

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej



ALEKSANDRA RUTKOWSKA

---

OPTYMALIZACJA PORTFELA PAPIERÓW  
WARTOŚCIOWYCH W ŚWIETLE TEORII  
WIARYGODNOŚCI LIU

---

ROZPRAWA DOKTORSKA

*Promotor:*  
PROF. DR HAB. MARIAN MATŁOKA

*Promotor pomocniczy:*  
DR MARCIN BARTKOWIAK

POZNAŃ 2014

# Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Stopa zwrotu a niepewności inwestycji kapitałowych</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1 Typologia niepewności . . . . .	9
1.1.1 Pojęcie ryzyka i niepewności . . . . .	9
1.1.2 Klasyfikacje niepewności . . . . .	10
1.2 Implementacja niepewności i ryzyka w ocenie inwestowania . . . . .	15
1.2.1 Podejście losowe . . . . .	16
1.2.2 Podejście rozmyte . . . . .	18
1.2.3 Podsumowanie . . . . .	21
<b>2. Koncepcja rozmytej stopy zwrotu</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1 Miary rozmyte . . . . .	23
2.2 Pojęcie zmiennej rozmytej . . . . .	25
2.2.1 Rozkład wiarygodności . . . . .	27
2.2.2 Funkcja przynależności zmiennej rozmytej . . . . .	27
2.3 Rozmyta stopa zwrotu . . . . .	33
2.3.1 Wartość oczekiwana . . . . .	35
2.3.2 Miary niepewności . . . . .	35
2.3.3 Rozmyta symulacja . . . . .	40
2.4 Metody wyznaczania rozmytej stopy zwrotu . . . . .	42
2.4.1 Podejście eksperckie . . . . .	44
2.4.2 Podejście statystyczno-częstościowe . . . . .	46
2.4.3 Interpolacja ciągłej funkcji przynależności . . . . .	53
<b>3. Zadania optymalizacji portfela inwestycyjnego</b> . . . . .	<b>55</b>
3.1 Zadania wykorzystujące miary niepewności i zysku . . . . .	57
3.1.1 Zadania wykorzystujące miary rozproszenia . . . . .	57
3.1.2 Miary entropijne . . . . .	61
3.1.3 Zadania bazujące na miarach wiarygodności i kryteriach bezpieczeństwa . . . . .	64
3.1.4 Podsumowanie . . . . .	68
3.2 Zadania wykorzystujące miary stosunku do niepewności i preferencje inwestora . . . . .	68
3.2.1 Zadanie średnia-ryzyko . . . . .	69
3.2.2 Zadania minimalizacji żalu . . . . .	70
3.2.3 Zadanie maksymalizacji satysfakcji inwestora . . . . .	73
3.2.4 Podsumowanie . . . . .	81
<b>4. Koncepcja badania i opis danych</b> . . . . .	<b>82</b>
4.1 Cele i plan badania . . . . .	82
4.2 Badanie ankietowe wśród inwestorów indywidualnych . . . . .	84

4.2.1	Charakterystyka inwestorów . . . . .	84
4.2.2	Ankieta <i>Wybór portfela akcji — kryteria i preferencje inwestorów</i> . . . . .	86
4.3	Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik optymalizacji . . . . .	86
4.4	Badanie wpływu przyjętej metody wyznaczania funkcji przynależności na wyznaczone rozmyte stopy zwrotu . . . . .	89
4.5	Badanie empiryczne zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego. . . . .	90
4.6	Syntetyczna miara oceny zadań optymalizacji . . . . .	96
<b>5.</b>	<b>Analiza wyników badania . . . . .</b>	<b>102</b>
5.1	Badanie ankietowe inwestorów indywidualnych . . . . .	102
5.2	Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik optymalizacji . . . . .	114
5.2.1	Badanie analityczne . . . . .	114
5.2.2	Badanie empiryczne . . . . .	125
5.3	Badanie wpływu przyjętej metody wyznaczania funkcji przynależności na wyznaczone rozmyte stopy zwrotu . . . . .	130
5.4	Badanie empiryczne zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego . . . . .	133
5.4.1	Badanie A . . . . .	133
5.4.2	Badanie B . . . . .	143
5.4.3	Badanie C . . . . .	150
5.4.4	Badanie D . . . . .	157
5.4.5	Podsumowanie . . . . .	163
5.5	Syntetyczna ocena zadań optymalizacji . . . . .	164
	<b>Zakończenie . . . . .</b>	<b>166</b>
	<b>A. Test rang Wilcoxona . . . . .</b>	<b>169</b>
	<b>B. Ankieta <i>Wybór portfela akcji — kryteria i preferencje inwestorów</i> . . . . .</b>	<b>171</b>
	<b>C. Ankieta — wyniki . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>D. Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności — wyniki . . . . .</b>	<b>200</b>
	<b>E. Badanie różnic funkcji przynależności — wyniki . . . . .</b>	<b>202</b>
	<b>F. Badanie empiryczne — wyniki . . . . .</b>	<b>229</b>

# Wstęp

Podstawowym celem każdej inwestycji finansowej jest maksymalizacja dochodu uzyskanego z jej realizacji. Intensywny wzrost obrotów na rynkach finansowych spowodował szybki rozwój badań z obszaru optymalizacji portfela inwestycyjnego. Badania te skupiają uwagę głównie na mierzeniu ryzyka związanego z inwestycją i maksymalizacją zysków z niej płynących. Problem optymalizacji portfela inwestycji, od czasu opublikowania przez Markowitza podstaw analizy portfelowej, jest szeroko przedstawianym zagadnieniem z obszaru inwestowania na rynkach kapitałowych. Jednak, jak pokazały doświadczenia, inwestorzy nie stosują się w ścisły sposób do reguł przedstawionych w normatywnych modelach rynku. W praktyce gospodarczej dane dostępne decydentowi są nie tylko losowe, ale niedokładne, często wyrażane w postaci przybliżonej, a nawet lingwistycznej, co świadczy o występowaniu zazwyczaj więcej niż jednego typu niepewności jednocześnie. Badania nad ryzykiem i niepewnością zaowocowały opracowaniem różnych zadań optymalizacji decyzji inwestycyjnych: od klasycznych opartych na rachunku prawdopodobieństwa, poprzez bazujące na teorii zbiorów przybliżonych oraz teorii ewidencji Dempstera-Shefera, aż do teorii generalizujących opartych na teorii zbiorów rozmytych. Różnice pomiędzy podejściami wiążą się z różnymi miarami szansy przyjęcia przez stopę zwrotu danej wartości. W pracy omówione zostanie zagadnienie optymalizacji portfela bazujące na nowym i dynamicznie rozwijającym się podejściu opartym na mierze wiarygodności.

**Cel i hipotezy badawcze.** Celem pracy jest synteza elementów teorii zmiennej rozmytej w ujęciu teorii wiarygodności Liu na potrzeby analizy portfelowej. Dotychczasowe publikacje z zakresu analizy portfelowej w tym ujęciu pomijają często istotne elementy z punktu widzenia nauki i inwestora. Powoduje to brak spójności w teorii i trudności w empirycznych zastosowaniach. Istotne dla zrealizowania celu głównego są następujące cele pomocnicze pracy:

1. Klasyfikacja niepewności w ujęciu konsensualnym.
2. Określenie metodyki wyznaczania funkcji przynależności i wiarygodności zmiennej rozmytej.
3. Zaproponowanie jednokryterialnego, rozumianego intuicyjnie, modelu optymalizacji.
4. Porównanie i analiza rozmytych zadań optymalizacji portfela.

Cel pierwszy będzie zrealizowany za pomocą studiów literaturowych. Na ich podstawie sformułowana zostanie odpowiedź na pytanie: czy na podstawie dostępnej literatury można uzyskać spójną typologię pojęcia niepewności i ryzyka? Dla realizacji celu drugiego postawiono sobie pomocnicze pytania badawcze:

- Jak wyznaczyć funkcję przynależności rozmytej stopy zwrotu?
- Czy kształt funkcji przynależności ma wpływ na wynik zadań optymalizacji portfela?
- Czy przybliżenie różnych kształtów kształtem liniowym wpływa istotnie na zmianę udziałów w wyznaczanym portfelu?

Osiągnięcie celu trzeciego będzie możliwe po uzyskaniu odpowiedzi na pytania:

- w jaki sposób inwestorzy wybierają akcje do portfela?
- Czy można skonstruować jednokryterialne zadanie optymalizacji portfela akcji?
- Jak odzwierciedlić w zadaniu optymalizacji preferencje inwestora?

Cel czwarty będzie realizowany poprzez odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

- Które z zadań optymalizacji portfela są równoważne i przy jakich założeniach?
- W jaki sposób określić skuteczność zadań optymalizacji i jakimi kryteriami ją oceniać?
- Czy można określić, które z proponowanych zadań ma większą skuteczność?
- Czy zadania optymalizacji uwzględniające preferencje inwestorów są równie skuteczne, co zadania oparte na miarach niepewności i zysku?

Uzyskane odpowiedzi na powyższe pytania pozwolą zweryfikować następującą hipotezę badawczą: *zmienna rozmyta w ujęciu teorii wiarygodności jest skutecznym aparatem formalnym opisu przyszłej stopy zwrotu w celu optymalizacji portfela aktywów finansowych*. Pod pojęciem skuteczny aparat formalny rozumiemy rozwiązanie, które spełnia następujące trzy kryteria: oparte jest na spójnej teorii, niesie wartość informacyjną oraz generuje zyski powyżej benchmarku. Ponadto, formułujemy trzy hipotezy częściowe. Pierwsza z nich odnosi się do stwierdzenia, że inwestorzy kierują się intuicją w podejmowaniu decyzji. Potwierdzenie tej hipotezy można uznać za jeden z argumentów w debacie na temat użyteczności modeli optymalizacji. Druga głosi, że zadania wykorzystujące miary stosunku do ryzyka oraz preferencje inwestorów są równie skuteczne, co zadania minimalizacji straty i maksymalizacji zysku. W związku z przyjętym podejściem rozmytym formułujemy również hipotezę, że w przypadku rozmytych modeli optymalizacji portfela rozmyte stopy zwrotu można przybliżyć trójkątną liczbą rozmytą.

**Obszary poznawcze.** W pracy wyróżnić zatem można trzy obszary poznawcze: charakterystyka inwestorów w Polsce, rozwój analizy portfelowej oraz teorii rozmytej optymalizacji portfela.

Obecnie, głównymi źródłami wiedzy w pierwszym obszarze są raporty GPW oraz Ogólnopolskie Badanie Inwestorów (OBI). W obu badaniach pominięte jest sprawdzenie i ocena używanych metod optymalizacji portfela. Z tego powodu, w ramach pracy, przeprowadzono badanie poświęcone głównie tematowi analizowania i oceny portfela, sprawdzające znajomość i wykorzystywanie podstawowych miar ryzyka i zysku. Na podstawie tej analizy przygotowano jakościową ocenę istniejących zadań optymalizacji portfela i wysunięto wnioski o ich przystępności dla inwestorów.

W drugim obszarze istotnym elementem pracy jest określenie nowych kryteriów optymalizacji, rozumianych intuicyjnie oraz zdefiniowanie jednokryterialnego zadania. Według badania Fundacji Kronenberga *Postawy Polaków wobec oszczędzania*<sup>1</sup> z roku 2013, jedynie 6% Polaków inwestuje swoje pieniądze. Odsetek takich osób zmniejszył się w stosunku do roku poprzedniego aż o 6 punktów procentowych. Zarówno wyniki badania fundacji jak i badania OBI oraz ankiety przeprowadzonej na potrzeby rozprawy potwierdzają niski stan wiedzy ekonomicznej oraz niską użyteczność analizy portfelowej nawet wśród aktywnych inwestorów. Z tego powodu od nowych rozwiązań należałoby wymagać przede wszystkim prostoty i intuicyjności. W pracy zaproponowane zostało zadanie maksymalizacji satysfakcji z inwestycji. Pod pojęciem satysfakcji rozumiemy w tym przypadku stopień podobieństwa uzyskanego wyniku z inwestycji do oczekiwań, przy czym *ex ante* będzie to podobieństwo oczekiwań inwestora, wyrażonych zbiorem rozmytym, do wiarygodności wystąpienia poszczególnych stóp zwrotu różnych portfeli. Wykorzystanie zbiorów rozmytych pozwoli na wyznaczenie preferencji, a skorzystanie z indeksu podobieństwa zaproponowanego przez Tverskiego wprowadzenie parametru awersji do ryzyka i parametru żalu, określającego odpowiednio wagę bezpieczeństwa inwestycji lub skupienia uwagi na możliwości wysokich zysków.

Praca będzie miała również wkład w rozwój rozmytej optymalizacji portfela w oparciu o teorię wiarygodności Liu, opublikowanej w 2004 roku. W opublikowanych dotychczas pracach na temat zadań optymalizacji przyjęte zostaje założenie o niezależności zmiennych rozmytych, przykładowe obliczenia są wykonywane przy arbitralnie lub symulacyjnie ustalanych funkcjach najczęściej kształtu trójkątnego. W pracy podjęto próbę udowodnienia niezależności rozmytych stóp zwrotu przy przyjętym podejściu. Podejście rozmyte charakteryzuje się znaczną dowolnością w wyborze operatorów logicznych, kształtów funkcji, a nawet różnych definicji działań matematycznych, właściwych dla poszczególnych zastosowań. nierozwiązanym problemem w przypadku analizy portfelowej, utrudniającym empiryczne testowanie zadań, jest niewątpliwie problem wyznaczenia algorytmu generowania funkcji przynależności zmiennej rozmytej. Z tego powodu podjęto się zbadania wpływu zmiany kształtu zmiennej rozmytej na wyniki optymalizacji oraz określenia metodyki wyznaczania funkcji przynależności.

**Metodyka.** Pierwszy cel pomocniczy zostanie zrealizowany poprzez analizę literatury. Dostępna literatura przedmiotu obejmuje publikacje z zakresu: teorii inwestycji, zbiorów rozmytych ze szczególnym uwzględnieniem teorii wiarygodności, teorii psychologii inwestowania, ale również wybranych pozycji z dziedziny przetwarzania obrazów i języka naturalnego. Realizacja kolejnych celów obok studiów literaturowych opiera się na badaniach analitycznych oraz empirycznych. Za podstawową metodykę badań przyjęto metodę naukowych programów badawczych zaproponowaną przez Lakatosa. Ocena metod optymalizacji zawiera również elementy instrumentalizmu, gdyż skuteczność oceniana jest między innymi poprzez wyniki wyznaczonych portfeli w okresach testowych oraz użyteczności. Ponadto użyta zostanie metoda dedukcji przy badaniu niezależności zmiennych oraz analitycznym określeniu warunków optymalności. Szczegółowy opis badań i metod w nich zastosowanych został przedstawiony w osobnym rozdziale.

---

<sup>1</sup><http://www.citibank.pl/poland/kronenberg/polish/10199.htm>

**Struktura rozprawy.** Struktura rozprawy obejmuje wstęp, sześć rozdziałów oraz zakończenie, a także aneks stanowiący uzupełnienie danych zawartych w części badawczej pracy.

Pierwszy rozdział ma charakter teoretyczny i stanowi punkt wyjścia dla dalszych rozważań. Przybliżona została w nim problematyka modelowania niepewności i przedstawiania jej w problemach optymalizacji portfela. Przedstawiono w nim zagadnienia związane ze stopą zwrotu i niepewnością inwestycji kapitałowych. Omówiono typologię niepewności oraz podjęto próbę syntezy klasyfikacji prezentowanych w literaturze. Zaprezentowano również przegląd metod implementacji niepewności i ryzyka.

W rozdziale drugim scharakteryzowano koncepcję rozmytej stopy zwrotu w ujęciu teorii wiarygodności Liu. Przedstawiono w nim podstawy teoretyczne zmiennej rozmytej zdefiniowanej na przestrzeni wiarygodności, a następnie wprowadzono pojęcie rozmytej stopy zwrotu z uwzględnieniem miar niepewności. Ponadto przybliżona została także metodyka jej wyznaczania.

Przedmiotem rozważań rozdziału trzeciego stały się zadania optymalizacji portfela inwestycyjnego. Zadania rozpatrzono w podziale na zadania wykorzystujące miary niepewności oraz te wykorzystujące miary stosunku do niepewności i preferencje inwestora. Zaprezentowane zostały również przykłady dla poszczególnych zadań. W drugiej grupie zaproponowano również autorski model optymalizacji w oparciu o miarę satysfakcji.

Rozdziały czwarty i piąty mają w całości charakter badawczy. W rozdziale czwartym przedstawiono szczegółowo plan i koncepcję badania. W pierwszej części scharakteryzowano dane wykorzystane w badaniu. Następnie przedstawiono poszczególne etapy badania. W ostatniej części została zaproponowana syntetyczna miara oceny zadań uwzględniająca różne kryteria od złożoności obliczeniowej po skuteczność empiryczną.

Rozdział piąty zawiera analizy wyników badań. Podsumowano badanie ankietowe inwestorów indywidualnych. Następnie przeanalizowano wyniki badania wpływu kształtu funkcji przynależności na wyniki optymalizacji, zarówno analitycznie jak i empirycznie. W kolejnym kroku na danych rzeczywistych zbadano wpływ przyjętej metody wyznaczania funkcji przynależności na wyznaczone rozmyte stopy zwrotu. Opierając się na wynikach badań wstępnych, zbudowano portfele dla rozważanych zadań optymalizacji i sprawdzono stopy zwrotu uzyskane w trakcie okresów testowych. W podsumowaniu podjęto próbę syntetycznej oceny zadań optymalizacji.

W zakończeniu przedstawiono najważniejsze rezultaty rozprawy, na podstawie których sformułowano wnioski.

Niniejsza rozprawa doktorska powstała w ramach projektu badawczego Narodowego Centrum Nauki nr 2013/09/N/HS4/03761 pt. *Rozmyta optymalizacja portfela papierów wartościowych w świetle teorii wiarygodności z uwzględnieniem oczekiwań inwestorów*, z wykorzystaniem Infrastruktury PL-Grid i w ramach grantu obli-

czeniowego *Optymalizacja portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem rozmytej stopy zwrotu.*

Szczególne podziękowania kieruję do mojego promotora prof. dr. hab. Mariana Matłoki oraz promotora pomocniczego dr. Marcina Bartkowiaka, za okazywaną pomoc, cierpliwość i wyrozumiałość. Dziękuję również uczestnikom Seminarium Katedry Matematyki Stosowanej za cenne uwagi oraz rodzinie za wsparcie.



# Rozdział 1

## Stopa zwrotu a niepewności inwestycji kapitałowych

Następstwem dynamicznego rozwoju rynków kapitałowych jest równie prężny rozwój metod zarządzania ryzykiem a także mnogość podejść do zagadnienia niepewności inwestycyjnej. Niepewność, jako nierozzerwalna część gospodarczej działalności człowieka, stała się również jednym z najważniejszych pojęć w naukach ekonomicznych. W niniejszym rozdziale zostaje podjęta próba usystematyzowania pojęć ryzyka, niepewności inwestycji kapitałowych, jak również różnych podejść do jej modelowania.

W literaturze funkcjonują następujące definicje inwestycji.

Encyklopedia PWN <sup>1</sup> definiuje inwestycję jako *nakłady dokonywane w celu stworzenia lub zwiększenia środków trwałych, przyczyniające się do wytworzenia dla przyszłego spożycia strumienia dóbr i usług.*

Jajuga [Jaj08] określa inwestycję jako wyrzeczenie się bieżącej konsumpcji dla przyszłych niepewnych korzyści.

W świetle art. 3 ust. 1 pkt 17 ustawy z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości, *inwestycje są to aktywa, które jednostka posiada w celu osiągnięcia z nich korzyści ekonomicznych.* Korzyści te mogą wynikać z przyrostu wartości tych aktywów, z uzyskania z nich przychodów w formie odsetek, dywidend (udziałów w zyskach) lub innych pożytków, w tym również z transakcji handlowej.

Do inwestycji należy zaliczyć inwestycje w aktywa niefinansowe i w instrumenty finansowe. W pracy omówiona zostanie optymalizacja decyzji dotyczących inwestycji finansowych. W przytoczonych definicjach podkreśla się, że celem inwestycji jest korzyść ekonomiczna. Zyski z inwestycji określa się najczęściej poprzez stopę zwrotu. Jednookresowa stopa zwrotu  $r$  z inwestycji, określa całkowity dochód wyrażony w procentach początkowej wartości, jaki inwestor otrzymałby w okresie inwestycyjnym [Fra00].

$$r = \frac{(\text{wartość końcowa}) - (\text{wartość początkowa})}{\text{wartość początkowa}} \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup><http://encyklopedia.pwn.pl/szukaj.html?co=&search=inwestycja&x=0&y=0> dostęp dnia 02.07.2013 r.

W momencie podejmowania decyzji inwestycyjnej nieznana jest wartość końcowa inwestycji, co implikuje niepewność przyszłych stóp zwrotu. Ta niewiedza dyktuje konieczność przewidywania zdarzeń i ich skutków w przyszłości. Klasyczna szkoła ekonomii uznaje ryzyko za składnik normalnych kosztów działalności a A. Smith jak i D. Ricardo zaznaczali również, że ponoszący ryzyko oczekuje w zamian wynagrodzenia. W literaturze najczęściej wskazywanymi źródłami niewiedzy, co do wyniku inwestycji finansowej są (por. [Jaj08], [Ost03]):

- makro gospodarka, a więc:
  - zmieniające się stopy procentowe powodujące zmiany wymaganych przez inwestorów stóp dochodu, co wpływa na zmiany cen instrumentów finansowych;
  - zmiana stopy inflacji powodująca zmianę siły nabywczej dochodu z inwestycji;
  - zmiany polityczne w postaci nowych praw i obowiązków a w kontekście relacji międzynarodowych odnoszące się również do konfliktów politycznych;
- rynek kapitałowy, w szczególności:
  - ogólna sytuacja na rynku (rynek byka lub rynek niedźwiedzia);
  - niebezpieczeństwo niskiej płynności obrotu instrumentu na rynku powodujące trudności z jego zbyciem po spodziewanej cenie;
- emitent instrumentu finansowego poprzez:
  - ryzyko niedotrzymania warunków;
  - niewłaściwe zarządzanie spółką emitującą prowadzące do spadku cen;
  - zmienność dochodów wpływająca na jego cenę i dochody inwestorów;
  - niebezpieczeństwo bankructwa;
- asymetria i niepełność informacji inwestora.

Każda inwestycja związana jest nierozzerwalnie z podjęciem ryzyka. Powszechnie pojęcia ryzyka i niepewności używane są jako synonimy, jednak w literaturze naukowej definiuje się je odmiennie. Należy przyjąć, że z punktu widzenia semantycznego, definiowanie ryzyka jako niepewności pojawienia się przyszłych zdarzeń jest niepoprawne. W kolejnym podrozdziale zostaną przedstawione różne podejścia typologiczne pojęcia niepewności.

## 1.1 Typologia niepewności

### 1.1.1 Pojęcie ryzyka i niepewności

Słownik Języka Polskiego PWN<sup>2</sup> wskazuje na trzy znaczenia słowa ryzyko:

1. *możliwość, że coś się nie uda,*
2. *odważenie się na takie niebezpieczeństwo,*

---

<sup>2</sup><http://sjp.pwn.pl/szukaj/ryzyko> dostęp 02.07.2013 r.

3. *prawdopodobieństwo powstania szkody obciążające osobę poszkodowaną niezależnie od jej winy, jeśli umowa lub przepis prawny nie zobowiązały innej osoby do wyrównania szkody.*

Etymologia słowa *ryzyko* prowadzi do włoskiego *risicare* oznaczające *odważyć się*, a więc w tym znaczeniu należy wiązać je z wolnym wyborem. Ryzyko może być rozumiane:

- negatywnie — jako zagrożenie (znaczenie 1 i 3), oznacza możliwość nieosiągnięcia oczekiwanego efektu,
- neutralnie — jako zagrożenie i szansa (znaczenie 2), oznacza możliwość uzyskania efektu różniącego się od oczekiwanego.

Ten sam słownik definiuje słowo *niepewny* jako:

1. *zawierający ryzyko lub trudny do przewidzenia,*
2. *taki, którego zaistnienie budzi wątpliwości,*
3. *taki, na którym nie można polegać,*
4. *niepotwierdzony,*
5. *niemający pewności co do czegoś,*
6. *świadczący o wahaniu lub nieśmiałości.*

Z tych definicji można wywnioskować, że ryzyko jest to pojęcie, które określa sytuację wyboru, a niepewność jest natomiast stanem umysłu, w którym ktoś nie jest pewny prawdziwości danego zdania lub nie jest pewny skutków jakiegoś działania. Ryzyko jest wskaźnikiem stanu lub zdarzenia, które może prowadzić do strat. Niepewność jako stan umysłu definiował także noblista Kenneth Arrow[Arr51], rezygnując jednak z określania związku między tym stanem umysłu a rzeczywistym prawdopodobieństwem losowych zdarzeń.

### 1.1.2 Klasyfikacje niepewności

**Klasyczna teoria decyzji.** w teorii decyzji ze względu na posiadane informacje, problemy decyzyjne dzielimy na pięć grup:

- Podejmowane w warunkach pewności — gdy każda decyzja pociąga za sobą określone, znane konsekwencje. Inwestorzy dysponują wszystkimi koniecznymi informacjami i skutek decyzji inwestycyjnych jest całkowicie określony. Za przykład takich inwestycji podaje się obligacje skarbowe o stałej stopie, jako najbezpieczniejszy instrument na rynku finansowym, choć i one są narażone na ryzyko stopy procentowej czy ryzyko inflacji.
- Podejmowane w warunkach ryzyka — gdy każda decyzja prowadzi do zbioru wyników, z których każdy ma *a priori* określone prawdopodobieństwo pojawienia się. Inwestorzy mają możliwość poznania oczekiwanych dochodów.

- Podejmowane w warunkach niepewności — gdy każda decyzja prowadzi do zbioru wyników, jednak nie jest znane prawdopodobieństwo wystąpienia konsekwencji danej decyzji. Niepewność ma wymiar informacyjny, inwestorzy nie mają dostępu do informacji i istnieje brak podstaw do ustalenia oczekiwanych dochodów. Formalnie, decyzjami podejmowanymi w warunkach niepewności nazywamy taką klasę problemów decyzyjnych, w której dla przynajmniej jednej decyzji nie jest znany rozkład prawdopodobieństwa konsekwencji.
- Decyzje podejmowane w warunkach ignorancji, gdy decydent nie zna wszystkich możliwych stanów otoczenia, a także dostępnych mu alternatyw i ich rezultatów.
- Decyzje podejmowane w warunkach konfliktu.

