémité. - la cosécante se définira la distance du centre à l'extrémité de la cotangente, ce sera + OS.

En prenant le supplément AM', compte à partir de l'origine A, de l'angle AOM, on aura donc, si l'on désigne par x l'arc AM' du 1^{er} quadrant :

$\pi - x$.
Arcs supplémentaires.

$$(2) \quad \begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \sec(\pi - x) = -\sec x \\ \cotan(\pi - x) = -\cotan x \\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x \end{cases} \quad \begin{cases} \text{toutes les lignes trigonométriques} \\ \text{de deux arcs supplémentaires sont} \\ \text{égales et de signes contraires, sauf} \\ \text{le sinus et la cosécante, qui sont} \\ \text{égales et de même signe.} \end{cases}$$



2^e J'arrive à un angle AMM' > 180°, et donc l'extrémité tombe dans le 3^e quadrant. Etudions les conventions faites ci-dessus, et convenons que, les lignes du 1^{er} quadrant étant positives, nous regarderons comme négatives toutes celles des autres quadrants, qui seront comptées en sens inverse de leurs correspondantes du 1^{er} quadrant; de sorte que, le sinus sera plus ou moins la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre qui passe par l'origine des arcs; la tangente recevra une extension pareille; le cosinus et la cotangente seront positives ou négatives, suivant que ces lignes seront comptées à droite ou à gauche du diamètre qui passe par l'origine des complémentaires; la sécante et la cosécante seront positives ou négatives, suivant qu'elles seront comptées dans le sens du centre vers l'extrémité de l'arc ou de l'extrémité de l'arc vers le centre.

En appelant x l'arc AM', qui se termine à l'autre extrémité M' du diamètre qui passe par celle de l'arc considéré AM, on aura donc, d'après ce qui précède :

$\pi + x$.
Arcs dont la différence est une demi-circonférence.

$$(3) \quad \begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \tan(\pi + x) = \tan x \\ \cotan(\pi + x) = \cotan x \\ \sec(\pi + x) = -\sec x \\ \operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x \end{cases} \quad \begin{cases} \text{toutes les lignes trigonométriques de} \\ \text{deux arcs différant d'une demi-circonférence} \\ \text{sont égales et de signes contraires, sauf} \\ \text{la tangente et la cotangente, qui sont} \\ \text{égales et de même signe.} \end{cases}$$

3^e Enfin nous arrivons à l'arc AM'M'' = $2\pi - x$, en appelant x l'arc AM' du 1^{er} quadrant dont l'extrémité M' est symétrique de M'' par rapport au diamètre OA. Nous avons, pour cet arc du 4^e quadrant, en appliquant les conventions précédentes :

$2\pi - x$.
Arcs dont la somme fait une circonférence.

$$(4) \quad \begin{cases} \sin(2\pi - x) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \tan(2\pi - x) = -\tan x \\ \cotan(2\pi - x) = -\cotan x \\ \sec(2\pi - x) = \sec x \\ \operatorname{cosec}(2\pi - x) = -\operatorname{cosec} x \end{cases} \quad \begin{cases} \text{toutes les lignes trigonométriques de deux} \\ \text{arcs dont la somme fait une circonférence} \\ \text{sont égales et de signes contraires, sauf} \\ \text{le cosinus et la sécante, qui sont égaux} \\ \text{et de même signe.} \end{cases}$$

Résumé. 5. Le sinus et la cosécante sont toujours de même signe, positifs dans les 1^{er} et 3^e quadrants, négatifs dans les 2^e et 4^e; le cosinus et la sécante id. 1^{er} et 4^e 2^e et 3^e; la tangente et la cotangente 1^{er} et 3^e 2^e et 4^e.

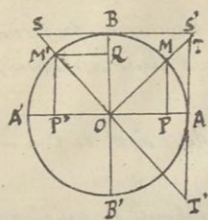
Extension aux arcs plus grands que 2π . 6. Si l'on suppose un mobile parcourant la circonférence à partir du point A dans le sens AMM', et retournant dans le même sens, après avoir fait un tour entier, jusqu'à ce qu'il ait décrit un arc $2\pi + x$, les lignes trigonométriques redeviendront les mêmes que celles de l'arc x , puisque les deux arcs ont les mêmes extrémités. On peut donc à un arc donné ajouter ou supprimer autant de circonférences que l'on voudra, sans changer ni le signe, ni la longueur des lignes trigonométriques de cet arc. On a donc :

$2\pi + x$.
Arcs dont la différence fait une circonférence.

$$(5) \quad \begin{cases} \sin(2\pi + x) = \sin x \\ \cos(2\pi + x) = \cos x \\ \tan(2\pi + x) = \tan x \\ \cotan(2\pi + x) = \cotan x \\ \sec(2\pi + x) = \sec x \\ \operatorname{cosec}(2\pi + x) = \operatorname{cosec} x \end{cases}$$

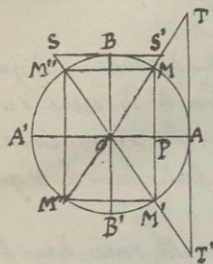
Relations entre les lignes des arcs x et $x + \frac{\pi}{2}$.

7. Joignons les arcs AM et ABM', dont la différence est un quadrant, faisons AM = x , ABM' = $x + \frac{\pi}{2}$, OM' étant perpendiculaire à OM; menons les lignes de ces deux arcs. Les triangles OMP et OM'Q, OAT et OBS sont égaux deux à deux, et l'on a :



$\frac{\pi}{2} + x$.
Arc dont la différence
fait un quadrant.

Arcs négatifs.



Généralisation des
formules à l'aide des
arcs négatifs.

Variation des lignes
trigonométriques.

$MP = M'Q = OP'$, ou $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$; $OP = OQ = M'P'$, ou $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$;
 $AT = BS$, ou $\tan x = -\cot(x + \frac{\pi}{2})$; $OT = OS$, ou $\sec x = \csc(x + \frac{\pi}{2})$.
 De même les triangles OAT' et OBS' sont égaux et donnent :
 $BS' = AT'$, ou $\cot x = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$; $OS' = OT'$, ou $\csc x = -\sec(x + \frac{\pi}{2})$.
 En supposant l'extrémité M successivement dans les 3 autres quadrants, on vérifierait la généralité de
 ces formules, d'où résulte la série de formules suivante :

$$(6) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \\ \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \\ \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x \\ \cot(\frac{\pi}{2} + x) = \tan x \\ \sec(\frac{\pi}{2} + x) = -\csc x \\ \csc(\frac{\pi}{2} + x) = \sec x \end{cases}$$

8. Si l'on suppose que le mobile dont il a été question ci-dessus (6) parcourt la circonférence dans le sens ABA' , et que l'on considère comme négatifs les arcs ainsi parcourus, il sera nécessaire de faire de nouvelles conventions pour appliquer les définitions précédentes aux arcs négatifs. Il suffit de convenir qu'un arc négatif, $-AM'$, aura les mêmes lignes trigonométriques que l'arc positif, ABM' , qui a les mêmes extrémités : cette observation montre même que l'on pourrait, à la rigueur, se passer de la considération des arcs négatifs, en ajoutant à un arc négatif, $-x$, un nombre suffisant de circonférences, $2n\pi$, pour donner un arc positif, $2n\pi - x$, ce qui ne change pas les extrémités de l'arc.

Un arc négatif quelconque, $-AM' = -x$, étant donné, considérons l'arc $AM = x$, positif, qui lui est égal en valeur absolue, les extrémités M et M' seront symétriques par rapport à AA' , dans quelque quadrant que se trouve le point M' , on aura, d'après les conventions faites ci-dessus :

$$(7) \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \\ \sec(-x) = \sec x \\ \csc(-x) = -\csc x \end{cases} \begin{cases} \text{Deux arcs qui ne diffèrent que par} \\ \text{le signe ont toutes leurs lignes} \\ \text{trigonométriques égales deux à deux} \\ \text{et de signes contraires, sauf le cosinus} \\ \text{et la sécante, qui sont égales et de même signe.} \end{cases}$$

9. À l'aide des formules (7), nous allons généraliser les formules établies jusqu'ici. Considérons d'abord les formules (1) : soit $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, & et supposons $x = ABM' > \frac{\pi}{2}$, alors $BM' = x - \frac{\pi}{2}$; l'arc x variant de $\frac{\pi}{2}$ à ∞ , l'arc $x - \frac{\pi}{2}$ sera compté à partir de B dans le sens BA' : les deux premiers quadrants sont, pour ces arcs, à gauche de BB' , et les deux derniers à droite. On aura donc, d'après la figure :

$$\begin{aligned} \sin(x - \frac{\pi}{2}) &= -\cos x \\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) &= \sin x \\ \tan(x - \frac{\pi}{2}) &= -\cot x \end{aligned} \quad \&$$

Il est aisé de vérifier que les signes se combinent toujours, de manière à vérifier ces formules, quel que soit le quadrant où se trouve l'extrémité de x , or ces formules sont équivalentes aux form. (1). On peut donc toujours dire que le cosinus d'un arc est le sinus de son complément, seulement le complément est négatif, dans ce dernier cas, ou mieux, c'est moins une longueur d'arc.

On généralise de la même façon les formules $\sin(\pi - x)$, & $-\sin(2\pi - x)$, &.

Les formules $\sin(\pi + x) = -\sin x$, & $\sin(2\pi + x) = \sin x$, & et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, & sont encore vraies, lorsqu'on remplace x par $(-x)$, si l'on applique les formules (7), et peuvent par conséquent se déduire de $\sin(\pi - x)$, & $\sin(2\pi - x)$, & et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, &.

10. Voyons actuellement comment varie chaque ligne trigonométrique lorsque l'arc croît à partir de zéro, de manière que l'extrémité parcourt toute la circonférence.

Le sinus, d'abord nul, va en croissant jusqu'à ce que l'arc soit égal à $\frac{\pi}{2}$, il atteint alors sa valeur maximum, qui est 1; puis, quand l'extrémité de l'arc passe de B en A' , le sinus va en diminuant de 1 à zéro, en repassant par les mêmes états successifs de grandeur que dans le 1^{er} quadrant, mais en sens inverse. Ensuite le sinus continue à décroître en devenant

négligé, et varie de zéro à (-1) , puis de (-1) à zéro, décroissant dans la première période d'une manière continue et croissant dans la seconde, de la même façon, en valeur absolue, que dans la 1^{re} moitié de la circonférence.

Le cosinus varie d'une manière continue, dans les 4 quadrants successifs, de 1 à 0, de 0 à -1 , puis de -1 à 0, et enfin de 0 à 1.

La tangente croît d'abord très lentement à partir de zéro dans le voisinage du point A, puis plus rapidement; et lorsque l'extrémité de l'arc s'approche du point B, la tangente augmente de quantités très-considérables pour des accroissements assez faibles de l'arc, quand ce dernier devient égal à un quadrant, il n'y a plus de rencontre du rayon OB avec la tangente AC, mais si pue que l'arc diffère d'un quadrant, la tangente trigonométrique est extrêmement grande; on dit alors que la tangente de $\frac{\pi}{2}$ est infinie. L'arc continuant à croître à partir de $\frac{\pi}{2}$, la tangente passe brusquement à une valeur négative, très-grande en valeur absolue, et plus grande que toute quantité donnée si l'on fait rapprocher l'extrémité de l'arc du point B en rétrogradant; c'est pour quoi l'on écrit

$$\tan \frac{\pi}{2} = \pm \infty;$$

le double signe tient à ce que l'arc $\frac{\pi}{2}$ peut être envisagé, soit comme la limite des arcs du 1^{er} quadrant qui vont en croissant, et dont l'extrémité tend vers le point B, soit comme la limite des arcs du 2^e quadrant qui vont en diminuant, et dont l'extrémité tend aussi vers le point B. On se convaincra aisément, en continuant, que, de $\frac{\pi}{2}$ à π , la tangente varie de $-\infty$ à 0; puis, dans le 3^e quadrant, de 0 à ∞ , et dans le dernier de $-\infty$ à 0.

Il est aisé de voir que la cotangente est discontinue comme la tangente, et qu'elle varie, dans le 1^{er} quadrant, de ∞ à 0, dans le 2^e de 0 à $-\infty$, puis, dans les 2 autres quadrants, de $+\infty$ à 0 et de 0 à $-\infty$; elle est donc discontinue pour $x=0$ et pour $x=\pi$.

La sécante est d'abord égale à 1, lorsque l'arc est nul, puis elle va en croissant très-rapidement, et pour $x=\frac{\pi}{2}$, se $x=\infty$, elle devient ensuite négative, et varie de $-\infty$ à -1 , valeur qu'elle atteint pour $x=\pi$; enfin, dans les deux derniers quadrants, elle varie de -1 à $+\infty$, et de $+\infty$ à 1.

Enfin la cosécante passe successivement de $+\infty$ à 1 et de 1 à $+\infty$, puis de $-\infty$ à -1 et de -1 à $-\infty$; elle est donc continue pendant que l'arc varie de 0 à π , et de π à 2π , et atteint dans la première période un minimum pour $x=\frac{\pi}{2}$, arc pour lequel $\operatorname{cosec} x=1$, et dans la 2^e un maximum pour $x=\frac{3\pi}{2}$, arc pour lequel $\operatorname{cosec} x=-1$.

Résumé.

En résumé, le sinus et le cosinus ne reçoivent que des valeurs comprises entre -1 et $+1$; la tangente et la cotangente passent par tous les états de grandeur, de $-\infty$ à $+\infty$; enfin la sécante et la cosécante reçoivent toutes les valeurs positives ou négatives, de $-\infty$ à $+\infty$, sauf aller comprises entre -1 et $+1$.

Valeurs des sinus de certains arcs.

11. Si l'on applique la seconde remarque du n^o 3, on peut en déduire les sinus de certains arcs, moitié de ceux qui sont circonscrits par des côtés de polygones réguliers. Voici quelques exemples.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ corde de } 60^\circ, \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ côté de l'hexagone régulier} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \text{ corde de } 90^\circ, \text{ id. . . . du carré} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ corde de } 120^\circ, \text{ id. triangle équilatéral} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2} \text{ corde de } 36^\circ, \text{ id. décagone régulier} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

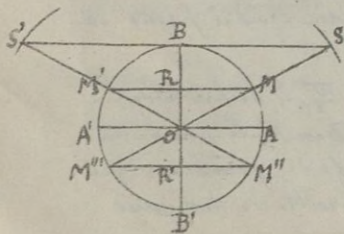
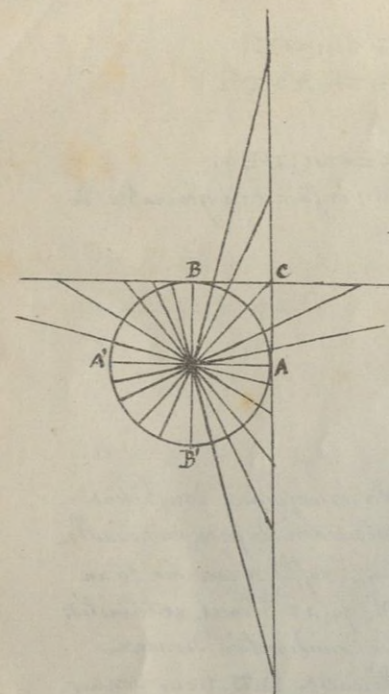
Arcs correspondant à une ligne donnée.

12. Lorsque l'arc est donné, toutes les lignes trigonométriques sont déterminées, il n'en est pas de même dans le problème inverse, puisque nous avons vu précédemment qu'une ligne trigonométrique pourrait correspondre à plusieurs arcs différents. Nous allons nous proposer, étant donnée une ligne, de trouver une formule qui résume tous les arcs répondant à la question.