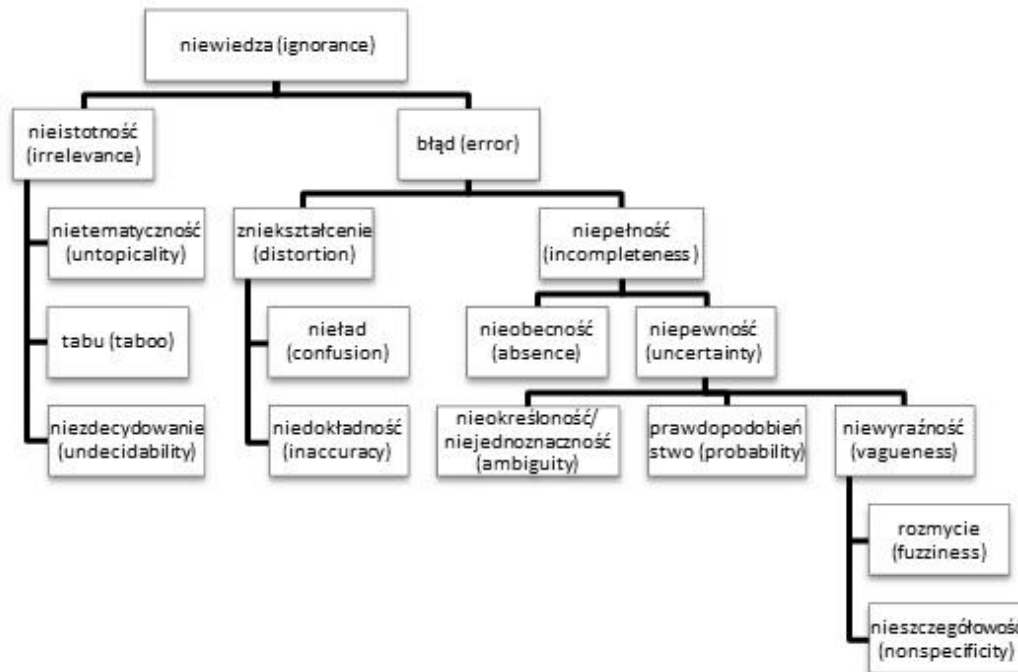
Warto zauważyć, że z tego podziału pierwsze trzy sytuacje zakładają pełną świadomość o możliwościach decyzyjnych. w tym podejściu ryzyko należy rozumieć jako stan pomiędzy pewnością i niepewnością.

**Podejście Knighta.** Prekursorską pracą dotyczącą zjawiska ryzyka jest książka Franka H. Knighta *Risk, Uncertainty and Profit* [Kni21], opracowane przez niego definicje ryzyka i niepewności są powszechnie stosowane. Według Knighta niepewność można podzielić na mierzalną i niemierzalną. Ryzyko jest definiowane jako niepewność mierzalna, którą można oszacować poprzez prawdopodobieństwo, natomiast niepewność sensu stricto uznawana jest za niemierzalną i może zostać określona jedynie poziomem wiary. Wobec tego niepewność jest pojęciem w pewien sposób szerszym niż ryzyko, bo obejmuje wszystkie nieprzewidziane sytuacje, a nie tylko te, w stosunku do których jesteśmy w stanie obliczyć prawdopodobieństwo ich zaistnienia. Knight wskazuje, że większość złożonych decyzji biznesowych jest unikatowa, a więc wobec nieporównywalności danych historycznych uczestnicy rynku nie dysponują możliwością szacowania losowych wyników. Wobec tego decyzje inwestycyjne podejmowane są w warunkach niepewności a nie ryzyka.

**Podejście Smithsona.** Klasyfikacja prezentowana przez Smithsona [Smi89], oparta jest na naukach behawioralnych i uzaje, że niewiedza jest źródłem, a niepewność tylko jednym z problemów planowania. Całość klasyfikacji jest zobrazowana na rysunku 1.1. Utożsamiając ryzyko z prawdopodobieństwem, w podejściu Smithsona, analogicznie do podejścia Knighta, ryzyko jest jednym z typów niepewności obok nieokreśloności i niewyraźności, której typami są rozmycie i nieszczegółowość.

**Podejście Klira.** Nieco inne podejście prezentuje w swoich pracach Klir [KH97]. W jego klasyfikacji występują dwa podstawowe typy niepewności: rozmytość, która charakteryzuje się brakiem wyraźnych granic i jest związana z informacją nieostrą oraz niejednoznaczność związaną z wieloma obiektami i nieprecyzyznością ich rozróżnień. Przy niejednoznaczności możemy wyróżnić sytuacje, w których występuje niezgodność w wyborze między różnymi alternatywami (spór) lub dwie i więcej alternatyw pozostaje niewyszczególnionych (niespecyficzność, nieokreśloność). Klir każdą z tych niepewności dzieli na kolejne podtypy, wydają się one jednak słabo określone, tym bardziej, że powszechnie funkcjonują jako synonimy np. nierozróżnialność a niewyraźność, mętność a niejasność. Podejście to prezentuje rysunek 1.2. W klasyfikacji tej nie występuje pojęcie ryzyka, jako podtypu niepewności. Zbiory rozmyte pozwalają na matematyczny opis niepewności wynikającej z niemożliwości

Rysunek 1.1: Klasyfikacja niepewności według Smithsona



Źródło: M. J. Wierman *An Introduction to the Mathematics of Uncertainty including Set Theory, Logic, Probability, Fuzzy Sets, Rough Sets, and Evidence Theory* [Wie10].

wyznaczenia ostrej granicy między obiektami. Do opisu drugiego typu niepewności, wiążącego się z brakiem dostatecznej wiedzy pozwalającej na zaliczenie obiektu do danego zbioru ostrego, stosowane są miary rozmyte (*fuzzy measure*).

**Podejście Morgana, Henriona i Smalla** Jedną z częściej przytaczanych klasyfikacji niepewności wykorzystywaną w naukach kognitywnych<sup>3</sup> jest wyróżnienie niepewności:

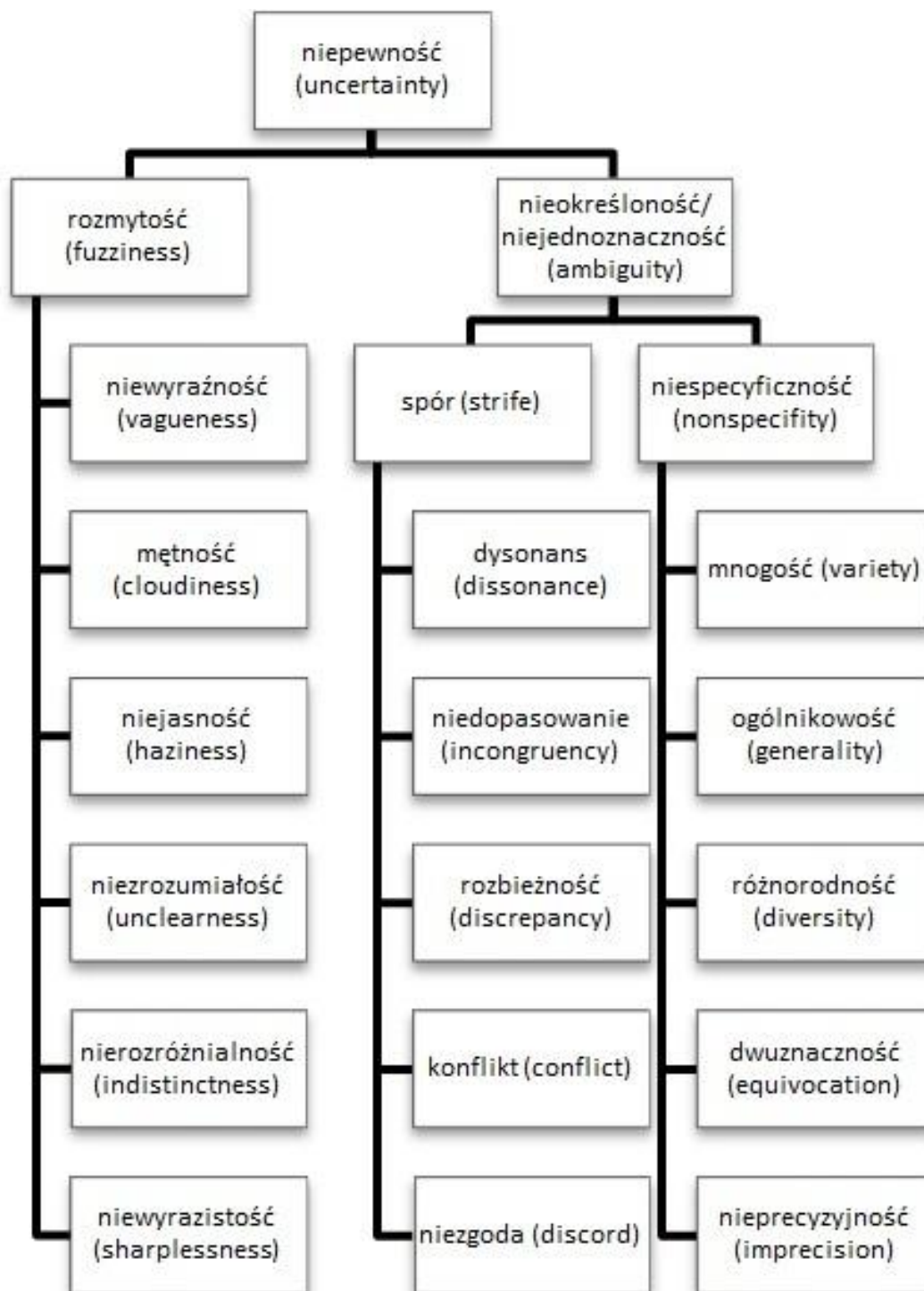
- stochastycznej, dotyczącej zdarzeń losowych, np. rzut kostką, wypadek,
- pomiarowej, spowodowanej niedokładnością narzędzi pomiarowych,
- lingwistycznej, pod pojęciem której rozumiemy określenia lingwistyczne pewnych zmiennych np. mały, szybki, niska cena ... ,
- informacyjnej, spowodowanej brakiem pełnej informacji o zdarzeniu.

Analogiczne podejście prezentują Morgan, Henrion i Small [MHS92], dzieląc niepewność empirycznych danych w odniesieniu do jej źródeł na:

- błąd losowy i statystyczną zmienność, występująca przy pomiarach w związku z niedoskonałością narzędzi pomiarowych i warunków pomiaru,
- błąd systematyczny i oceny subiektywne,
- niedokładność lingwistyczną,

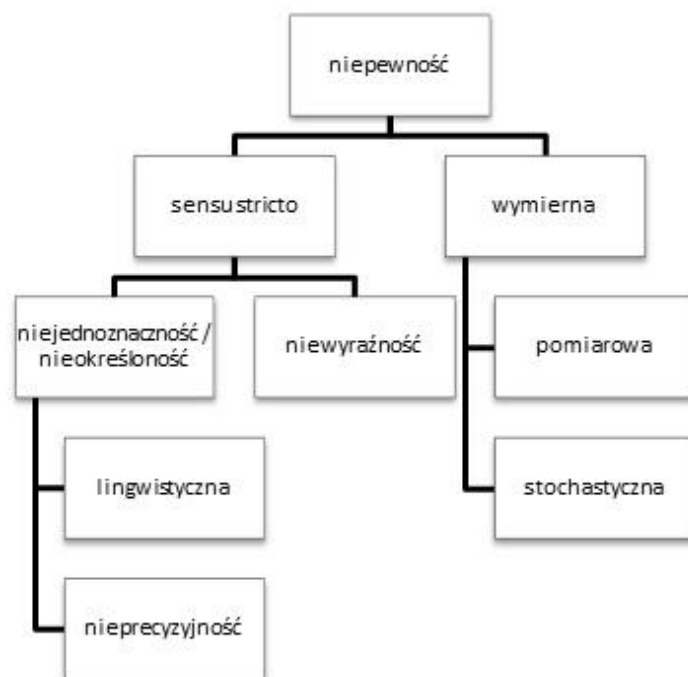
<sup>3</sup>Podział ten można znaleźć m.in. W materiałach dydaktycznych profesora Włodzisława Ducha, [www.is.umk.pl/~duch/Wyklady/AI/AI05-3.ppt](http://www.is.umk.pl/~duch/Wyklady/AI/AI05-3.ppt)

Rysunek 1.2: Klasyfikacja niepewności według Klira



Źródło: M. J. Wierman *An Introduction to the Mathematics of Uncertainty including Set Theory, Logic, Probability, Fuzzy Sets, Rough Sets, and Evidence Theory* [Wie10].

Rysunek 1.3: Klasyfikacja niepewności — synteza podejść



Źródło: opracowanie własne

- zmienność,
- przypadkowość i nieprzewidywalność,
- niepewność ekspercką,
- przybliżenia,
- niepewność modelową.

Ten sposób klasyfikacji pozwala łatwo sprecyzować i rozgraniczyć metody radzenia sobie z niepewnością. i tak przy niepewności stochastycznej (błędzie losowym), odpowiednim narzędziem jest rachunek prawdopodobieństwa, przy niepewności pomiarów (błąd losowy, zmienność statystyczna)— statystyka, a w przypadku niepewności lingwistycznej metody zbiorów rozmytych. Natomiast jeśli mamy do czynienia z niepewnością informacji, należy wykorzystywać: narzędzia eksploracji danych (*data mining*), wyszukiwań wzorców, teorie możliwości itp.

**Podejście syntetyczne.** w związku z mnogością różnych klasyfikacji, podjęto próbę przedstawienia syntetycznego podejścia, uwzględniającego główne idee powyższych klasyfikacji z jednoczesnym pominięciem szczegółowych trudno rozróżnialnych elementów. Zgodnie z podejściem Knighta wyróżnione zostały dwie grupy niepewności:

- sensu stricto, odzwierciedlającą grupę określaną jako niemierzalną,
- wymierną, a więc dającą się określić za pomocą szeroko rozumianych narzędzi rachunku prawdopodobieństwa i metod statystycznych.

Unikać będziemy określeń niemierzalna/mierzalna, gdyż od czasu publikacji Knighta rozwinęły się metody oparte na logikach wielowartościowych, analizie danych czy metodach heurystycznych i nawet zdarzeniom nielosowym o charakterze niepewnym można przyporządkować pewne miary. Wśród niepewności wymiernej możemy wyróżnić tę związaną ze zdarzeniami losowymi, określając ją jako ryzyko czy też niepewność stochastyczną oraz pomiarową, a więc związaną z miarą rzetelności przeprowadzenia doświadczenia — precyzją oraz miarą tego jak wyniki doświadczalne są bliskie wartości prawdziwej lub przyjętej za prawdziwą, a więc dokładnością pomiaru. Wśród niepewności sensu stricto wyróżniamy niewyraźność — sytuację braku ostrej granicy dla podziału obiektów. Ten rodzaj niepewności możemy utożsamiać z grupą, którą Klir określał jako rozmytość (*fuzziness*), a Smithson jako niewyraźność (*vagueness*). Przykładem wśród zastosowań ekonomicznych może być sytuacja wyznaczania granicy pomiędzy wysoką i niską stopą zwrotu. Do metodologii radzącej sobie z wartościami o nieostrych granicach zaliczają się zbiory rozmyte. Drugą grupą jest nieokreśloność, a więc sytuacja braku dostatecznej wiedzy o obiekcie, dostępne informacje mogą występować w formie lingwistycznej (niepewność lingwistyczna) lub nieprecyzyjnej (określenie typu *około*, *co najmniej* itp.). Tą grupę można utożsamiać z niespecyficznością (*nonspecificity*) według Klira, nieokreślonością (*ambiguity*) według Smithsona oraz odpowiednio niepewnością lingwistyczną i informacyjną. Narzędziem stosownym w przypadku niejednoznaczności są miary rozmyte. w kolejnych rozdziałach będziemy odwoływać się do przedstawionej syntezy.

## 1.2 Implementacja niepewności i ryzyka w ocenie inwestowania

Z powodu powyżej analizowanych niewiedzy i niepewności w odniesieniu do inwestowania mówi się nie tyle o decyzjach czy wyborach, a o pewnym problemie decyzyjnym. H.Simon, A. Newell [NS72] dzielą problemy decyzyjne na trzy następujące grupy:

- Problemy o dobrze określonej strukturze — *ilościowe*, które rozwiązuje się z wykorzystaniem algorytmów. w tej grupie problemów właściwie zastosowanie algorytmu gwarantuje jego rozwiązanie,
- Problemy o nieokreślonej strukturze — *jakościowe*, które rozwiązujemy metodami twórczego myślenia, heurystykami. Nie dają one jednak pewności uzyskania rozwiązania,
- Problemy o strukturze mieszanej — *ilościowo-jakościowe*, które rozwiązujemy metodą analizy systemowej, tworząc modele struktur i procesów oraz eksperymentując na nich.

W sytuacji inwestycji finansowych mamy do czynienia z problemem struktury mieszanej. Aby podjąć decyzje inwestor rozpoczyna od analizy problemów o charakterze globalnym, następnie skupia się na określonych branżach, dopiero w kolejnym kroku analizuje sytuację finansową poszczególnych firm oraz kursy instrumentów finansowych po to, by odpowiednio dobrać skład portfela inwestycyjnego. Ograniczając badanie w pracy do instrumentów udziałowych rynku kapitałowego, można wyróżnić cztery grupy metod analizy:



- kursów (analizę techniczną i modele ekonometryczne), wykorzystującą jako podstawę do wyszukiwania wzorców zachowań analizę wykresów kursów,
- fundamentalną, uwzględniającą dane makroekonomiczne, sektorowe, sytuację finansową spółki,
- portfelową, oceniającą inwestycję na podstawie potencjalnych dochodów i niepewnością z nimi związaną,
- behawioralną, obejmującą badanie odstępstw od racjonalności.

W literaturze sugeruje się powiązanie różnych rodzajów analiz w następujący sposób [Jaj06]:

1. Analiza fundamentalna powinna być stosowana do wyboru kilku (lub nawet kilkunastu) spółek.
2. Analiza portfelowa powinna być stosowana do określenia składu portfela, tzn. udziału wybranych spółek w portfelu.
3. Analiza techniczna powinna być stosowana do wyboru konkretnego momentu przeprowadzanie transakcji zakupu (ewentualnie sprzedaży) akcji spółki.
4. Analiza behawioralna powinna być stosowana do identyfikacji potencjalnych błędów mających podłoże psychologiczne oraz do zachowania racjonalności w sytuacji niestabilności rynku kapitałowego.

W związku z celem pracy, rozważania w dalszej jej części będą się ograniczać do analizy portfelowej. W praktyce gospodarczej dane dostępne decydentowi są nie tylko losowe, ale i niedokładne, często wyrażane w postaci przybliżonej, a nawet lingwistycznej, co świadczy o występowaniu zazwyczaj więcej niż jednego typu niepewności jednocześnie. Badania nad ryzykiem i niepewnością zaowocowały opracowaniem różnych zadań optymalizacji decyzji inwestycyjnych: od klasycznych, opartych na rachunku prawdopodobieństwa, poprzez bazujące na teorii zbiorów przybliżonych oraz teorii ewidencji Dempstera-Shafera, aż do teorii generalizujących opartych na teorii zbiorów rozmytych. Teoria Dempstera-Shafera znana pod nazwą teorii ewidencji (*evidence theory*) może być traktowana jako rozszerzenie rachunku prawdopodobieństwa. Zasadniczą różnicą jest to, że podstawowa miara prawdopodobieństwa (BPA, *Basic Probability Assignment*) w teorii ewidencji nie musi być określona na wszystkich elementach przestrzeni zdarzeń, a jedynie na niektórych podzbiorach. Ze względu na niewielkie znaczenie tej teorii w obszarze optymalizacji portfela inwestycyjnego w dalszej części pracy to podejście nie zostanie dokładniej przeanalizowane. Wszystkie inwestycje podejmowane są w celu osiągnięcia pewnej stopy zwrotu, z jednoczesnym staraniem zminimalizowania negatywnych odchyleń od jej poziomu. To właśnie kryterium będzie leżało u podstaw tworzenia funkcji celu i ograniczeń zadań optymalizacyjnych niezależnie od przyjętego podejścia do niepewności.

### 1.2.1 Podejście losowe

Podejście oparte na rachunku prawdopodobieństwa, jest najczęściej wykorzystywanym i opisywanym sposobem radzenia sobie z niepewnością inwestycji, dlatego

często określa się je mianem tradycyjnego. W ujęciu probabilistycznym<sup>4</sup> jednookresowa stopa zwrotu jest podstawową zmienną losową wykorzystywaną w analizie inwestycyjnej. Zatem poszukiwanie optymalnego portfela jest zadaniem programowania stochastycznego. Ogólny problem liniowego programowania stochastycznego można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie  $(A, b, c)$  jest wielowymiarową zmienną losową o rozkładzie niezależnym od wektora  $x$ . Metody rozwiązywania zadań zależą od tego, które ze zmiennych  $c, x, A$  lub  $b$  są losowe. Formalnie losowość wektora oznacza to, że przynajmniej jedną ze składowych opisuje się za pomocą zmiennej losowej. Omówienie metod sprowadzania zadań programowania stochastycznego do zadań deterministycznego programowania oraz ich zastosowanie w obszarze zjawisk ekonomicznych można znaleźć między innymi w [KB91], [Ost02].

Zadania optymalizacji w tym podejściu bazują na teorii portfela sformułowanej w 1952 roku przez Markowitza [Mar52]. Ryzyko w tym ujęciu jest utożsamiane z wariancją (lub odchyleniem standardowym), a miarą zysku jest oczekiwana stopa zwrotu, choć bardziej właściwym wydaje się tu użycie słowa przeciętna stopa zwrotu [Ost03], ponieważ miara ta może przyjmować dwie postaci:

- oczekiwanej stopy zwrotu papieru wartościowego — przy wykorzystaniu informacji eksperckich (*ex ante*), dotyczących różnych możliwych stóp zwrotu danego papieru w przyszłości oraz dotyczących wskaźników prawdopodobieństw różnych stanów gospodarki (ryнку kapitałowego), odpowiadających tym stopom;
- oszacowanej stopy zwrotu papieru wartościowego — przy wykorzystaniu informacji z przeszłości (*ex post*) o kształtowaniu się rzeczywistych stóp zwrotu w przeszłości.

Druga z nich jest w praktyce znacznie częściej stosowana. Markowitz zauważył, że poprzez zmiany wielkości udziałów można uzyskać portfele, które przy założonym zysku dają różne poziomy ryzyka. Dokonuje się to na zasadzie wzajemnego wpływu aktywów na siebie mierzonego za pomocą kowariancji. Wybranie walorów ujemnie skorelowanych z taką samą stopą zwrotu umożliwia zredukowanie ryzyka bez konieczności obniżenia stopy zwrotu. Teoria Markowitza mówi, że z grupy portfeli papierów wartościowych o założonej stopie dochodu tylko jeden z nich minimalizuje ryzyko. Natomiast z grupy portfeli o założonym poziomie ryzyka, tylko jeden posiada maksymalną oczekiwaną stopę zwrotu. Takie portfele określa się mianem efektywnych. Do najbardziej znanych kontynuacji podejścia Markowitza należą: jednowskaźnikowy model Sharpa [Sha64], model średnia-odchylenie przeciętne Konno [KY91], a także model maksymalizacji minimalnej stopy zwrotu [PLLY98].

Kolejną grupą zadań optymalizacji są zadania oparte o tzw. prymat bezpieczeństwa. Do nich należą zadania bazujące na następujących kryteriach:

---

<sup>4</sup>w literaturze przedstawiane podejście określane jest jako losowe, probabilistyczne lub stochastyczne.

- kryterium Roya [Roy52], wykorzystujące jako miarę ryzyka prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji — funkcja celu przedstawia się następująco:

$$\min P(R < R_a), \quad (1.3)$$

gdzie  $P$ —prawdopodobieństwo,  $R$ —stopa zwrotu,  $R_a$ —minimalna stopa zwrotu;

- kryterium Teslera [Tes55], wykorzystujące stopę zysku jako miarę dochodu oraz prawdopodobieństwo nieosiągnięcia zadanego przez inwestora poziomu aspiracji jako miarę ryzyka:

$$\begin{aligned} \max R \\ P(R < R_a) < \alpha, \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdzie  $\alpha$  — przyjęty przez inwestora maksymalny poziom prawdopodobieństwa otrzymania zysku niższego od przyjętego poziomu;

- kryterium Kataoki [Kat63] maksymalizujące minimalny dopuszczalny poziom stopy zwrotu portfela:

$$\begin{aligned} \max R_a \\ P(R < R_a) < \alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Czynnikiem determinującym popularność podejścia stochastycznego, jest pewny i szeroki materiał statystyczny, jakim są notowania akcji. Jednakże po przeanalizowaniu źródeł niepewności można się przekonać, że historyczne stopy zwrotu są niepełnym obrazem ryzyka. Jak zauważa Jajuga [Jaj09], oszacowania miary ryzyka w praktyce powinno być swoistą *średnią ważoną* dwóch typów informacji: danych historycznych oraz innych. Ogólna zasada jest przy tym prosta: im bardziej stabilnie kształtują się wartości zmiennej ryzyka, tym większa waga może być przyporządkowana danym historycznym. W praktyce dane mają postać szeregów czasowych, tzn. jedna obserwacja historyczna odzwierciedla jedną zmienną losową i mamy do czynienia z procesem stochastycznym, a więc powinien mieć własność stacjonarności, by tworzenie empirycznego rozkładu było uzasadnione. Dodatkowo zastosowanie danych historycznych wiąże się również ze szczegółowymi kwestiami, takimi jak określenie liczby oraz częstotliwości obserwacji do szacowania stóp zwrotu.

## 1.2.2 Podejście rozmyte

Informacja służąca analizie problemu może mieć charakter jakościowy i może być dana w formie przypuszczeń, prognoz analityka, eksperta czy samego decydenta. Ograniczenia i cele są wtedy określone w sposób werbalny, a więc przybliżony i nieprecyzyjny. Werbalne określenie danych wprowadza niejednoznaczność innego charakteru niż losowość zdarzeń. Nieprecyzyjnie określone parametry i zależności w modelu są ujmowane w formie rozmytych zbiorów i relacji [Ost02]. W pierwszych modelach rozmytych<sup>5</sup> wykorzystana została teoria decyzji rozmytych [Wat97], [Ram98], [LLV02], zaproponowana przez Bellmana i Zadeha [BZ70], aby uwzględnić niewyraźne poziomy aspiracji inwestora. W takim przypadku rozmyta funkcja celu wyznacza odpowiedni zbiór rozmyty zwany rozmytym celem  $C_0$  — w przypadku inwestycyjnym

<sup>5</sup>Modele wyboru optymalnego portfela budowane na podstawie zbiorów rozmytych nazywać będziemy modelami rozmytymi lub nieostrymi.

najczęściej jest nim zbiór opisujący aspirację inwestora, a więc stopę zwrotu co najmniej  $r_0$ . Warunki ograniczające określone przez zbiory rozmyte nazywane rozmytymi ograniczeniami  $C_1, \dots, C_m$ . Przy zadaniu optymalizacji portfela akcji w modelu Watady [Wat97] rozważany jest zbiór będący funkcją przynależności odpowiadający stwierdzeniu: *wariancja portfela nie większa niż  $r_1$* . Możliwe są również dodatkowe ograniczenia wyrażone ostro, takie jak maksymalny poziom udziału papieru w portfelu czy brak krótkiej sprzedaży. W tak określonym zbiorze rozwiązań  $X$ , rozmytym rozwiązaniem problemu jest rozmyty zbiór rozwiązań  $D$  w przestrzeni  $X$  będący iloczynem zbiorów  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Rozwiązaniem maksymalizującym, nazywa się to rozwiązanie, które przynależy w największym stopniu do zbioru  $D$ .

Do grupy modeli rozmytych zalicza się także zadania programowania liniowego ze współczynnikami przedziałowymi [LWX<sup>+</sup>02]. Dzięki takiemu podejściu uproszczony został problem wyznaczania rozkładu do wyznaczenia jedynie przedziału, w którym może znaleźć się wartość stopy zwrotu.

Jak już wspomniano, na rynku finansowym decyzje inwestycyjne podejmowane są na podstawie wiadomości podanych lingwistycznie, nieprecyzyjnych prognoz i historycznych danych, zebranych przy zmieniającym się otoczeniu, a więc w warunkach nieokreśloności (por. rys. 1.3). Wobec tego odpowiednimi modelami są te bazujące na miarach rozmytych. Miara rozmyta przypisuje do każdego zbioru ostrego określonego na uniwersum stopień dowodu lub wiary, że dany element uniwersum należy do tego zbioru. Przyjmijmy, że  $X$  jest dowolnym zbiorem (przestrzenią) oraz niech  $P$  oznacza rodzinę podzbiorów przestrzeni  $X$ , taką, że  $\emptyset, X \in P$ .

**Definicja 1.1** [CP85] Funkcję zbioru  $g: P \rightarrow [0, 1]$  nazywamy miarą rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1.  $g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$ ;
2. jeżeli  $A, B \in P$  i  $A \subseteq B$  to  $g(A) \leq g(B)$ ;
3. jeżeli  $\{A_n\}$  jest monotonicznym ciągiem zbiorów w  $P$  i jeżeli  $\lim A_n \in P$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$

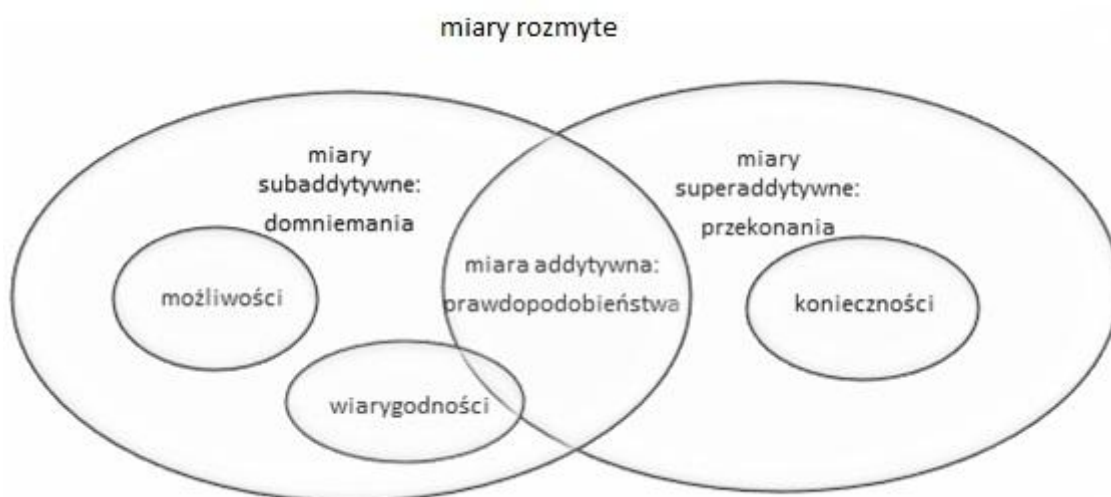
Zatem miara rozmyta jest ograniczona i nieujemna (z warunku 1 def 1.2.2) oraz monotoniczna (warunek 2). Natomiast warunek trzeci, istotny jedynie w przypadku zbioru nieskończonego  $X$ , oznacza ciągłość. Do miar rozmytych zaliczamy miary: przekonania (*belief measure*) i domniemania (*plausibility measure*), będące podstawą teorii Dempstera-Schafera, konieczności (*necessity measure*) i możliwości (*possibility measure*), będące podstawą teorii możliwości oraz miarę wiarygodności (*credibility measure*), determinującą teorię wiarygodności, a także z formalnego punktu widzenia miarę prawdopodobieństwa<sup>6</sup>. Zależności między tymi miarami zostały zilustrowane na rysunku 1.4.

### 1.2.2.1 Podejście oparte o teorię możliwości

W teorii możliwości, zaproponowanej przez Zadeha [Zad78] i rozwiniętej przez Dubois i Prade [DP87], zmienna rozmyta jest związana z rozkładem możliwości analogicznie do zmiennej losowej i rozkładu prawdopodobieństwa. Teoria ta bazuje na dwóch

<sup>6</sup>Podejście stochastyczne nie omawiamy jako szczególny rodzaj podejścia rozmytego, ze względu na inny typ niepewności, do którego się odnosi.

Rysunek 1.4: Zależności pomiędzy miarami rozmytymi



Źródło: opracowanie własne

miarach: mierze konieczności, która oznacza stopień przekonania o konieczności zajścia zdarzenia  $A$ , oraz mierze możliwości, interpretowanej jako możliwość zajścia tego zdarzenia. Porównując teorię prawdopodobieństwa z teorią możliwości, można zauważyć, że zdarzenie niemożliwe jest jednocześnie nieprawdopodobne, jednak mała wartość prawdopodobieństwa nie implikuje małej wartości możliwości i odwrotnie. W tym podejściu stopy zwrotu są przedstawiane w postaci wypukłych zbiorów rozmytych a ich funkcja przynależności, nazywana rozkładem możliwości, określa możliwość, z jaką zmienna rozmyta przyjmuje daną wartość. Modele bazujące na teorii możliwości nawiązują bezpośrednio do kryteriów znanych z podejścia probabilistycznego, zastępując zmienną losową — zmienną rozmytą a miary ryzyka analogicznymi miarami niepewności. Tak jest na przykład w przypadku modelu zaproponowanego przez Tanakę i Guo [TG99], który minimalizuje rozrzut stopy zwrotu z portfela przy warunku ograniczającym na minimalną wartość centralną stopy zwrotu. Wartość centralna jest najbardziej możliwym zwrotem, czyli odpowiada intuicyjnie wartości oczekiwanej, a rozrzut jest miarą niepewności co do stopy zwrotu z portfela, czyli przejmuje rolę wariancji. Modele oparte na mierze konieczności są rozmytymi rozwinięciami modeli prymatu bezpieczeństwa, np. w modelu Inuiguchiego i Ramika [IR00] wykorzystano kryterium Roya, a kryterium Kataoki określone mianem podejścia frakcyjnego w modelu Inuiguchi i Tanino [IT00].

Ze względu na wyraźną analogię do modeli losowych, modele te bywają krytykowane przez zwolenników podejścia klasycznego, jednak biorąc pod uwagę klasyfikację niepewności, podejście rozmyte wydaje się być właściwym kierunkiem rozwoju.

### 1.2.2.2 Podejście oparte o teorię wiarygodności

Wprawdzie modele oparte o rozkłady możliwości stały się bardzo popularne, jednak mogą w pewnych sytuacjach powodować dezorientację inwestora. Miara możliwości,

Tabela 1.1: Porównanie różnych podejść do niepewności stopy zwrotu

Podejście	losowe	rozmyte		
	prawdopodobieństwa	możliwości	wiarygodności	zbiory rozmyte prawdopodobieństwa
Rodzaj niepewności	stochastyczna	nieokreśloność	nieokreśloność	stochastyczna, nieprecyzyjność
Stopa zwrotu	zmienna losowa	zmienna rozmyta	zmienna rozmyta	rozmyta zmienna losowa
Miara	prawdopodobieństwa	możliwości, konieczności	wiarygodności	prawdopodobieństwa, funkcja przynależności
Przestrzeń	probabilistyczna $(\Omega, \sigma, Pr)$	posybilistyczna $(\Omega, P(\Omega), Poss)$	wiarygodności $(\Omega, P(\Omega), Cr)$	probabilistyczna $(\Omega, \sigma, Pr)$

Źródło: opracowanie własne

która nie jest samodualna<sup>7</sup>, może mieć tę samą wartość, dla dwóch wydarzeń z różną szansą wystąpienia. Ponadto, w przypadku gdy wartości miary możliwości stopy zwrotu z portfela powyżej wartości docelowej jest niższa niż 1, miara możliwości przeciwnego zdarzenia (tzn. stopa zwrotu mniejsza lub równa wartości docelowej) ma wartość 1. Właśnie brak samodualności był motywacją dla Liu i Liu w 2002 [LL02] do stworzenia miary wiarygodności a następnie rozwinięcia bazującej na niej teorii wiarygodności [Liu04]. Podstawowe pojęcia tej teorii zostaną przedstawione w rozdziale 2, a modele optymalizacji portfela bazujące na niej w rozdziale 3.

### 1.2.2.3 Podejście rozmyto-probabilistyczne

w literaturze łączącej logikę rozmytą i teorię prawdopodobieństwa możemy znaleźć kilka pojęć i modeli, jak rozmyte prawdopodobieństwa [Ral95], [Zad02] czy zmienne hybrydowe [Liu07]. Najpopularniejszą i najlepiej sformalizowaną koncepcję przedstawiają rozmyte zbiory probabilistyczne. Rozmyte zbiory probabilistyczne zostały uwzględnione w przypadku wystąpienia losowego eksperymentu do modelowania wartości rozmytych, to jest mechanizm kojarzenia rozmytej wartości z każdym wynikiem eksperymentu losowego. Zatem mamy do czynienia z sytuacją gdy rozmyta ocena wartości logicznej zależy nie tylko od treści samego zdania, ale także od zastanego stanu otoczenia. W tym podejściu stopa zwrotu jest zmienną probabilistyczno-rozmytą, obarczoną zarówno ryzykiem wartości przyszłej jak i nieprecyzyjnością dotyczącą wartości początkowej [Pia11].

## 1.2.3 Podsumowanie

Wymienione powyżej podejścia proponują różne założenia co do przyszłych stóp zwrotu. Różnice wiążą się z różnymi miarami zdarzeń, że stopa zwrotu przyjmie daną wartość. Najważniejsze cechy podejść podsumowane zostały w tabeli 1.1. Obok podejść uzależnionych od przyjętej definicji zmiennej stopy zwrotu, szeroko

<sup>7</sup>Miarę nazywamy samodualną, gdy suma wartości miary zdarzenia i miary zdarzenia do niego przeciwnego równa jest 1.

rozwijane są modele behawioralne. Ograniczenie się jedynie do miar niepewności poddało w wątpliwość założenie o racjonalności inwestorów i ukazało anomalie na rynkach finansowych. Co zapoczątkowało badania w dziedzinie finansów behawioralnych, których istotą jest poszukiwanie i uwzględnienie psychologicznych, społecznych i antropologicznych mechanizmów zachowania uczestników rynków. Miary ryzyka/ niepewności wyznaczane są w tym podejściu dla poszczególnych inwestorów poprzez oszacowanie ich stosunek do ryzyka. Klasycznym przykładem jest analiza stosunku do ryzyka wywodząca się z teorii użyteczności, której podstawowym pojęciem jest funkcja użyteczności utożsamiana z preferencjami inwestora. Funkcja użyteczności pieniądza jest funkcją rosnącą i wklęsłą, a więc charakteryzuje się malejącą krańcową użytecznością. Kolejnym przykładem analizy behawioralnej jest teoria perspektywy [TK79]. Zakłada ona, że inwestor przy podejmowaniu decyzji nie tylko ocenia użyteczność możliwych wyników, ale również bierze pod uwagę subiektywne prawdopodobieństwa, przypisując własne wagi do poszczególnych prawdopodobieństw. Zadaniem optymalizacji portfela w ujęciu behawioralnym jest również model minimalizacji żalu. Celem inwestora w tym przypadku nie jest maksymalizacja zysku lecz minimalizacja żalu, jaki odczuwa inwestor, gdy porównuje zwrot, jaki otrzymał z portfela z tym, jaki mógłby otrzymać w przypadku optymalnej alokacji kapitału. Zadania optymalizacji decyzji inwestycyjnych z uwzględnieniem aspektów behawioralnych można spotkać w każdym z wyżej wymienionych podejść np.: stochastycznym [Noc06], rozmytym possibilistycznym [IS95], wiarygodnościowym [Hua08c], probabilistyczno-rozmytym [Pia11].

# Rozdział 2

## Koncepcja rozmytej stopy zwrotu

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona koncepcja rozmytej stopy zwrotu bazująca na teorii wiarygodności. W pierwszej części omówione zostaną podstawowe pojęcia związane ze zmienną rozmytą, a następnie przedstawiona zostanie rozmyta stopa zwrotu oraz jej podstawowe miary niepewności. W kolejnym kroku zostanie krótko wprowadzona metoda symulacji tych miar oraz przedstawione metody wyznaczania rozmytej stopy zwrotu.

Pojęcie zmiennej rozmytej zostało wprowadzone w 1975 w pracy Kaufmanna [Kau75], następnie rozwinięte przez Zadeha [Zad75] i Nahmiasa [Nah78]. Nahmias, kontynuując zamysł Zadeha, stworzył model, w którym zmienna rozmyta odgrywa analogiczną rolę do zmiennej losowej w teorii prawdopodobieństwa. Zmienna rozmyta zdefiniowana została ponownie przez Liu w [Liu04], w ujęciu teorii wiarygodności. Na potrzeby pracy przyjmujemy definicję zmiennej rozmytej zaproponowaną przez Liu, w niniejszym rozdziale przedstawimy niezbędne pojęcia do jej zrozumienia.

### 2.1 Miary rozmyte

Pojęcie miara rozmyta zostało wprowadzone przez Sugeno w 1989 roku [MS89]. Może być ona rozumiana jako stopień przekonania (wiary), że dany element (czy zmienna) należy do wybranego zbioru. W rozważanym przypadku analizujemy przestrzeń zdarzeń.

**Definicja 2.1** [Liu04] Niech  $\Theta$  będzie niepustym zbiorem a  $P(\Theta)$  rodziną wszystkich podzbiorów  $\Theta$ . Każdy element  $P(\Theta)$  jest nazywany zdarzeniem.

Do miar zdarzeń należą szeroko używane: miara możliwości i konieczności. Miary te zostały zdefiniowane następująco:

**Definicja 2.2** [Geo12] Miara możliwości (possibility) to funkcja

$$Pos : P(\Theta) \rightarrow [0, 1],$$

spełniająca następujące aksjomaty:

1.  $Pos(\emptyset) = 0$ ;
2.  $Pos(\Theta) = 1$ ;
3.  $Pos(\bigcup_i A_i) = \sup_i Pos(A_i)$ , gdzie  $A_i \in P(\Theta)$ .



**Definicja 2.3** [Geo12] Miara konieczności (necessity) to funkcja

$$Nec : P(\Theta) \rightarrow [0, 1]$$

, spełniająca następujące aksjomaty:

1.  $Nec(\emptyset) = 0$ ;
2.  $Nec(\Theta) = 1$ ;
3.  $Nec(\bigcap_i A_i) = \inf_i Pos(A_i)$ , gdzie  $A_i \in P(\Theta)$ .

Miara możliwości informuje o możliwości wystąpienia zdarzenia, a miara konieczności określa pewność zajścia zdarzenia. Pomędzy tymi miarami istnieją następujące związki [Ła01]:

$$Nec(A) = 1 - Pos(A^c), \quad (2.1)$$

$$Pos(A) = 1 - Nec(A^c), \quad (2.2)$$

gdzie  $A^c$  oznacza dopełnienie zbioru  $A$ . Są to więc miary dualne. Zatem zdarzenie, by było choć w pewnym stopniu konieczne, musi być w pełni możliwe, a zdarzenie częściowo możliwe jest niekonieczne.

Często wymienianą wadą tych miar jest brak samodualności. Miara jest samodualna, gdy jej wartość dla pewnego zdarzenia i zdarzenia do niego przeciwanego sumują się do jedności. Zatem informacja o wartości miary pewnego zdarzenia, jest wystarczająca do określenia miary zdarzenia przeciwnego. W celu zapewnienia własności samodualności Liu i Liu [LL02] zaprezentowali w 2002 miarę wiarygodności (*credibility measure*,  $Cr$ ) jako średnią z miar możliwości i konieczności (por. (2.5)). Miara  $Cr$  (2.5) informuje o wiarygodności zajścia zdarzenia, rozumianej jako szansa wystąpienia zdarzenia. Następnie w 2004 zaproponowana została aksjomatyczna teoria wiarygodności [Liu04], która została w rozwinięta w roku 2007 przez Liu [Liu07].

Poprzez funkcję wiarygodności będziemy rozumieć funkcję

$$Cr : P(\Theta) \rightarrow [0, 1],$$

która spełnia następujące aksjomaty [LL02]:

1. normalności:  $Cr \{\Theta\} = 1$ ,
2. monotoniczności: jeżeli  $A \subset B$ , to  $Cr \{A\} \leq Cr \{B\}$ ,
3. samodualności:  $Cr \{A\} + Cr \{A^c\} = 1$ ,
4. maksymalności:  $Cr \{\bigcup_i A_i\} = \sup_i Cr \{A_i\}$

dla każdego  $Cr \{A_i\} < 0,5$ .

Z aksjomatu 1 i 3 wynika, że  $Cr \{\emptyset\} = 0$ .

Aksjomat 2 implikuje, że  $0 \leq Cr \{A\} \leq 1$  dla każdego  $A \in P(\Theta)$ , gdyż  $\emptyset \subset A \subset \Theta$ .  
Rozwinięciem aksjomatu 4, jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1** [Liu07] Niech  $\Theta$  będzie niepustym zbiorem,  $P(\Theta)$  rodziną zbioru  $\Theta$  a  $Cr$  miarą wiarygodności, wtedy dla każdego  $A, B \in P(\Theta)$  zachodzi:

$$Cr(A \cup B) = \max(Cr \{A\}, Cr \{B\}), \text{ jeżeli } Cr(A \cup B) \leq 0,5, \quad (2.3)$$

$$Cr(A \cap B) = \min(Cr \{A\}, Cr \{B\}), \text{ jeżeli } Cr(A \cap B) \geq 0,5. \quad (2.4)$$

Powyższe równości zachodzą dla skończonej i nieskończonej liczby zdarzeń.

Na podstawie aksjomatów zostało udowodnione przez Liu [Liu04], że miara wiarygodności jest miarą subaddytywną, tzn, że dla każdego zdarzenia  $A$  i  $B$  zachodzi  $Cr(A \cup B) \leq Cr(A) + Cr(B)$ . Jest addytywna wtedy i tylko wtedy, gdy co najwyżej dwa elementy zbioru  $P(\Theta)$  przyjmują niezerową wartość funkcji przynależności. Tak więc w tym szczególnym przypadku jest ona identyczna z miarą prawdopodobieństwa.

Zależności pomiędzy miarami możliwości, konieczności i wiarygodności przedstawiają równości (2.6),(2.7).

$$Cr \{A\} = \frac{1}{2} (Pos \{A\} + Nec \{A\}) \quad (2.5)$$

$$Pos \{A\} = \begin{cases} 2Cr \{A\} & \text{dla } Cr \{A\} \leq 0,5, \\ 1 & \text{dla } Cr \{A\} > 0,5, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$Nec \{A\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } Cr \{A\} \leq 0,5. \\ 2Cr \{A\} - 1 & \text{dla } Cr \{A\} > 0,5 \end{cases} \quad (2.7)$$

Rysunek 2.1 przedstawia przykładowe miary pewnego zdarzenia  $A$  i ilustruje zależności (2.5)-(2.7).

## 2.2 Pojęcie zmiennej rozmytej

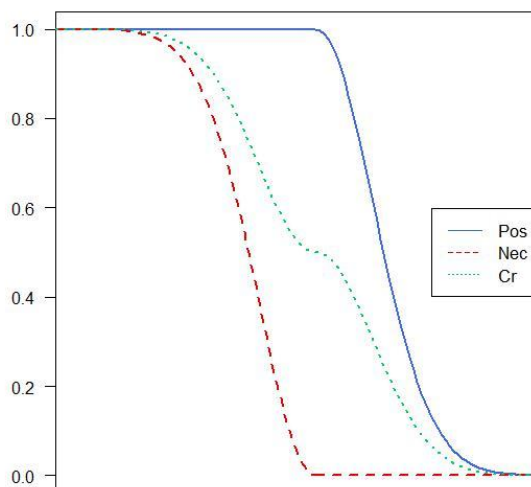
Zmienna rozmyta została określona na przestrzeni wiarygodności, zdefiniowanej następująco:

**Definicja 2.4** [Liu04] Niech  $\Theta$  będzie niepustym zbiorem,  $P(\Theta)$  rodziną podzbiorów  $\Theta$ , a  $Cr$  miarą wiarygodności. Wtedy trojkę  $(\Theta, P(\Theta), Cr)$  nazywamy przestrzenią wiarygodności.

**Definicja 2.5** [Liu04] Zmienna rozmyta  $\xi$  jest to (mierzalna) funkcja z przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P(\Theta), Cr)$  w zbiór liczb rzeczywistych.

**Definicja 2.6** [Liu04] Niech  $\xi_1$  i  $\xi_2$  oznaczają zmienne rozmyte określone na przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P(\Theta), Cr)$ . Zmienne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\xi_1(\theta) = \xi_2(\theta)$  dla prawie wszystkich  $\theta \in \Theta$ .

Rysunek 2.1: Miary możliwości, konieczności i wiarygodności



Źródło: opracowanie własne

w rozważaniach w dalszej części pracy operować będziemy na wektorach rozmytych. W tym celu wprowadzimy następującą definicję:

**Definicja 2.7** [Liu02]  $n$ -wymiarowy wektor rozmyty jest to funkcja z przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P(\Theta), Cr)$  w zbiór  $n$ -wymiarowych wektorów rzeczywistych.

**Twierdzenie 2.2** [Liu02] Niech  $\xi$  będzie  $n$ -wymiarowym rozmytym wektorem, a  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  funkcją, wtedy  $f(\xi)$  jest zmienną rozmytą.

Arytmetyka zmiennych rozmytych została oparta na następującej definicji:

**Definicja 2.8** [Liu04] Niech  $f$  będzie funkcją  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  oraz  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  zmiennymi rozmytymi na przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P, Cr)$ , wtedy

$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  jest zmienną rozmytą zdefiniowaną jako:

$$\xi(\theta) = f(\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta)), \quad (2.8)$$

dla każdego  $\theta \in \Theta$ .

Z powyższej definicji wynika, że jeżeli  $\xi_1$  i  $\xi_2$  są zmiennymi rozmytymi określonymi na przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P, Cr)$ , to ich:

- suma wynosi:  $(\xi_1 + \xi_2)(\theta) = \xi_1(\theta) + \xi_2(\theta), \forall \theta \in \Theta$ ,
- iloczyn wynosi:  $(\xi_1 \times \xi_2)(\theta) = \xi_1(\theta) \times \xi_2(\theta), \forall \theta \in \Theta$

## 2.2.1 Rozkład wiarygodności

Analogicznie do dystrybuanty w rachunku prawdopodobieństwa, w przypadku zmiennej rozmytej funkcja wiarygodności zdarzenia, że zmienna rozmyta  $\xi$  przyjmie wartość mniejszą lub równą  $x$ , określa rozkład wiarygodności zmiennej rozmytej.

**Definicja 2.9** [Liu02] Rozkład wiarygodności  $\Phi : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$  zmiennej rozmytej  $\xi$  zdefiniowany jest jako:  $\Phi(x) = Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq x \}$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia rozkładu wiarygodności [Liu04] jest:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) \leq 0,5 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x), \quad (2.9)$$

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \Phi(y) = \Phi(x), \text{ jeśli } \lim_{y \rightarrow x^+} \Phi(y) > 0,5 \text{ lub } \Phi(x) \geq 0,5. \quad (2.10)$$

Ważną cechą zmiennych rozmytych jest ich niezależność. Pojęcie niezależności zmiennych rozmytych wprowadził Zadeh [Zad78], używając określenie nieinterakcyjnych (*noninteractive*) zmiennych. Następnie Nahmias [Nah78], wprowadzając ramy teoretyczne zmiennej rozmytej, zdefiniował w tym sensie niepowiązane (*unrelated*) zmienne rozmyte. Liu, wprowadzając teorię wiarygodności [Liu04], zdefiniował niezależność zmiennych następująco:

**Definicja 2.10** [Liu04] Zmienne rozmyte  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$Cr \left\{ \theta \in \Theta : \bigcap_{i=1}^m \xi_i(\theta) \in B_i \right\} = \min_{1 \leq i \leq m} Cr \{ \theta \in \Theta : \xi_i(\theta) \in B_i \}, \quad (2.11)$$

dla każdego zbioru  $B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathfrak{R}$ .

## 2.2.2 Funkcja przynależności zmiennej rozmytej

W roku 1965 Zadeh [Zad65] wprowadził pojęcie zbioru rozmytego, jako rozszerzenie klasycznej teorii zbiorów.

Zbiór rozmyty  $A$  utożsamia z funkcją przynależności  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ . Funkcja ta każdemu elementowi  $x \in X$  przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego  $A$ , przy czym:

- $\mu_A(x) = 1$  oznacza pełną przynależność do zbioru rozmytego  $A$ ,
- $\mu_A(x) = 0$  oznacza brak przynależności elementu  $x$  do zbioru rozmytego  $A$ ,
- $0 < \mu_A(x) < 1$  oznacza częściową przynależność elementu  $x$  do zbioru rozmytego  $A$ .

Koncepcja funkcji przynależności wydaje się intuicyjna, jednak w literaturze poświęconej zbiorom rozmytym łatwo zauważyć brak jednolitej jej interpretacji. W pracy [DP00] funkcja przynależności rozpatrywana jest w pięciu ujęciach semantycznych, przytoczone zostaną tu trzy najczęściej spotykane, tzn:

- przynależności,
- preferencji,

- niepewności.

W pierwszym ujęciu, historycznie najstarszym, stopień przynależności  $\mu_A(x)$  mówi o podobieństwie elementu  $x$  do pewnego innego elementu wzorcowego w danej kategorii, np. osoba o wzroście 170 cm jest wysoka w stopniu 0,6 zakładając za wzorzec osobę o wzroście co najmniej 185 cm. Taka interpretacja funkcji przynależności wykorzystywana jest w pracach poświęconych rozpoznawaniu obrazów, analizie skupień i innych dotyczących klasyfikacji.

W drugim podejściu stopień przynależności odzwierciedla kryteria, wymagania lub preferencje wartości rozważanej funkcji decyzyjnej. Takie podejście do zbiorów rozmytych, wywodzące się z pracy Bellmana i Zadeha [BZ70], dało początek pracom z dziedziny optymalizacji rozmytej, w szczególności rozmytemu programowaniu liniowemu i wspomaganie decyzji, zostanie ono również wykorzystane do określenia funkcji oczekiwań inwestora w dalszej części pracy.

W przypadku funkcji przynależności zmiennej rozmytej  $\mu_\xi(x)$  mamy do czynienia z podejściem trzecim, zaproponowanym w 1978 przez Zadeha w teorii możliwości [Zad78]. Funkcja przynależności informuje tu o możliwości przyjęcia przez zmienną określonej wartości  $x$ , w związku z czym rozkład możliwości jest określony jako (2.12). Należy pamiętać, że słowo możliwość przekazuje w tym przypadku znaczenie epistemiczne danej zmiennej. W odróżnieniu od miary prawdopodobieństwa, zdarzenie z miarą możliwości 1 jest zdarzeniem w pełni możliwym, ale nie jest zdarzeniem pewnym.

$$Pos \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \in B \} = \sup_{x \in B} \mu_\xi(x) \quad (2.12)$$

Ponadto zdefiniowana została miara konieczności jako (2.13).

$$Nec \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \in B \} = 1 - Pos \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \in B^c \} = 1 - \sup_{x \in B^c} \mu_\xi(x). \quad (2.13)$$

Miara określa stopień w jakim zdarzenie jest pewne (konieczne) i implikuje stopień, w jakim nie jest możliwe zdarzenie spoza  $B$ . w teorii wiarygodności funkcja przynależności zdefiniowana jest za pomocą miary wiarygodności.

**Definicja 2.11** [LL02] Niech  $\xi$  będzie zmienną rozmytą zdefiniowaną na przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P(\Theta), Cr)$ . Wtedy funkcją przynależności zmiennej rozmytej nazywamy funkcję:

$$\mu_\xi(x) = \min(Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) = x \}, 1) \quad (2.14)$$

Każda zmienna rozmyta posiada charakterystyczną i jedyną funkcję przynależności, jednak jedna funkcja przynależności może opisywać różne zmienne rozmyte. Aby funkcja przynależności była funkcją przynależności zmiennej rozmytej, musi być spełniony warunek normalności, a więc  $\sup \mu_\xi(x) = 1$ .

w literaturze spotykanych jest wiele różnych typów funkcji przynależności, do najczęściej stosowanej klasyfikacji należy podział na:

- funkcje złożone z odcinków prostych. Zaletą tych funkcji jest prostota obliczeniowa oraz mała liczba informacji niezbędnych do ich określenia (ustalenie parametrów wierzchołków).