1^{re} Soit donné

$$\sin x = a.$$

Je porte la longueur a de O en R sur la partie positive du diamètre OB, ou plutôt sur la partie qui correspond aux sinus positifs, et je mène par l'extrémité R une parallèle au diamètre AA'; elle coupe la circonférence en M et M', et tous les arcs ayant leur origine en A et leur extrémité en M ou en M' répondront à la question, et seront les seuls y répondant; évahons tous ces arcs. Le plus petit, AM, étant désigné par α , tous ceux ayant leur extrémité en M, seront donnés par la



formule

$$x = 2n\pi + \alpha,$$

n designant un nombre entier, positif, nul ou négatif. Quand à l'arc ABM' , il est égal à $\pi - \alpha$, et tous ceux qui auront leur extrémité en M' , positifs ou négatifs, seront obtenus en y ajoutant $2n\pi$, n ayant la même signification que tout-à-l'heure; ils seront donc réunis dans la formule

$$x = 2n\pi + \pi - \alpha, \text{ ou } x = (2n+1)\pi - \alpha.$$

Si l'on avait donné

$$\sin x = -a,$$

on aurait porté la longueur a de O en R , en sens inverse de la précédente, et tous les arcs répondant à la question auraient eu leur extrémité en M'' ou en M''' . Appelons encore α le plus petit ABM'' , l'autre sera $ABB'M'' = ABB'M''BA' - M''BA' = \pi - \alpha$, et par suite, ajoutant $2n\pi$ à chacun des arcs α , $\pi - \alpha$, on retombera sur les deux formules précédemment obtenues.

2^o Soit donné

$$\cos x = b.$$

Je mène la tangente indéfinie dans les deux sens par l'origine des compléments, et du point O comme centre avec b pour rayon je décris un arc qui coupe cette tangente en S et S' ; je mène les diamètres passant par ces 2 points, ils coupent la circonférence en M et M' , et il s'agit comme tout-à-l'heure d'évaluer tous les arcs, positifs ou négatifs, ayant leur extrémité en l'un ou l'autre de ces points. On retrouvera donc les mêmes formules.

Si l'on avait eu

$$\cos x = -b,$$

il aurait fallu, après avoir déterminé, comme ci-dessus, les points S et S' , prolonger les diamètres qui y passent jusqu'à leur deuxième rencontre avec la circonférence en M'' et M''' , et évaluer les arcs ayant leur extrémité en l'un ou l'autre de ces deux points; ce qui aurait encore conduit aux mêmes formules que pour le sinus.

3^o Soit donné

$$\cos x = a.$$

Je porte sur la partie OA du diamètre AA' qui correspond aux cosinus positifs une longueur $OP = a$, et je mène la perpendiculaire MM' : les arcs, positifs ou négatifs, ayant leur extrémité en M ou en M' , répondent à la question, et sont les seuls. En appelant α le plus petit AM , l'autre $ABB'M'$ est $\pi - \alpha$; et les arcs cherchés sont réunis tous dans les 2 formules

$$x = 2n\pi + \alpha \text{ et } x = 2n\pi - \alpha, \text{ ou dans la formule unique}$$

$$x = 2n\pi \pm \alpha.$$

Il serait aisé de voir que, si l'on avait $\cos x = -a$, la même formule donnerait tous les arcs correspondants, en designant toujours par α le plus petit des arcs positifs répondant à la question.

4^o Soit donné

$$\sec x = b.$$

Je mène la tangente indéfinie dans les deux sens par l'origine des arcs A , et du point O comme centre, avec b pour rayon, je décris un arc de cercle qui la coupe en T et T' ; je mène les diamètres OT et OT' , qui coupent la circonférence en M et M' ; et il est aisé de voir que tous les arcs qui répondent à la question seront donnés par la même formule que tout-à-l'heure pour les cosinus.

Si l'on donne

$$\sec x = -b,$$

on prolongera les lignes TO et $T'O$ jusqu'à leur 2^e rencontre avec la circonférence en M'' et M''' , et on sera encore conduit à la même formule.

5^o Soit encore

$$\tan x = a.$$

Sortons sur la portion de la tangente au point A qui correspond aux tangentes positives une longueur $AT = a$, et menons le diamètre TO , qui rencontre la circonférence en M et M' : tous les arcs ayant leur extrémité en M ou en M' répondent à la question et sont les seuls; il n'en a pas d'autres.

Le plus-petit AM étant désigné par α , l'autre ABM' sera $\pi + \alpha$; et par suite tous les arcs cherchés, positifs ou négatifs, s'obtiennent en ajoutant $2n\pi$ à chacun de ces 2 arcs, seront donnés par les formules

$$x = 2n\pi + \alpha \text{ et } x = (2n+1)\pi + \alpha,$$

ou par la formule unique

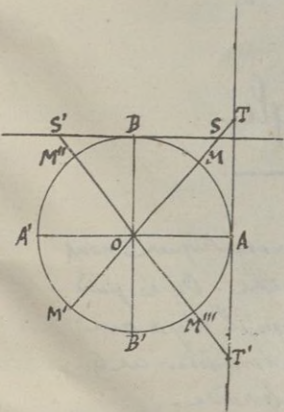
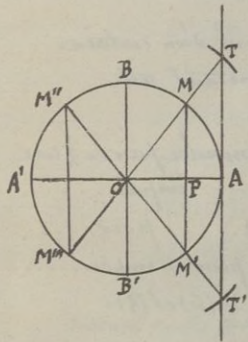
$$x = n\pi + \alpha,$$

n ayant la même signification que plus haut.

Soit

$$\tan x = -a.$$

Je porte la longueur a en sens contraire de la précédente, de A en T' , et je mène le diamètre OT' : il est aisé de voir qu'en appelant α le plus petit ABM'' des arcs positifs répondant à cette nouvelle



question, tous les autres, positifs ou négatifs, sont donnés par les mêmes formules que dans le cas précédent.
6^e. Enfin, soit donné $\cotg x = x$.

Je porte, sur la tangente menée par l'origine des compléments, id à partir du point B, à droite ou à gauche, suivant que la cotangente est positive ou négative, une longueur x ; et par l'extrémité je tire un diamètre. Dans le 1^{er} cas, j'aurai à évaluer tous les arcs ayant leur extrémité en M ou M', et dans le 2^e tous ceux ayant leur extrémité en M'' ou M''' : désignant par α le plus petit des arcs positifs répondant à la question dans chaque cas, on obtient la même formule que pour les tangentes.

Résumé.

En résumé, si l'on désigne par α le plus petit des arcs positifs correspondant à une ligne trigonométrique donnée; par x un quelconque des arcs positifs ou négatifs, répondant à la question, par n un nombre entier, positif, nul ou négatif, arbitraire, on a,

$$\begin{aligned} &\text{pour un sinus ou une cosécante,} & \left\{ \begin{aligned} x &= 2n\pi + \alpha \text{ ou } x = (2n+1)\pi - \alpha; \\ x &= 2n\pi \pm \alpha \\ x &= n\pi + \alpha \end{aligned} \right. & (8) \\ &\text{... cosinus ... sécante,} \\ &\text{... une tangente ... cotangente,} \end{aligned}$$

Relation entre les 13. Comparons 2 arcs appartenant à chacune des 2 séries de la même ligne, soient α, α' , ces arcs, arcs qui ont même sinus, même cos, &c.

ou a pour la 1^{re} ligne :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2n\pi + \alpha \\ \alpha' &= (2n'+1)\pi - \alpha \end{aligned} \right\} \text{donc } \alpha' + \alpha = 2(n'+n)\pi + \pi;$$

pour la 2^e ligne :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2n\pi + \alpha \\ \alpha' &= 2n'\pi - \alpha \end{aligned} \right\} \text{donc } \alpha' + \alpha = 2(n'+n)\pi;$$

et pour la 3^e :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n\pi + \alpha \\ \alpha' &= n'\pi + \alpha \end{aligned} \right\} \text{donc } \alpha' - \alpha = (n' - n)\pi.$$

D'ailleurs, si on compare 2 arcs appartenant à la même série, on voit qu'ils diffèrent d'un certain nombre de circonférences, ou d'un nombre pair de demi-circonférences. En ajoutant cette considération aux 3 conséquences qui précèdent, on conclut :

Si deux arcs ont même sinus, ou même cosécante, (ou leur différence est un nombre pair de $\frac{1}{2}$ circonférence ou ... somme ... impair ...)

id. ... cosinus, ... sécante, leur somme ou leur différence ... pair ...

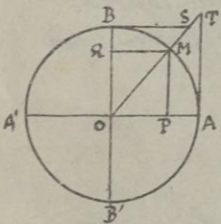
id. ... tangente, ... cotangente, leur différence est un nombre pair ou impair ...

Les réciproques sont vraies; elles ont été établies précédemment par les formules (2), (3), (4) et (5).

Exercices.

1. Des formules $\sin(\pi - x) = \sin x$ &c. déduire $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cotg x$.
2. Calculer la graduation de l'arc dont la longueur est égale à celle du sinus de 30° , à $0''01$ près.
3. Calculer à $0,0001$ près les sinus des arcs de 135° , 198° , 330° , 960° .
4. Étant donné l'angle $A = 17^\circ 35' 44''$, calculer les arcs de la circonférence pour lesquels $\sin x = \sin A$, $\cos x = \cos A$, &c.
5. Construire les arcs dont les lignes trigonométriques ont les valeurs suivantes dans le cercle dont le rayon est 1:
 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\tan x = 2\sqrt{2}$, $\tan x = -\frac{2}{3}$, $\cotg x = \frac{5}{2}$,
 $\cotg x = -2$, $\sec x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sec x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\coséc x = \sqrt{5}-1$, $\coséc x = 1+\sqrt{5}$.

§ 2. Relations entre les lignes d'un même angle.



14. Considérons un arc AM du 1^{er} quadrant, et menons les différentes lignes trigonométriques : nous allons nous proposer de rechercher toutes les relations qui peuvent exister entre elles. On ne peut évidemment trouver plus de 5 relations indépendantes les unes des autres, puisqu'il n'y a que 6 lignes; car, si l'on avait seulement 6 équations, elles suffiraient pour déterminer ces 6 lignes, indépendamment de la grandeur de l'arc, ce qui est évidemment absurde.
- Le triangle rectangle OMP donne

$$\begin{aligned} MP^2 + OP^2 &= OM^2, & \text{ou} & & \sin^2 x + \cos^2 x &= 1. & (9) \\ \text{Les triangles semblables, } OAT, OMP, \text{ donnent:} & & & & \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} & (10), \\ \frac{AT}{OA} &= \frac{MP}{OP}, & \text{ou} & & \sec x &= \frac{1}{\cos x} & (11). \\ \text{et} & \frac{OT}{OM} &= \frac{OA}{OP}, & \text{ou} & & & \\ \text{Enfin les triangles semblables, } OBS, OMR, \text{ donnent:} & & & & \cotg x &= \frac{\cos x}{\sin x} & (12), \\ \frac{BS}{OB} &= \frac{MR}{OR}, & \text{ou} & & \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x} & (13). \\ \text{et} & \frac{OS}{OM} &= \frac{OB}{OR}, & \text{ou} & & & \end{aligned}$$

Les 5 formules (9), (10), (11), (12) et (13) étant indépendantes les unes des autres, sont bien les 5 relations cherchées. En se servant des relations (1), on aurait pu déduire les 2 dernières formules (12) et (13) des formules (10) et (11); car, si on applique ces 2 relations au complément $\frac{\pi}{2} - x$, il vient:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}, & \text{ou} & & \cotg x &= \frac{\cos x}{\sin x}; \\ \text{et} \sec(\frac{\pi}{2} - x) &= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}, & \text{ou} & & \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Conséquences des formules fondamentales. B. En combinant entre elles les 3 relations trouvées, on obtient chaque ligne trigonométrique successivement en fonction des 2 autres; il est bon, comme exercice, de chercher toutes ces combinaisons, qui peuvent s'établir géométriquement comme les précédentes; nous allons exposer les plus utiles. Si l'on multiplie entre elles les relations (10) et (12), on obtient

$$\operatorname{tg} x \cdot \cotg x = 1 \quad (14).$$

Cette relation, rapprochée des formules (11) et (13), montre que les 6 lignes trigonométriques sont deux à deux inverses l'une de l'autre; et à tous ces mêmes lignes, comme nous l'avons déjà observé, qui ont le même signe dans le même quadrant. Voici un moyen mnémorique, qui n'est peut-être pas inutile, de retenir ces résultats: les lignes qui marchent ainsi deux à deux sont celles à égale distance des lignes extrêmes dans la liste suivante: sin, cos, tg, cotg, sec, cosec.

Proposons-nous de trouver $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.

De la formule (10) j'ai tiré

$$\sin x = \cos x \operatorname{tg} x;$$

et, substituant dans (9), il vient:

$$\cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) = 1, \text{ d'où } \cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad (15).$$

Sous la relation précédente donne:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad (16).$$

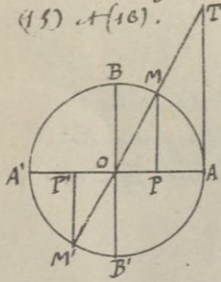
Discussion des formules 16. fondamentales.

N'oublions pas que les formules fondamentales de ce § ont été démontrées seulement pour un arc du 1^{er} quadrant; on pourrait sans doute faire une figure pour chacun des 4 quadrants; mais il est préférable, et c'est une méthode générale en trigonométrie, de se contenter de démontrer directement les relations sur une figure pour un arc du 1^{er} quadrant, sans à établir la généralité des formules obtenues à l'aide d'une discussion algébrique basée sur les conventions faites dans le § 1. C'est ainsi que nous allons procéder. Remarquons que l'on pourra toujours, quelle que soit la position du point M, construire des triangles analogues à ceux qui ont fourni les relations géométriques du n° 14, sans pour les points A, B, A', B'. Il ne s'agit donc que de faire voir que ces relations géométriques conduisent toujours aux formules (9), (10), (11), (12) et (13). Or la 1^{re}, ne contenant que des carrés, est toujours vérifiée; les relations (11) et (13) sont générales aussi, puis que la sécante est toujours de même signe que le cosinus, et la cosecante de même signe que le sinus. Enfin restent les formules (10) et (12); dirons seulement la 1^{re}: la relation géométrique qui y conduit est $\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}$, or AT peut être $\operatorname{tg} x$ ou $-\operatorname{tg} x$. Si c'est $+\operatorname{tg} x$, l'arc x est dans le 1^{er} ou le 3^e quadrant, et dans ces 2 cas, le sinus et le cosinus sont de même signe, le rapport $\frac{MP}{OP}$ est donc $\pm \frac{\sin x}{\cos x}$; si c'est $-\operatorname{tg} x$, l'arc est dans le 2^e ou le 4^e quadrant, et alors le sinus et le cosinus sont de signes contraires, le rapport $\frac{MP}{OP}$ est donc $-\frac{\sin x}{\cos x}$, et la relation géométrique donne $-\operatorname{tg} x = -\frac{\sin x}{\cos x}$, ou $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Il nous reste enfin à vérifier les formules fondamentales pour les 4 arcs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, et tous ceux qui ont en général, leur extrémité aux 4 points A, B, A', B', pour lesquels il est impossible de construire les triangles en question. Or, prenons seulement $x = \frac{\pi}{2}$, nous avons $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, mais $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$; la formule (10) devient donc $\frac{1}{0} = \pm \infty$, identité

Le double signe s'explique en ce que le cosinus de $\frac{\pi}{2}$ peut être considéré comme la limite des cos. des arcs du 1^{er} quadrant qui vont en croissant, ou comme cell. des cosinus des arcs du 2^e quadrant qui vont en décroissant, de sorte que, si on lui conserve son signe à la limite dans les 2 cas, on doit l'écrire ± 0 . On vérifierait de même pour les 3 autres points.

Discussion des formules 17.
(15) et (16).



Puisque la généralité des formules fondamentales a été établie, celle de toutes les conséquences que l'on en déduit l'est également. Occupons-nous particulièrement des formules (15) et (16), qui donnent 2 valeurs pour $\cos x$ et 2 pour $\sin x$, égales et de signes contraires: sont-elles toutes deux acceptables, ou l'une d'elles serait-elle une solution étrangère à la question? tel est l'objet de la présente discussion.