- intuicyjne funkcje przynależności, które podświadomie stosuje człowiek przy klasyfikacji. Charakteryzują się ciągłością, jak również ciągłą pierwszą i drugą pochodną oraz łagodnymi zakrzywieniami np. funkcja Gaussa, funkcje harmoniczne, funkcje wielomianowe.

W niniejszej pracy będziemy wykorzystywać następujące funkcje przynależności:

- trapezowa oznaczana  $\mu = (a, b, c, d)$ , o funkcji przynależności:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 & \text{dla } b \leq x < c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{dla } c \leq x < d, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \quad (2.15)$$

- trójkątna, jako specjalny przypadek funkcji trapezowej, w której  $b = c$ , przedstawiona na rys. 2.2:
- normalna <sup>1</sup> oznaczana  $N(m, \sigma)$ , przedstawiona na rys 2.2, o funkcji przynależności:

$$\mu(x) = 2 \left( 1 + e^{\frac{\pi|x-m|}{\sqrt{6}\sigma}} \right)^{-1}, x \in \mathfrak{R}, \sigma > 0, \quad (2.16)$$

- ten sam kształt ze skończonym nośnikiem prezentuje funkcja:

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{dla } a \leq x < b, \\ \left(\frac{x-c}{b-c}\right)^2 & \text{dla } b \leq x < c, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \quad (2.17)$$

- gaussowska z funkcją przynależności:

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathfrak{R}, \sigma > 0. \quad (2.18)$$

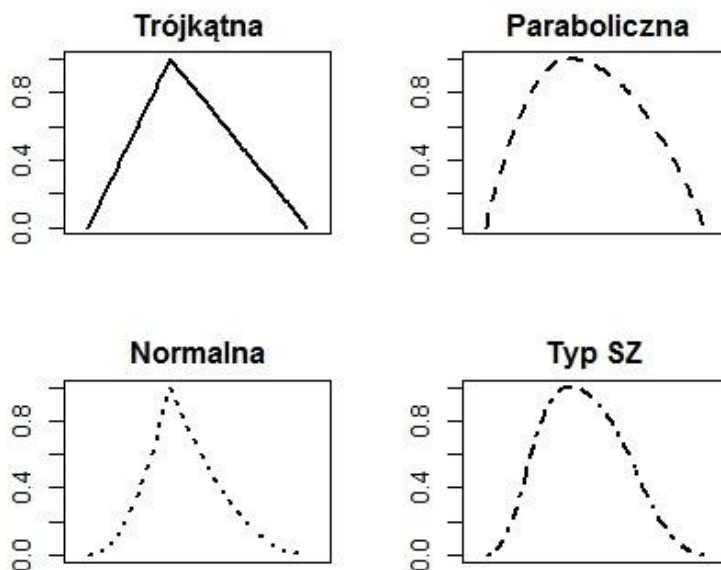
- typu *SZ*, o kształcie zbliżonym do gaussowskiej ze skończonym nośnikiem, oznaczana  $\mu = (a, b, c)$ , przedstawiona na rys. 2.2, o funkcji przynależności:

$$\mu(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{dla } a \leq x < \frac{a+b}{2}, \\ 1 - \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{dla } \frac{a+b}{2} \leq x < b, \\ 1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 & \text{dla } b \leq x < \frac{b+c}{2}, \\ 2\left(\frac{x-c}{c-b}\right)^2 & \text{dla } \frac{b+c}{2} \leq x < c, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \quad (2.19)$$

- paraboliczna określona następująco:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 & \text{dla } b \leq x < c, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Rysunek 2.2: Różne kształty funkcji przynależności



Źródło: opracowanie własne

Zmienną rozmytą będziemy nazywać trapezową, trójkątną, normalną itd, gdy jej funkcja przynależności będzie odpowiednio trapezowa, trójkątna, normalna itd.

Jeśli zmienna rozmyta określona jest przez funkcje wiarygodności, otrzymujemy jej funkcję przynależności za pomocą równania (2.14). Konsekwentnie, jeśli zmienna jest określona za pomocą funkcji przynależności, możemy otrzymać funkcję wiarygodności wykorzystując zależność (2.21).

**Twierdzenie 2.3** [Liu06a] Niech  $\xi$  będzie zmienną rozmytą z funkcją przynależności  $\mu$ . Wtedy dla każdego zbioru  $B$  liczb rzeczywistych zachodzi:

$$Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \in B \} = \frac{1}{2} (\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B^c} \mu(x)) \quad (2.21)$$

Z zależności (2.21) wynikają następujące wzory (2.22)—(2.24), a miary wiarygodności zdarzeń zilustrowano na rysunku 2.3.

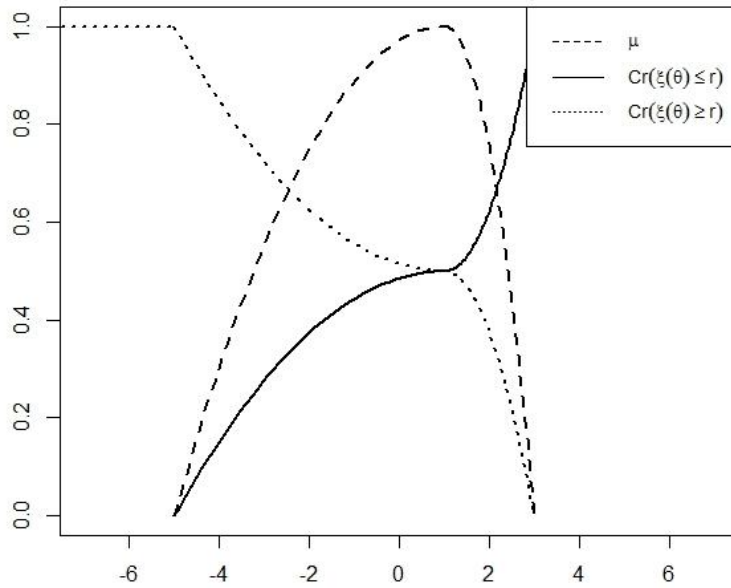
$$Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq x \} = \frac{1}{2} (\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y \geq x} \mu(y)), \forall x \in \mathfrak{R} \quad (2.22)$$

$$Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \geq x \} = \frac{1}{2} (\sup_{y \geq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y \leq x} \mu(y)), \forall x \in \mathfrak{R} \quad (2.23)$$

$$Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) = x \} = \frac{1}{2} (\mu(x) + 1 - \sup_{y \neq x} \mu(y)), \forall x \in \mathfrak{R}. \quad (2.24)$$

<sup>1</sup>określenie *normalna* odnosi się do kształtu funkcji przynależności. W literaturze określenie normalny zbiór rozmyty odnosi się również do sytuacji, gdy funkcja przynależności zbioru przyjmuje wartości pomiędzy 0 a 1, łącznie z 1.

Rysunek 2.3: Miary wiarygodności zmiennej rozmytej



Źródło: opracowanie własne

W szczególności dla ciągłej funkcji  $\mu$ :

$$Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) = x \} = \frac{\mu(x)}{2}, \forall x \in \mathfrak{R}. \quad (2.25)$$

Niech  $\xi$  będzie trapezową zmienną rozmytą, wtedy jej rozkład wiarygodności wynosi:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq d, \\ \frac{d-2c+x}{2(d-c)} & \text{dla } c \leq x < d, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } b \leq x < c, \\ \frac{x-a}{2(b-a)} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Niech  $\xi$  będzie normalną zmienną rozmytą, wtedy jej rozkład wiarygodności równa się:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{\pi|x-e|}{\sqrt{6}\sigma}}\right)^{-1} & \text{dla } x \leq e, \\ 1 - \left(1 + e^{\frac{\pi|x-e|}{\sqrt{6}\sigma}}\right)^{-1} & \text{dla } x > e. \end{cases} \quad (2.27)$$

Niech  $\xi$  będzie normalną zmienną rozmytą typu SZ, wtedy jej rozkład wiarygodności określony jest jako:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{dla } a \leq x < \frac{a+b}{2}, \\ 0,5 - \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{dla } \frac{a+b}{2} \leq x < b, \\ 0,5 + \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 & \text{dla } b \leq x < \frac{b+c}{2}, \\ 1 - \left(\frac{x-c}{c-b}\right)^2 & \text{dla } \frac{b+c}{2} \leq x < c, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (2.28)$$



Niech  $\xi$  będzie kwadratową zmienną rozmytą, wtedy jej rozkład wiarygodności wynosi:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq c, \\ 0,5 + \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 & \text{dla } b \leq x < c, \\ 0,5 - \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \text{dla } a \leq x < b, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Niezależność można zdefiniować również, bazując na funkcji przynależności.

**Twierdzenie 2.4** [Liu07] Niech  $\mu_i$  będzie funkcją przynależności odpowiednio zmiennych rozmytych  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  a  $\mu$  łącznym rozkładem rozmytego wektora  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ . Zmienne  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_m) = \min_{1 \leq i \leq m} \mu_i(x_i), \quad (2.30)$$

dla każdej liczby rzeczywistej  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Sformułowana przez Zadeha zasada rozszerzenia pozwala zdefiniować operację na liczbach rozmytych. W przypadku zmiennych rozmytych zasadę tę ilustruje następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.5** [Liu06a] Niech  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  będą niezależnymi zmiennymi rozmytymi z funkcjami przynależności odpowiednio  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  oraz

$f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  funkcją ciągłą. Wtedy funkcja przynależności  $\mu$  zmiennej rozmytej

$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  wynosi:

$$\mu(x) = \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i), \quad \text{dla każdego } x \in \mathfrak{R}. \quad (2.31)$$

W pracy wykorzystane zostaną następujące operacje:

- dodawanie, zdefiniowane następująco:

$$\mu_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}: x = x_1 + x_2} \{\min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2))\}, \quad (2.32)$$

np. dla trójkątnych zmiennych rozmytych  $\xi_1 = (a_1, b_1, c_1)$  i

$\xi_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , zmienna  $\xi = \xi_1 + \xi_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ;

- mnożenie przez skalar, zdefiniowane następująco:

$$\mu_{\omega\xi}(x) = \sup_{x=\omega x_1} \{\mu(x_1)\}, \quad (2.33)$$

np. dla zmiennej trójkątnej  $\xi = (a, b, c)$

$$\omega\xi = \begin{cases} (\omega a, \omega b, \omega c) & , \text{ dla } \omega \geq 0 \\ (\omega c, \omega b, \omega a) & , \text{ dla } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

## 2.3 Rozmyta stopa zwrotu

Podstawową charakterystyką każdej inwestycji finansowej jest uzyskana stopa zwrotu. W praktyce inwestor staje przed problemem określenia stopy zwrotu, której może się spodziewać w wyniku inwestycji przed jej realizacją. Zwolennicy podejścia rozmytego podkreślają brak pełnej informacji o prawdopodobieństwie, nieprecyzyjność, niepewność i niejednoznaczność danych. Ponadto za wykorzystaniem logiki rozmytej optują szeroko obecnie rozwijane finanse behawioralne. Narzędziem, które pozwala na uwzględnienie niepewności związanej nie tylko z wiedzą ekspertów o stanach rynku, ale także sposobem myślenia i zachowania inwestorów, jest rozmyta stopa zwrotu z funkcją przynależności jako podzbiorem rozmytym w przestrzeni liczb rzeczywistych uogólniającym pojęcie przewidywanej stopy zwrotu.

W niniejszej pracy przyjmuje się następujące założenia. Niech:

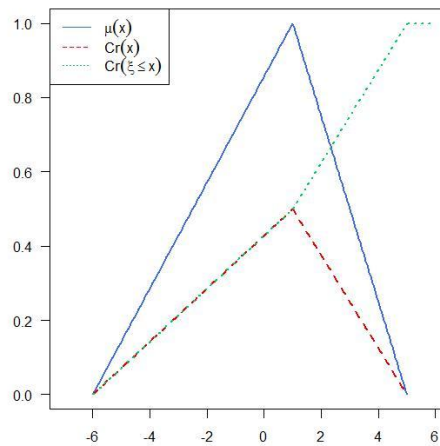
- $\Theta$  jest zbiorem wszystkich elementarnych stanów rynku  $\theta$ ,
- $P(\Theta)$  jest rodziną podzbiorów  $\Theta$ ,
- $Cr_\eta : P(\Theta) \rightarrow [0, 1]$  funkcją wiarygodności przyszłej wartości papieru wartościowego,
- $(\Theta, P(\Theta), Cr_\eta)$  — przestrzenią wiarygodności,
- $\eta : \Theta \rightarrow \mathfrak{R}$  jest rozmytą wartością przyszłą składnika aktywów.

Zgodnie z koncepcją zmiennej rozmytej przedstawioną w poprzednim podrozdziale, przez rozmytą wartość przyszłą będziemy rozumieć funkcję określoną na przestrzeni wiarygodności określającą przyszłą wartość papieru wartościowego. Funkcja  $Cr_\eta$  każdemu podzbiоровi wszystkich elementarnych stanów rynku przyporządkowuje wiarygodności wystąpienia poszczególnych przyszłych wartości.

- $\xi$  jest rozmytą stopą zwrotu. Zgodnie z zależnością pomiędzy stopą zwrotu a wartością końcową (1.1), rozmyta stopa zwrotu jest liniowym przekształceniem rozmytej wartości przyszłej aktywa. Zatem na podstawie twierdzenia 2.2 jest zmienną rozmytą. Przez rozmytą stopę zwrotu będziemy rozumieć funkcję określoną na przestrzeni wiarygodności zwracającą wartość przyszłej stopy zwrotu.
- $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$  Funkcja przynależności zmiennej rozmytej działa ze zbioru wartości przyszłych stóp zwrotu na zbiór liczb rzeczywistych z przedziału  $[0,1]$ , przypisując każdej wartości możliwość zaistnienia. Funkcja przynależności interpretuje się jako przypuszczalną stopę zwrotu *około wartości*  $x_0$ , dla której  $\mu(x_0) = 1$ .
- $Cr : P(\Theta) \rightarrow [0, 1]$  Funkcja wiarygodności  $Cr$  zmiennej rozmytej działa z podzbioru zdarzeń elementarnych, na zbiór liczb rzeczywistych z przedziału  $[0,1]$ , określając wiarygodność zaistnienia zdarzenia, że zmienna przyjmie wartość z danego przedziału.

**Przykład 1** Niech  $\xi$  będzie ciągłą trójkątną zmienną rozmytą, określającą przyszłą stopę zwrotu z przedziału  $\langle -6, 5 \rangle$  o funkcji przynależności  $\mu = (-6, 1, 5)$ . A więc przypuszczalna stopa zwrotu wynosi około 1. Wiarygodność zdarzenia, że zrealizowany zostanie zysk (rozumiany przez dodatnią stopę zwrotu) wynosi 0,57. Sytuację przedstawia rys 2.4.

Rysunek 2.4: Funkcje przynależności i wiarygodności zmiennej rozmytej z przykładu 1.



Źródło: opracowanie własne

### 2.3.0.1 Niezależność rozmytej stopy zwrotu

Niezależność rozmytej stopy zwrotu jest najczęściej zakładana przy analizie empirycznej zadań, w przypadku zdefiniowanej zmiennej jak w niniejszym rozdziale, jest to cecha stała.

**Twierdzenie 2.6** [Liu07] Niech  $\Theta$  będzie niepustym zbiorem,  $P(\Theta)$  rodziną wszystkich podzbiorów a  $Cr$  miarą wiarygodności. Wtedy dla każdego  $A, B \in P(\Theta)$ , zachodzi:

$$\begin{aligned} Cr \{A \cup B\} &= \max \{Cr \{A\}, Cr \{B\}\}, & \text{jeśli } Cr \{A \cup B\} \leq 0,5, \\ Cr \{A \cap B\} &= \min \{Cr \{A\}, Cr \{B\}\}, & \text{jeśli } Cr \{A \cap B\} \geq 0,5. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na podstawie powyższego twierdzenia, prawdziwe jest:

**Twierdzenie 2.7** Rozmyte stopy zwrotu są zmiennymi niezależnymi.

**Dowód 2.1** Niech  $\xi_i$  oznacza rozmytą stopę zwrotu i-tego udziału, a  $\xi$  stopę zwrotu całego portfela, stąd

$$\forall_i \mu_i \in [0, 1] \text{ oraz } Cr \{\theta \in \Theta : \xi_i(\theta) = x\} \in [0; 0,5],$$

a także  $Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) = x \} \in [0; 0, 5]$ . Na podstawie własności samodualności oraz twierdzenia 2.3.0.1.

$$\begin{aligned}
Cr \{ \theta \in \Theta : \bigcap_{i=1}^n \xi_i(\theta) = x_i \} &= 1 - Cr \{ \theta \in \Theta : \bigcup_{i=1}^n \xi_i(\theta) \neq x_i \} = \\
&= 1 - \max_{1 \leq i \leq n} \{ Cr \{ \theta \in \Theta : \xi_i(\theta) \neq x_i \} \} = \\
&= 1 - \max_{1 \leq i \leq n} \{ 1 - Cr \{ \theta \in \Theta : \xi_i(\theta) = x_i \} \} = \\
&= 1 - (1 - \min_{1 \leq i \leq n} \{ Cr \{ \theta \in \Theta : \xi_i(\theta) = x_i \} \}) = \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} \{ Cr \{ \theta \in \Theta : \xi_i(\theta) = x_i \} \}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

### 2.3.1 Wartość oczekiwana

Wielkością opisującą przyszłą oczekiwaną stopę zwrotu jest wartość oczekiwana zmiennej rozmytej. W oparciu o funkcję wiarygodności wartość oczekiwana zmiennej rozmytej  $\xi$  zdefiniowana została następująco:

**Definicja 2.12** [LL02]

$$E[\xi] = \int_0^{\infty} Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \geq r \} dr - \int_{-\infty}^0 Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq r \} dr, \tag{2.37}$$

przy założeniu, że całki są skończone.

W przypadku zmiennej dyskretnej, o funkcji przynależności określonej jako:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_1 & \text{dla } r = a_1 \\ \mu_2 & \text{dla } r = a_2 \\ \dots & \dots \\ \mu_n & \text{dla } r = a_n \end{cases} \tag{2.38}$$

wartość oczekiwana przedstawia się następująco:

$$E[\xi] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \left( \max_{1 \leq j \leq i} \mu_j - \max_{0 \leq j \leq i-1} \mu_j + \max_{i \leq j \leq n} \mu_j - \max_{i+1 \leq j \leq n+1} \mu_j \right), \tag{2.39}$$

przy założeniu, że  $\mu_0 = \mu_{n+1} = 0$ .

W przypadku zmiennej rozmytej wykazano, że:

**Twierdzenie 2.8** [Liu04] Niech  $\xi$  i  $\eta$  będą niezależnymi zmiennymi rozmytymi ze skończonymi wartościami oczekiwanymi, wtedy dla każdej liczby  $a$  i  $b$ , zachodzi:

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta] \tag{2.40}$$

### 2.3.2 Miary niepewności

W celu dokonania wyboru portfela akcji inwestorowi niezbędne jest porównanie poziomów niepewności, dlatego do formułowania zadań optymalizacyjnych obok kryterium zysku, wykorzystywane jest kryterium minimalizacji miar niepewności lub

jej maksymalnego akceptowalnego poziomu. Przyjęcie niewłaściwej funkcji za miarę niepewności, może prowadzić do niekonsekwencji w ocenie, prowadząc do błędnych decyzji. Artzner i in. [ADEH97] [ADEH99] zaproponowali cztery aksjomaty, które musi spełniać dobra miara ryzyka: subaddytywności, dodatniej jednorodności, monotoniczności oraz niezmienniczości ze względu na translację. Miara spełniająca wszystkie cztery aksjomaty nazywana jest koherentną miarą ryzyka. Wymagania te zostały zaadaptowane do sytuacji niepewności sensu stricto między innymi w [DP10].

**Definicja 2.13** [DP10] Funkcja  $\rho : \xi \rightarrow \mathfrak{R}$  jest rozmytą koherentną miarą ryzyka (fuzzy coherent risk measure), jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1. (subaddytywność)  $\rho(\xi + \eta) \leq \rho(\xi) + \rho(\eta)$
2. (dodatnia jednorodność) jeśli  $\omega \geq 0$ , to  $\rho(\omega\xi) = \omega\rho(\xi)$ ;
3. (monotoniczność) jeśli  $\forall \theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq \eta(\theta)$ , to  $\rho(\xi) \leq \rho(\eta)$ ;
4. (niezmienniczość ze względu na translację) dla każdego  $c \in \mathfrak{R}$  zachodzi  $\rho(\xi + c) = \rho(\xi) - c$ .

Warunek subaddytywności zapewnia, że dywersyfikacja portfela redukuje ryzyko, stąd dołączenie dodatkowego instrumentu do portfela nie powinno zwiększyć niepewności. Zatem niepewność portfela nie może przekraczać ryzyka sumy jego składników. Dodatnia jednorodność interpretuje się następująco: gdy zmienimy skalę inwestycji, dywersyfikacja ma mniejsze znaczenie i niepewność rośnie wraz ze skalą inwestycji. Aksjomat monotoniczności informuje, że jeśli potencjalny zysk  $\xi$  jest mniejszy niż zysk  $\eta$ , to zależność ta zachowana jest także pomiędzy miarą niepewności. Ostatni warunek zapewnia, że instrument wolny od ryzyka przynosi pewien stały zysk, który rekompensuje ewentualne straty wysokością kapitału zainwestowanego w niego.

**Wariancja, semiwariancja.** w praktyce analitycy finansowi, zgodnie z koncepcją Markowitza, wykorzystują wariancję i semiwariancję zmiennej losowej jako ilościowe miary ryzyka. Są one również podstawowymi miarami niepewności w analizie rozmytej. Jeśli zmienna rozmyta ma skończoną wartość oczekiwaną, to jej wariancja zdefiniowana jest analogicznie do wariancji zmiennej losowej:

$$V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2] \quad (2.41)$$

Wariancja jest miarą niepewności w sensie neutralnym [Jaj06], rozumianej nie tylko jako zagrożenie spadku stopy zwrotu poniżej oczekiwanego poziomu, ale również szansa na ponadprzeciętne zyski. Huang [Hua08b] w odniesieniu do negatywnej koncepcji ryzyka, określiła semiwariancję zmiennej rozmytej następująco:

**Definicja 2.14** [Hua08b] Niech  $\xi$  będzie rozmytą zmienną ze skończoną wartością oczekiwaną. Wtedy semiwariancja zmiennej  $\xi$  wynosi:

$$SV[\xi] = E\left[\left[(\xi - E[\xi])^{-}\right]^2\right], \quad (2.42)$$

gdzie:

$$(\xi - E[\xi])^{-} = \begin{cases} \xi - E[\xi] & \text{dla } \xi \leq E[\xi], \\ 0 & \text{dla } \xi > E[\xi]. \end{cases}$$

Pomiędzy wariancją a semiwariancją zmiennej rozmytej występuje następująca zależność:  $0 \leq SV[\xi] \leq V[\xi]$ . Zasadniczo, wariancja i semiwariancja przyjmują takie same wartości dla symetrycznego rozkładu zmiennej rozmytej. O asymetrii rozkładu zmiennej rozmytej informuje nas trzeci moment centralny, którego wartość zdefiniowana jest następująco:

**Definicja 2.15** [LQK10] Niech  $\xi$  będzie rozmytą zmienną ze skończoną wartością oczekiwaną. Wtedy skośność zmiennej  $\xi$  wynosi:

$$S_k[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^3] \quad (2.43)$$

**Wartość zagrożona.** Bezpośrednio miary wiarygodności wykorzystywane są również w celu ograniczania ryzyka, analogicznie do pierwszej zasady bezpieczeństwa Roya [Roy52], która za kryterium doboru portfela uznaje minimalizację prawdopodobieństwa, że stopa zwrotu z portfela spadnie poniżej progu minimalnego [Hua06a] [LQY10] [WWJ11]. Wartość zagrożona, wprowadzona pod koniec lat 80-tych przez kilka międzynarodowych instytucji finansowych, jest prawdopodobnie jedną z najczęściej stosowanych miar ryzyka. Wartość zagrożona w odniesieniu do portfela, szacuje, jaka jego część w danym okresie jest zagrożona stratą, przy danym poziomie istotności. W przypadku rozmytym, Wang, Wadata i Pedrycz [WWP09], przedstawili wartość zagrożoną wykorzystując teorię wiarygodności.

**Definicja 2.16** [WWP09] Niech  $\kappa$  oznacza zmienną rozmytą określającą stratę, a  $1 - \alpha$  poziom ufności, wtedy:

$$VaR(1 - \alpha) = \sup \{x : Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \geq x) \geq \alpha\} \quad (2.44)$$

Bazując na definicji  $\alpha$ -kwantyla rozkładu wiarygodności straty, Peng [Pen08], przedstawił wartość zagrożoną jako (2.45)

$$VaR(1 - \alpha) = \inf \{x : Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \leq x) \geq \alpha\} \quad (2.45)$$

w przypadku zmiennych rozmytych ciągłych, korzystając z cechy samodualności miary wiarygodności, można dowieść równoważność definicji (2.44) i (2.45):

## Dowód 2.2

$$\begin{aligned} \sup \{x : Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \geq x) \geq \alpha\} &= \sup \{x : 1 - Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \leq x) \geq \alpha\} \\ &= \sup \{x : Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \leq x) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{x : Cr(\theta \in \Theta : \kappa(\theta) \leq x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Funkcja 2.45 jest w literaturze spotykana również pod określeniem  $\alpha$ -pesymistycznej wartości zmiennej rozmytej, a (2.44) odpowiada  $(1 - \alpha)$ -optymistycznej wartości  $\xi$ . Więcej na temat własności wartości pesymistycznych i optymistycznych można odnaleźć w [PL04]. Wartość zagrożoną interpretuje się następująco:  $VaR(1 - \alpha) = y\%$  oznacza, że wiarygodność, iż portfel straci na wartości więcej niż  $y$  (jego VaR) w konkretnym horyzoncie czasowym, jest równe z góry zadanej wartości  $\alpha$ . Powszechnie używanymi poziomami ufności  $(1 - \alpha)$  są 99% i 95%. Przyjmując, że przez stratę rozumie się ujemną wartość stopy zwrotu, można, w przypadku ciągłych zmiennych rozmytych, określić VaR jako procentową stratę wartości instrumentu za pomocą równania 2.46:

$$Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq -VaR) = \alpha \quad (2.46)$$

Wartość zagrożona jest miarą ryzyka typu I, tzn posiada własności: monotoniczności, dodatniej jednorodności i niezmienniczości ze względu na translację oraz subaddytywności przy założeniu niezależności. Niewątpliwymi zaletami VaR jest prostota obliczeniowa i interpretacyjna. Nie jest to jednak miara koherentna w sensie zaproponowanym przez Artznera. Podstawową jej wadą jest brak jakiegokolwiek informacji o wielkości strat w zdarzeniach o mniejszej wiarygodności niż  $\alpha$ , co może prowadzić do błędnych wniosków o niepewności różnych zmiennych. Zakładając, że posiadamy dwie zmienne rozmyte z jednakową wartością VaR na ustalonym poziomie ufności, niech jedna z pozycji ma znacznie grubsze ogony od drugiej (szerszy nośnik). Wówczas VaR błędnie informuje nas, że pozycje te są jednakowo niepewne.

**Warunkowa wartość zagrożona.** Próbę stworzenia miary ryzyka wolnej od wad wartości zagrożonej podjęli Rockafellar i Uryasev w [UR00] definiując warunkową wartość zagrożoną oraz Acerbi i Tasche [AT02] określając oczekiwane straty. Miary te informują jaka jest wartość oczekiwana straty, która może wystąpić w  $1 - \alpha$  najgorszych przypadkach. W przypadku niepewności w analizie rozmytej Peng [Pen09] zaproponował analogiczne rozwiązanie definiując średnią wartość zagrożoną (AVaR — *average value at risk*), w literaturze funkcjonują również określenia warunkowa wartość zagrożona (CVaR — *conditional value at risk*) [ZS10], jak również nadzwyczajna starata (ES — *expected shortfall*). Przy danym poziomie ufności przez warunkową wartość zagrożoną rozumie się wartość oczekiwaną straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną odpowiadającą temu poziomowi ufności.

**Definicja 2.17** [Pen09] Niech  $\xi$  będzie zmienną rozmytą straty a  $\alpha \in (0, 1]$  poziomem tolerancji, wtedy warunkowa wartość zagrożona CVaR jest funkcją:  $(0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ , taką że:

$$CVaR(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR(\beta) d\beta. \quad (2.47)$$

W pracy rozpatrujemy zmienną rozmytą stopę zwrotu, a przez stratę będzie rozumiana jej wartość poniżej stopy wolnej od ryzyka. Wartość  $VaR(\alpha)$  informuje o najmniejszej z  $1 - \alpha$  procent największych strat, warunkowa wartość zagrożona przy tym samym poziomie ufności określa jaka jest średnia strata wśród wszystkich największych strat, które stanowią  $\alpha$  wszystkich najgorszych przypadków. W pracy [SLML10] za  $\xi$  przyjmując rozmytą stopę zwrotu, warunkową wartość zagrożoną zdefiniowano jako funkcję:

$$CVaR(\alpha) = VaR(\alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^\infty [Cr(f(\xi) - VaR(\alpha) \geq r)]^+ dr, \quad (2.48)$$

gdzie  $f(\xi)$  - oznacza funkcję straty, a  $[t]^+ = \begin{cases} t, & \text{dla } t \geq 0, \\ 0, & \text{dla } t \leq 0. \end{cases}$  Wartość funkcji (2.48)

jest równa sumie wartości VaR i wartości oczekiwanej przekroczenia VaR. CVaR jest miarą koherentną oraz wypukłą, można ją więc uznać za miarę niepewności typu II.

**Entropia.** Kolejną miarą niepewności wykorzystywaną w modelach optymalizacji portfela akcji jest entropia. Pojęcie entropii zostało wprowadzone w fizyce jako jedna z termodynamicznych funkcji stanu, jednak wykorzystywanie jest jej dużo szersze. Entropia jest funkcją częstotliwości występowania określonych konfiguracji. Entropia osiąga maksymalną wartość, jeśli każda możliwa konfiguracja występuje tak samo często, a jest minimalna - ma wartość zero, jeśli układ znajduje się zawsze

w jednej konfiguracji. Entropia jako miara rozmytości zbioru została wprowadzona przez Deluca i Terminiego w 1972 [DLT72], dla dyskretnego zbioru rozmytego  $A$  zaproponowali oni funkcję:

$$H_{DT}[A] = -K \sum_{i=1}^n \mu_i \log(\mu_i) + (1 - \mu_i) \log(1 - \mu_i). \quad (2.49)$$

Interpretowana jest ona jako stopień nierozróżnialności zbioru i jego dopełnienia. Zbiór jest maksymalnie rozmyty, gdy funkcja przynależności jego i jego dopełnienia są sobie równe, a więc każdy element zbioru w równym stopniu do niego należy co nienależy.

W przypadku zmiennej rozmytej entropia określa zakres niepewności wynikający z braku informacji. Zależy ona zarówno od możliwości wszystkich wartości jakie zmienna może przyjmować, jak również od ich liczby (szerokości nośnika dla ciągłej funkcji przynależności). Entropia jest minimalna, gdy zmienna przyjmuje unikalną wartość, a maksymalna, gdy funkcja przynależności zmiennej rozmytej przyjmuje wszystkie wartości z możliwością 1, a więc wszystkie elementy z pewnego przedziału są całkowicie możliwe do zaistnienia, a wiarygodność ich wystąpienia jest równa wiarygodności ich niezastnienia i wynosi 0,5. Entropia zmiennej rozmytej została zdefiniowana w [LL07b].

**Definicja 2.18** Niech  $\xi$  oznacza dyskretną zmienną rozmytą przyjmującą wartości  $r_1, r_2, \dots$ . Wtedy entropia jej rozkładu wiarygodności wynosi:

$$H[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} S(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r_i)), \text{ gdzie } S(t) = -t \ln t - (1 - t) \ln(1 - t)$$

**Definicja 2.19** Niech  $\xi$  oznacza ciągłą zmienną rozmytą, entropią jej rozkładu wiarygodności nazywamy:

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} S(Cr_{\xi}(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)) dr, \text{ gdzie } S(t) = -t \ln t - (1 - t) \ln(1 - t). \quad (2.50)$$

w 2007 Li i Liu zdefiniowali entropię krzyżową określającą odległość pomiędzy dwoma rozkładami.[LL07a]

**Definicja 2.20** [LL07a] Niech  $\xi$  i  $\eta$  będą dwoma ciągłymi zmiennymi rozmytymi, wtedy entropia krzyżowa zmiennej  $\xi$  od  $\eta$  wynosi:

$$D[\xi, \eta] = \int_{-\infty}^{\infty} T(Cr(\xi = x), Cr(\eta = x)) dx, \quad (2.51)$$

gdzie  $T(s, t) = s \ln(\frac{s}{t}) + (1 - s) \ln(\frac{1-s}{1-t})$ .

Entropia krzyżowa jest wykorzystywana do pomiaru rozbieżności rozkładu zmiennej rozmytej od założonego, wtedy jeśli  $\xi$  i  $\eta$  mają ciągłe funkcje przynależności odpowiednio  $\mu$  i  $\nu$ , to:

$$D[\xi, \eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mu(x)}{2} \ln \frac{\mu(x)}{\nu(x)} + \left(1 - \frac{\mu(x)}{2}\right) \ln \frac{2 - \mu(x)}{2 - \nu(x)} \right) dx \quad (2.52)$$

Przykładowo dla trójkątnej i normalnej zmiennej rozmytej, wartość oczekiwana i miary niepewności przedstawione zostały w tabeli 2.1.



Tabela 2.1: Wartości miar ryzyka dla trójkątnej zmiennej rozmytej  $\xi$

miara	niesymetryczna	symetryczna
$E$	$\frac{1}{4}(a + 2b + c)$	$\frac{1}{4}(a + 2b + c)$
$V$	$\frac{33\alpha^3 + 21\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 - \beta^3}{384\alpha}$ gdzie $\alpha = \max\{b - a, c - b\}$ , $\beta = \min\{b - a, c - b\}$	$\frac{(c-a)^2}{24}$
$SV$	$\frac{(m-a)^3}{6(b-a)} + \frac{m-b}{6}(1 + \frac{m-b}{a-b} - \frac{m-c}{b-c}) \max(0, m - b)$	$\frac{(c-a)^2}{24}$
$S_k$	$\frac{(c-a)^2}{32}(c - 2b + a)$	0
$H$	$\frac{c-a}{2}$	$\frac{c-a}{2}$
$VaR$	$2\alpha(a - b) - a$	$2\alpha(a - b) - a$
$CVaR$	$\alpha(a - b) - a$	$\alpha(a - b) - a$

Źródło: opracowanie własne

### 2.3.3 Rozmyta symulacja

W przypadku funkcji przynależności innych niż trójkątne analityczne wyznaczenie wartości miar niepewności może być kłopotliwe. Z tego powodu w celu bezpośredniego wyznaczenia wartości oczekiwanej czy momentów zmiennej rozmytej Liu i Iwamura [LI98] [LL02] zaproponowali rozmytą symulację (*fuzzy simulation*). W dalszej części na podstawie [Liu07] zostaną przedstawione proponowane algorytmy.

Zakładamy, że funkcja

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ oraz } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ jest rozmytym wektorem.}$$

**Rozmyta symulacja rozkładu wiarygodności** Rozmyta symulacja rozkładu wiarygodności polegać będzie na wyznaczaniu:

$$L = Cr \{ \theta \in \Theta : f(\xi(\theta)) \leq 0 \} \quad (2.53)$$

Algorytm zawiara następujące kroki:

1. wygenerowanie losowo  $\theta_k$  z przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P, Cr)$ ;
2. przypisanie  $\mu_k = \min((2Cr \{ \theta_k \}), 1)$  i wygenerowanie  $\xi(\theta_k)$ ,

dla  $k = 1, 2, \dots, n$

3. kalkulacja L za pomocą następującego wzoru:

$$L = \frac{1}{2} \left( \max_{1 \leq k \leq n} (\mu_k : f(\xi(\theta_k)) \leq 0) + \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mu_k : f(\xi(\theta_k)) > 0) \right) \quad (2.54)$$

**Rozmyta symulacja wartości krytycznej** Rozmyta symulacja wartości krytycznej polegać będzie na wyznaczaniu maksymalnego  $\bar{f}$  spełniającego poniższą nierówność z ustaloną precyzją  $\epsilon$ .

$$Cr \{ \theta \in \Theta : f(\xi(\theta)) \geq \bar{f} \} \geq \alpha. \quad (2.55)$$

Symulacja składa się z następujących kroków:

1. wygenerowania losowo  $\theta_k$  z przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P, Cr)$ ;
2. przypisania  $\mu_k = \min((2Cr \{ \theta_k \}), 1)$  i wygenerowania  $\xi(\theta_k)$ ,

dla  $k = 1, 2, \dots, n$

3. ustalenia  $a = \min_{1 \leq k \leq n} f(\xi(\theta_k))$  oraz  $b = \max_{1 \leq k \leq n} f(\xi(\theta_k))$
4. wyznaczanie  $r = \frac{a+b}{2}$
5. kalkulacji  $L(r)$  za pomocą następującego wzoru:

$$L = \frac{1}{2} (\max_{1 \leq k \leq n} (\mu_k : f(\xi(\theta_k)) \geq r) + \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mu_k : f(\xi(\theta_k)) < r)) \quad (2.56)$$

6. jeśli  $L(r) > \alpha$  ustalenie  $a = r$ , w przeciwnym przypadku  $b = r$ ;
7. jeśli  $|a - b| > \epsilon$ , powrót do kroku 3;
8. przypisanie  $\bar{f} = r$ .

**Rozmyta symulacja wartości oczekiwanej.** Rozmyta symulacja wartości oczekiwanej oznacza wyznaczanie wartości oczekiwanej wektora rozmytego  $f(\xi)$ . Symulacja składa się z następujących kroków:

1. ustalenie  $e = 0$ ;
2. wygenerowania losowo  $\theta_k$  z przestrzeni wiarygodności  $(\Theta, P, Cr)$ ;
3. przypisania  $\mu_k = \min((2Cr \{ \theta_k \}), 1)$  i wygenerowania  $\xi(\theta_k)$ ,

dla  $k = 1, 2, \dots, n$

4. ustalenia  $a = \min_{1 \leq k \leq n} f(\xi(\theta_k))$  oraz  $b = \max_{1 \leq k \leq n} f(\xi(\theta_k))$
5. wygenerowanie losowo  $r$  z przedziału  $[a, b]$
6. jeśli  $r \geq 0$  wyznaczenie  $e = e + Cr \{ \theta \in \Theta : f(\xi) \geq r \}$ ,

gdzie  $Cr \{\theta \in \Theta : f(\xi) \geq r\}$ , wyznaczone za pomocą (2.57);

7. jeśli  $r < 0$  wyznaczenie  $e = e + Cr \{f(\xi) < r\}$ , gdzie  $Cr \{f(\xi) \geq r\}$ , wyznaczone za pomocą (2.58);

$$L = \frac{1}{2} \left( \max_{1 \leq k \leq n} (\mu_k : f(\xi(\theta_k)) \leq r) + \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mu_k : f(\xi(\theta_k)) < r) \right) \quad (2.57)$$

$$L = \frac{1}{2} \left( \max_{1 \leq k \leq n} (\mu_k : f(\xi(\theta_k)) \leq r) + \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mu_k : f(\xi(\theta_k)) > r) \right) \quad (2.58)$$

8. powtórzenie kroków 1-7  $N$  razy;

9. przypisanie  $E[f(\xi)] = \max(a, 0) + \min(b, 0) + \frac{e(b-a)}{N}$ .

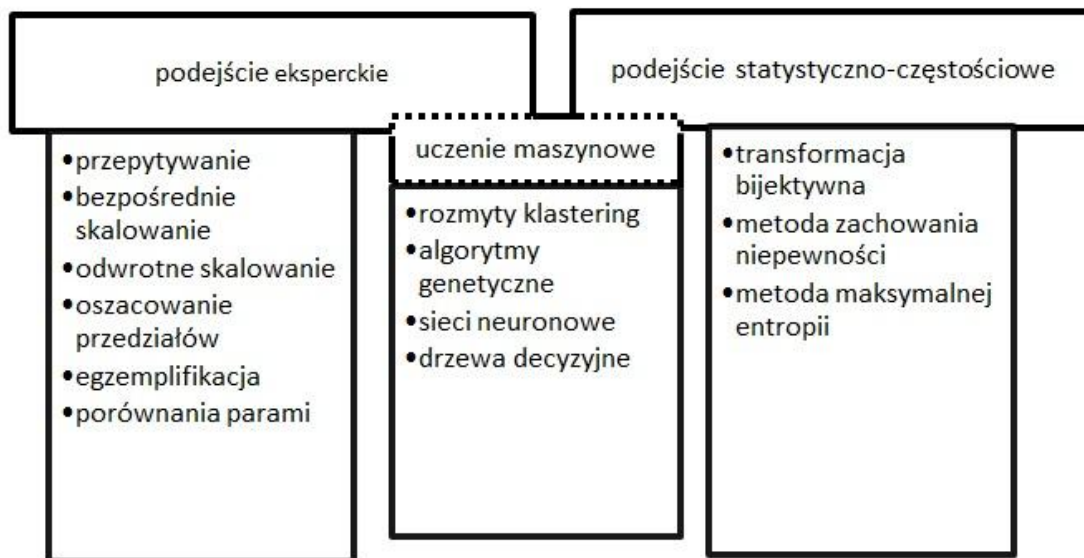
Skuteczność metody rozmytej symulacji została zbadana przez jej autorów w [Liu06b]. W przypadku kształtów trójkątnych zmiennej rozmytej analityczne wyznaczania powyższych wartości sprowadzają się do prostych obliczeń, dodatkowo nie wymagając określania funkcji  $\xi$ , symulacja staje się użyteczna jedynie dla bardziej skomplikowanych kształtów. Powstaje zatem pytanie czy kształt liniowy w rozpatrywanym problemie jest wystarczającym przybliżeniem różnych kształtów.

## 2.4 Metody wyznaczania rozmytej stopy zwrotu

W celu przystąpienia do analizy empirycznej, należy w pierwszym kroku wyznaczyć rozmyte stopy zwrotu poszczególnych papierów wartościowych. W niniejszej pracy poprzez wyznaczenie zmiennej rozmytej rozumiemy estymację jej funkcji przynależności lub wiarygodności. Dotychczas jest to temat szerzej nie poruszany w literaturze. Przykładowe obliczenia są wykonywane przy arbitralnie ustalanych funkcjach przynależności bądź symulowanych wartościach. W [CCM08] zwrócono uwagę na powody rezygnacji z formalnych metod wyznaczania funkcji, takie jak złożoność dostępnych metod, które mogą wymagać więcej czasu i zasobów obliczeniowych niż zastosowanie wyznaczonych zbiorów we właściwej aplikacji, czy brak badań i wytycznych, które metody są najlepsze w danej dziedzinie czy konkretnej aplikacji. Podejście rozmyte charakteryzuje się znaczną dowolnością w wyborze metod modelowania kształtów funkcji przynależności. *Proces modelowania rozmytego jest niezmiernie ważnym etapem poprzedzającym późniejsze wnioskowanie. Należy pamiętać, że o wyborze konkretnej reprezentacji rozmytej może decydować nie tylko charakter i własności opisywanych obiektów, ale i kontekst* [Grz06]. Generalnie wyróżnić możemy dwie grupy metod: eksperckie (*user-driven*) i oparte na danych (*data-driven*)<sup>2</sup>, istnieje również wiele technik, które dzielą pewne cechy charakterystyczne dla obu wymienionych grup. Problem automatycznego generowania funkcji przynależności został podjęty już w ramach dyskusji na temat teorii możliwości. Dubois i Prade [DPS93] proponują użycie danych statystycznych przy wyznaczaniu funkcji przynależności w interpretacji miary możliwości. Od tego czasu problem jest szeroko omawiany. W literaturze można odnaleźć między innymi: metody heurystyczne, rozmyte algorytmy grupowania, sieci neuronowe, algorytmy genetyczne, metody hybrydowe, czy metody oparte na zasadzie maksymalnej entropii. Przegląd metod można odnaleźć w [CS87], [MKK98], [MBM07]. Należy również zauważyć, że część metod pozwala wyznaczyć zupełnie dowolny zbiór rozmyty inne

<sup>2</sup>określenia użyte przez Dubois i Prade [DPS93], Klir i Yuan określa te grupy odpowiednio *expert* i *data sample*

Rysunek 2.5: Metody generowania funkcji przynależności.



Źródło: opracowanie własne

skupiają się na doborze parametrów wcześniej narzuconych kształtów. *Pamiętać należy także i o tym, że kształt funkcji przynależności ma ogromny wpływ na sposób prowadzenia obliczeń. Funkcje przynależności o mniej regularnych kształtach w istotny sposób komplikują obliczenia, podczas gdy rachunki na w miarę prostych funkcjach (np. trapezoidalnych) prowadzi się znacznie łatwiej, a co więcej, uzyskiwane dla nich wynikiom często łatwiej również nadać sensowną interpretację [Grz06].* Najczęściej wymieniane podjęcia i metody zostały sklasyfikowane i przedstawione na rys. 2.5. Warto zaznaczyć, że część autorów (np. [Ped08]) nie wymienia uczenia maszynowego jako osobnego podejścia, a ze względu na wymaganie zestawu danych uczących zalicza je do metod podejścia opartego na danych. Jednocześnie w przypadku uczenia nadzorowanego należało by je zaliczyć do podejścia eksperckiego. Jak podkreśla wielu autorów wybór metodyki jest ściśle związany z rozpatrywanym problemem, a metody sprawdzające się w jednej dziedzinie, mogą być nieodpowiednie w innych zastosowaniach. Pedrycz [PEP11] przedstawia następujące wytyczne wspierające proces projektowania zbiorów rozmytych niezależne od obszaru badawczego:

- wyrażna i dobrze zdefiniowana semantyka. Niezależnie od wybranej metodyki w pierwszym kroku należy skupić się na określeniu semantyki i interpretacji wyznaczanych zbiorów rozmytych.
- kalibracja;
- wybór metody estymacji - wybór podejścia zorientowane na ekspertów lub danych uzależnia się od dostępności informacji i możliwości przeprowadzenia doświadczeń; metody eksperckie także pośrednio wykorzystują dane doświadczalne i statystyczne
- model przyrostowy - wyznaczanie i rozwój zbiorów rozmytych może odbywać się krokowo i ulegać rozwojowi.

w przypadku rozpatrywanego badania koncepcję i semantykę wyznaczanych zbiorów rozmytych zawiera podrozdział 2.3. Możliwość stopniowego rozwoju należy traktować jako zaletę podejścia rozmytego umożliwiającą indywidualne modelowanie w zależności od inwestorów, a także zmian otoczenia rynku. Kwestia ta ze względu na główny cel pracy nie zostanie rozwinięta. W niniejszym podrozdziale omówienie problemu zostanie ograniczone do metod możliwych do wykorzystania przy generowaniu funkcji przynależności lub funkcji wiarygodności rozmytej stopy zwrotu w celu optymalizacji portfela akcji. Przedstawione zostaną podejścia eksperckie, statystyczno-częstościowe oraz próby łączenia obu podejść. Wymienione na schemacie uczenie maszynowe, szczególnie metody klasteringu rozmytego czy rozmytych sieci neuronowych, są popularnym i sprawdzonym sposobem generowania funkcji przynależności w kontekście podobieństwa do wzorcowego obiektu, a więc pierwotnym ujęciu przynależności (por. podrozdział 2.2.2). Metody te pozwalają klasyfikować obiekty do więcej niż jednej kategorii w różnych stopniach i są szeroko rozpowszechnione w analizie i rozpoznawaniu obrazów czy sterownikach rozmytych. Jednak w rozpatrywanym obszarze badawczym nie mają większego zastosowania, dlatego nie zostaną uwzględnione. Biorąc pod uwagę, że wiele z metod pozwala wyznaczyć jedynie funkcję dyskretną, ostatni podrozdział zostanie poświęcony sposobowi interpolacji funkcji ciągłej na podstawie oszacowań wartości dyskretnych.

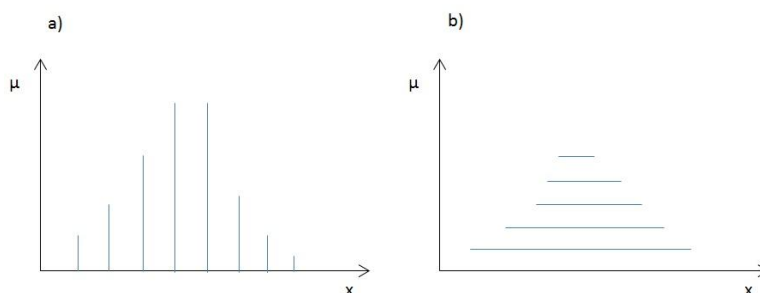
### 2.4.1 Podejście eksperckie

Klir i Yuan [KY95] w ogólnym scenariuszu tego podejścia identyfikują trzy podmioty: domenę, eksperta (lub ekspertów) w danej dziedzinie, inżyniera wiedzy (osobę projektującą system rozmyty lub zainteresowaną wykorzystaniem zbiorów rozmytych) oraz 3 kroki działania:

1. pozyskanie wiedzy w formie zdań wyrażonych w języku naturalnym;
2. określenie znaczenia wyrażen lingwistycznych;
3. konstrukcja funkcji przynależności na podstawie uzyskanych danych.

Podejście eksperckie zostało podzielone [KY95] na metody z jednym ekspertem (*one-expert*) oraz wieloma ekspertami (*multiexpert*). W drugim przypadku o wartości funkcji przynależności decyduje średnia lub suma ważona stopniami kompetencji ekspertów. Zarówno wśród metod z jednym jak i wieloma ekspertami można wyróżnić metody bezpośrednie (*direct*) i pośrednie (*indirect*). Pierwsze składają się z pytań dotyczących bezpośrednio funkcji przynależności, drugie odnosi się do niej pośrednio, dzięki czemu pytania do ekspertów są prostsze, co ułatwia sformułowania odpowiedzi i zmniejsza wrażliwość na subiektywne oceny. Jednak metody te wymagają dalszego przetwarzania odpowiedzi opartego na różnych założeniach. W przypadku metod opierających się na ocenie użytkownika-eksperta, niezależnie czy pojedynczej osobie czy grupie osób, możliwy jest zarówno pionowy jak i poziomy tryb oceny funkcji przynależności, odzwierciedlając różne spojrzenia na zbiór rozmyty [DPS93]. Rozpatrując tryb pionowy ekspert odpowiada na pytania typu: *Czy  $x$  należy do zbioru  $A$ ?* lub *W jakim stopniu  $x$  należy do zbioru  $A$ ?* Natomiast poziomy sposób szacowania przynależności polega na określeniu kolejnych  $\alpha$ -przekrojów. Ekspertom uczestniczący w eksperymencie są zadawane pytania postaci: *Jakie są elementy  $X$ , które należą do zbioru rozmytego w stopniu nie niższym niż  $\alpha$ ?* (por rys.2.6). w przypadku eksperckim Bilgic i Bilgi w [BT08] wyróżniają 6 sposobów postępowania

Rysunek 2.6: Tryb pionowy (a) oraz poziomy (b) szacowania zbioru rozmytego



Źródło: opracowanie własne

nia. Wraz z przykładowymi pytaniami w kontekście rozmytej stopy zwrotu przedstawiają się one następująco:

- przepytwanie / ankietowanie (*polling*): jest jednym z naturalnych sposobów wyznaczania funkcji przynależności, szczególnie przyjmując, że rozmytość wynika z rozbieżności pojmowania przez ludzi tego samego pojęcia. W przypadku ograniczenia odpowiedzi do tak / nie, w celu wyznaczenia funkcji należy przeprowadzić analizę częstotliwościową odpowiedzi.  
*Czy możliwa jest stopa zwrotu spółki A na poziomie r? (Tak/Nie)*
- bezpośrednie skalowanie (*direct scaling*): jest to najprostszy i najbardziej bezpośredni sposób na opracowanie funkcji przynależności testowany przez wielu autorów w badaniach empirycznych (por.[BT08]). Polega na klasyfikacji danego obiektu podawanej przez jeden podmiot wielokrotnie w czasie. Podejście to nawiązuje do interpretacji rozmytości jako subiektywnej nieokreśloności.  
*Jaki stopień możliwości ma wystąpienie stopy zwrotu z akcji spółki A na poziomie r?*
- odwrotne skalowanie (*reverse scaling*): w tej metodzie, przedmiot otrzymuje stopień przynależności, a następnie poproszony o zidentyfikowanie obiektu, dla których stopień ten odpowiada rozmytemu pojęciu w pytaniu. W rozważanym przypadku i mnogości rozważanych spółek, metoda wydaje się trudnym do zastosowania. Sposób ten może być wykorzystywany przy badaniu dla indywidualnych osób lub dla grupy ankietowej, za pomocą następującego pytania:  
*Podaj spółki, których stopa zwrotu z możliwością 0.5 wyniesie x?* a w przypadku np. szacowania tolerancji na ryzyko *Jaką stratę jesteś w stanie zaakceptować w stopniu 0.5?*
- oszacowanie przedziałów (*interval estimation*): wykorzystywane przede wszystkim przy interpretacji rozmytości na potrzeby modelowania niepewności, a więc przy interpretacji funkcji przynależności jako rozkładu możliwości, szanse wystąpienia danego zjawiska, za pomocą poleceń typu:  
*Określ przedział, w którym znajdzie się stopa zwrotu danej spółki z wiarygodnością/ możliwością na poziomie  $\alpha$ .*
- egzemplifikacja (*membership function exemplification*): polega na przedstawieniu podmiotowi zbioru obiektów oraz zadaniu przyporządkowania im wartości lingwistycznych np. wysoki, niski, bardzo niski. W rozpatrywanym problemie

umożliwiłoby to klasyfikację spółek np. na te z niskimi stopami zwrotu, średnimi, wysokimi itp. jednak nie zapewniło by opisu rozkładu wiarygodności dla poszczególnych spółek.

- porównania parami (*pairwise comparison*): badane podmioty porównują obiekty parami i wyznaczają siłę preferencji, w ten sposób wyznaczana jest pełna niesymetryczna macierz względnych wag. Funkcję przynależności wyznacza się poprzez wektory własne odpowiadające maksymalnej wartości własnej. W rozważanym przypadku można sformułować następujące pytanie:

*Który stopa zwrotu  $r_1$  czy  $r_2$  ma większą możliwość wystąpienia, o ile (dużo, mało lub o np. 10%)? , a w przypadku przy wyznaczaniu funkcji oczekiwani inwestora lub krzywych ryzyka z następującymi pytaniami:*

*Którą stopę zwrotu  $r_1$  czy  $r_2$  preferujesz i o ile bardziej?*

*O ile bardziej jesteś w stanie zaakceptować stratę  $r_1$  niż  $r_2$ ?*

Porównanie wyników powyższych metod na podstawie eksperymentu można odnaleźć w [CS87]. Oszacowane wartości omówionymi powyżej metodami określają funkcję przynależności jako skończony zbiór par (lub zbiór przedziałów), który należy następnie sprowadzić do funkcji ciągłej. Podejście intuicyjne jest pierwotnym sposobem i wynika ze zdolności ludzi do określania subiektywnie funkcji przynależności wykorzystując wrodzoną inteligencję i zrozumienie zarówno kontekstowe jak i semantyczne problemu. Jest ono właściwe do modelowania wielu wielkości ekonomicznych, do analizy których można uwzględnić wiele elementów niepowiązanych jednoznacznie funkcjami między sobą. Jednak podejście jest to również kosztowne, trudne, praktycznie niemożliwe do wykorzystywania w dynamicznie się zmieniającej gospodarce na szerszą skalę i upowszechnienia do wykorzystania w systemach wspierania decyzji.