Remarquons que, si l'arc x était donné, il n'y aurait aucune hésitation sur le signe du $\sin$. ou du $\cos$, et l'un des deux serait à rejeter. Mais c'est $\operatorname{tg} x$ que l'on donne, et par conséquent la question revient à trouver le sinus et le cosinus de tous les arcs ayant même tangente, $\operatorname{tg} x$. Or, sois $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \angle MAT$, tous les arcs répondant à la question auront leur extrémité soit en M, soit en M', deux points diamétralement opposés, et par suite les uns auront pour sinus MP, et les autres $-MP' = -MP$, les premiers auront pour cosinus OP, et les seconds $-OP' = -OP$. La figure rend compte ainsi de la double solution.

Les formules (8) rendent également compte du double signe dans $\sin x$ et $\cos x$ sont affectés. Car tous les arcs ayant même tangente sont donnés par la formule $x = n\pi + \alpha$, et il s'agit de trouver le sinus et le cosinus de tous ces arcs; occupons-nous seulement des sinus: si n est pair, tous les arcs x ont pour sinus $\sin \alpha$; et, si n est impair, ils ont tous même sinus que l'arc $\pi + \alpha$, puisqu'on peut supprimer un nombre quelconque de circonférences à un arc sans changer ses lignes, c.à.d. qu'ils ont pour sinus $-\sin \alpha$; ce qui fait en tout 2 valeurs égales et de signes contraires.

Exercices.

1. Démontrer les relations $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.
2. Calculer à 0,0001 près les cos., cotg et tg. des arcs dont on a déterminé les sinus, au n^o 11 du § précédent.
3. Résoudre l'équation $a \sin x + b \cos x = c$. Rép. $\operatorname{tg} x = \frac{-ab \pm c\sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a^2 - c^2}$.
4. Résoudre l'équation $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$. Rép. $\operatorname{tg} x = 1$ et $\operatorname{tg} x = 2$.
5. Résoudre l'équation $\sin x - 3 \cos x = 1$. Rép. $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$.

§3. Formules pour l'addition et la soustraction des arcs.

$\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$;
 $\sin(a-b)$, $\cos(a-b)$.

18. Nous avons vu comment, au moyen des côtés de polygones réguliers, on détermine les sinus de certains arcs, et dans le § 2 comment on en déduit les autres lignes trigonométriques de ces mêmes arcs. En combinant ces arcs par addition et par soustraction, on obtient de nouveaux arcs, dont il serait possible d'avoir immédiatement les lignes trigonométriques, si l'on avait des formules donnant les sinus, cosinus, &c. de la somme ou de la différence de deux arcs, connaissant les lignes trigonométriques correspondantes de ces arcs. C'est le but de ce paragraphe.

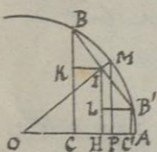
Soient 2 arcs $AM = a$, $MB = b$, tous deux plus petits qu'un quadrant, et dont la somme est elle-même moindre qu'un quadrant: je porte ces arcs bout à bout, et je me propose de trouver $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$.

Je mène les lignes de ces 2 arcs, MP et OP, BI et OI, et les lignes de $a+b$, BC, OC. Sois IK parallèle à OA, et IH parallèle à BC; on a: (1) $BC = BK + IH$, et $OC = OH - IK$ (2).

Mais les triangles semblables BKI et OMP, OIH et OMP, donnent:

$$\frac{BK}{OI} = \frac{BI}{OM}, \quad \frac{IH}{MP} = \frac{OI}{OM}; \quad \frac{OH}{OP} = \frac{OI}{OM}, \quad \frac{IK}{MP} = \frac{BI}{OM}.$$

De ces relations on tire, en mettant pour chaque longueur géométrique sa définition trigonométrique,



de l'unité pour le rayon :

$$BK = \cos a \sin b, \quad IH = \sin a \cos b, \quad OH = \cos a \cos b, \quad IK = \sin a \sin b.$$

Substituant dans les relations (1) et (2), et mettant pour BC et OC leurs valeurs respectives, il vient :

$$(17) \quad \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{cases}$$

Supposons $b < a$, et proposons-nous de trouver $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$. La même figure pourra servir : en prolongeant BI jusqu'à sa rencontre en B' avec le cercle, $AB' = a-b$; et les lignes trigonométriques de b sont $B'I$ et OI , et celles de l'arc $a-b$, $B'E'$ et OC' . On a, d'après la figure :

$$\begin{aligned} B'E' &= IH - IK = IH - BK, & \text{ou} & \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ OC' &= OH + LB' = OH + IK, & \text{ou} & \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned} \quad (18)$$

Remarque. 19. Il est aisé de voir que les formules (18) réduites dans les formules (17), en changeant b en $-b$.

En supposant même $b > a$, les formules (18) sont exactes, au regard aux conventions sur les arcs négatifs; on a, en effet :

$$\sin(a-b) = -\sin(b-a) = -(\sin b \cos a - \sin a \cos b) = -\sin b \cos a + \sin a \cos b,$$

c.à.d. que l'on a le même développement que tout-à-l'heure; de même pour $\cos(a-b)$.

Les formules $\sin(a-b)$, $\cos(a-b)$ sont des conséquences de $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$.

On peut faire voir que les formules $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ sont des conséquences de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, sans recourir aux arcs négatifs. Considérons les arcs a et $2\pi - b$, on a, en appliquant les formules (17) :

$$\sin(a+2\pi-b) = \sin a \cos(2\pi-b) + \sin(2\pi-b) \cos a,$$

$$\text{ou} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

De même pour $\cos(a-b)$.

La formule $\cos(a+b)$ est elle-même conséquence de $\sin(a+b)$.

On démontre aisément que la formule $\cos(a+b)$ elle-même est une conséquence de $\sin(a+b)$.

Considérons, en effet, les arcs $a' = \frac{\pi}{2} + a$ et b , on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a' + b - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a'+b)) = \sin(a'+b) = \sin a' \cos b + \sin b \cos a'.$$

Or, en vertu des formules (6) du n° 7, on a :

$$\begin{cases} \sin a' = \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a \\ \cos a' = \cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin a \end{cases}$$

$$\text{Donc on a :} \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

La formule $\sin(a+b)$ renferme donc implicitement les 3 autres.

Discussion.

20. Mais elle n'a été établie que dans le cas où a et b sont des arcs positifs, plus petits chacun que $\frac{\pi}{2}$, et dont la somme est elle-même plus petite qu'un quadrant, nous allons l'étendre à tous les cas possibles, et par suite donner la même extension aux 3 autres formules. On pourrait, à cet effet, exécuter les mêmes constructions que précédemment pour toutes les positions possibles des arcs a et b , sauf pour les arcs limites 0, $\frac{\pi}{2}$, π , pour lesquels on ferait une vérification directe. Mais une discussion analytique sera beaucoup plus simple, et établira d'une façon plus précise la généralité des formules ci-dessus.

1° On a supposé $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$ et $a+b < \pi$; je vais commencer par écarter cette dernière restriction, en conservant les 2 premières hypothèses. Soient donc $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$, et $a+b > \pi$.

Je prends les compléments respectifs de a et de b :

$$\begin{cases} a' = \frac{\pi}{2} - a \\ b' = \frac{\pi}{2} - b \end{cases}$$

On peut donc appliquer la formule aux arcs a' et b' , et l'on a :

$$\sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \sin b' \cos a'. \quad \text{Mais} \quad \sin(a'+b') = \sin(\pi - (a+b)) = \sin(a+b),$$

Donc

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a, \quad \text{ce qui est la 1^{re} des formules (17).$$

2° Je vais démontrer maintenant que, si les formules (17) $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, sont vérifiées pour deux arcs déterminés a et b , elles ne cesseront pas d'être vraies quand j'augmenterai l'un d'eux, et par ex., d'un quadrant. Soient, en effet, $a' = a + \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \sin(a'+b) &= \sin(\frac{\pi}{2} + a+b) = \cos(a+b) = (\text{par hypothèse}) \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ &= (\text{formules (6)}) \sin a' \cos b + \cos a' \sin b \end{aligned}$$

De même pour $\cos(a'+b)$, qui du reste est une conséquence de $\sin(a'+b)$.

3^{es} Joins deux arcs positifs quelconques, A et B ; je retranche autant de quadrants que possible de chacun d'eux, et j'obtiens deux arcs, a et b , moindres chacun qu'un quadrant, et dont la somme peut être supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$: dans les 2 cas (20, 1^{er}) la formule $\sin(a+b)$ (et par suite les 3 autres) est exacte, telle qu'elle a été donnée (13, form. 17). Je puis maintenant augmenter l'arc b de $\frac{\pi}{2}$, puis progressivement d'autant de quadrants qu'il en faudra pour obtenir l'arc B , et opérer de même pour a , jusqu'à revenir à l'arc A , sans que, à chacune de ces augmentations successives, la formule $\sin(a+b)$ (form. 17) cesse d'être exacte: elle sera donc encore applicable aux arcs A et B .

4^{es} Enfin, je dis qu'elle est encore exacte pour des arcs négatifs quelconques, $-a$, $-b$. En a , en effet: $\sin(-a-b) = -(\sin(a+b)) = -\sin a \cos b - \sin b \cos a$, développement qui équivaut à $\sin(-a) \cos(-b) + \sin(-b) \cos(-a)$.

Eg $(a \pm b)$.

21. Les formules (17) et (18) étant générales, toutes les conséquences que nous en déduirons le seront également. On peut en déduire des formules donnant une ligne trigonométrique quelconque de la somme ou de la différence de deux arcs, et même de la somme algébrique de 3 ou de plusieurs arcs donnés. Nous allons donner les plus utiles de ces conséquences.

Supposons-nous de développer $\operatorname{tg}(a+b)$ et $\operatorname{tg}(a-b)$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ et de $\operatorname{tg} b$.

On a:

$$\operatorname{tg}(a+b) = (\text{form. 10 du n° 14}) \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Pour introduire $\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{tg} b$ dans le 2nd membre, je divise haut et bas par $\cos a \cos b$, ce qui donne:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

On développerait de même $\operatorname{tg}(a-b)$; réunissant les deux développements en une seule formule, on peut écrire

$$(19) \quad \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

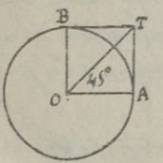
le signe supérieur allant ensemble dans les 2 membres, et le signe inférieur également.

Remarque.

22. Si, dans la formule (19), on fait $b = \frac{\pi}{2}$, d'où $\operatorname{tg} b = \infty$, on a: $\operatorname{tg}(a + \frac{\pi}{2}) = \frac{\infty}{\infty}$, formule évidemment illusoire. Cette indétermination apparente tient à ce que, pour obtenir la form. (19), on a divisé par $\cos a \cos b$, quantité qui devient nulle quand on fait $b = \frac{\pi}{2}$; mais, si je divise haut et bas par $\operatorname{tg} b$, il vient:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} + 1}{\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} b} - \operatorname{tg} a} \quad ; \quad \text{et, pour } \operatorname{tg} b = \infty, \operatorname{tg}(a + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

Eg $(45^\circ \pm \varphi)$.

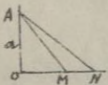


23. De la formule $\operatorname{tg}(a \pm b)$, form. 19 du n° 21, on conclut une conséquence que nous utiliserons plus tard. La fig. ci-contre fait voir que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; si donc on applique la form. 19 au développement de $\operatorname{tg}(45^\circ \pm \varphi)$, on aura:

$$(20) \quad \operatorname{tg}(45^\circ \pm \varphi) = \frac{1 \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp \operatorname{tg} \varphi}$$

Exercices.

1. Déduire du développement de $\operatorname{tg}(a+b)$ la valeur particulière qu'il prend pour $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$.
2. Démontrer qu'entre les 3 angles a, b, c , d'un triangle, on a les relations suivantes: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1$, $\sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = 1$, $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$.
3. Développer $\cotg(a \pm b)$ en fonction de $\cotg a$ et de $\cotg b$; $\sec(a \pm b)$ en f. de $\sec a$ et $\sec b$; $\operatorname{cosec}(a \pm b)$ en f. de $\operatorname{cosec} a$ et $\operatorname{cosec} b$. Discuter la valeur multiple trouvée pour $\sec(a+b)$ ou $\sec(a-b)$ (2 valeurs pour chaque développement) et celles de $\operatorname{cosec}(a+b)$ ou $\operatorname{cosec}(a-b)$ (4 valeurs p. ch. dev.).
4. Développer $\sin(a+b+c)$ et $\operatorname{tg}(a+b+c)$ en fonction des lignes trigonométriques de ces arcs.
5. Démontrer les formules $\sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.
6. Construire l'arc x donné par la formule $\frac{\cos(x-2\theta)}{\cos x} = k$, θ et k étant donnés.



§ 4. Formules pour la multiplication et la division des arcs.

$\sin 2a,$
 $\cos 2a,$
 $\operatorname{tg} 2a.$

24. Si, dans les formules (7) et (19), on fait $b=a$, on en conclut :

$$(21) \quad \begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{cases}$$

En faisant $b=2a$ dans les formules (17) et (19), et se servant de celle-ci (21), on obtient $\sin 3a$, $\cos 3a$ et $\operatorname{tg} 3a$ en fonction des lignes correspondantes de l'arc simple a .

$\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}$
+ $\operatorname{tg} \frac{a}{2}.$ 25. Si je considère l'arc $\frac{a}{2}$ et son double a , et que je leur applique les formules (21), j'aurai :

$$(21 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \\ \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \\ \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \end{cases}$$

Proposons-nous de déterminer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$, 1^o en fonction de $\cos a$, 2^o en fonction de $\sin a$.

1^o On a :

$$\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos a \quad (\text{form. 21 bis})$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} = 1 \quad (\text{form. 9 du n^o 14}).$$

On a donc la somme et la différence de deux quantités, $\sin^2 \frac{a}{2}$ et $\cos^2 \frac{a}{2}$, d'où :

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{a}{2} &= \frac{1 + \cos a}{2}, & \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \\ \sin^2 \frac{a}{2} &= \frac{1 - \cos a}{2}, & \sin \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \end{aligned} \right\} (22)$$

Des 2 formules (22) on peut déduire, en passant, par la division membre à membre, en égard à la formule (10) du n^o 14 :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \quad (23)$$

2^o La 1^{re} des formules (21 bis) et la form. (9) du n^o 14 donnent :

$$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} = 1$$

Ajoutant membre à membre, puis retranchant, il vient successivement :

$$\left. \begin{aligned} (\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2})^2 &= 1 + \sin a \\ (\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2})^2 &= 1 - \sin a \end{aligned} \right\} \text{d'où : } \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin a} \\ \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 - \sin a} \end{aligned}$$

On a la somme et la différence des deux inconnues; on en conclut :

$$(24) \quad \begin{cases} \sin \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}) \\ \cos \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}) \end{cases}$$

Il faut observer que, dans ces 2 formules, les signes supérieurs et les inférieurs se correspondent respectivement.

3^o Proposons-nous de déduire de la dernière des formules (21 bis) $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. À cet effet, chassons la dénominateur d'ordonnée, il viendra :

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0,$$

d'où :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a} \quad (25)$$

Remarque. 26. Comme cas particulier, si l'on fait $a=0$ dans cette formule, ce qui conduit à y faire $\operatorname{tg} a=0$, l'une des racines devient infinie, comme on devait s'y attendre, puisque le coefficient de la 2^e puissance de l'inconnue dans l'équation du 2^e degré qui précède devient nul; quand à l'autre racine, elle prend la forme illusoire $\frac{0}{0}$, et si l'on divise haut et bas par $(-1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a})$, on a pour cette racine $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a} = \frac{-\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a(-1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a})} = \frac{+\operatorname{tg} a}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$, expression qui est nulle pour $\operatorname{tg} a=0$.

On devait s'attendre, a priori, à ce double résultat; car, en faisant $\operatorname{tg} a=0$ dans la formule (25), c'est supposer $a=0$, aussi bien que $a=\pi$; donc elle devra donner $\operatorname{tg} 0$ et $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$.