## 2.4.2 Podejście statystyczno-częstościowe

w ogólnym przypadku zbiór rozmyty jest odzwierciedleniem pewnych połączonych danych liczbowych interpretowanych we wspólnym kontekście, a funkcja przynależności ma przedstawić go w zwięzły sposób. Na tej podstawie Pedrycz [PEP11] sformułował następujące wymagania (*A Principle of Justifiable Granularity*), co do wyznaczenia zbioru A:

1. zbiór A odpowiada danym eksperymentalnym w najszerszym zakresie (uwzględnia wszystkie wyniki);
2. zbiór A charakteryzuje się takim poziomem specyficzności, by odpowiadać dobrze zdefiniowanej semantyce problemu.

Zatem problem sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia stosunku specyficzności i rozmytości. Dzięki specyficzności możliwe jest sensowne zastosowanie zbioru rozmytego w dalszym przetwarzaniu, dzięki rozmytości modelowanie niepewności.

Problem transformacji rozkładu prawdopodobieństwa i danych statystycznych na rozkład możliwości był rozważany przez wielu autorów ([DP83], [CT86], [Kli90], [MFNW02], [NB07]). W niniejszej pracy omówione zostaną trzy rodzaje transformacji, mianowicie metoda zaproponowana przez Dubois i Prade [DP83] [DFMP04], koncepcja Klira [Kli90] oraz metoda oparta na zasadzie maksymalnej entropii na pod-

stawie: [GY09], [NB07], [HKTT12]. Przekształcenie rozkładów możliwości i prawdopodobieństwa opiera się na zasadzie spójności możliwości/ prawdopodobieństwa (*the possibility/probability consistency principle*), którą zaproponował Zadeh wraz z teorią możliwości w 1978 roku [Zad78]. Zasada ta mówi, że zdarzenie musi być możliwe, aby być prawdopodobnym, sugerując tym samym, że stopnie możliwości, niezależnie od ich wartości, nie mogą być mniejsze niż stopnie prawdopodobieństwa. Jest to zgodne ze spotykaną w literaturze interpretacją miary konieczności i miary możliwości jako odpowiednio górnych i dolnych ograniczeń na miarę prawdopodobieństwa.

### Transformacja bijektywna Dubois i Prade (*bijjective transformation method*).

Niech:

- $X = \{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  zbiór zdarzeń elementarnych,
- $p_i = Prob(\{x_i\})$  prawdopodobieństwo wystąpienia  $x_i$ , a  $Prob$  jest miarą prawdopodobieństwa zdefiniowaną zgodnie z aksjomatyczną definicją prawdopodobieństwa,
- $x_i$  jest uporządkowane w taki sposób, że  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$  oraz  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,
- zdarzenie  $A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$  oraz  $A_0 = \emptyset$ .

Wtedy miara konieczności zdefiniowana jest następująco:

**Definicja 2.21** [DP83] Stopniem konieczności zdarzenia  $A_i$  jest dodatkowa wielkość prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniami elementarnymi ze zbioru  $A_i$  w porównaniu z wielkością prawdopodobieństwa przypisaną najczęściej występującemu zdarzeniu nie należącemu do zbioru  $A_i$ :

$$Nec(A_i) = \sum_{j=1}^n (p_j - p_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n, \text{ gdzie } p_{n+1} = 0. \quad (2.59)$$

Co pozwala określić miarę możliwości jako:

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n \min(p_i, p_j) = ip_i + \sum_{j=i+1}^n p_j, \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.60)$$

Z (2.60) można wnioskować, że ogólny kształt rozkładu zostaje zachowany, a więc:

$$\pi_i = \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i = p_{i+1}, \pi_i > \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i > p_{i+1}. \quad (2.61)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.9** [MKK98] Rozkład możliwości  $\pi_i$  jest większy bądź równy odpowiedniemu znormalizowanemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Zatem  $\pi_i \geq \frac{p_i}{\max_i(p_i)}$ .

### Metoda zachowania niepewności Klira (*conservation of uncertainty method*).

Klir [Kli90] określił dwie zasady kierujące transformacją miar z jednej teorii  $T_1$  do drugiej  $T_2$ :

1. wielkość niepewności powinna zostać zachowana,



2. każde odpowiednie wartości w teorii  $T_i$  muszą być przekształcone na odpowiedniki w  $T_2$  za pomocą pewnej skali.

Probabilistyczną miarą niepewności jest dobrze znana entropia Shannona określona wzorem:

$$H_{sh}(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (2.62)$$

w przypadku teorii możliwości Klir poronuje wykorzystanie miary niespecyficzności (*nonspecificity*) oraz niezgodności (*discord*).

$$N(\pi) = - \sum_{i=2}^n \pi_i \log_2 \left( \frac{i}{i-1} \right) \quad (2.63)$$

$$D(\pi) = - \sum_{i=1}^{n-1} (\pi_i - \pi_{i+1}) \log_2 \left[ 1 - i \sum_{j=i+1}^n \frac{\pi_j}{j(j-1)} \right] \quad (2.64)$$

Zatem zasadę pierwszą można określić jako:

$$H_{sh}(p) = N(\pi) + D(\pi) \quad (2.65)$$

Miary zaproponowane przez Klira jako miary całkowitej niepewności, budzą wątpliwości zarówno w kwestii interpretacji, jak i formalnej (por.prace lub footnote). W rozpatrywanym problemie za miarę niepewności można wykorzystać entropię zmiennej rozmytej określonej przez Liu jako (2.50). Dzięki czemu (2.65) przekształca się w:

$$H_{sh}(p) = H(\xi) \quad (2.66)$$

Klir twierdzi [Kli90], że transformacja za pomocą skali logistyczno-interwałowej (*log-interval scale*) (2.67) jest jedyną unikalną i istniejącą dla wszystkich rozkładów.

$$\pi_i = \left[ \frac{p_i}{p_1} \right]^\alpha, \quad (2.67)$$

gdzie  $0 < \alpha \leq 1$  to dodatnia stała określona na podstawie równania (2.65).

w przypadku zmiennej rozmytej na podstawie (2.67), (2.66)  $\alpha$  wyznaczana jest z równania:

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = \sum_{i=2}^n \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^\alpha \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^\alpha \right) + \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^\alpha \right) \ln \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^\alpha \right) \right) \quad (2.68)$$

**Metoda maksymalizacji entropii.** Zasada maksymalnej entropii została sformułowana już w 1957 roku przez Jaynes'a i od tego czasu jest szeroko wykorzystywana w wielu obszarach nauki i techniki. W przypadku braku informacji o prawdopodobieństwach wystąpienia poszczególnych wartości przy szacowaniu rozkładów, należy wziąć pod uwagę wszystkie dostępne informacje unikając jednocześnie dodatkowych informacji. Zatem rozkład maksymalizujący entropię przy zachowaniu danych ograniczeń. W ten sposób nie zostaną wprowadzone żadne dodatkowe założenia do obliczeń. Szerokie omówienie zasady maksymalnej entropii i jej zastosowań można odnaleźć w [Kap90]. w środowisku rozmytym zgodnie z zasadą maksymalnej entropii metody wyznaczania funkcji przynależności proponują między innymi [CrC97], [NB07], [GY09], [HKTT12]. Dla rozkładów dyskretnych zmiennej rozmytej

[GY09] wyznaczenie rozkładu możliwości przy znanej wartości oczekiwanej można zapisać jako zadanie programowania matematycznego (2.69).

$$\max \sum_{i=1}^{\infty} S(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = x_i)), \text{ gdzie } S(t) = -t \ln t - (1-t) \ln(1-t)$$

przy ograniczeniach:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (\max_{1 \leq j \leq i} \mu_j - \max_{0 \leq j \leq i-1} \mu_j + \max_{i \leq j \leq n} \mu_j - \max_{i+1 \leq j \leq n+1} \mu_j) = m, \quad (2.69)$$

gdzie  $m$  - wartość oczekiwana zmiennej rozmytej.

**Twierdzenie 2.10** [GY09] Niech  $\xi$  będzie zmienną rozmytą przyjmującą wartości z  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  z oczekiwaną wartością  $m$ .

Jeśli  $x_1 \leq m \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  i  $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) \leq (x_3 - x_2) \leq \dots \leq (x_n - x_{n-1})$ , wtedy funkcja przynależności zmiennej rozmytej będąca rozwiązaniem zadania maksymalizacji entropii wynosi:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } i = 1, \\ \frac{2}{1 + e^{\frac{\lambda(x_2 - x_1)}{2}}} & , \text{ dla } i = 2, \\ \frac{2}{1 + e^{\lambda(x_i - x_{i-1})}} & , \text{ dla } i \geq 3, \end{cases} \quad (2.70)$$

gdzie  $\lambda$  jest wyznaczone przez równanie (2.73).

$$x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 + e^{\frac{\lambda(x_2 - x_1)}{2}}} + \sum_{i=3}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{1 + e^{\lambda(x_i - x_{i-1})}} = m \quad (2.71)$$

**Twierdzenie 2.11** [GY09] Niech  $\xi$  będzie zmienną rozmytą przyjmującą wartości z  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  z oczekiwaną wartością  $m$ .

Jeśli  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq m \leq x_n$  i  $(x_2 - x_1) \geq (x_3 - x_2) \geq \dots \geq \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$ , wtedy funkcja przynależności zmiennej rozmytej będąca rozwiązaniem zadania maksymalizacji entropii wynosi:

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{2}{1 + e^{\lambda(x_i - x_{i+1})}} & , \text{ dla } i < n - 1, \\ \frac{2}{1 + e^{\frac{\lambda(x_{n-1} - x_n)}{2}}} & , \text{ dla } i = n - 1, \\ 1 & , \text{ dla } i = n, \end{cases} \quad (2.72)$$

gdzie  $\lambda$  jest wyznaczone przez równanie (2.73).

$$x_1 + \frac{x_{n-1} - x_n}{1 + e^{\frac{\lambda(x_{n-1} - x_n)}{2}}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + e^{\lambda(x_i - x_{i+1})}} = m \quad (2.73)$$

W przypadku poszukiwania rozkładów ciągłych stóp zwrotu takie zadanie maksymalizuje nośnik zbioru, a zależnie od wartości oczekiwanej wybrany zostanie rdzeń zbioru. Inną możliwością jest wyznaczenie dykretnej zmiennej rozmytej, a następnie estymacja rozkładu ciągłego na jej podstawie. Gao [GY09] nie wykorzystuje

bezpośrednio danych statystycznych ani nie precyzuje sposobu wyznaczenia wartości średniej  $m$ . W pracy [HKTT12] za podstawę przyjmując zasadę maksymalnej entropii, zwrócono uwagę na możliwość wykorzystania zarówno danych prawdopodobieństw jako wag do ograniczenia jak i opinii ekspertów, poprzez wyznaczenie na ich podstawie nośnika zbioru rozmytego jak i jej wartości oczekiwanej. Zatem funkcją celu jest maksymalizacja entropii zbioru rozmytego przy ograniczeniu na wartości oczekiwanej. Znane dane prawdopodobieństwa jako wagi wykorzystane zostały również w [NB07] w funkcji celu. Nieradka i Butkiewicz maksymalizują entropię całkowitą, zdefiniowaną w [BABM97], jako sumę entropii Shannona (2.62) oraz entropii zbioru rozmytego ważonej prawdopodobieństwami, natomiast jako drugie kryterium przyjmując maksymalizację indeksu rozmytości.

W proponowanym rozwiązaniu rozważana będzie funkcja przynależności  $\mu(x)$  dyskretnej zmiennej rozmytej  $\xi$  spełniająca warunek normalności. Rozważana będzie wartość oczekiwana zgodnie ze wzorem (2.39) oraz entropia ważona zmiennej rozmytej, określona następująco:

$$H_w[\xi] = \sum_{i=1}^n w_i S(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = x_i)), \quad (2.74)$$

gdzie  $w_i$  - wagi,  $S(t) = -t \ln t - (1-t) \ln(1-t)$ .

Dzięki przyjęciu tak zdefiniowanej entropii mogą zostać uwzględnione częstotliwości występowania wartości  $x_i$  jako wagi, a jednocześnie oceny ekspertów, co do oczekiwanej stopy zwrotu w ograniczeniu zadania lub w przypadku ich braku zastąpić ją np. medianą lub wartością średnią. Zatem wartość dyskretnej funkcji przynależności jest wyznaczana przez rozwiązanie następującego zadania optymalizacji:

$$\max \sum_{i=1}^n p_i S(Cr_{\xi}(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = x_i))$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} x_i (\mu_i - \mu_{i-1}) + x_k (2 - \mu_{k-1} - \mu_{k+1}) + \sum_{i=k+1}^n x_i (\mu_i - \mu_{i+1}) \right) &= m, \\ 0 \leq \mu_i \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.75)$$

gdzie  $S(t) = -t \ln t - (1-t) \ln(1-t)$ ,  $k \in 1, 2, \dots, n$  :  $\mu_k = 1$ ,  $m$  - wartość oczekiwana. Zakładając, że  $\mu_k = 1$  i  $\mu_{k-1} > \mu_{k+1}$  funkcja przynależności wynosi:

$$\mu = \begin{cases} \frac{2}{e^{\frac{\lambda_1(x_i - x_{i+1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, k-2; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1} - x_k)}{w_k + w_{k-1}}} + 1}, & \text{dla } i = k-1; \\ 1, & \text{dla } i = k; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_2(x_i - x_{i-1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = k+1, k+2, \dots, n; \end{cases}, \quad (2.76)$$

gdzie  $\lambda_1$  wyznaczamy z równania (2.77), a  $\lambda_2$  z równania (2.78).

$$\begin{aligned} x_1 \left( e^{\frac{\lambda_1(x_1 - x_2)}{w_1}} + 1 \right)^{-1} + \sum_{i=2}^{k-2} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_1(x_i - x_{i+1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{i-1} - x_i)}{w_{i-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + \\ x_{k-1} \left( \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1} - x_k)}{w_k + w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-2} - x_{k-1})}{w_{k-2}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1} - x_k)}{w_k + w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_1, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_2(x_i-x_{i-1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{i+1}-x_i)}{w_{i+1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_n \left( e^{\frac{\lambda_2(x_n-x_{n-1})}{w_n}} + 1 \right)^{-1} + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_{k+1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_2, \quad (2.78)$$

gdzie  $m_1 + m_2 = m$ .

Zakładając  $\mu_{k-1} < \mu_{k+1}$ , funkcja przynależności wynosi:

$$\mu = \begin{cases} \frac{2}{e^{\frac{\lambda_1(x_i-x_{i+1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, k-1; \\ 1, & \text{dla } i = k; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_k+w_{k+1}}} + 1}, & \text{dla } i = k+1; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_2(x_i-x_{i-1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = k+2, k+3, \dots, n; \end{cases}, \quad (2.79)$$

gdzie  $\lambda_1$  wyznaczamy z równania (2.80), a  $\lambda_2$  z równania (2.81).

$$x_1 \left( e^{\frac{\lambda_1(x_1-x_2)}{w_1}} + 1 \right)^{-1} + \sum_{i=2}^{k-1} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_1(x_i-x_{i+1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{i-1}-x_i)}{w_{i-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1}-x_k)}{w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_1, \quad (2.80)$$

$$x_n \left( e^{\frac{\lambda_2(x_n-x_{n-1})}{w_n}} + 1 \right)^{-1} + \sum_{i=k+2}^{n-1} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_2(x_i-x_{i-1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{i+1}-x_i)}{w_{i+1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_{k+1} \left( \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_{k+1}+w_k}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+2}-x_{k+1})}{w_{k+2}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_2, \quad (2.81)$$

gdzie  $m_1 + m_2 = m$ . w przypadku  $\mu_{k-1} = \mu_{k+1}$ , funkcja przynależności wynosi:

$$\mu = \begin{cases} \frac{2}{e^{\frac{\lambda_1(x_i-x_{i+1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, k-2; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1}-x_k)}{w_k+w_{k-1}}} + 1}, & \text{dla } i = k-1; \\ 1, & \text{dla } i = k; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_k+w_{k+1}}} + 1}, & \text{dla } i = k+1; \\ \frac{2}{e^{\frac{\lambda_2(x_i-x_{i-1})}{w_i}} + 1}, & \text{dla } i = k+2, k+3, \dots, n; \end{cases}, \quad (2.82)$$

gdzie  $\lambda_1$  wyznaczamy z równania (2.83), a  $\lambda_2$  z równania (2.84).

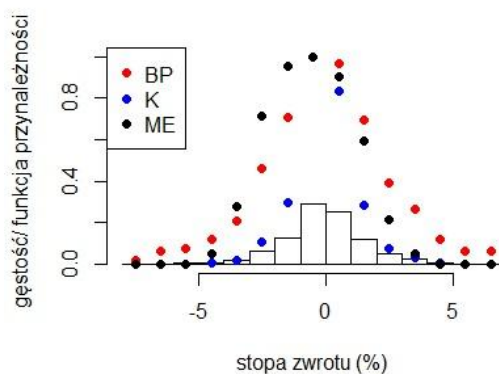
$$x_1 \left( e^{\frac{\lambda_1(x_1-x_2)}{w_1}} + 1 \right)^{-1} + \sum_{i=2}^{k-2} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_1(x_i-x_{i+1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{i-1}-x_i)}{w_{i-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_{k-1} \left( \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1}-x_k)}{w_k+w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-2}-x_{k-1})}{w_{k-2}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_1(x_{k-1}-x_k)}{w_k+w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_1, \quad (2.83)$$

$$x_n \left( e^{\frac{\lambda_2(x_n-x_{n-1})}{w_n}} + 1 \right)^{-1} + \sum_{i=k+2}^{n-1} x_i \left( \left( e^{\frac{\lambda_2(x_i-x_{i-1})}{w_i}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{i+1}-x_i)}{w_{i+1}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_{k+1} \left( \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_{k+1}+w_k}} + 1 \right)^{-1} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+2}-x_{k+1})}{w_{k+2}}} + 1 \right)^{-1} \right) + x_k \left( \frac{1}{2} - \left( e^{\frac{\lambda_2(x_{k+1}-x_k)}{w_{k-1}}} + 1 \right)^{-1} \right) = m_2, \quad (2.84)$$

gdzie  $m_1 + m_2 = m$ .

**Przykład 2** Rysunek 2.7 i tabela 2.2 przedstawiają przykładowy histogram stóp zwrotu oraz funkcje przynależności określone metodami: transformacji bijektywnej (DP), zachowania niepewności Klira (K), maksymalnej entropii (ME).

Rysunek 2.7: Histogram i wyznaczone funkcje przynależności.



Źródło: opracowanie własne

Tabela 2.2: Funkcje przynależności

x	p	DB	K	ME
-7,5	0,001477	0,022157	0,000445	0
-6,5	0,004431	0,063516	0,002217	0,000408
-5,5	0,005908	0,079764	0,003376	0,003406
-4,5	0,010340	0,124077	0,007653	0,051059
-3,5	0,020679	0,206795	0,021088	0,278620
-2,5	0,063516	0,459380	0,108809	0,711942
-1,5	0,127031	0,709010	0,299817	0,954828
-0,5	0,289513	1	1	1
0,5	0,255539	0,966027	0,833162	0,902867
1,5	0,122600	0,695716	0,284647	0,592010
2,5	0,050222	0,392910	0,077184	0,215290
3,5	0,029542	0,268833	0,035526	0,053425
4,5	0,010340	0,124077	0,007653	0,000069
5,5	0,004431	0,063516	0,002217	0
6,5	0,004431	0,063516	0,002217	0

Źródło: opracowanie własne

### 2.4.3 Interpolacja ciągłej funkcji przynależności

Na przestrzeni lat określono wiele metod estymacji funkcji na podstawie znanych punktów, do najbardziej popularnych należą:

- wygładzanie liniowe,
- interpolacje wielomianowe,
- interpolacje funkcjami sklejanymi<sup>3</sup>.

Wygładzanie liniowe, nazywane też liniowym zadaniem najmniejszych kwadratów, jest uogólnieniem zadania rozwiązywania kwadratowych układów równań liniowych do przypadku, gdy układ jest nadokreślony. Celem jest, dopasowując parametry krzywej do wyników eksperymentu, wygładzenie ewentualnych błędów pomiarowych, a więc minimalizacja średniego błędu standardowego. Interpolacje wielomianowe charakteryzują się wysokim dopasowaniem do danych oraz gwarantują jedno rozwiązanie, jednak mają również pewne wady. Błąd interpolacji może być bardzo duży, szczególnie przy nadmiernej liczbie węzłów<sup>4</sup>, a poza tym interpolacja jest nielokalna: nawet mała zmiana wartości funkcji w pojedynczym węźle może powodować dużą zmianę zachowania całego wielomianu interpolacyjnego. Dlatego zastępuję się ją m.in. interpolacją za pomocą funkcji sklejanymi, które tylko lokalnie są wielomianami, sklejanymi w taki sposób, by globalnie zachować pewien stopień gładkości, tzn. różniczkowalność zadaną liczbę razy.

w przypadku interpolacji ciągłej funkcji przynależności, otrzymana funkcja musi spełniać następujące warunki wypukłości, normalności i być odwzorowaniem na zbiór  $< 0, 1 >$ .

Klasyczne metody interpolacji nie gwarantują zachowania powyższych ograniczeń. Dlatego większość klasycznych metod została rozszerzona o dodatkowe ograniczenia lub zachowanie pewnego kształtu np. zachowująca kształt interpolacja funkcjami sklejanymi (*shape preserving spline interpolation*) [Gre86], zachowująca kształt metoda najmniejszych kwadratów (*least squares data fitting using shape preserving piecewise approximations*) [Ell93], zachowująca kształt interpolacja Hermit'a (*shape-preserving Hermite interpolation*) [MS13], i wiele innych. Wśród rozważań o funkcji przynależności Klir i Yaun [KY95] zaproponowali proste modyfikacje metody interpolacji Lagrange'a oraz metody najmniejszych kwadratów w celu uzyskania odpowiednich własności oraz trzecią metodę z wykorzystaniem sieci neuronowej. Problem interpolacji rozkładów ciągłych został również poruszony w [CO95], gdzie proponowano stosowanie interpolacji z ograniczeniami z wykorzystaniem wielomianów Bernsteina. Zaletą wymienionych wyżej interpolacji jest dokładność dopasowanych funkcji. Niewątpliwą wadą obu podejść złożoność powstałych funkcji przynależności, która wzrasta wraz z liczbą par funkcji dyskretnej. Jest to wada szczególnie istotna, jeśli dalsze ich przetwarzanie wymaga obliczania miar niepewności. Większość z metod nie przedstawia się poprawnie dla wartości mniejszych od najmniejszej ze zbioru danych i większych od największej oraz na końcu przedziałów. Ponadto przy wykorzystaniu danych giełdowych może wystąpić również efekt nadmiernego dopasowania (*overfitted*)<sup>5</sup>.

<sup>3</sup>określane również terminem splajny (spline) oraz funkcje gięte.

<sup>4</sup>problem pogorszenia jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów, zwany efektem Rungego

<sup>5</sup>określany również przeuczeniem, przetrenowaniem

Mając na uwadze wymienione wady oraz niedokładność oszacowań funkcji dyskretnej, szacowanie funkcji o określonym kształcie może zostać przeprowadzone zmodyfikowaną metodą najmniejszych kwadratów według [KY95].

Metoda najmniejszych kwadratów to standardowa metoda estymacji linii trendów czy regresji. W rozważanym przypadku pozwala na wybranie z klasy funkcji  $f(x; a, b, c, \dots)$ , gdzie  $a, b, c, \dots$  są parametrami funkcji, taką krzywą, dla której wybrana funkcja  $f(x; a_0, b_0, c_0, \dots)$  minimalizuje wartość funkcji:

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a, b, c, \dots) - \mu_i]^2. \quad (2.85)$$

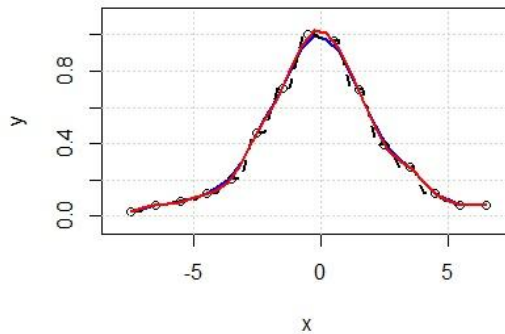
Wtedy za funkcję przynależności zbioru rozmytego przyjmuje się:

$$\mu(x) = \max [0, \min (1, f(x; a_0, b_0, c_0, \dots))] . \quad (2.86)$$

Metoda ta wymaga określenia wcześniej typu zmiennej rozmytej np. trapezowa, gaussowska itp., jednak wybranie wypukłej funkcji oraz spełnienie (2.86) gwarantuje, że wyznaczony zbiór będzie liczbą rozmytą.

**Przykład 3** Dla dyskretnych funkcji przynależności wyznaczonych w przykładzie 2, dopasowano różnymi metodami funkcje ciągle widoczne na rys. 2.8.

Rysunek 2.8: Różne metody interpolacji



Źródło: opracowanie własne

## Rozdział 3

# Zadania optymalizacji portfela inwestycyjnego

W niniejszym rozdziale przeanalizowane zostaną modele i zadania optymalizacyjne uwzględniające przyszłą stopę zwrotu jako zmienną rozmytą w ujęciu teorii wiarygodności. Przez model rozumiemy reprezentację danego problemu poprzez odwzorowanie najistotniejszych rzeczywistych cech badanego obiektu: zmiennych, miar i relacji. Dla każdego z rozpatrywanych modeli zdefiniowane zostały zadania optymalizacji portfela. Przez zadanie optymalizacji rozumiemy więc opis matematyczny rozpatrywanego problemu, uwzględniający warunki ograniczające oraz kryteria wyboru. Decyzje dopuszczalne, będą utożsamiane z takimi wartościami zmiennych decyzyjnych, które spełniają wszystkie warunki ograniczające. Za decyzję optymalną uznawana jest decyzja dopuszczalna, przy której funkcja celu osiąga wartość minimalną bądź maksymalną, zależnie od postaci zadania. W zadaniach optymalizacji portfela inwestycyjnego zmiennymi decyzyjnymi są udziały portfela inwestycyjnego.

Wraz z rozwojem teorii wiarygodności, rozwijały się jej liczne zastosowania w finansach, szczególnie dynamicznie modele optymalizacji portfela inwestycyjnego. W 2005 roku [PMT05] zaproponowane zostały pierwsze modele w oparciu o miarę wiarygodności: model średnia-wariancja, model wartości optymistycznej, model maksymalnej wiarygodności. W 2006 roku Huang [Hua06b] [Hua06a] rozwinęła zagadnienie maksymalizacji miary wiarygodności. W 2008 [Hua08c] zaproponowane zostało w celu ograniczenia ryzyka wykorzystanie krzywej akceptowalności strat inwestora, a w pracy [Hua08a] entropia zmiennej rozmytej. Model średnia-wariancja ewoluował w model minmax średnia-wariancja [Hua10a] oraz model średnia-wariancja-skośność [LQK10]. W 2012 roku [LSQ12] został zaprezentowany model minimalizacji żalu. Następnie zostanie zaproponowany model maksymalizacji satysfakcji. Zestawienie opisanych modeli i wykorzystanych w nich miar przedstawione zostało w tabeli 3.1.