$= AR$, en supposant OR perpendiculaire à ON ; le triangle est $AM' + w$, qui a même $tg.$ que $\frac{AM'}{2}$; &c.
Les 2 seules solutions sont donc AT et $-AV$; or, dans le triangle rectangle TOV , on a :
 $AT \times AV = OA^2 = 1$, et par conséquent $AT \times (-AV) = -1$.

Exercices.

1. Démontrer que $\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$; $\sec a = 1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{a}{2}$.
2. Examiner les cas où $\sin 2a \geq 2 \sin a$, et $\operatorname{tg} 2a \geq 2 \operatorname{tg} a$.
3. Calculer $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tg} 3a$; $\sin 4a$, $\cos 4a$, $\operatorname{tg} 4a$, en fonction des lignes correspondantes de l'arc a . Chercher l'équation qui donne $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, et en déduire $\operatorname{tg} 30^\circ$, en faisant $a = 60^\circ$.
4. Démontrer que le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les 2 côtés sont le côté du décagone régulier et celui de l'hexagone régulier inscrits dans le même cercle.
5. Calculer $\sin 15^\circ$, connaissant $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

§5. Formules pour rendre calculable par logarithmes une somme algébrique.

Rendre calculable 30. par logarithmes une somme ou une diff^e de 2 sinus ou cosinus.

Si l'on ajoute S. S. l'on retranche membre à membre les relations

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b \end{cases}$$

Ces formules permettent de transformer la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus des arcs $(a+b)$ et $(a-b)$ en un produit, ce qui permet d'les calculer par logarithmes directement.

Posons $a+b=p$, $a-b=q$, les formules précédentes deviennent :

$$(26) \quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{cases} \quad (27)$$

La dernière des formules (27) peut s'écrire :

$$(27 \text{ bis}) \quad \cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \quad \text{ou} \quad \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2} \quad (27 \text{ ter}).$$

$\sin a + \cos b$, &c.

Un cosinus pouvant être traité comme un sinus, et réciproquement, on peut, au moyen des formules précédentes, rendre calculables par logarithmes les expressions telles que

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin \left(\frac{\pi}{2} - b \right), \quad \sin a - \cos b, \text{ &c.}$$

Conséquence importante. En divisant membre à membre de chaque deux les équations (26) et (27), on en déduit plusieurs conséquences, dont la plus importante est celle que l'on obtient en divisant membre à membre les équations (26); on obtient une relation qui sera utilisée dans la résolution des triangles :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}} \quad (28)$$

§ 31. On pourrait rendre également calculables par logarithmes des sommes ou des différences de lignes trigonométriques quelconques; en voici un exemple :

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

$A \pm B$.

§ 32. En général, soit à rendre calculable un binôme $A \pm B$.

1^{re} Soit $A+B$, je l'écris $A(1 + \frac{B}{A})$; et, posant $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ (φ étant un angle auxiliaire qu'il est toujours possible de déterminer, et je prendrai le plus petit pour plus de simplicité), il vient

$$A+B = A(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{A}{\cos^2 \varphi}.$$

2^{de} Soit $A-B$, et supposons $A > B$. j'écris $A-B = A(1 - \frac{B}{A})$; et, posant $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2 \varphi$,

qui est possible, puisque dans l'hypothèse actuelle $B < 1$, il vient: $A-B = A \sin^2 \varphi$.

Si $A < B$, on pourra $A-B = -(B-A)$, et on calculera $B-A$ comme ci-dessus.

On aurait pu poser aussi, dans le 1^{er} cas, $\frac{B}{A} = \cos \varphi$; d'où $A-B = A(1-\cos \varphi) = 2A \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Remarque.

Dans certains cas particuliers, la méthode générale que l'on vient d'exposer sera remplacée avec avantage par un procédé particulier; par ex., soit l'expression binôme $\cos a + m \sin a$; on posera $m = \tan \varphi$, elle devient $\cos a + \tan \varphi \sin a = \cos a + \frac{\sin \varphi \sin a}{\cos \varphi} = \frac{\cos(a-\varphi)}{\cos \varphi}$.

Exercices.

1. Rendre calculable par logarithmes les expressions: 1^o $\sin a + \sin b$, 2^o $\sin a - \sin b$, 3^o $\cos a + \cos b$, 4^o $\cos a - \cos b$, 5^o $1 + \cos a$, 6^o $1 - \cos a$, 7^o $1 + \sin a$, 8^o $1 - \sin a$, 9^o $1 + \tan a$, 10^o $2 + \sin a$.

Rép. 1^o $\frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos a \cos b}$, 2^o $\frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\cos a \cos b}$, 3^o $\frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\sin a \sin b}$, 4^o $\frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\sin a \sin b}$, 5^o $2 \cos^2 \frac{a}{2}$, 6^o $2 \sin^2 \frac{a}{2}$.

7^o $2 \cos^2(\frac{45^\circ - a}{2})$, 8^o $2 \sin^2(\frac{45^\circ - a}{2})$, 9^o $\sqrt{2} \frac{\sin(\frac{45^\circ + a}{2})}{\cos a}$, 10^o $\frac{\sin(\frac{45^\circ + a}{2})}{\cos a}$ ou posant $\tan \varphi = \frac{3}{4}$.

2. Rendre calculables les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, lorsqu'elles sont réelles et inégales; vérifier ensuite leurs propriétés. Rép. $x' = -p \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $x'' = -p \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, on posant $\sin \varphi = \frac{4q}{p^2}$.

3. Rendre calculable la somme $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$. Rép. $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \sin \frac{5x}{2}$.

4. Démontrer qu'entre les 3 angles d'un triangle a, b, c , on a les relations:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}, \quad \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c.$$

5. Dans quel cas le produit $\sin x \sin y$ est-il maximum, lorsque $x+y = \alpha$, quantité donnée?

Rép. $x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$.

§6. Construction et Usage des Tables trigonom.

- Préliminaires. 33. Nous allons exposer le procédé élémentaire qui permet de calculer les lignes trigonométriques des arcs variés par degrés assez rapprochés, et par suite de construire une table donnant les logarithmes de ces mêmes lignes, ce qui est beaucoup plus commode pour la pratique du calcul numérique.

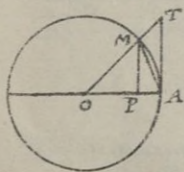
Occupons-nous d'abord des sinus, puisque toutes les autres lignes s'en déduisent. Ce sera d'abord, nous prendrons pour point de départ un arc assez faible, dont on puisse déterminer directement le sinus avec une approximation suffisante, le même qui servira d'intervalle entre deux arcs consécutifs de la table; ensuite, au moyen des formules d'addition et de multiplication exposées dans les § précédents, nous nous en servirons pour calculer successivement les sinus des autres arcs de la table. Cet arc sera l'arc de $10''$, dont nous confondrons la longueur avec celle de son sinus, en nous appuyant sur un principe fondamental, que voici:

- Principe fondamental. 34. La différence entre un arc moindre qu'un quadrant et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}$$

Remarque.

$$\sin a < a < \tan a.$$



Pour établir le principe, nous nous appuyerons sur le lemme suivant:

Un arc moindre qu'un quadrant est compris entre son sinus et sa tangente.

On a, en effet, d'après la fig. ci-contre, en appelant a l'arc AM moindre qu'un quadrant:

$$\text{triangle OAM} < \text{rect. OAM} < \text{tri. OAT},$$

ou

$$\frac{1}{2} OA \times \sin a < \frac{1}{2} OA \times a < \frac{1}{2} OA \times \tan a, \text{ d'où } \sin a < a < \tan a \quad (29)$$

Il en résulte que $\frac{\sin a}{a} < 1$, puis $\tan a > a$ peut s'écrire $\frac{\tan a}{\cos a} > a$, d'où $\frac{\sin a}{\cos a} > \cos a$. Par suite $\cos a < \frac{\sin a}{a} < 1$; et, si a tend vers zéro, $\cos a$ tend vers 1, donc

$$\lim \frac{\sin a}{a} = 1 \text{ pour } a = 0 \quad (30)$$

Arrivons au principe énoncé plus haut. Pour le démontrer, on part de

$$\tan \frac{a}{2} > \frac{a}{2}, \text{ d'où } \sin \frac{a}{2} > \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}.$$

Multipliant les 2 membres par $2 \cos \frac{a}{2}$, il vient (f. 28 bis):

$$\sin a > a \cos \frac{a}{2}, \text{ ou } \sin a > a - a \sin^2 \frac{a}{2};$$

$$\text{d'où } a - \sin a < a \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Mais (29) $\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2}$, et par suite l'inégalité précédente donne à fortiori :

$$a - \sin a < a \cdot \frac{a^2}{4}, \text{ ou enfin } a - \sin a < \frac{a^3}{4} \quad (31)$$

Erreur sur le cosinus,
 $< \frac{a^4}{16}$.

Calculons la valeur de $\cos a$ par la formule

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}, \text{ plus commod. que } \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a},$$

comme ne contenant pas de radical; si je remplace $\sin a$ par a , je puis à fortiori remplacer $\sin \frac{a}{2}$ par $\frac{a}{2}$, il en résulte pour le cosinus de l'arc a , en faisant usage de la formule ci-dessus, une valeur approchée $1 - \frac{a^2}{2}$ ou $1 - \frac{a^2}{4}$; et l'erreur commise est donc, par défaut :

$$\varepsilon < 2 \left(\frac{a^2}{4} - \sin^2 \frac{a}{2} \right), \text{ ou } \varepsilon < 2 \left(\frac{a^2}{4} + \sin \frac{a}{2} \right) \left(\frac{a^2}{4} - \sin \frac{a}{2} \right).$$

En remplaçant chacun des 2 facteurs par une valeur supérieure, le 1^{er} par $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ou a , et le 2^e (31) par $\frac{1}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^3$ ou $\frac{a^3}{32}$, nous concluons à fortiori

$$\varepsilon < 2a \cdot \frac{a^3}{32}, \text{ ou } \varepsilon < \frac{a^4}{16} \quad (32).$$

Application à l'arc 10". 35. Appliquons les formules (31) et (32) à l'arc 10".

$$\text{On a : arc } 10'' = \frac{10}{180 \times 60 \times 60} = \frac{10}{64800} = 0,000048481368110 \dots$$

L'erreur (form. 31) est donc

$$< \left(\frac{5}{10^5} \right)^3, \text{ ou } < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^{12}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{10^{12}}$$

Elle est donc, à fortiori $< \frac{1}{10^{13}}$; elle n'atteint pas le 13^e chiffre décimal.

Pour $\cos 10''$, l'application de la formule $\cos 10'' = 1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2}$ donne (f. 32) une erreur moindre que $\frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \right)^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{10^8}$, et à fortiori moindre que $\frac{1}{10^{18}}$; elle n'atteint pas le 18^e chiffre décimal.

On trouve ainsi, en ne conservant que les chiffres sur lesquels on ne en droit de compter pour $\sin 10''$, c.à.d. 13, et le même nombre pour le $\cos$. $\sin 10'' = 0,0000484813681$

$$\cos 10'' = 0,99999999998148 \quad (33)$$

Calcul des sin. et cos. des arcs de 10" en 10", jusqu'à 45". 36.

On aura ensuite $\sin 20''$ et $\cos 20''$ par les formules (21), qui permettent de déduire ces lignes de celles de l'arc 10"; puis, au moyen des formules d'addition (17), on calculera $\sin 30''$ et $\cos 30''$, etc.

On pourra ainsi calculer les sinus et cosinus des arcs de 10" en 10", jusqu'à 45°: il est inutile d'aller plus loin, puisque les cosinus des arcs de 45° à 90° sont égaux aux sinus de 0° à 45°, et réciproquement. Après avoir formé cette table, on formera ensuite celle des logarithmes de ces lignes, dans l'usage est beaucoup plus fréquents que celui des sinus et cosinus naturels. Comme l'erreur, d'abord faible sur les sin. et cos. des arcs très-petits, augmente peu à peu, il sera bon de vérifier à certains intervalles les valeurs trouvées par un calcul direct: on pourra, par ex., calculer les sinus de 3° en 3°; car on a directement $\sin 30^\circ$, d'où l'on tire $\sin 15^\circ$, on a aussi directement $\sin 18^\circ$ (n° 11), et par suite on peut avoir $\sin (18-15^\circ)$ ou $\sin 3^\circ$, puis par les formules de multiplication et d'addition, les sinus des arcs de 3° en 3°. On s'assurera ainsi que l'erreur finale commise sur $\sin 45^\circ$ et $\cos 45^\circ$ n'atteint pas le 8^e chiffre décimal, ce qui fait que les 7 décimales que l'on se borne à calculer pour leurs logarithmes sont exactes: on voit, en effet, que les tables des logarithmes des nombres entiers les plus étendues ne vont que jusqu'à 108000, et que par suite, un nombre de 9 chiffres étendus donne les 5 ou 6 premiers chiffres tout au plus formeront un nombre contenu dans la table, au logarithme duquel on ajoutera une certaine fraction décimale que la colonne des différences tabulaires permettra de calculer à l'aide des 2 chiffres suivants du nombre donné, le 3^e ne fournissant jamais qu'un produit partiel inférieur à 1 unité du 7^e ordre décimal; les 8 premiers chiffres du nombre tout au plus seront donc utiles.

On peut ne pousser le calcul 37. Lorsqu'on a calculé les sinus et cosinus des arcs jusqu'à 30°, on peut même par de simples soustractions, calculer les sin. et cos. de 30° à 45°. On a, en effet (form. 26):

$$\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = 2 \sin 30^\circ \cos \alpha = \cos \alpha,$$

$$\text{et de même (f. 27)} \quad \cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = 2 \sin 30^\circ \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Or α est compris entre 30° et 45°, et par suite < 45°; on a déjà calculé, par hypothèse, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin(30^\circ - \alpha)$ et $\cos(30^\circ - \alpha)$; on pourra donc déduire des formules précédentes:

Calcul des log ty et
log coty.

38. Quand aux tangentes et aux cotangentes, on déduit immédiatement leurs logarithmes de ceux des sinus et cosinus, car on a : $\log \tan a = \frac{\log \sin a}{\log \cos a}$, $\log \cot a = \frac{\log \cos a}{\log \sin a}$, formules calculables par logarithmes qui donnent :

$$\log \tan a = \log \sin a - \log \cos a, \quad \log \cot a = \log \cos a - \log \sin a.$$

On ne calcule pas les logarithmes des sécantes et des cosecantes, qui sont d'une application très peu fréquente, et que l'on peut d'ailleurs toujours facilement déduire de ceux des sin. et des cos.

Formules de
Thomas Simpson.

39. On peut simplifier beaucoup le calcul des sin. et cos. des arcs de $10''$ en $10''$, à l'aide de la transformation suivante, due à Thomas Simpson.

On a : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b.$

Posons $a = mb$, et faisons $b = 10''$, il vient :

$$\sin(m+1)10'' + \sin(m-1)10'' = 2 \sin m.10'' \cos 10''.$$

De même on a : $\cos(m+1)10'' + \cos(m-1)10'' = 2 \cos m.10'' \cos 10''.$

En donnant à m successivement les valeurs 1, 2, 3, ... , on en déduira les valeurs de $\sin 20''$ et $\cos 20''$, $\sin 30''$ et $\cos 30''$, ... connaissant les valeurs des sin. et cos. des arcs précédents.

Mais on peut encore transformer les formules précédentes comme il suit : $\cos 10''$ étant très voisin de 1, je pose $\cos 10'' = 1 - K$, K étant égal à 0,000000001185... La 1^{re} des 2 formules précédentes devient

$$\sin(m+1)10'' + \sin(m-1)10'' = 2 \sin m.10'' - 2K \sin m.10'',$$

ou

$$\begin{cases} \sin(m+1)10'' - \sin m.10'' = \sin m.10'' - \sin(m-1)10'' - 2K \sin m.10'' \\ \cos(m+1)10'' - \cos m.10'' = \cos m.10'' - \cos(m-1)10'' - 2K \cos m.10'' \end{cases} \quad (34)$$

Faisant $m=1$, la 1^{re} formule donnera $\sin 20'' - \sin 10''$ en retranchant $2K \sin 10''$ de $\sin 10''$, et ajoutant à la différence trouvée $\sin 10''$, on en aura $\sin 20''$; puis, faisant $m=2$, on aura $\sin 30'' - \sin 20''$ en retranchant de la différence précédemment calculée, $\sin 20'' - \sin 10''$, la quantité $2K \sin 20''$, et ajoutant $\sin 20''$ à la différence trouvée, on aura $\sin 30''$, &c. On abrège encore ce calcul en formant une table des produits de $2K$ par les 9 premiers chiffres significatifs, ce qui permet de faire très rapidement les produits successifs de $2K$ par $\sin 10''$, $\sin 20''$, &c.

Remarque.

40. Comme les sinus et les cosinus sont des fractions plus petites que 1, ils ont des logarithmes négatifs, que l'on transforme, pour la commodité des calculs, en logarithmes à caractéristique seule négative. Dans les tables de Lalande dont l'usage a prévalu jusqu'à ces derniers temps, on n'a pas admis, pour des raisons typographiques, de caractéristique négative, et l'on a, pour cet effet, augmenté toutes les caractéristiques de 10, ce qui revient à multiplier toutes les lignes trigonométriques par 10^{10} , sauf pourtant celles des logarithmes des cotangentes de 0 à $45''$ ou des tangentes de $45''$ à $90''$ lignes qui sont plus grandes que le rayon, et dont les logarithmes seraient alors supérieurs à 10 : on a simplement mis zéro pour caractéristique de ces log., également pour une raison typographique. On explique généralement ce changement dans les caractéristiques, en disant que le rayon des tables a été pris égal à 10^{10} , au lieu de 1. Mais alors, dans la pratique, on retranchera 10 à toutes les caractéristiques, sauf à celles des log. des tangentes de $45''$ à $90''$ ou des coty. de 0 à $45''$; ce qui revient, en définitive, à remplacer chaque ligne trigonométrique par son rapport au rayon, ou son log. par celui du dans la table, diminué de 10, log. du rayon des tables. — Il a paru de nouvelles tables, publiées par M. Dupuis, dans lesquelles on a pris le rayon pour unité, et où il suffit de lire les log. sans y faire aucun changement. Nous supposons, dans l'explication qui va suivre de l'usage des tables, que l'on a ces dernières, entre les mains, ou que, si l'on a celles de Lalande, on a modifié, comme il a été dit plus haut, les logarithmes lus dans ces tables.

Usage des tables. 41. Les grandes tables de logarithmes des lignes trigonométriques, fournissent les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les 5 premiers degrés, et de dix secondes en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, avec 7 décimales.

Première partie de la
Table.

La première partie de la Table, tout en donnant les log. des sin. et des tg. de 0° à 90° de seconde en seconde, fournit en même temps les log. des cosinus et des cotangentes de 85° à 90° , qui sont les mêmes que les précédentes. Le rectifié, chaque page de gauche est intitulée sinus par le haut, et cosinus par le bas; et chaque page de droite, tangente par le haut, et cotangente par le bas. Les degrés sont indiqués en haut de chaque page de 0° à 89° , et en bas de 89° à 85° ; les minutes que l'on doit ajouter au nombre de degrés lu en haut sont lues sur la 1^{re} ligne horizontale de $0'$ à $59'$, et les secondes sur la 1^{re} ligne verticale de gauche de $0''$ à $60''$, de façon que le log. cherché se trouve à l'intersection de la colonne verticale qui contient le nombre de minutes et de la colonne horizontale qui contient le nombre de secondes, lorsqu'il s'agit d'un cosinus ou d'une cotangente, et qu'on lit par conséquent le nombre de degrés en bas de la page, les minutes se lisent sur la dernière ligne horizontale de $59'$ à $0'$, et les secondes sur la première colonne verticale de droite, de $0''$ à $60''$, de bas en haut.

Exemples. $\log \sin 1^{\circ} 5' 41'' = 2,2811549$, $\log \cotg 88^{\circ} 21' 48'' = 2,4559558$.

La disposition indiquée ci-dessus montre suffisamment à qu'il faudra faire pour trouver la graduation d'un arc de 0° à 90° dont on donne le sinus ou la tangente, ou celle d'un arc de 85° à 90° dont on donne le cosinus ou la cotangente.

Ex. Soit donné $\log \tg x = 2,7301790$, on en conclut $x = 3^{\circ} 4' 31''$, en cherchant le nombre dans les pages de droite, puis lisant le nombre de degrés en haut de la page où se trouve le nombre, les minutes dans la même colonne verticale en haut, et les secondes sur la même ligne horizontale à gauche. Si l'on avait, au contraire, par ex., $\log \cos x = 3,9945588$, on chercherait le nombre dans les pages de gauche, puis, après l'avoir trouvé, on lirait les degrés en bas, les minutes dans la même colonne verticale en bas, et les secondes sur la même ligne horizontale, à droite, ce qui donnerait $x = 89^{\circ} 26' 3''$.

Cela suppose que le logarithme donné se trouve dans la table; si il n'y était pas, on procéderait comme il va être indiqué pour la 2^e partie de la Table.

Deuxième partie de la
Table.

Dans la 2^e partie de la Table, chaque page contient 11 colonnes (sauf dans les premières pages, où quelques-unes manquent, comme il sera plus bas expliqué), dont 10 plus larges que les autres sont intitulées, la 1^{re}, en commençant par la gauche, sinus par le haut, et cosinus par le bas; la 2^e, cosin. par le haut, et sinus par le bas; la 3^e, tang. par le haut, et cotang. par le bas; et la 4^e, cotang. par le haut, et tang. par le bas. Les degrés sont inscrits en haut des pages, de 0° à 44° , en allant du commencement à la fin de la table, et en bas des pages, de 44° à 89° , en allant de la fin au commencement. La 1^{re} graduation se rapporte aux log. des lignes dont le nom se lit en haut de la page, et la 2^e à ceux des lignes dont le nom se lit en bas: les minutes et les secondes qui servent à compléter la graduation supérieure sont respectivement inscrites dans la 1^{re} et dans la 2^e colonnes verticales de gauche, 5 v. de haut en bas, de $0'$ à $60'$ de minute en minute pour la 1^{re} colonne, et de $0''$ à $50''$ de dix secondes en dix secondes pour la 2^e colonne à chaque intervalle entre deux nombres consécutifs de minutes.

Chacune des 4 colonnes, sinus, cosin., tang., cotang., est suivie à droite d'une petite colonne, intitulée différences, qui contient toutes les différences entre deux log. consécutifs de la colonne qui est à sa gauche, sauf la colonne cotang. qui a la même colonne de différences que celle des tang.; aussi est-elle intitulée différences communes, ce qui s'explique en ce que, deux arcs étant donnés, les log. de leurs tg. ont une différence égale en valeur absolue (elle est égale et de signe contraire) à celle de leurs cotangentes, car on a $\frac{\tg a}{\tg b} = \frac{\cotg b}{\cotg a}$, d'où $\log \tg a - \log \tg b = \log \cotg b - \log \cotg a$. Pendant un petit intervalle, il n'y a pas de colonne de différences spéciale à la colonne des sinus au commencement de la table, parce qu'elle est commune à celle de la colonne des tang. et des cotang.; et, pendant un faible intervalle également, au commencement de la table, la colonne des cosinus n'a pas de différences, on n'a pas jugé à propos de les inscrire, parce qu'ils sont très-faibles et peuvent s'apercevoir immédiatement. Nous allons voir l'usage de ces colonnes de différences.

Règle des parties
proportionnelles.

Elles servent à l'application du principe approximatif, comme sous le nom de règle des parties proportionnelles; il consiste en ce que la différence entre les graduations de deux arcs, lorsqu'elle est moindre que 10", peut être considérée comme proportionnelle à la différence des logarithmes de leurs lignes trigonométriques, pour les arcs supérieurs à 5°.

Application. 42. On peut avoir deux sortes de problèmes à résoudre avec les tables: ou bien on donne un arc, et on cherche le log. de l'une de ses lignes trigonométriques, ou c'est l'inverse.
1^o Soit à trouver le log sin d'un arc qui n'est pas dans la table, par ex. $\log \sin 18^\circ 31' 48''$, on prend le log. du sinus de l'arc immédiatement inférieur qui se trouve, $18^\circ 31' 40''$; la table donne la différence Δ des log. qui comprennent le log. cherché, et qui sont $\log \sin 18^\circ 31' 40''$ & $\log \sin 18^\circ 31' 50''$. Il faut ajouter au 1^{er} log. une certaine quantité pour avoir le log. cherché. On applique alors le principe énoncé plus haut: pour 10" ajoutées à l'arc, on ajoute Δ au log., pour u'' , qu'ajoutera-t-on? D'après la règle des parties proportionnelles, on a:

$$\frac{10''}{u''} = \frac{\Delta}{x}, \text{ d'où } x = \frac{u \Delta}{10}; \quad (35)$$

Il suffit donc de diviser la différence tabulaire par 10, et de multiplier le résultat par l'excès de la graduation donnée sur celle lue dans la table. Il ne faut pas oublier que le résultat donne des unités de 10^e ordre.

Ex. $\log \sin 18^\circ 31' 40'' = 7,5021052$ $62,8 - \text{diff. } \Delta$
 $\log \sin 18^\circ 31' 48'' = 7,5021554$ $50,4$
 $8 = u$

Pour un cosinus, on prend le log. du cos. de l'arc immédiatement supérieur à l'arc donné, qui se trouve dans la table, parce qu'il est plus faible que le log. cherché, alors pour u'' retrancher à l'arc, qu'ajoutera-t-on au log.? On pose encore $\frac{10''}{u''} = \frac{\Delta}{x}$, d'où $x = \frac{u \Delta}{10}$; &c.

Ex. soit à trouver $\log \cos 54^\circ 15' 49'' 56''$, on disposera ainsi le calcul.

$$\log \cos 54^\circ 15' 50'' = 7,7664522$$

$$\log \cos 54^\circ 15' 49'' 56'' = 7,7664535$$

$293 - \text{diff. } \Delta$
 $0,44 = u$
 1172
 12892
 Il ne faut pas oublier que Δ représente la différence tabulaire entre le 2^e log. qui comprend le log. cherché.

Les tangentes se calculent comme les sinus, et les cotangentes comme les cosinus.

2^o Si l'on donne le logarithme d'un sinus, on prend dans la table, à la colonne des sinus, le log. immédiatement inférieur, et on calcule sa différence Δ avec le log. donné; on prend la diff. tabulaire Δ , et on pose $\frac{\Delta}{x} = \frac{x}{10''}$, d'où $x = \frac{\Delta \cdot 10}{\Delta}$; (36)

Il suffit donc, pour avoir les secondes et fractions de secondes ajoutées à la graduation correspondante au log. lu dans la table, de multiplier la différence entre ce log. et le log. propre par 10, et de diviser le résultat par la différence tabulaire. On pourra ordinairement jusqu'à quelques centièmes de seconde.

Ex. soit donné $\log \sin y = 7,9033154$, voici la disposition du calcul.

$$\Delta_{10} = \frac{091}{680} \cdot 220152 = \Delta$$

$$220152 = x$$

$$54^\circ 3' 50''$$

$$y = 54^\circ 3' 54'' 14$$

Si l'on donne le log. d'un cosinus, on prend dans la table le log. immédiatement supérieur (qui correspond à une graduation trop faible, à laquelle il faut ajouter x), on en retranche le log. donné, soit Δ la différence; alors, Δ étant la diff. tabulaire, on pose:

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{x}{10''}, \text{ d'où } x = \frac{\Delta \cdot 10}{\Delta}; \quad \&c.$$

Ex. soit donné $\log \cos y = 7,9665048$

$$\Delta_{10} = \frac{250}{780} \cdot 86 = \Delta$$

$$250 \cdot 86 = x$$

$$22^\circ 12' 50''$$

$$y = 22^\circ 12' 52'' 90$$

Pour les tangentes, c'est comme pour les sinus; et, pour les cotangentes, comme pour les cosinus.

Exercices.

1. Trouver que, si a et b étant des arcs du 1^{er} quadrant, on a $\frac{\sin(a+b)}{a+b} < \frac{\sin a}{a}$.

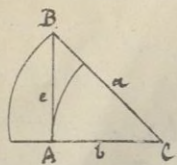
2. Résoudre le système d'équations suivantes:

$$\begin{cases} x \cos y = 1,3719 \\ x \sin y = 0,7284 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \tan 27^\circ 18' 35'' + y \tan 43^\circ 0' 15'' = 7,059 \\ x \tan 53^\circ 48' 7'' - y \tan 16^\circ 5' 9'' = 1,937 \end{cases}$$

§7. Résolution des Triangles rectangles.

Principes fondamentaux. 43.



Lorsqu'un triangle est rectangle, la connaissance de deux éléments suffit pour déterminer les 3 autres, pourvu que parmi ces 2 éléments il se trouve au moins un côté du triangle. Nous allons établir les relations existant entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle, qui nous serviront d'arriver à cette détermination: nous désignerons l'hypothénuse par a , et les 2 côtés de l'angle droit par b et c , les angles opposés étant respectivement B et C .

Si du point C comme centre, avec l'hypothénuse a pour rayon, je décris un arc de cercle, $\frac{BA}{CB}$ ou $\frac{e}{a}$ est par définition (n° 2) le sinus de l'angle C , et $\frac{CA}{CB}$ ou $\frac{b}{a}$ est son cosinus. D'ailleurs, les angles B et C étant complémentaires, il en résulte

$$\frac{e}{a} = \sin C = \cos B, \quad \text{d'où} \quad (37) \quad \begin{cases} c = a \sin C = a \cos B \\ b = a \cos C = a \sin B \end{cases}$$

Ces formules s'énoncent: Chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypothénuse, multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent.

De même, si l'on décrit du point C comme centre avec CA pour rayon un arc de cercle tangent à AB , on aura, par définition (n° 2):

$$\frac{e}{b} = \tan C = \cot B, \quad \text{d'où} \quad (38) \quad \begin{cases} c = b \tan C = b \cot B \\ b = c \tan B = c \cot C \end{cases}$$

C.à. d. que chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé, ou par la cotangente de l'angle adjacent.

Résolution des 4 cas.

44. Les formules précédentes (37) et (38), jointes à la relation du carré de l'hypothénuse, $a^2 = b^2 + c^2$, suffisent pour la résolution des triangles rectangles. Les 4 cas qui peuvent se présenter sont les suivants.

On donne

1. l'hypothénuse et un côté, a et b :	d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, $\sin B = \frac{b}{a}$, $C = 90^\circ - B$;
2. l'angle droit et un côté, a et B :	$b = a \sin B$, $c = a \cos B$, $C = 90^\circ - B$;
3. un côté et un angle, b et C :	$B = 90^\circ - C$, $c = b \tan C = b \cot B$, $a = \frac{b}{\sin C} = \frac{b}{\cos B}$;
4. deux côtés, b et c :	$\tan B = \frac{c}{b}$, $a = \frac{b}{\sin B}$, $C = 90^\circ - B$.

Toutes ces formules sont calculables par log. Toutefois le 1^{er} cas peut se résoudre plus simplement en remarquant que $\cos C = \frac{b}{a}$ donne $1 - \cos C = \frac{a-b}{a}$, $1 + \cos C = \frac{a+b}{a}$, d'où $\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{c^2}{a^2}$, et $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, puis $B = 90^\circ - C$, ce qui permet de calculer C au moyen des mêmes log. que c , tandis que la formule $\sin B = \frac{b}{a}$ exige l'emploi de 2 nouveaux logarithmes. Si toutefois les côtés a et b étaient connus par leurs log., il serait préférable de calculer d'abord B par la formule $\sin B = \frac{b}{a}$, qui donnerait immédiatement par une simple soustraction $\log \sin B = \log b - \log a$; puis on calculerait c par la formule $c = a \cos B$, d'où $\log c = \log a + \log \cos B$, $\log a$ étant tout connu, et $\log \cos B$ se lisant à la même page et en même temps que $\log \sin B$. L'emploi simultané des 2 dernières formules est, en tout cas, préférable à celui des formules $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, $\sin B = \frac{b}{a}$; et si nous avons proposé de résoudre le triangle avec les formules

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)} \quad \text{et} \quad \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

ce n'est que parce qu'elles permettent de déterminer les éléments inconnus, c et C , uniquement en fonction des éléments donnés, a et b ; mais qu'il faut toujours chercher à éviter, en principe.