Tabela 3.1: Zestawienie modeli i wykorzystywanych w nich miar niepewności

Miara	Model
wariancja (2.41)	średnia-wariancja: (3.1);(3.2);(3.3) [PMT05] [Hua07] średnia-wariancja-skośność: [LQK10] (3.7) minmax: (3.35) [Hua10a]
semiwariancja (2.3.2)	średnia-semiwariancja (3.5) [Hua08b]
entropia (2.3.2)	(3.9) [Hua08a]
skośność (2.43)	średnia-wariancja-skośność:(3.7) [LQK10]
wartość zagrożona(2.46)	(3.15) [Hua06a] [LQY10] [WWJ11]
warunkowa wartość zagrożona (2.48)	(3.23) [LQY10]
krzywa ryzyka (3.30)	(3.33) [Hua08c]
żał (3.37)	(3.38) [LSQ12]

Źródło: opracowanie własne

W niniejszym rozdziale będą wykorzystywane następujące oznaczenia do opisu problemu decyzyjnego:

$x_i$	udział i-tej akcji w portfelu,
$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$	wektor udziałów n akcji w portfelu,
$\xi_i$	rozmyta stopa zwrotu i-tej akcji,
$\xi_r = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$	rozmyta stopa zwrotu portfela akcji,
$r$	wartość stopy zwrotu,
$r_f$	stopa zwrotu wolna od ryzyka,
$r_r$	stopa zwrotu portfela,
$\eta$	minimalny poziom zysku,
$\delta$	maksymalny poziom ryzyka,
$\nu$	funkcja akceptowalności straty,
$\gamma$	funkcja satysfakcji.

Modele wyboru portfela inwestycyjnego można podzielić na następujące dwie grupy ze względu na miary wykorzystywane w kryteriach i ograniczeniach:

- miar niepewności i zysku,
- miar stosunku do niepewności i zysku.

W pierwszej grupie mówimy o niepewności wynikającej z natury problemu i miarach zdefiniowanych w rozdziale 2.3.2, w drugiej miary opisują stosunek inwestora do niepewnych wartości przyszłych stopy zwrotu.

## 3.1 Zadania wykorzystujące miary niepewności i zysku

### 3.1.1 Zadania wykorzystujące miary rozproszenia

**Model średnia-wariancja.** Model średnia-wariancja [Hua07] zakłada analogicznie do modelu Markowitza, że inwestor dąży do maksymalizacji zysku mierzonego wartością oczekiwaną stopy zwrotu i jednocześnie minimalizuje niepewność mierzoną wariancją. Zadanie optymalizacyjne przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} & \max E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ & \min V [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \end{aligned} \tag{3.1}$$
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \forall_i x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadanie (3.1) wiąże się z problemami modelowania wielokryterialnego, dlatego zmodyfikowano je do (3.2) i (3.3). W zadaniu (3.2) zakłada się, że ze wszystkich portfeli charakteryzujących się stopą zwrotu większą od pewnego poziomu  $\eta$  najlepszy jest ten, który minimalizuje ryzyko charakteryzując się najmniejszą wariancją. Natomiast w problemie 3.3, celem jest znalezienie portfela o największej stopie zwrotu wśród zbioru portfeli związanych z ryzykiem nie większym niż określony poziom  $\delta$ .

$$\begin{aligned} & \min V [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \end{aligned} \tag{3.2}$$
$$\begin{aligned} E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] &\geq \eta \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \forall_i x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \end{aligned} \tag{3.3}$$
$$\begin{aligned} V [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] &\leq \delta \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \forall_i x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Wariancja (2.41) jest wartością oczekiwaną kwadratów odchyłeń (różnic) poszczególnych wartości zmiennej od wartości oczekiwanej. Zatem powyższe zadania są zadaniami programowania kwadratowego: (3.2) jest zadaniem minimalizacji funkcji kwadratowej z ograniczeniem w postaci nierówności liniowej, (3.3) to zadanie maksymalizacji funkcji liniowej przy ograniczeniu będącym nierównością kwadratową. Nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania zadań programowania kwadratowego, najczęściej wykorzystywane są metody numeryczne przeszukiwania przestrzeni rozwiązań.

Dla zmiennych stóp zwrotów aktywów będących trójkątnymi niezależnymi zmiennymi rozmytymi zadanie (3.2) można sprowadzić do postaci następującego równoważnego zadania deterministycznego (*crisp equivalent*):

$$\min \frac{33(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i)^3 + 21(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i)^2 \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + 11 \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i (\sum_{i=1}^n x_i \beta)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i \beta)^3}{348 \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i) \geq 4\eta, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\forall_i x_i \geq 0,$$

gdzie:  $\alpha_i = \max(b_i - a_i, c_i - b_i), \beta_i = \min(b_i - a_i, c_i - b_i)$

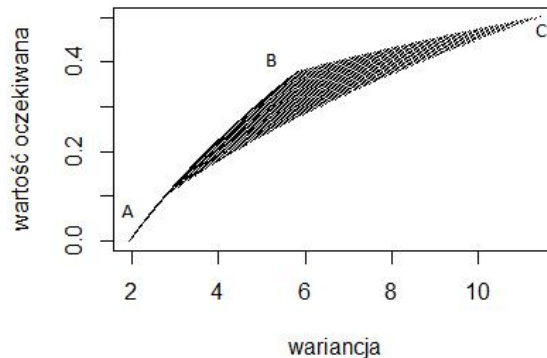
**Przykład 4** Wybieramy portfel złożony z 3 akcji o rozmytych stopach zwrotu przedstawionych w tabeli 3.2. w przypadku ograniczenia wariancji na poziomie maksymalnym 5, portfel będzie zbudowany z udziałów akcji A i B, w przypadku poziomu maksymalnego większego od 5 i mniejszego od 11 z udziałów akcji A i B. w przypadku instancji zadania z ograniczeniem minimalnej wartości oczekiwanej na poziomie poniżej 0,325 portfel optymalny będzie się składał z aktywa A i B, przy problemie z ograniczeniem minimalnej wartości oczekiwanej na poziomie powyżej 0,325 wybrane zostaną aktywa B i C.

Tabela 3.2: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i wariancja

	$\mu$	$E[\xi]$	$V[\xi]$
A	(-3;-0,25;3,5)	0	1,974652778
B	(-4,5;-0,1;6)	0,325	5,183764088
C	(-8;1,5;7)	0,5	11,43421053

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.1: Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wariancja.



Źródło: opracowanie własne

Portfele efektywne znajdują się na krzywej łączącej punkty A, B i C.

**Model średnia-semiwariancja** w przypadku rozmytej stopy zwrotu odchylenia powyżej wartości oczekiwanej oznaczają zyski ponad oczekiwane, co jest sytuacją pożądaną. Mierzenie niepewności za pomocą wariancji, nakłada kary nawet za realizację wyższej stopy zwrotu niż oczekiwana, dlatego nawiązując do negatywnego ujęcia ryzyka, wykorzystano semiwariancję. W ten sposób zdefiniowane zostało [Hua08b] zadanie (3.5).

$$\begin{aligned} & \max E \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \\ & \min SV \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Semiwariancja portfela akcji jest funkcją kwadratową udziałów, a zadanie (3.5) zadaniem optymalizacji kwadratowej. Zadanie (3.5) jest zadaniem bikryterialnym, które może być analogicznie do modelu średnia-wariancja rozpatrywane jako problem minimalizacji semiwariancji przy założonym minimalnym poziomie wartości oczekiwanej albo jako problem maksymalizacji wartości oczekiwanej przy założonym maksymalnym poziomie semiwariancji.

w przypadku symetrycznych rozmytych stóp zwrotu zadanie (3.5) jest równe zadaniu (3.1). W przypadku ogólnym dla niezależnych zmiennych trójkątnych zadanie (3.5) jest równoważne zadaniu:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i) \\ \min & \frac{\sum_{i=1}^n x_i (m_i - a_i)^3}{6 \sum_{i=1}^n x_i (b_i - a_i)} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i (m_i - b_i)}{6} \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i (m_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n x_i (a_i - b_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i (m_i - c_i)}{\sum_{i=1}^n x_i (b_i - c_i)} \right) \max(0, \sum_{i=1}^n x_i (m_i - b_i)) \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie  $m_i = E[\xi_i]$ .

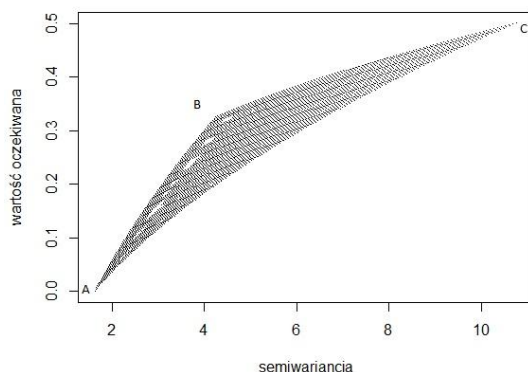
**Przykład 5** Wybieramy portfel złożony z 3 akcji jak w przykładzie 5, o następujących rozmytych stopach zwrotu:

Tabela 3.3: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i semiwariancja

	$\mu$	$E[\xi]$	$SV[\xi]$
A	(-3;-0,25;3,5)	0	1,6361
B	(-4,5;-0,1;6)	0,325	4,2541
C	(-8;1,5;7)	0,5	10,7741

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.2: Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-semiwariancja.



Źródło: opracowanie własne

Analogicznie do zadania średnia-wariancja portfele efektywne znajdują się na krzywej łączącej punkty A, B i C.

**Model średnia-wariancja-skośność.** Model średnia-wariancja-skośność jest również rozszerzeniem modelu średnia-wariancja z uwzględnieniem negatywnego podejścia do niepewności. Bazując na obserwacji asymetrii rozmytych stóp zwrotu, w przypadku portfeli o tej samej średniej i wariancji, inwestorzy powinni wybierać ten o większym stopniu asymetrii. W celu mierzenia asymetrii wykorzystuje się trzeci moment centralny — skośność. Z tego powodu model średnia-wariancja został rozszerzony o uwzględnienie miary skośności [LQK10]. W przypadku założonego poziomu zysku i ryzyka, inwestorzy są zainteresowani wyższymi możliwościami większych zysków, co przejawia się poprzez maksymalizację skośności:

$$\max S_k [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i]$$

przy ograniczeniach:

$$V [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \leq \delta \tag{3.7}$$

$$E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \geq \eta$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

Model ten może być analogicznie do modelu średnia-wariancja rozpatrywany jako problem wielokryterialny (maksymalizacji wartości oczekiwanej i skośności oraz minimalizacji wariancji) albo przy założonym minimalnym poziomie skośności, jako problem maksymalizacji wartości oczekiwanej lub minimalizacji wariancji. W przypadku liczb symetrycznych zadanie to redukuje się do zadania średnia-wariancja równoważnemu w tym przypadku zadaniu średnia-semiwariancja.

Dla niezależnych zmiennych trójkątnych zadanie (3.7) jest równoważne zadaniu:

$$\begin{aligned}
 & \max(\sum_{i=1}^n x_i(c_i - a_i))^2 \sum_{i=1}^n x_i(c_i + a_i - 2b_i) \\
 & \text{przy ograniczeniach:} \\
 & \frac{33(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i)^3 + 21(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i)^2 \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + 11 \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i (\sum_{i=1}^n x_i \beta)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i \beta)^3}{348 \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i} \leq \delta \\
 & \sum_{i=1}^n x_i(a_i + 2b_i + c_i) \geq 4\gamma, \\
 & \sum_{i=1}^n x_i \\
 & \forall_i x_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

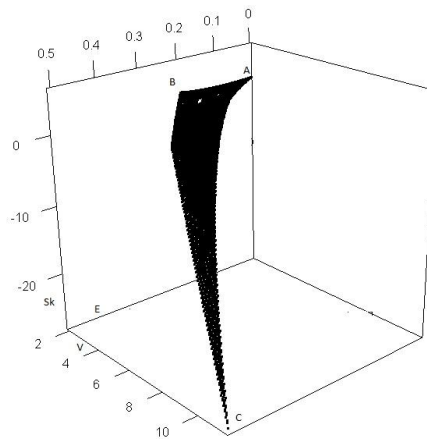
**Przykład 6** Wybieramy portfel złożony z 3 akcji:

Tabela 3.4: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, wariancja i skośność

	$\mu$	$E[\xi]$	$V[\xi]$	$S_k[\xi]$
A	(-3;-0,25;3,5)	0	1,9747	1.3203
B	(-4,5;-0,1;6)	0,325	5,1838	5,8570
C	(-8;1,5;7)	0,5	11,43421	-28,125

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.3: Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wariancja-skośność.



Źródło: opracowanie własne

Portfele efektywne znajdują się na krzywej łączącej punkty A, B i C.

Model rozpatruje analogiczne założenia do modelu średnia-semiwariancja, jednak dodatkowo wprowadza kolejne kryterium optymalizacji, zwiększając przez to znacznie złożoność obliczeniową problemu.

### 3.1.2 Miary entropijne

w związku z interpretacją entropii zmiennej rozmytej jako niepewności wystąpienia danego zdarzenia elementarnego w następnej chwili, wykorzystano ją również w zadaniach optymalizacji portfela akcji.

**Model średnia-entropia** Wykorzystanie entropii w problemie wyboru portfela inwestycyjnego w środowisku stochastycznym zaproponował Kapur [Kap90], na potrzeby podejścia rozmytego rozwinęła je Huang w 2008 [Hua08a]. Zaproponowany model średnia-entropia bazuje na standardowym podejściu zysk-niepewność. W zadaniu średnia-entropia minimalizuje się niepewność określoną przez wartość entropii, przy ograniczeniu na stopę zwrotu przynajmniej na danym poziomie  $\eta$ .

$$\min H \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right]$$

przy ograniczeniach:

$$E \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \geq \eta \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

Zadanie (3.9) (jak również zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu maksymalnej wartości entropii) jest problemem programowania liniowego. Podstawową własnością rozwiązań zadań programowania liniowego jest to, że , że rozwiązanie optymalne (jeśli istnieje), to istnieje optymalne rozwiązanie bazowe. W przypadku zadania (3.9) i dwóch ograniczeń, rozwiązanie optymalne (3.10) będzie wskazywało na dwa aktywa w portfelu niezależnie od liczby branych pod uwagę.

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{\eta - e_k}{e_j - e_k}, \\ x_k &= \frac{e_j - \eta}{e_j - e_k}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

pod warunkiem:

$$\begin{aligned} \forall_{i \neq j, k} e_i - \frac{H_j(e_i - e_k) + H_k(e_j - e_i)}{e_j - e_k} &\geq 0, \\ \frac{H_j - H_k}{e_j - e_k} &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie:

$e_i$  — wartość oczekiwana  $i$ -tej akcji:  $\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$

$H_i$  — entropia  $i$ -tej akcji:  $\frac{c_i - a_i}{2}$ .

w przypadku racjonalnych inwestycji wydaje się to być zbyt małą dywersyfikacją portfela. Dlatego niezbędnym jest wprowadzanie ograniczeń na maksymalny udział w portfelu jednego składnika np. poniżej poziomu 0,3 lub 0,25. Ponadto miara entropii jest miarą rzadko spotykaną i nietypową w standardowych analizach, opisach zmienności, stąd jej niska znajomość, może powodować utrudnienia w określeniu poziomu ograniczenia do maksymalnej entropii.

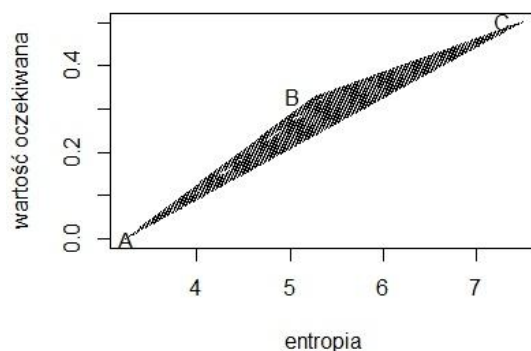
**Przykład 7** Wybór portfela nastąpi spośród składników przedstawionych w tabeli 3.6.

Tabela 3.5: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i entropia

	$\mu$	$E[\xi]$	$H[\xi]$
A	$(-3;-0,25;3,5)$	0	3,25
B	$(-4,5;-0,1;6)$	0,325	5,250
C	$(-8;1,5;7)$	0,5	7,5

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.4: Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-entropia.



Źródło: opracowanie własne

Portfele efektywne znajdują się na krzywej łączącej punkty A, B i C.

**Model minimalizacji entropii krzyżowej** w 2009 roku Qin i inni [QLJ09] zaproponowali model (3.12) minimalizacji entropii krzyżowej (2.51). Ograniczając ryzyko na poziomie  $\delta$  mierzone wariancją, semiwariancją lub szansą straty oraz wartość oczekiwaną stopy zwrotu przynajmniej na poziomie  $\eta$ , inwestor za cel przyjmuje minimalizację różnicy rozmytej stopy zwrotu z portfela od założonej — mierzoną za pomocą entropii krzyżowej.

$$\min D \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i; \eta \right]$$

przy ograniczeniach:

$$V \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\} \leq \delta \tag{3.12}$$

$$E \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\} \geq \eta$$

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

w praktyce występują często trudności w określeniu wartości ograniczeń, a to zadanie wymaga określenia dodatkowo wzorcowego rozkładu. Biorąc pod uwagę definicję entropii krzyżowej (2.51), entropia krzyżowa istnieje jedynie dla zmiennych rozmytych określonych na tym samym nośniku. Zatem definiując rozkład wzorcowy, określamy jednocześnie nośnik zmiennej rozmytej wynikowego portfela, zadanie więc jest zdaniem poszukiwania takiego parametru  $b$  portfela  $\mu_\xi = (a, b, c)$ , dla którego wartość entropii jest minimalna, przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń dotyczą-



cych niepewności i zysku. Określenie parametrów zadania w rzeczywistych przypadkach tak, by zbiór rozwiązań dopuszczalnych nie był pusty, wydaje się być bardzo trudnym do określenia. Dodatkowo nasuwa się pytanie, czy przy znacznym generowaniu rozwiązania przez rozkład wzorcowy (określenie 2 z 3 parametrów) potrzebne są dodatkowe ograniczenia na ryzyko i zysk.

### 3.1.3 Zadania bazujące na miarach wiarygodności i kryteriach bezpieczeństwa

Korzystając z interpretacji miary wiarygodności jako wiarygodności zajścia danego zdarzenia, w 2006 roku Huang [Hua06b] zaproponowała model maksymalizacji wiarygodności, który maksymalizuje wiarygodność, że rozmyta stopa zwrotu przyjmie wartości na poziomie większym lub równym danego poziomemu  $\eta$ .

$$\begin{aligned} & \max Cr \{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \geq \eta \} \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ponadto sformułowane zostało również zadanie maksymalizujące stopę zwrotu, której wiarygodność zaistnienia jest przynajmniej na danym poziomie.

Następnie, w 2010 [LQY10] model ten został uzupełniony o ograniczenie ryzyka określone jako  $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i E [|\xi_i - E[\xi]|]$ , jednak wykorzystane w tym celu mogą zostać również standardowe miary ryzyka jak wariancja czy semi-wariancja. Problem został sprowadzony do następującego zadania optymalizacji:

$$\begin{aligned} & \max \bar{r} \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & Cr \{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \geq \bar{r} \} \geq \alpha \\ & \max_{1 \leq i \leq n} x_i E [|\xi_i - E[\xi]|] \leq \delta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Bezpośrednio miary wiarygodności wykorzystywane są również w celu ograniczania niepewności w modelach, które za kryterium doboru portfela uznają minimalizację prawdopodobieństwa, że stopa zwrotu z portfela spadnie poniżej progu minimalnego [Hua06a], [LQY10], [WWJ11]. Najbardziej znanym jest zadanie optymalizacji w oparciu o wartość zagrożoną, interpretowaną jako maksymalna wartość straty, która może wystąpić w warunkach rynkowych w określonym czasie na z góry przyjętym poziomie tolerancji  $\alpha$ . Powszechnie używanymi poziomami tolerancji są 1% i 5%. w modelu optymalizacji portfela akcji inwestor wybierze ten o minimalnej wartości zagrożonej. Model w oparciu o wartość zagrożoną przedstawia się następu-

jąco:

$$\begin{aligned}
& \min VaR_{1-\alpha} [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\
& \text{przy ograniczeniach:} \\
& E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \geq \eta \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

w przypadku trójkątnych zmiennych rozmytych oraz założonego  $\alpha \leq 0,5$  problem (3.15) sprowadza się do następujących problemów programowania liniowego.

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^n x_i (2\alpha(a_i - b_i) - a_i) \\
& \text{przy ograniczeniach:} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i) \geq 4\eta \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& \max \frac{\sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i)}{4} \\
& \text{przy ograniczeniach:} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (2\alpha(a_i - b_i) - a_i) \leq \delta \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Zatem rozwiązanie optymalne zadania (3.16) wynosi:

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{\eta - e_k}{e_j - e_k}, \\
x_k &= \frac{e_j - \eta}{e_j - e_k},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

pod warunkiem:

$$\begin{aligned}
\forall_{i \neq j, k} e_i - \frac{VaR_j(e_i - e_k) + VaR_k(e_j - e_i)}{e_j - e_k} &\geq 0, \\
\frac{VaR_j - VaR_k}{e_j - e_k} &\geq 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

gdzie:

$e_i$ — wartość oczekiwana i-tej akcji:  $\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$

$VaR_i$ — wartość zagrożona i-tej akcji:  $2\alpha(a_i - b_i) - a_i$ .

w przypadku zadania (3.17) rozwiązanie optymalne wynosi:

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{\delta - VaR_k}{VaR_j - VaR_k}, \\
x_k &= \frac{VaR_j - \delta}{VaR_j - VaR_k},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

pod warunkiem:

$$\begin{aligned}
\forall_{i \neq j, k} \frac{VaR_j(e_k - e_i) - VaR_k(e_j - e_i) + VaR_i(e_k - e_j)}{VaR_j - VaR_k}, \\
\frac{e_k - e_j}{VaR_j - VaR_k} &\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Do analizy ryzyka zaproponowano również warunkową wartość zagrożoną [XS10]. Rozumianą jako średnia strata z  $\alpha$  najgorszych strat (2.48). Wtedy inwestor powinien analogicznie do poprzednich modeli ograniczyć warunkową wartość zagrożoną na danym poziomie  $\delta$  i maksymalizować wartość oczekiwaną (3.22) lub minimalizować warunkową wartość zagrożoną, utrzymując wartość oczekiwaną stopy zwrotu na założonym poziomie przynajmniej  $\eta$  (3.23).

$$\begin{aligned} & \max E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaRF(\beta) d\beta \leq \delta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaRF(\beta) d\beta \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \geq \eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dla zmiennych rozmytych trójkątnych są to problemy programowania liniowego:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n x_i (\alpha(a_i - b_i) - a_i) \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i) \geq 4\eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \max \frac{\sum_{i=1}^n x_i (a_i + 2b_i + c_i)}{4} \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \sum_{i=1}^n x_i (\alpha(a_i - b_i) - a_i) \leq \delta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Zatem rozwiązanie optymalne zadania (3.24) wynosi:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{\eta - e_k}{e_j - e_k}, \\ x_k &= \frac{e_j - \eta}{e_j - e_k}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

pod warunkiem:

$$\begin{aligned} \forall_{i \neq j, k} e_i - \frac{CVaR_j(e_i - e_k) + CVaR_k(e_j - e_i)}{e_j - e_k} &\geq 0, \\ \frac{CVaR_j - CVaR_k}{e_j - e_k} &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

gdzie:

$e_i$ — wartość oczekiwana i-tej akcji:  $\frac{a_i+2b_i+c_i}{4}$

$CVaR_i$ — warunkowa wartość zagrożona i-tej akcji:  $\alpha(a_i - b_i) - a_i$ .

w przypadku zadania (3.25) rozwiązanie optymalne wynosi:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{\delta - CVaR_k}{CVaR_j - CVaR_k}, \\ x_k &= \frac{CVaR_j - \delta}{CVaR_j - CVaR_k}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

pod warunkiem:

$$\begin{aligned} \forall_{i \neq j, k} \frac{CVaR_j(e_k - e_i) - CVaR_k(e_j - e_i) + CVaR_i(e_k - e_j)}{CVaR_j - CVaR_k}, \\ \frac{e_k - e_j}{CVaR_j - CVaR_k} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

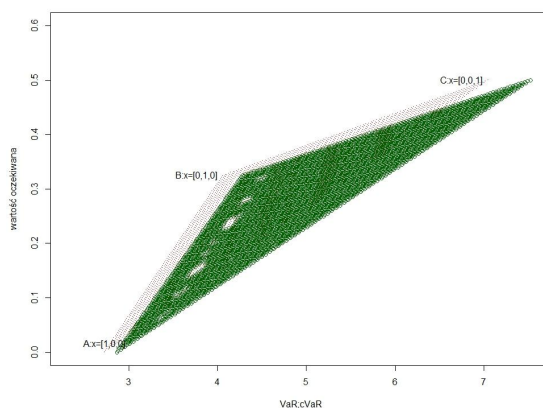
**Przykład 8** Wybieramy portfel złożony z 3 akcji jak w poprzednich przykładach. Wartości  $VaR$  i  $CVaR$  dla poszczególnych udziałów różnią się tylko nieznacznie.

Tabela 3.6: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, zagrożona oraz warunkowa wartość zagrożona.

	$\mu$	$E[\xi]$	$VaR[\xi](\alpha = 0.05)$	$CVaR[\xi](\alpha = 0.05)$
A	(-3;-0,25;3,5)	0	2,725	2,8625
B	(-4,5;-0,1;6)	0,325	4,06	4,28
C	(-8;1,5;7)	0,5	7,05	7,525

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.5: Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wartość zagrożona (kolor czerwony) oraz średnia-warunkowa wartość zagrożona (kolor zielony).



Źródło: opracowanie własne

### 3.1.4 Podsumowanie

Najliczniejszą grupą modeli optymalizacji portfela są modele w oparciu o obiektywne miary zysku i niepewności. Za miarę zysku uznają wartość oczekiwaną lub miarę wiarygodności wystąpienia danego założonego zysku, natomiast ryzyko mierzone jest jedną z miar prezentowanych w tabeli 3.1. Analogicznie do miar ryzyka wynikających z rozkładu statycznego zmiennych losowych różnorodność miar niepewności oraz ich zaawansowanie powodują, że przeciętny inwestor może mieć kłopoty ze zrozumieniem idei, korzyści oraz ograniczeń w ich zastosowaniu. Kwestia ta jest bardzo istotna, gdyż brak zrozumienia, jak funkcjonuje konkretne narzędzie, które może być wykorzystane w praktyce, jest podstawowym argumentem przeciwko stosowaniu tego narzędzia [GJJ<sup>+</sup>08]. Ponadto w działaniu na trójkątnych liczbach rozmytych znaczna część zadań sprowadza się do zadania programowania liniowego, które wskazuje w optymalnym rozwiązaniu na portfel dwuskładnikowy. Zadania programowania kwadratowego wykorzystujące wariancję i semiwariancję, jak pokazały przykłady, także nie gwarantują dywersyfikacji portfela. W związku z niezależnością zmiennych rozmytych nie można uzyskać obniżenia ryzyka poprzez dobór ujemnie skorelowanych zmiennych. Zatem wszystkie zadania wymagałyby uzupełnienia o ograniczenie na maksymalną wartość udziału w portfelu, np.  $\forall_i x_i \leq 0.2$ .