À propos de cette observation, remarquons que nous avons résolu le dernier cas en basant le calcul de a sur le calcul préalable de B ; c'est parce que le calcul direct en fonction des données, par log., ne dispenserait pas d'un calcul préalable, attendu que, pour rendre calculable la formule $a^2 = b^2 + c^2$, on pourrait (n° 32) $\tan^2 \varphi = \frac{b^2}{c^2}$, ce qui conduirait à un angle auxiliaire ne différant point de l'angle B .

Remarque. 45. Il est évident que les 3 relations distinctes

$$B + C = 90^\circ, \quad b = a \cos C, \quad c = a \sin C,$$

doivent suffire pour la résolution du triangle, puisque 3 équations sont nécessaires et suffisantes pour déterminer 3 inconnues; les autres relations (38) et la relation $a^2 = b^2 + c^2$ doivent donc en

être des conséquences, comme il est facile de s'en assurer. Car les 2 dernières équations, élevées au carré et ajoutées, donnent $a^2 = b^2 + c^2$, et divisées membre à membre, $\frac{c}{b} = \tan B$.

Vérification. 46. On vérifiera la 1^{re} car par la formule $b = c \tan B$, d'où $\log b = \log c + \log \tan B$; et les 3 autres car par la relation $b^2 = a^2 - c^2$; d'où $2 \log b = \log(a+c) + \log(a-c)$.

Application numérique 47. Nous allons donner un exemple de calcul numérique en prenant pour type le 1^{er} cas.

Type de calcul.

Données : $a = 248,51$, $b = 97,15$, $A = 90^\circ$.

1^{re} Méthode.

Calcul de c.

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\log(a+b) = 2,3936491$$

$$\log(a-b) = 2,1800111$$

$$2 \log c = 4,5736602$$

$$\log c = 2,2868301$$

$$c = 228,733$$

Calcul de B, C.

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$$\log(a-b) = 2,1800111$$

$$\log(a+b) = 2,3936491$$

$$2 \log \tan \frac{C}{2} = 7,6413620$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = 7,8206810$$

$$\frac{C}{2} = 33^\circ 29' 37,72''$$

$$C = 66^\circ 59' 15,44''$$

$$B = 23^\circ 0' 44,56''$$

2^{de} Méthode.

Calcul de B, C.

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

$$\log b = 1,9874428$$

$$\log a = 2,3936491$$

$$\log \sin B = 7,5920989$$

$$B = 23^\circ 0' 44,56''$$

$$C = 66^\circ 59' 15,44''$$

Calcul de c.

$$c = a \cos B$$

$$\log a = 2,3936491$$

$$\log \cos B = 7,9639814$$

$$\log c = 2,3576305$$

$$c = 228,733$$

Vérification.

$$b = c \tan B$$

$$\log c = 2,3576305$$

$$\log \tan B = 7,6280860$$

$$\log b = 1,9874428$$

$$b = 97,15$$

$$\text{Erreur } 0$$

$$\log c = 2,3576305$$

$$\log \tan B = 7,6280860$$

$$\log b = 1,9874428$$

$$b = 97,1498$$

$$\text{Erreur } 0,0002$$

Exercices.

- Sachant qu'un triangle est rectangle en A, déduire de la relation $b = c \tan B$ la formule $b = c \sin B$.
- Déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle donné en fonction d'un côté et de l'angle opposé, ainsi que le rayon de chacun des 3 cercles ex-inscrits en fonction du périmètre et des angles respectifs. Rép. $R(\text{circ.}) = \frac{c}{2 \sin C}$, $R(\text{ex-insc.}) = p \tan \frac{C}{2}$.
- Surface d'un polygone régulier en fonction de son côté et de son angle au centre.
- Surface d'une zone et volume d'un secteur sphérique en fonction du rayon de la sphère et de l'angle au centre de l'arc générateur.
- Hauteur du soleil sur l'horizon, quand l'ombre d'un arbre vertical est moitié ou double de sa hauteur.
- La hauteur du soleil étant α , quelle est la hauteur d'un arbre dont l'ombre a une longueur l .
- Projection d'une droite sur une autre faisant un angle α avec la 1^{re}. Rép. $p = l \cos \alpha$.
- Projection de la surface d'un triangle, T, ou d'un polygone P, sur un plan faisant un angle α avec celui du triangle ou du polygone. Rép. $T \cos \alpha$, $P \cos \alpha$.
- Faire voir que, P étant le périmètre d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle dont le diamètre est pris pour unité, on a $\frac{1}{n} < P < \frac{16}{3n}$.
- Volume engendré par un carré tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets en fonction de son côté, a , et de l'angle, x , formé par ce côté avec l'axe. Dans quel cas est-il maximum? Rép. $V = \frac{2}{3} \pi a^3 \sqrt{2} \cos(45^\circ - x)$, $x(\text{max}) = 45^\circ$.
- On donne un point fixe, A, sur l'un des côtés d'un angle droit; on prend sur l'autre, à partir du sommet, une longueur arbitraire OM, et on détermine sur ce même côté un point N tel que $\frac{ON}{OM} = K$. Trouver la position du point M pour laquelle l'angle MAN soit maximum. Rép. OM corresp. au max. de MAN, $= \frac{a}{\sqrt{K}}$ (fig. des exercices de la page 10).
- Déterminer l'angle, x , au sommet d'un cône circonscrit à une sphère de rayon R, connaissant le rapport, K, de la surface totale du cône à celle de la sphère; et la valeur de x qui correspond au minimum de K. Rép. $K(\text{minim.}) = 2$, pour lequel $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Calculer l'aire d'un segment circulaire dont l'angle au centre est de $108^\circ 36' 13,7''$, le rayon étant de $2478,7576$, et la valeur que devrait avoir cet angle au centre pour que le volume engendré par le segment en tournant autour du diamètre qui passe par une de ses extrémités devint égal à la moitié du volume de la sphère.

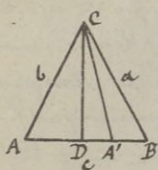
14. Déterminer le volume engendré par un triangle qui tourne autour d'un axe passant par un de ses sommets, en fonction de ses côtés, de ses angles et de celui que forme avec l'axe le côté qui en est le plus rapproché. x étant ce dernier angle, quelle est sa valeur correspondante au volume maximum. Répon. $\lg x(\text{max}) = \frac{c + b \cos A}{b \sin A}$, A étant le sommet par lequel passe l'axe, et b et c les 2 côtés qui comprennent A , et l'angle de c avec l'axe.
15. Résoudre un triangle quelconque, connaissant la hauteur et les angles.

§8. Résolution des Triangles obliquangles.

Il existe 3 relations indépendantes, et pas davantage entre les 6 éléments d'un triangle.

18. Il doit exister entre les 6 éléments d'un triangle 3 relations indépendantes et pas davantage, puisque l'on a vu, en géométrie élémentaire, que la connaissance de 3 éléments, pourvu qu'il y en ait au moins un côté, entraînerait la détermination des 3 autres. L'algèbre conduit aussi à cette conclusion : en effet, si l'on a 4 équations entre les 6 éléments, on pourra éliminer 3 d'entre eux, et l'équation résiduelle devra être une relation identique entre les 3 éléments restants; puisqu'il y a 3 éléments arbitraires dans un triangle. On désigne habituellement les côtés d'un triangle respectivement par a, b, c , et les angles opposés par A, B, C . Nous allons rechercher 3 relations distinctes entre ces 6 quantités.

1^{er} système.



19. Abaisant du sommet C la perpendiculaire CD sur le côté opposé AB , on aura décomposé le triangle ABC en 2 triangles rectangles qui donnent $CD = b \sin A$, et $CD = a \sin B$; d'où $b \sin A = a \sin B$,

et $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Si la perpendiculaire tombait en dehors du triangle, comme dans la figure $CA'B$, on n'en aurait pas moins $CD = CA' \sin (180^\circ - A) = CA' \sin A$, et l'on en conclurait comme ci-dessus la relation précédente. On trouverait de même $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, en abaisant une perpendiculaire d'un autre sommet; et, si l'on y joint la relation $A + B + C = 180^\circ$, on aura le système des 3 équations :

$$(39) \begin{cases} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases}$$

D'après ce qui a été dit plus haut, tout système différent du précédent doit en être une conséquence. Il en existe plusieurs : nous allons les établir directement, sauf à indiquer ensuite comment ils se déduisent mutuellement les uns des autres.

2^e système.

30. Dans le triangle ABC , si nous supposons l'angle A aigu, la géométrie donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, ou, dans le triangle rectangle ACD , $AD = b \cos A$, et la relation ci-dessus devient $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cos A$. (39) Supposons le côté a opposé à un angle obtus A' dans le triangle $A'BC$, on aura, d'après la géométrie : $a^2 = b'^2 + c'^2 + 2c' \cdot AD$, en appelant b' et c' les côtés CA' et BA' du nouveau triangle; mais alors $AD = b' \cos (180^\circ - A') = -b' \cos A'$, et, en substituant, il vient $a^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A'$, formule qui coïncide avec la formule (39), laquelle est par conséquent générale. Appliquant successivement aux 3 côtés du triangle, il vient

$$(40) \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

3^e système.

31. Enfin on a un 3^e système, en exprimant que chaque côté est égal à la somme algébrique des projections des 2 autres sur sa propre direction, en considérant comme négative une projection contraire en sens contraire de celle qui est la plus grande en valeur absolue, laquelle est considérée comme positive. Ainsi, dans le triangle ABC , on a : $AB = AD + DB$; et dans le triangle ABC , $A'B = BD - AD$. Mais, dans le 1^{er} cas, $AD = b \cos A$, et dans le 2^e $AD = -b' \cos A'$, de sorte que $-AD = b' \cos A'$; les 2 formules donnent donc le même résultat, ou plutôt un résultat de la même forme. On est ainsi conduit

au système : (41)
$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

Les 3 systèmes sont des
conséquences mutuelles l'un
de l'autre.

§2. Nous allons maintenant établir la dépendance mutuelle des relations (39), (40), (41). Commencons par déduire (41) de (40); il suffit d'ajouter 2 à 2 les équations (40); en ajoutant les 2 premières, par ex., et supprimant aux 2 membres la partie commune $a^2 + b^2$, il vient :

$$0 = 2c^2 - 2bc \cos A - 2ac \cos B;$$

et, en supprimant le facteur commun c , il vient : $c = a \cos B + b \cos A$.

Réciproquement, pour déduire (40) de (41), multiplions les équations (41) respectivement par a, b, c , puis ajoutons 2 d'entre elles et retranchons la 3^e; par ex., ajoutons les 2 premières et retranchons la 3^e; il viendra, après la suppression des parties communes :

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C, \quad \text{d'où} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Je vais maintenant établir que le système (39) entraîne comme conséquence l'un des 2 autres, et par suite tous les deux, et réciproquement que de l'un des systèmes (40) ou (41) on peut déduire (39).

A cet effet, je remplace les 2 premières équations du système (39) par les suivantes qui leur sont identiques :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C}{\sin B \cos C} + \frac{c \cos B}{\sin C \cos B}; \quad \text{ou, en vertu d'un théorème de proportionnalité}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin B \cos C + \sin C \cos B}.$$

Mais, en vertu de la 3^e équation (39) : $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$; par suite la relation précédente devient :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Voyons la réciproque. L'équation (40) donne, par ex.,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{d'où} \quad 1 - \cos A \quad \text{ou} \quad \sin A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4a^2b^2c^2 - b^4c^2 - b^2c^4 - a^4b^2 - a^2b^4 + 2a^2b^2c^2 + 2a^2c^2b^2 - a^4c^2 - a^2c^4 + 2a^2b^2c^2}{4b^2c^2},$$

et par suite $\frac{\sin A}{a} = \frac{2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - b^2c^4 - a^4b^2 - a^2b^4 - a^4c^2 - a^2c^4 + 2a^2b^2c^2 + 2a^2c^2b^2 - a^4b^2 - a^2b^4}{4a^2b^2c^2}$, expression symétrique en a, b, c .

Or le rapport $\frac{\sin B}{b}$ se déduirait évidemment du précédent, en changeant a en b et b en a ; mais, comme l'expression précédente est symétrique par rapport à ces deux lettres, elle ne changera pas; de même pour $\frac{\sin C}{c}$. On a donc $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$; d'où, en remarquant que les 3 angles A, B, C sont aigus, et que par conséquent leurs sinus sont positifs, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

Pour déduire la 3^e des relations (39), je remarque que les équations (40), aussi bien que les équations (41), sont homogènes, les 1^{ères} du 1^{er} et les 2^{es} du 1^{er} degré; de telle sorte que, si l'on divise les 1^{ères} par a^2 par ex., et les 2^{es} par a , elles ne contiendront plus que des rapports, vu qu'elles seront du degré zéro; et 2 systèmes ne donnant donc en réalité que des relations entre les rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, il n'est possible de les éliminer entre les 3 équations d'un même système; il restera une relation entre A, B et C , qui devra comprendre la relation $A+B+C=180^\circ$.

Or nous, pour faire l'élimination, le système (41) qui est le plus simple. Les 2 dernières équations peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} b - \cos A c = a \cos C \\ \cos A b - c = -a \cos B \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b = \frac{-a \cos C - a \cos A \cos B}{-1 + \cos^2 A} \\ c = \frac{-a \cos B - a \cos A \cos C}{-1 + \cos^2 A} \end{cases}$$

Substituant en valeur dans la 1^{ère} des équations (41), il vient, après avoir supprimé le facteur commun a :

$$1 = \frac{-\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 B}{-1 + \cos^2 A}, \quad \text{ou en changeant le dénominateur}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0. \quad (42)$$

Cette relation peut se déduire comme conséquence de $A+B+C=180^\circ$, comme il vient :

$$\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C, \quad \text{d'où} \quad \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C;$$

et, élevant au carré, puis remplaçant $\sin^2 B$ par $1 - \cos^2 B$ et $\sin^2 C$ par $1 - \cos^2 C$; il vient :

$$\cos^2 A + \cos^2 B \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C,$$

ou enfin la relation (42) d'après (41). En suivant une marche inverse, on déduirait aisément de la relation (42) elle-même $A+B+C=180^\circ$.

Un triangle est indéterminé §3.
par ses 3 angles.

On peut voir par l'un quelconque des 3 systèmes (39), (40), (41), qu'un triangle est indéterminé quand on donne 3 angles. Le système (39) ne fournit plus, en effet, que 2 équations pour déterminer les rapports de 2 côtés au 3^e; et la 3^e devient une identité $A+B+C=180^\circ$; il y a donc une infinité de triangles, tous semblables, qui répondent à la question. Les systèmes (40) et (41) conduisent à la même conclusion, vu qu'ils sont homogènes, et que, ainsi que nous l'avons vu plus haut, cette circonstance fait que chacun d'eux ne contiendrait en réalité que les rapports de 2 côtés au 3^e; et, si l'on élimine ces rapports entre les 3 équations d'un même système, on tombe sur la relation (42) du n^o précédent, qui est une identité, lorsque $A+B+C=180^\circ$, c. à d. pour tout triangle.

4 cas distincts de
résolution d'un tri. obl.

54. Il existe 4 cas distincts de résolution d'un triangle obliquangulaire; on peut donner
1^{er} un côté et les 2 angles adjacents, c, A, B ; 2^o deux côtés et l'angle compris, a, b, C ;
3^o deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, a, b, A ; 4^o les 3 côtés, a, b, c .

1^{er} Cas. 55. 1^{er} Cas. — On donne c, A, B . Les 3 inconnues se déterminent par les formules
 c, A, B . $C = 180^\circ - (A+B)$, $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$, $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ (39) immédiatement calculables par logarithmes.
Le problème est toujours possible, ainsi que la géométrie l'indique.

2^e Cas. 56. 2^e Cas. — On donne a, b, C . On peut résoudre de plusieurs manières.

1^{re} Méthode. — On a, pour déterminer A et B , la relation $A+B = 180^\circ - C$, avec

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \text{ d'où } \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-b},$$

ou, en vertu de la form. (23) du n^o 20:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}, \text{ et à cause de } \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{1}{2} C. \quad (43)$$

On a ainsi $\frac{1}{2}(A+B)$ et $\frac{1}{2}(A-B)$, et par suite A et B .

On pourra ensuite calculer c au moyen de la formule $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; mais, pour éviter la recherche de nouveaux logarithmes, on transforme comme il suit:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B}, \text{ d'où } c = \frac{2(a+b) \sin \frac{1}{2} C \cotg \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{2(a+b) \sin \frac{1}{2} C \cotg \frac{1}{2} C}{2 \cos \frac{1}{2} C \cotg \frac{1}{2}(A-B)},$$

d'où enfin:

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \quad (44)$$

On peut ainsi, avec les formules (43) et (44), effectuer parallèlement le calcul de $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$ et celui de c : on prendra à la même page et sans peine $\log \cotg \frac{1}{2} C$ pour la form. (43) et $\log \sin \frac{1}{2} C$ pour la form. (44), et pendant qu'on cherchera la graduation de $\frac{1}{2}(A-B)$ correspondant à $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$ calculé par la 1^{re} formule, on lira aussi à la même page $\log \cos \frac{1}{2}(A-B)$. Il sera bon, en faisant usage des formules ci-dessus, de se servir des compléments à 10, pour éviter de faire 2 opérations successives, addition et soustraction. Ainsi on aura:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \log(a-b) + \log \cotg \frac{1}{2} C + C^t \log(a+b) - 10, \\ + \log c &= \log(a+b) + \log \sin \frac{1}{2} C + C^t \log \cos \frac{1}{2}(A-B) - 10. \end{aligned}$$

On pourrait se proposer de calculer c directement par la formule

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ qu'il faudrait rendre calculable par log.; voici un procédé:}$$

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1 - \cos C) = (a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} C, \text{ binôme facile à rendre calculable.}$$

On peut encore employer un artifice de calcul, qui mérite d'être connu par son élégance:

$$c^2 = (a^2 + b^2) \left(\cos^2 \frac{1}{2} C + \sin^2 \frac{1}{2} C \right) - 2ab(\cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C),$$

on a remplacé 1 par $(\cos^2 \frac{1}{2} C + \sin^2 \frac{1}{2} C)$ et $\cos C$ par $(\cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C)$;

$$\text{puis, rassemblant: } c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} C + (a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C = (a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} C \left\{ 1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cotg^2 \frac{1}{2} C \right\}$$

$$\text{Je pose } \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{1}{2} C = \operatorname{tg} \varphi \quad (4),$$

$$\text{d'où } c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \varphi} \quad (5).$$

L'angle auxiliaire φ n'est autre chose que l'angle $\frac{1}{2}(A-B)$, comme on peut le voir en comparant les formules (4) avec les formules ci-dessus (43), (44); le calcul est donc identique avec le précédent.

Les formules supposent $A > B$; si $A < B$, on est aussi sûr, de les 2 membres de l'équation (43) sont < 0 , on l'écrira alors $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{a+b} \cotg \frac{1}{2} C$.

Remarque. — Si l'on donne a et b par leurs logarithmes, au lieu de chercher les nombres correspondants, on se sert de la formule $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, d'où $\log c = \log a + \log \sin C + C^t \log \sin A - 10$, après avoir préalablement calculé A au moyen de la formule (43) transformée comme il suit:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \cotg \frac{1}{2} C.$$

$$\text{Soient } \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi,$$

d'où, à cause de la form. (20) du n^o 23,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi) \cotg \frac{1}{2} C \quad (45).$$

Il n'aura donc $\log \operatorname{tg} \varphi = \log b - \log a$, simple soustraction de 2 nombres donnés, qui fournira φ , et par suite $45^\circ - \varphi$, d'où $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$, &c.

2^e Méthode. — On peut calculer directement c et A au moyen des 2 formules

$$c \sin A = a \sin C \quad \text{et} \quad (41) \quad b = a \cos C + c \cos A,$$

d'où

$$c \cos A = b - a \cos C$$

Divisant,

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C} \quad (46)$$

formule qui donnera A ; puis la 1^{re} $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ donnera c .

On peut rendre facilement la formule (46) calculable par log. Il suffit de poser $b = a \cotg \varphi \sin C$, a qui fournit un angle auxiliaire φ , et par suite

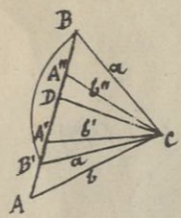
$$\tg A = \frac{\sin C}{\cotg \varphi \sin C - \cos C} = \frac{\sin C \sin \varphi}{\cos(C-\varphi)}$$

N.B. Le problème est toujours possible, d'après les formules précédentes, comme la géométrie l'indique.

3^e Cas.
 a, b, A .

§7. 3^e Cas. — On a : $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$.

Ayant A et B , on a C et par suite c . Voyons si le problème est toujours possible, Il faut d'abord, puisque l'angle B est donné par son sinus, que l'on ait $\frac{b}{a} \sin A < 1$, ou $b \sin A < a$; (α)



et un second lieu, que l'angle correspondant fourni par les tables soit moindre que le supplément de A . La 1^{re} condition signifie que, dans tous les cas, la perpendiculaire CD , abaissée du point C sur la direction du côté AB , doit être moindre que le côté a donné, ce que la construction géométrique du triangle indiquait; puisque, après avoir pris sur l'un des côtés de l'angle donné A une longueur égale au côté donné b , le 3^e sommet s'obtient en décrivant du point C comme centre un arc de cercle avec a pour rayon. Or l'angle A peut être aigu, droit ou obtus.

1^{re} Si A est $< 90^\circ$, la condition (α) étant remplie, la formule $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ fournit 2 angles, l'un aigu B_1 , qui convient évidemment puisque B_1 et A sont tous deux $< 90^\circ$, et l'autre obtus, $180^\circ - B_1 = B_2$; voyons si ce dernier convient: si $b < a$, $\sin B_2 < \sin A$, or le sinus d'un angle obtus est d'autant plus petit que l'angle est plus grand, donc $B_2 > 180^\circ - A$, et $B_2 + A > 180^\circ$, l'angle B_2 ne convient donc pas; si $b = a$, $\sin B_2 = \sin A$, $B_2 = 180^\circ - A$, même conclusion; enfin, si $b > a$, $\sin B_2 > \sin A$, $B_2 < 180^\circ - A$, $B_2 + A < 180^\circ$, et l'angle B_2 convient.

2^{de} Si A est $= 90^\circ$, b doit être $< a$, et alors l'angle aigu seul convient évidemment.

3^{de} Si A est $> 90^\circ$, l'angle obtus B_2 est toujours à rejeter; quant à l'angle aigu B_1 , voyons s'il est toujours acceptable, lorsque la condition (α) est remplie: lorsque $b < a$, $\sin B_1 < \sin A$ et $B_1 < 180^\circ - A$, il convient donc; si $b = a$, $B_1 = 180^\circ - A$, il est à rejeter; et enfin, il en est de même si $b > a$, puisque alors $\sin B_1 > \sin A$, $B_1 > 180^\circ - A$.

Toutes ces conclusions sont conformes à celles de la géométrie élémentaire, elles sont résumées sur la figure ci-contre pour le cas de $A < 90^\circ$ et de $A > 90^\circ$: ABC et $AB'C$ sont 2 solutions correspondantes à l'angle A , $A'BC$ est la solution unique relative à l'angle aigu A' , et de même $A''BC$ pour l'angle obtus A'' .

On pourrait calculer directement le côté c par la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; la discussion du problème se ferait également bien par celle des racines de l'équation du 2^e degré ci-dessus.

4^e Cas.
 a, b, c .

§8. 4^e Cas. — On donne a, b, c . Les angles A, B, C , se déterminent au moyen du système (40).

On tire : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$
 Soit $a+b+c = 2p$, } il vient $2 \cos \frac{A}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}$, $\cos \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$
 ou $b+c-a = 2(p-a)$

Comme les angles du triangle sont $< 180^\circ$, leur moitié sont $< 90^\circ$, et par suite leurs cosinus sont > 0 .

On conclut donc : $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$,
 et de même $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$,
 $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$. } (47)

Par un calcul analogue, on a :
 Soit :

$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$
 $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$
 $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$
 $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ } (48)

Divisant les formules (47) et (48) deux à deux et les multipliant aussi deux à deux et doublant, on obtient 3 autres séries de formules, à cause de $\tg \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$, et de $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$:

$\tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 $\tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$, $\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 $\tg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$, $\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ } (49) (50)

Un quelconque des 4 systèmes (47), (48), (49), (50) servira à résoudre le triangle. Nous examinerons tout-à-l'heure lequel le plus avantageux, voyons d'abord si la problématique est toujours possible.

59. Discussion. — Examinons chacun des 4 systèmes en particulier. La formule $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ indique que 1^o le radical doit être réel, et 2^o plus petit que 1.

La 1^{re} condition donne $p-a > 0$, ou $2p > 2a$, ou $b+c > a$;

et la 2^e, $p(p-a) < bc$, ou $2p(2p-2a) < 4bc$, ou $(b+c)^2 - a^2 < 4bc$, $(b-c)^2 < a^2$, $a > b-c$, ou $a > c-b$, l'autant que b sera plus grand ou plus petit que c . Les 2 conditions trouvent tous deux leur origine dans la géométrie.

La formule $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ exige: 1^o que le produit $(p-b)(p-c)$ soit > 0 , c. à d. que les 2 facteurs soient tous deux > 0 ou tous deux < 0 ; or, s'ils étaient < 0 , on aurait simultanément $p-b < 0$ et $p-c < 0$, d'où, en ajoutant: $2p-b-c < 0$ ou $a < 0$, absurdité; On doit donc avoir:

$$p-b > 0, p-c > 0, \text{ d'où } a+c > b \text{ et } a+b > c;$$

2^o que l'on ait $(p-b)(p-c) < bc$, ou $p^2 - (b+c)p < 0$, $p < b+c$, $b+c > a$.

Un côté quelconque doit être plus petit que la somme des 2 autres, ce qui équivaut aux 2 conditions ci-dessus.

La formule $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ exige seulement que le radical soit réel. Or nous avons vu qu'on ne peut admettre 2 facteurs négatifs, et à fortiori 3, on doit donc avoir $p-a > 0$, $p-b > 0$, $p-c > 0$; &c. Même discussion pour le système (50).

60. Choix des formules. — 1^o pour le rapport de la brièveté du calcul. Les formules (48) & (49) exigent la recherche de 7 logarithmes, savoir ceux de p , $p-a$, $p-b$, $p-c$, a , b , c ; $\sin \frac{A}{2}$ &c. n'en exigent que 6, puisque p n'y paraît plus; $\tan \frac{A}{2}$ &c. 4 seulement, p , $p-a$, $p-b$, $p-c$; ces dernières ont donc la supériorité. 2^o pour le rapport de l'exactitude. Admettons, pour les comparer, que les log. à chercher soient tous en erreur de 2 unités du 7^e ordre; si que la recherche de l'angle soit au milieu de la table, vers 45°, où les variations logarithmiques des sinus et cosinus sont environ 220 unités du 7^e ordre, et celles des tangentes de 420. Alors 10" de différence dans l'arc sont produites par 220 unités du 7^e ordre, donc 1 unité produira $\frac{10''}{220} = \frac{1}{22}''$, et 2 unités $\frac{1}{11}''$, ce qui ne paraît pas d'aller au-delà des dixièmes de seconde. Pour les tg, 420 unités du 7^e ordre donnent une différence de 10", 1 unité donne alors $\frac{1}{42}''$ et 2 unités $\frac{1}{21}''$, ce qui est plus approximatif. La limite d'erreur est donc à peine $\frac{1}{21}''$ ou 0,05; on ne peut donc pas compter sur le chiffre des centièmes.

61. Calcul pratique. — Voici comment on emploie les formules (49). Remarquons que l'on a:

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}. \text{ Alors on pose } K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}; \text{ d'où:}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{K}{p-a}, \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{K}{p-b}, \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{K}{p-c}.$$

On a alors: $2 \log K = \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + C \log p - 10$, on en prend la moitié, et on a:

$$\log \tan \frac{A}{2} = \log K - \log(p-a); \text{ &c.}$$

62. Vérification. — En différents cas de résolution et vérifiant les uns par les autres, voici la méthode la plus simple.

Pour le 1^{er} cas, on vérifie par la formule $\tan \frac{A+B}{2} = \frac{a+b}{a-b} \tan \frac{A-B}{2}$;

pour le 2^e, 3^e, 4^e, id. --- $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$;

pour le 5^e, --- $A+B+C = 180^\circ$.

Surface.

63. La surface d'un triangle ABC est $\frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} c \cdot b \sin A$, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ (51),

ou la moitié du produit de 2 côtés par le sinus de l'angle compris.

Cette formule va nous donner, par des substitutions, la surface d'un triangle immédiatement en fonction des éléments connus dans les 4 cas.

1^{er} Cas. — On donne A, B, c . On a $B = \frac{c \sin B}{\sin C}$, d'où $S = \frac{1}{2} \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$ (52)

2^e Cas. — On donne a, b, C . La formule (51) est immédiatement applicable $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ (51 bis).

3^e Cas. — On donne a, b, A . On calcule d'abord C , puis on applique la formule (51 bis).

4^e Cas. — On donne a, b, c . La valeur de $\sin A$, tirée de (50) et substituée dans (51) donne:

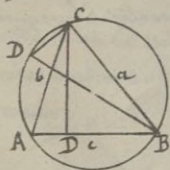
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (53)$$

Rayons des cercles
inscrit et circonscrit.

64. Le rayon r du cercle inscrit à un triangle se détermine par l'équation donnée par la géométrie élémentaire

$$S = pr, \text{ d'où } r = \frac{S}{p} \quad (54)$$

En menant le diamètre BD du cercle circonscrit au triangle ABC , et joignant CD , on a dans le triangle rectangle BCD , en appelant R le rayon du cercle circonscrit: $a = 2R \sin D = 2R \sin A$, A et D étant inscrits dans le même segment, ou $a = 2R \cdot \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4RS}{bc}$, d'où $R = \frac{abc}{4S}$ (55).



1^{er} Exemple. — On donne

$$\begin{cases} a = 2873^m 57 \\ b = 3001^m 75 \\ A = 31^\circ 27' 13'' \end{cases}$$

Calculer c, B, C et la surface S .L'angle A est aigu, et l'on a $a < b$, donc il y a 2 solutions.Calcul de B, C .Calcul de c .Calcul de S .

Résultats.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\log b = 3,4773746$$

$$\log \sin A = 1,7175008$$

$$\log a = 3,5415782$$

$$\log \sin B = 1,7736469$$

$$\log \sin B = 1,7736469$$

$$B' = 33^\circ 1' 49''$$

$$B'' = 146^\circ 58' 10''$$

$$C' = 11^\circ 30' 57''$$

$$C'' = 1^\circ 34' 56''$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\log a = 3,4584218$$

$$\log \sin C = 1,9554305$$

$$\log \sin A = 1,7175008$$

$$\log c = 3,6963413$$

$$c' = 4969^m 83$$

$$\log a = 3,4584218$$

$$\log \sin C'' = 1,4396006$$

$$\log \sin A = 1,7175008$$

$$\log c'' = 2,1801116$$

$$c'' = 151^m 538$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\log a = 3,4584218$$

$$\log b = 3,4773746$$

$$\log \sin C = 1,9554305$$

$$\log 2S = 6,8912269$$

$$2S' = 7784432^m 9$$

$$S' = 3892216^m 9$$

$$\log a = 3,4584218$$

$$\log b = 3,4773746$$

$$\log \sin C'' = 1,4396006$$

$$\log 2S'' = 5,3753970$$

$$2S'' = 237354^m 9$$

$$S'' = 118677^m 9$$

1^{re} solution.

$$C' = 4969,83$$

$$B' = 33^\circ 1' 49''$$

$$C' = 115^\circ 30' 57''$$

$$S' = 3892216$$

2^e solution.

$$C'' = 151,538$$

$$B'' = 146^\circ 58' 10''$$

$$C'' = 1^\circ 34' 56''$$

$$S'' = 118677$$

2^e Exemple. — On donne: $a = 315,27$, $b = 218,31$, $c = 139,74$. Calculer A, B, C et S .

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = Kp$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{K}{p-a} \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{K}{p-b} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{K}{p-c}$$

$$a = 315,27$$

$$p-a = 21,39$$

$$\log(p-a) = 1,3302108$$

$$\log K - \log(p-a) = \log \tan \frac{A}{2} = 0,2550276$$

$$\log K = 1,496$$

$$b = 218,31$$

$$p-b = 118,35$$

$$\log(p-b) = 1,0731683$$

$$\log K - \log(p-b) = \log \tan \frac{B}{2} = 1,1207024$$

$$\log K = 1,496$$

$$c = 139,74$$

$$p-c = 146,92$$

$$\log(p-c) = 1,2742848$$

$$\log K - \log(p-c) = \log \tan \frac{C}{2} = 1,2909484$$

$$\log K = 1,496$$

$$p = 673,52$$

$$p = 673,52$$

$$\log p = 2,828604$$

$$\log K - \log p = \log \tan \frac{A}{2} = 1,5852387$$

$$\log K = 1,496$$

$$\log S - \log p = \log K$$

$$S = Kp$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{K}{p-a} \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{K}{p-b} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{K}{p-c}$$

$$A = 121^\circ 51' 48''$$

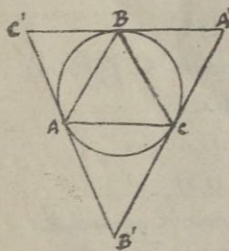
$$B = 36^\circ 1' 22''$$

$$C = 22^\circ 6' 49''$$

$$180^\circ 0' 0''$$

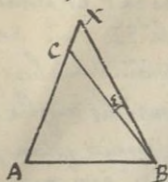
Exercices.

1. D'un point extérieur à un cercle on mène une sécante diamétrale, dont la partie extérieure est de 3^m; le rayon étendu de 2^m; puis une autre sécante dont la partie interceptée est de 3^m; calculer la partie extérieure, et l'angle que font les 2 sécantes.
2. Faire voir qu'entre la surface S , le rayon R du cercle circonscrit; r du cercle inscrit; r', r'', r''' des cercles ex-inscrits dans les 3 angles, on a les relations $S = \sqrt{r r' r'' r'''} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \cdot 4R = r' + r'' + r''' - r$.
3. Résoudre un triangle; connaissant les 3 hauteurs, ou les 3 rayons des cercles ex-inscrits.
4. On veut prendre, dans une forêt, sur une pointe formée par la jonction de deux routes, une surface de 2 hect. 50 ares; l'angle que font entre elles les 2 routes est de $36^\circ 32'$; on veut de plus que la ligne à tracer d'une route à l'autre pour détacher la surface demandée coupe l'une des deux routes à 225 mètres du point de leur rencontre. Sous quel angle cette ligne doit-elle être menée, et quelle sera la longueur prise sur l'autre route?
5. Résoudre un triangle; connaissant le périmètre et les angles. Rép. $a = \frac{p \sin A}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$, &c.
6. Déterminer la surface d'un triangle, connaissant $A, B, a+b$.
7. Résoudre un triangle; connaissant la surface et les angles. Rép. $a = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}}$, &c.
8. On donne le rapport $\frac{AB}{BC} = \lambda$, $\frac{A'C'}{B'C'} = \mu$, dans un triangle ABC et un autre $A'B'C'$, l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même circonférence dont le rayon est pris pour unité, et le 2^e triangle passant par les sommets du 1^{er}; Résoudre le triangle $A'B'C'$; dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$.
9. Résoudre un triangle ABC , connaissant le volume V qu'il engendre en tournant autour d'une parallèle au côté BC menée par le sommet A . $A = 39^\circ 27' 28''$; $B = 58^\circ 12' 37''$; $V = 729$. Rép. $c = \sqrt[3]{\frac{3V \sin C}{\sin A \sin B}}$, &c.
10. Maximum des triangles inscrits dans le même segment. Rép. Triangle isocèle.
11. Surface d'un parallélogramme et d'un trapèze en fonction de ses 4 côtés; d'un quadrilatère en fonction des segments des diagonales et de leur angle; surface et diagonales d'un quadrilatère inscriptible.
12. Mener à l'horizon un angle dont on connaît les angles de chaque côté avec la verticale.



§9. Applications de la Trigonométrie aux diverses questions du Levé des Plans.

Distance d'un point
accessible à un point inaccessible



66. Soit à déterminer la distance d'un point accessible A à un point inaccessible X. On jalonne et on mesure une longueur AB dans une direction arbitraire sur le terrain; puis, plaçant le graphomètre successivement en A et en B, on mesure les angles BAX et ABX. On a alors tous les éléments nécessaires pour déterminer par le calcul le côté AX du triangle ABX (1^{re} cas de résolution des triangles obliquangles):

$$AX = AB \frac{\sin ABX}{\sin(A+ABX)}$$

Voilà quelle est, dans une direction déterminée, c.à.d. d'un angle A étant constant, quelle est la longueur la plus convenable à choisir pour que l'erreur relative commise sur la longueur AX à mesurer, résultant d'une erreur constante $\epsilon = \angle BXC$ relative à chaque observateur dans la mesure d'un angle quelconque, soit minimum; cette erreur est $\frac{\epsilon X}{AX}$. Or on a:

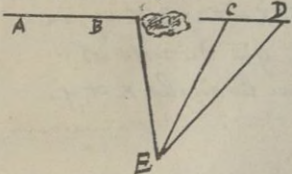
$$CX = BX \frac{\sin \epsilon}{\sin(A+B-\epsilon)}, \text{ et } AX = BX \frac{\sin B}{\sin A}.$$

$$\frac{\epsilon X}{AX} = \frac{\sin A \sin \epsilon}{\sin B \sin(A+B-\epsilon)}$$

Pour que cette quantité soit minimum, il faut que le dénominateur soit maximum; or il peut se remplacer par (form. 27 bis du n° 30) $\frac{1}{2} \{ \cos(A-\epsilon) - \cos(A+B-\epsilon) \}$; il faut donc que

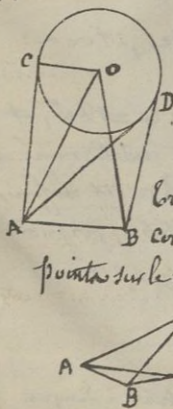
$\cos(A+B-\epsilon)$ soit aussi petit que possible, c.à.d. que $A+B-\epsilon = 180^\circ$, ou que la somme $A+B = \alpha$ soit peu près 180° . Mais, comme $A+B+X = 180^\circ$, il en résulte que B doit être égal à α peu près à X, donc que AB soit aussi voisin que possible d'être égal à AX. D'ailleurs, un angle est d'autant mieux déterminé que les côtés se rapprochent davantage de la perpendicularité; mais, comme les 3 angles ne peuvent être égaux à 90° dans un triangle, il faut qu'ils soient le plus grande possible, c.à.d. d'environ 60° , pour être dans les conditions les plus favorables. On fera donc bien de choisir la direction de la base AB d'après cette considération, et le triangle équilatéral sera la forme dont on devra chercher à se rapprocher le plus possible. Dans la pratique, on ne choisit jamais l'angle de triangle qui soit au-dessous de 30° .

Prolonger un alignement au
delà d'un obstacle.



67. Soit à prolonger un alignement au-delà d'un obstacle qui arrête la vue, AB. On trace dans une direction arbitraire un alignement BE, mais de façon que, placé à une certaine distance, en E, par ex., on aperçoive le terrain au-delà de l'obstacle; alors on mesure au graphomètre l'angle ABE, et on chaîne BE. Puis, plaçant de nouveau le graphomètre en E, on place le O dans la direction EB, et on vise au-delà de l'obstacle, en faisant jaloner la ligne visée EC. Dans le triangle BCE (C étant sur le prolongement de AB), on connaît BE, l'angle en B $= 180^\circ - ABE$, et l'angle E, ce qui permettra de déterminer par le calcul la longueur EC, que l'on portera ensuite sur le terrain, et qui déterminera un point C de l'alignement AB. On en aura de même un 2^e point D; et, jalonnant CD, on pourra continuer de l'autre côté de l'obstacle l'alignement en question.

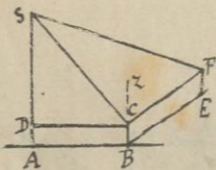
Diamètre d'un bassin
circulaire, dont on ne peut
approcher.



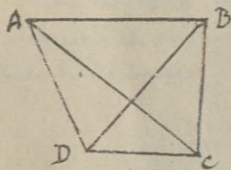
68. Pour déterminer le diamètre d'un bassin circulaire, dont on ne peut approcher, on mesure une base AB, jalonnée arbitrairement sur le terrain, d'une longueur convenable en regard au diamètre à mesurer. De l'extrémité A on mène des rayons visuels tangents à droite et à gauche à la circonférence du bassin, on fixe le zéro du graphomètre dans la direction du 1^{er} rayon visuel, et l'alidade dans la 2^e; ce qui donne l'angle CAD; on en prend la moitié, et on mesure de même CAB, dont on retranche cette moitié, ce qui donne l'angle OAB (O étant le centre). On fait de même au point B, et on a l'angle OBA. Dans le triangle OAB, on peut alors calculer AO; et, par suite, dans le triangle rectangle OCA, on calculera le rayon OC.

69. Soient donnés 3 points A, B, C, d'un cercle, on propose de déterminer un 4^e point quelconque du cercle qui passe par les 3 premiers. On fait avec BA un angle quelconque sur le terrain au moyen de l'alignement AX dont on mesure l'angle avec AB; et le point de cet alignement, X, qui est sur le cercle, forme avec AB un triangle dans lequel l'angle $X = ACB$. On mesurera donc ce dernier, et on mènera par B un alignement faisant avec AB un angle $ABX = 180^\circ - (C+BAX)$.

Hauteur d'un point au-
dessus de l'horizon.

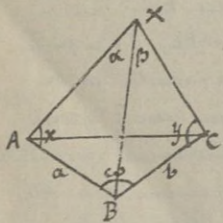


Distance de deux points
inaccessibles.



mener par un point
accessible une parallèle
à une droite inaccessible.

Trois points étendus sur
un terrain uni et rappor-
té sur une carte, retrouver
le point d'où leurs distances
ont été vues sous des angles
donnés (Problème de
la Carte).



70. Soit à trouver la hauteur d'un point S au-dessus de l'horizon, du sommet d'une tour par ex. ou du sommet d'une montagne. Si le pied A est accessible, on mesurera sur le terrain ^{horizontal} une base AB convenablement proportionnée à la hauteur que l'on a à mesurer; on placera en B le graphomètre de façon que son limbe soit vertical, la ligne d'étain horizontale, et on mesurera, en visant le sommet S, l'angle du rayon visuel CS avec la verticale Cx, lequel est égal à CSD. Alors on connaîtra, dans le triangle rectangle CDS, CD = AB et l'angle CSD. On pourra donc calculer SD, et ajoutant la hauteur BC de l'instrument on aura SA. — Si l'on ne peut approcher du pied A, on mesure sur le terrain une base BE; on transportera l'instrument en B et en E, on mesurera les angles SCZ = CSD et SCF, CF étant égale, et parallèle à BE, ainsi que l'angle CFS. On pourra alors calculer CS, et de là SD, d'où SA.

71. Soit à trouver la distance de 2 points inaccessibles, A et B. On mesure sur le terrain une base convenable DC; puis, établissant le graphomètre successivement en D et en C, on mesure les angles ADB, BDC, ADC (qui est égal à la somme des autres si les 4 points A, B, C, D, sont dans un même plan, d'où résulte en passant un moyen de s'assurer que les points sont dans un même plan), ACD, BCD. Alors, dans le triangle ADC, on connaît DC et les 2 angles adjacents, on pourra donc calculer DA, ou plutôt son logarithme; dans le triangle BCD, on pourra de même calculer log DB. Il est inutile de prendre les nombres correspondants; car, dans le triangle ADB, on connaîtra l'angle ADB et les logarithmes des côtés qui le comprennent, car particulier du 2^e cas de résolution des triangles obliquangles. On pourra donc calculer AB. On aurait pu aussi calculer cette distance au moyen du triangle ACB, en mesurant alors l'angle BCD; et, en calculant AB par les deux procédés, on a une vérification ^{général}.

72. Soit à mener par le point D une parallèle à la droite inaccessible AB. On mesurera, comme dans le problème précédent, une base DC, &c., et dans le triangle ABD, on calculera l'angle BAD. Établissant alors le graphomètre en D, on visera le point B, et l'on établira la ligne DE dans cette direction; on visera alors suivant une direction DE faisant avec cette dernière un angle supplémentaire de celui qu'on vient de calculer; il ne restera plus qu'à jalonner suivant la ligne de visée.

73. Soient donnés 3 points A, B, C, étendus sur un terrain uni; proposons-nous d'y retrouver le point X, d'où les distances AB = a et BC = b ont été vues sous des angles donnés α et β . Le point X sera déterminé par l'intersection de 2 segments décrits sur AB et BC, capables respectivement des angles α et β ; par le calcul, il sera fourni par la connaissance des angles BAX = x et BCX = y , ou de l'un d'eux en même temps que de la distance correspondante AX ou CX, qui du reste est facile à déterminer lorsqu'on a l'angle x ou l'angle y . Calculons donc les angles x et y . On a d'abord, en désignant par ω l'angle ABC:

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \omega) \quad (a).$$

Égalant les valeurs de BX dans les 2 triangles ABX, BCX, on a:

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$$

Posons $\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \text{tg } \varphi$ (b), il viendra:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\text{tg } \varphi - 1}{\text{tg } \varphi + 1} = \text{tg } (\varphi - 45^\circ),$$

d'où: $\text{tg } \frac{1}{2}(x - y) = \text{tg } (\varphi - 45^\circ) \quad \text{tg } \frac{1}{2}(x + y) = \text{tg } \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \omega).$ (c).

Les équations (a), (b), (c) détermineront x et y .

Si $\varphi < 45^\circ$, ou $b \sin \alpha < a \sin \beta$, on change les signes des 2 membres de (c), et on a:

$$\text{tg } \frac{1}{2}(y - x) = \text{tg } (45^\circ - \varphi) \quad \text{tg } \frac{1}{2}(x + y) = \text{tg } \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \omega) \quad (c \text{ bis}).$$

Noter. — Comme cas particulier, si le quadrilatère ABCX est inscriptible, $\alpha + \beta + \omega = 180^\circ$, et les 2 segments qui déterminent le point X se confondent: le problème est indéterminé. L'algèbre l'indique aussi; car, dans la formule (c), le 2^e facteur du 1^{er} membre est infini, puisque $x + y = 180^\circ$, et le 1^{er} est nul: en effet, si le quadrilatère est inscriptible, joignons AC, l'angle CAB = β , et ACB = α ; et, dans le triangle ABC, on a: $\frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \alpha}$, ou $a \sin \beta = b \sin \alpha$, $\text{tg } \varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ$, $\text{tg } (\varphi - 45^\circ) = 0$.

Fin.



Ouvrages de M^o. Carême.

Cours autographe d'Algèbre élémentaire, 5, ^F 50

Cours — id — de Trigonométrie rectiligne, ... 3, ^F 50

Les autres parties du Cours complet de mathématiques élémentaires
paraîtront successivement.