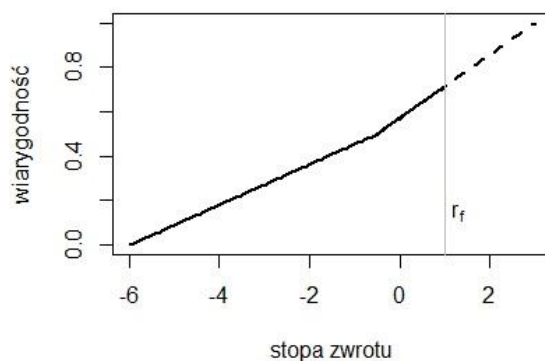
## 3.2 Zadania wykorzystujące miary stosunku do niepewności i preferencje inwestora

Badania empiryczne ukazały, że działania inwestorów różnią się od wyborów wynikających z modeli opierających się na miarach obiektywnych. Od końca lat 70. ubiegłego wieku dynamicznie rozwijają się finanse behawioralne, których celem jest poszukiwanie psychologicznych mechanizmów opisujących zachowania uczestników rynków finansowych. W modelach optymalizacji portfela pojawiają się próby modelowania preferencji inwestorów, wykorzystując miary stosunku inwestorów do niepewności oraz zysku zamiast miar poziomu niepewności i stopy zwrotu. w oparciu o teorię podejmowania decyzji ryzykownych [Cza80], wybór w warunkach niepewności składa się z następujących kroków:

1. tworzenie subiektywnej reprezentacji zadania,
2. wartościowanie wyników,
3. stawianie hipotez o stanach rzeczy,
4. wybór.

w grupie modeli opartych na teorii wiarygodności takim modelem jest model średnia-ryzyko, który w ograniczeniach niepewności wprowadza funkcję akceptowalności straty. Do teorii badających motywy inwestorów giełdowych zalicza się również teorię żalu. To podejście reprezentuje model minimalizacji żalu, który definiowany jest jako uczucie związane ze świadomością po fakcie, że podjęcie innej decyzji przyniosłoby inwestorowi o wiele lepsze rezultaty. Idee tych podejść zostaną przedstawione w niniejszym podrozdziale. Następnie zostanie zaproponowany model maksymalizacji satysfakcji z inwestycji.

Rysunek 3.6: Krzywa ryzyka zmiennej trójkątnej  $\xi = (-6; -0, 5; 3)$ ,  $r_f = 1$



Źródło: opracowanie własne

### 3.2.1 Zadanie średnia-ryzyko

Model zaproponowany przez Huang [Hua08c] opiera się na standardowej funkcji celu, a więc maksymalizacji wartości oczekiwanej, jednak zakłada przy ocenie ryzyka, że inwestorzy biorą pod uwagę zarówno wiarygodność zaistnienia straty jak i jej dotkliwość. w modelu wykorzystane zostało pojęcie krzywej ryzyka (*risk curve*) zdefiniowanej poniżej.

**Definicja 3.1** Niech  $\xi$  oznacza zmienną rozmytą opisującą stopę zwrotu z portfela, a  $r_f$  stopę wolną od ryzyka. Wtedy krzywą

$$R(s) = Cr \{ \theta \in \Theta : r_f - \xi(\theta) \geq s \}, \forall s \geq 0 \quad (3.30)$$

nazywamy krzywą ryzyka, gdzie  $s$  to wielkość straty.

$r_f - \xi$  to różnica pomiędzy stopą zwrotu z portfela a stopą wolną od ryzyka.

Gdy różnica ta jest nieujemna ( $r_f - \xi \geq 0$ ), wtedy jej wartość oznacza stratę. Krzywa ryzyka jest to funkcja ukazująca, jaka jest wiarygodność, że strata z danego portfela będzie większa niż strata o danej wysokości, czyli wartość rozmytej stopy zwrotu  $\xi$  będzie mniejsza od danej wartości stopy zwrotu mniejszej od stopy wolnej od ryzyka (zob. rys. ??).

$$R(r) = Cr \{ \theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq r \}, \forall r \leq r_f \quad (3.31)$$

Obok krzywej ryzyka zdefiniowano krzywą charakteryzującą preferencje inwestora - krzywą akceptowalności straty  $\nu(r)$  (*confidence curve*), jako maksymalny stopień możliwości danej straty, jaki inwestor jest w stanie zaakceptować (rys. 3.7). Jeżeli dana ewentualna strata jest niska (niezbyt niska stopa zwrotu), inwestor może tolerować stosunkowo wysokie stopnie wiarygodności występowania tego zdarzenia, jednak przy wysokich stratach (bardzo niskich stopach zwrotu) inwestor toleruje jedynie niskie wiarygodności ich wystąpienia. Jest to funkcja charakteryzująca danego inwestora. Analogicznie do funkcji obojętności jest ciągła i niemalejąca — im większa strata, tym mniej akceptowalna. Obszar poniżej krzywej akceptowalności strat  $\nu(r)$  jest uważany za obszar niskiego ryzyka, a obszar ponad krzywą za obszar wysokiego ryzyka, którego inwestor będzie unikać (zob. rys. 3.7).

Aby portfel był dopuszczalny, musi spełnić następujący warunek:

$$R(r) \leq \nu(r), \forall r \leq r_f. \quad (3.32)$$

Rysunek 3.7: Przykładowa krzywa akceptowalności straty



Źródło: opracowanie własne

Zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela papierów wartościowych zdefiniowano w następujący sposób.

$$\max E \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\}$$

przy ograniczeniach:

$$R(r) \leq \alpha(r), \forall r \leq r_f \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0.$$

w celu określenia ograniczenia ryzyka, zgodnie z (3.32) należy określić zarówno stopnie wiarygodności wystąpienia poszczególnych strat jak również subiektywne oceny inwestora dotyczące ich akceptacji. Huang [Hua10b] proponuje wyznaczenie krzywej ufności na podstawie przedstawienia inwestorowi ankiety — kwestionariusza typu co-jeśli, z pytaniami zbudowanymi w następujący sposób: *Jeśli strata wyniosłaby  $r$ , to jaki maksymalny stopień możliwości zaistnienia takiej straty byłbyś w stanie zaakceptować?* Ankietowany w odpowiedzi miałby podawać poziom z przedziału  $[0,1]$ . Inwestor, decydując się na wybór aktywów z pewnego zbioru, akceptuje poziom ryzyka tego zbioru, bądź aspiruje przez odpowiedni dobór portfela do obniżenia tego ryzyka o pewien wybrany stopień. Stąd zaproponowano w [Rut13] zamiast pytań o poszczególne stopnie możliwości, aby postawić inwestorowi pytanie, o ile chciałby zmniejszyć ryzyko związane z inwestycją w stosunku do innego portfela, dla którego istnieją dane historyczne, umożliwiające obserwowanie niepewności bez potrzeby szacowania jej wartości.

### 3.2.2 Zadania minimalizacji żalu

w teorii decyzji poprzez żal (*regret, opportunity loss*) rozumie się różnicę pomiędzy rzeczywistą wypłatą a wypłatą możliwą do uzyskania w przypadku innej decyzji. W oparciu o to pojęcie Graham Loomes oraz Robert Sugden [LS82] rozwinęli teorię żalu, w której problem decyzyjny jest rozważany jako zadanie minimalizacji funkcji żalu, którą można utożsamiać z różnicą pomiędzy wynikiem uzyskanym a najlepszym wynikiem w danym okresie. Zgodnie z nią oraz badaniami empirycznymi

(por. [Nos06]) inwestorzy o wiele intensywniej odczuwają żal z powodu straty dotyczącej inwestycji w konkretną spółkę niż w przypadku straty dotyczącej całej giełdy. Na podstawie teorii żalu został zaproponowany w 2012 roku [LSQ12] model minimalizacji żalu, a wcześniej oparty na teorii podejmowania decyzji w teorii gier, został przedstawiony model minmax średnia-wariancja [Hua10a], który również można uznać za podejście minimalizacji żalu w sensie proponowanym przez Loomesa oraz Sugdena.

**Model minmax średnia-wariancja.** W 2010 [Hua10a], opierając się na teorii podejmowania decyzji w teorii gier, zmodyfikowano model (3.1) do modelu (3.35) i (3.36) w celu możliwości działania w sytuacji, gdy nie są określone funkcje przynależności ani wiarygodności zmiennych rozmytych, a jedynie określony ich typ.

W modelu zakładamy, że każda stopa zwrotu  $\xi_i$  jest zmienną rozmytą i wiadomo, że należy do pewnej klasy zmiennych rozmytych  $\Gamma_i$ , jak również że maksymalny poziom akceptowalnej przez inwestora niepewności wynosi  $\delta$ . Inwestorzy powinni najpierw wymagać, aby maksymalna wariancja zwrotu portfela w każdym przypadku nie była większa od ustalonej na poziomie  $\delta$ , a następnie realizować maksymalną oczekiwaną stopę zwrotu w najgorszym przypadku (a więc z rozważanych minimalną). Jest to adaptacja na potrzeby rozmytej analizy portfelowej kryterium Walda, według którego należy wybrać decyzję, której odpowiada najwyższa spośród najgorszych wypłat dla każdej decyzji. w rozpatrywanym modelu rozmytym, ujmuje się to w następujące zadanie:

$$\begin{aligned} & \max_{x_i, 1 \leq i \leq n} \min_{\xi_i, 1 \leq i \leq n} E \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \max_{\xi_i, 1 \leq i \leq n} V \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \leq \delta \\ & \xi_i \in \Gamma_i \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

gdzie  $\Gamma_i$  oznacza typ funkcji przynależności np trójkątny, normalny.

W przypadku założenia o określonej minimalnej stopy zwrotu  $\eta$ , należy najpierw zagwarantować, że minimalna wartość oczekiwana w żadnym wypadku nie będzie mniejsza od tej stopy, a następnie realizować portfel o minimalnej wariancji w najgorszym przypadku (a więc z tych o największej wariancji), co jest zgodne z kryterium Savagea.

$$\begin{aligned} & \min_{x_i, 1 \leq i \leq n} \max_{\xi_i, 1 \leq i \leq n} V \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \\ & \text{przy ograniczeniach:} \\ & \min_{\xi_i, 1 \leq i \leq n} E \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \geq \eta \\ & \xi_i \in \Gamma_i \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$



W celu zobrazowania algorytmu rozwiązania problemu przedstawimy poniżej kroki działania na przykładzie symetrycznych trójkątnych zmiennych rozmytych.

**Przykład 9** Poszukiwanie optymalnego rozwiązania polega na wykonaniu następujących kroków

- Zakładamy, że:
  - mamy do wyboru  $n$  akcji  $1 \leq i \leq n$
  - rozmyte stopy zwrotu są trójkątnymi symetrycznymi zmiennymi rozmytymi  $\xi_i = (a_i, b_i, (2b_i - a_i))$ , stąd:  $E_{\xi_i} = b_i, V[\xi_i] = \frac{(\sum_{i=1}^n (x_i b_i) - \sum_{i=1}^n (x_i a_i))^2}{6}$
- inwestor zna lub przewiduje wartości oczekiwane tych stóp zwrotu,
- inwestor nie jest pewny najniższej ani najwyższej wartości, jaką może przyjąć zmienna, a więc określa przedział  $a_i \in [a_{li}, a_{ui}]$
- inwestor bierze pod uwagę jedynie najwyższą wariancję, wtedy:

$$\max_{\xi_i, 1 \leq i \leq n} V[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i b_i - \sum_{i=1}^n x_i a_i)^2}{6},$$

- zadanie optymalizacji przedstawia się następująco:

$$\max \sum_{i=1}^n (\xi_i b_i)$$

przy ograniczeniach:

$$(\sum_{i=1}^n (x_i b_i) - \sum_{i=1}^n (x_i a_{li})) \leq \sqrt{(6\delta)} \quad (3.36)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

**Minimalizacja żalu.** Model minimalizacji żalu został zaprezentowany przez Li, Qin i Kar [LSQ12]. Przyjęto założenie, że inwestor będzie żałował różnicy pomiędzy maksymalną stopą zwrotu, a stopą uzyskaną z portfela. W momencie podejmowania decyzji, stopy zwrotu są nieznanne, a jedynie określone z pewnym przybliżeniem rozkłady ich możliwości. Dlatego żal został zdefiniowany jako zmienna rozmyta — zmienna żalu, określona następująco:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \quad (3.37)$$

W związku z tym przy tworzeniu portfela minimalizować należy różnice pomiędzy maksymalną rozmytą stopą zwrotu a rozmytą stopą portfela. W celach optymalizacji wykorzystano wartość oczekiwaną zmiennej rozmytej, by zastąpić określenie rozmyte wartością ostrą, definiując zadanie optymalizacji:

$$\min E[\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i]$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

Przy tak przyjętej funkcji celu, opierając się na twierdzeniu 2.3.1, można udowodnić równoważność tego zadania do zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej.

### Dowód 3.1

$$\min E \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] = \min (E [\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i] - E \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right]) \quad (3.39)$$

$E [\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i]$  — jest wartością stałą, założmy  $E [\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i] = c$ .

$$\begin{aligned} \min (E [\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i] - E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i]) &= \min (c - E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i]) = \\ c - \min (E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i]) &= \max (E [\sum_{i=1}^n \xi_i x_i]). \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.2.3 Zadanie maksymalizacji satysfakcji inwestora

Model zakłada, że inwestor dokonuje oceny inwestycji na podstawie odczuwanej z niej satysfakcji, która nie zawsze jest równoważna z uzyskaną stopą zwrotu. W przypadku dobrej sytuacji na rynku finansowym, satysfakcja z małej stopy zwrotu będzie mniejsza niż w przypadku tej samej stopy zwrotu uzyskanej na rynku niedźwiedzia. Dodatkowo, inwestując w aktywa bardziej niepewne, satysfakcję dadzą dopiero wyższe zyski.

**Satysfakcja.** Słownik języka polskiego definiuje satysfakcję, jako: *uczucie przyjemności i zadowolenia z czegoś*. Kotler, [Kot67] zajmując się satysfakcją klienta, sprecyzował, że jest to *stan odczuwalny przez jednostkę i związany z porównaniem postrzeganych cech oraz oczekiwań jednostki dotyczących tych cech*.

Analogicznie możemy określić satysfakcję inwestora z inwestycji jako podobieństwo wyników do oczekiwań. Inwestor ma pewne oczekiwania co do zysku uzyskanego z inwestycji, wyrażone w formie rozmytej czy przybliżonej, a wynik inwestycji jest przez niego oceniony *expost* poprzez stopień spełnienia — stopień podobieństwa wyniku z oczekiwaniami. *Exante* szacowane mogą być wiarygodności wystąpienia poszczególnych stóp zwrotów dla poszczególnych składników aktywów. Dlatego zakładamy, że inwestor, starając się maksymalizować swoją satysfakcję, będzie wybierał portfel akcji, dla którego podobieństwo funkcji wiarygodności rozmytej stopy zwrotu z portfela z oczekiwaniami jest największe.

**Miary podobieństwa.** Sposoby mierzenia podobieństwa są szeroko wykorzystywane i opisywane w literaturze. Zestawienie i porównanie podejść do badania podobieństwa dwóch zbiorów rozmytych można znaleźć m.in. w [CS02]. W pracy wykorzystane zostanie podejście miar opartych na teorii zbiorów (*set-theoretic measures*). Za fundamentalną pracę nad ujęciem podobieństwa jako zbioru cech uznaje się pracę Tverskiego [Tve77], który wprowadził funkcję podobieństwa jako funkcję cech podobnych oraz różniących obiekty.

Niech  $\Delta = \{a, b, c, \dots\}$  będzie zbiorem badanych obiektów. Zakładamy, że każdy element zbioru  $\Delta$  jest reprezentowany przez zbiór cech lub atrybutów  $A, B, C, \dots$  (odpowiednio dla obiektów  $a, b, c, \dots$ ). Poprzez  $s_{a,b}$  oznaczymy miarę podobieństwa obiektu  $a$  i  $b$  dla poszczególnych obiektów oddzielnie. Skala  $s$  jest traktowana jako

porządkowa miara podobieństwa, a więc  $s(a, b) > s(c, d)$  oznacza, że obiekt  $a$  jest bardziej podobny do  $b$ , niż obiekt  $c$  do  $d$ . Podobieństwo pomiędzy obiektami  $a$  i  $b$  jest to funkcja trzech argumentów: cech wspólnych ( $A \cap B$ ), cech będących cechami obiektu  $a$ , a nie będących cechami obiektu  $b$  ( $A - B$ ) oraz cech należących do obiektu  $b$ , ale nie należących do obiektu  $a$  ( $B - A$ ). Tak zdefiniowane  $s$  jest monotoniczne, tzn.:

$$s_{a,b} \geq s_{a,c} \Leftrightarrow (A \cap B \supset A \cap C \vee A - B \subset A - C \vee B - A \subset C - A). \quad (3.41)$$

Co oznacza, że podobieństwo rośnie wraz ze zwiększeniem cech wspólnych lub zmniejszeniem cech różniących. Określa się, że pary  $(a, b)$  i  $(c, d)$  są zgodne (*agree*) jedno, dwu lub trzy składnikowo, gdy zachodzi odpowiednio:

$$(A \cap B) \cong (C \cap B), (A - B) \cong (C - D), (B - A) \cong (D - C). \quad (3.42)$$

Zakładając, że pary  $(a, b)$  i  $(c, d)$  jak również pary  $(a', b')$  i  $(c', d')$ , są zgodne dwu składnikowo, podczas gdy pary  $(a, b)$  i  $(a', b')$  jak również pary  $(c, d)$  i  $(c', d')$  są zgodne trzecim składnikiem. Wtedy (3.43) określana jest mianem niezależności.

$$s_{a,b} \geq s_{a',b'} \text{ jeśli } s_{c,d} \geq s_{c',d'} \quad (3.43)$$

Zakładając, że spełnione są warunki monotoniczności, niezależności, rozwiązywalności i niezmienniczości. Istnieje taka skala podobieństwa  $S$  i nieujemna skala  $f$  dla wszystkich  $a, b, c, d$  w  $\Delta$ , że:

- (i)  $S_{a,b} \geq S_{c,d}$ , jeśli  $s_{a,b} \geq s_{c,d}$ ,
- (ii)  $S_{a,b} = \frac{f(A \cap B)}{f(A \cap B) + \alpha f(A - B) + \beta f(B - A)}$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $0 \leq S_{a,b} \leq 1$ ,
- (iii)  $f$  i  $S$  są skalami przedziałowymi.

Tak zdefiniowaną funkcję  $S_{a,b}$  będziemy nazywać indeksem Tversky'ego. Jest on uogólnieniem miar podobieństwa występujących już w literaturze np:

- dla  $\alpha = \beta = 1$  jest to indeks Jaccarda [Jac12],
- dla  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  współczynnik Dice'a [Dic45].

Bouchon-Meunier i inni w [BMRB96] omówiła różnice i cechy miar spełnialności, podobieństwa, zawarcia i niepodobieństwa zbiorów rozmytych, opierając badania na idei Tversky'ego. Niech  $\Omega$  będzie dowolnym zbiorem elementów, a  $F(\Omega)$  zbiór zbiorów rozmytych określonych na  $\Omega$ . Porównanie dwóch zbiorów rozmytych  $A$  i  $B$  określonych na tej samej przestrzeni polega na uwzględnieniu elementów przestrzeni, które należą do tych obu zbiorów przynajmniej częściowo, a zależnie od sytuacji również elementów, które należą do zbioru  $A$  i nie należą do zbioru  $B$ , czyli należą do dopełnienia<sup>1</sup> zbioru  $B$  oraz do zbioru  $B$  i nie do zbioru  $A$ . Do wykonania działania przecięcia dwóch zbiorów rozmytych wykorzystuje się t-normy. Najpopularniejszą metodą obliczenia funkcji przynależności iloczynu zbiorów jest operator MIN:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X. \quad (3.44)$$

Poprzez różnicę  $A - B$  będziemy rozumieć:

$$A - B = A \cap \bar{B}, \text{ gdzie } \bar{B} = 1 - \mu_B. \quad (3.45)$$

w celu porównania zbiorów rozmytych, wprowadza się miarę zbioru rozmytego oceniającą wagę ich elementów. Miarę  $M$  zbioru rozmytego zdefiniowano [BMRB96] jako odwzorowanie  $M : F(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , takie że dla każdego  $A$  i  $B$  w  $F(\Omega)$ :

<sup>1</sup>Przez dopełnienie zbioru rozmytego rozumiemy funkcję  $\mu_{\bar{B}} = 1 - \mu_B$

- (i)  $M(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) jeśli  $B \subseteq A$ , wtedy  $M(B) \leq M(A)$ .

Przykładem takiego odwzorowania dla zbiorów  $\Omega$  skończonych jest:

$$M(A) = \sum_{x \in \Omega} \mu_A(x), \quad (3.46)$$

a w przypadku nieskończonych:

$$M(A) = \int_{\Omega} \mu_A(x) dx \quad (3.47)$$

$M$ -miarę porównania dwóch zbiorów zdefiniowano jako [BMRB96]:

$$S : F(\Omega) \times F(\Omega) \rightarrow [0, 1], \text{ takie że} \quad (3.48)$$

$$S(A, B) = \frac{M(A \cap B)}{M(A \cap B) + \alpha M(A - B) + \beta M(B - A)},$$

gdzie  $\alpha, \beta \geq 0, 0 \leq S \leq 1$ . Bouchon-Meunier i inni w [BMRB96] zdefiniowała na podstawie miary porównania, ogólną miarę podobieństwa (*similitude*) zbiorów rozmytych, a następnie wyróżniła jej trzy rodzaje: I rodzaju (*satisfiability*), II rodzaju (*inclusion*), III rodzaju (*resemblance*), następująco:

**Definicja 3.2** [BMRB96]  $M$ -miarą podobieństwa na zbiorze  $\Omega$  nazywamy  $M$ -miarę podobieństwa  $S$ , gdy:

- $F_s(u, v, w)$  jest niemalejąca ze względu na  $u$ ,
- $F_s(u, v, w)$  jest nierosnąca ze względu na  $v$  i  $w$ .

Tak zdefiniowana miara podobieństwa jest spójna z podejściem prezentowanym przez Tversky'ego. Wykorzystując (3.44), (3.47), (3.48) funkcja podobieństwa zbiorów rozmytych  $A$  i  $B$  przedstawia wzór (3.49).

$$S(A, B) = \frac{\int_{\Omega} \min(\mu_A, \mu_B)}{\int_{\Omega} \min(\mu_A, \mu_B) + \alpha \int_{\Omega} \min(\mu_A, 1 - \mu_B) + \beta \int_{\Omega} \min(1 - \mu_A, \mu_B)}. \quad (3.49)$$

Podobieństwo I rodzaju (*satisfiability*) to zgodność zbioru ze zbiorem referencyjnym — pewnym wzorcem.

**Definicja 3.3** [BMRB96]  $M$ -miarą podobieństwa I rodzaju na zbiorze  $\Omega$  nazywamy  $M$ -miarę podobieństwa  $S$ , gdy:

- $F_s(0, v, w) = 0 \forall v, w$ ,
- $F_s(u, v, w)$  jest niezależne od  $w$ ,
- $F_s(u, 0, w) = 1, \forall u \neq 0$ .

Podobieństwo II rodzaju (*inclusion*) zbiorów  $A$  i  $B$  określa stopień zawierania się obiektu drugiego w pierwszym.

**Definicja 3.4** [BMRB96]  $M$ -miarą podobieństwa II rodzaju na zbiorze  $\Omega$  nazywamy  $M$ -miarę podobieństwa  $S$ , gdy:

- $F_s(0, v, w) = 0 \forall v, w$ ,
- $F_s(u, v, w)$  jest niezależne od  $w$ ,
- jest zwrotna  $S(A, A) = 1$ .

Podobieństwo III rodzaju (*resemblance*), to podobieństwo dwóch zbiorów na tym samym poziomie, a więc nie można wyróżnić obiektu referencyjnego, stąd:

**Definicja 3.5** [BMRB96]  $M$ -miarą podobieństwa III rodzaju na zbiorze  $\Omega$  nazywamy  $M$ -miarę podobieństwa  $S$ , gdy spełnia warunki:

- zwrotności:  $S(A, A) = 1$ ,
- symetryczności:  $S(A, B) = S(B, A)$ .

**Zadanie maksymalizacji satysfakcji.** W proponowanym zadaniu optymalizacji inwestor określa swoje oczekiwania poprzez podanie wielkości w pełni go satysfakcjonującej stopy zwrotu, a więc poprzez stwierdzenie, że *stopa zwrotu ma wynieść co najmniej  $r$* . Zakładając ciągłość preferencji inwestora, stopa zwrotu nieco mniejsza od  $r$  będzie oczekiwana w stopniu mniejszym niż 1. Taka sytuację można zaprezentować w postaci zbioru rozmytego  $\nu$  typu  $S$ , a więc o funkcji przynależności (3.50) (w skrócie określona zapisem  $\nu = (r_0, r_1)$ ).

$$\nu(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leq r_0, \\ \frac{r-r_0}{r_1-r_0} & \text{dla } r_0 < r \leq r_1, \\ 1 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (3.50)$$

Zgodnie z teorią użyteczności [Fis09], dla różnych podejść do ryzyka oczekiwania inwestora mogą zostać przedstawione za pomocą funkcji wypukłej  $\nu_1$  — dla osób niechętnych do ryzyka (asekurantów), lub funkcji wklęsłej  $\nu_2$  — dla osób skłonnych do podejmowania ryzyka (por. rys. 3.8).

Inwestor za najbardziej satysfakcjonujący uznaje portfel, którego wiarygodność zaistnienia poszczególnych stóp zwrotu jest najbardziej podobna do jego oczekiwań. Zatem funkcja satysfakcji zdefiniowana jest następująco:

$$S = \frac{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \nu)}{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \nu) + \alpha M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \bar{\nu}) + \beta M(\overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)} \cap \nu)}, \quad (3.51)$$

gdzie:

$M$  — miara zbioru rozmytego,

$\alpha$  — parametr awersji do ryzyka,

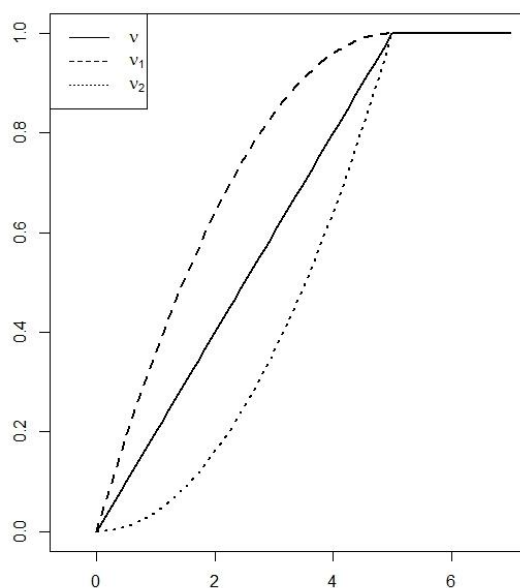
$\beta$  — parametr żalu,

$(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \nu)$  — poziom spełnienia przez dany portfel oczekiwań,

$(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \bar{\nu})$  — niebezpieczeństwo wyniku poniżej oczekiwań,

$(\overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)} \cap \nu)$  — poziom niespełniania oczekiwań.

Rysunek 3.8: Funkcje oczekiwań inwestora



Źródło: opracowanie własne

Zakładamy również, że inwestor nie oczekuje więcej niż stopa zwrotu aktywa na rynku, dla której wiarygodność wystąpienia danej stopy jest większa od zera oraz nie rozpatruje obszaru stóp zwrotu poniżej minimalnej stopy, dla której wiarygodność wystąpienia danej stopy jest większa od zera, tzn.:

$$\begin{aligned} r_{max} &= \max \{ \min \{ r : \nu(r) = 1 \}, \max \{ r : Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \geq 0 \} \} \\ r_{min} &= \min \{ \max \{ r : \nu(r) = 0 \}, \min \{ r : Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \geq 0 \} \} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Wykorzystując (3.47), (3.52) oraz operator min do określenia iloczynu dwóch zbiorów, otrzymujemy funkcję:

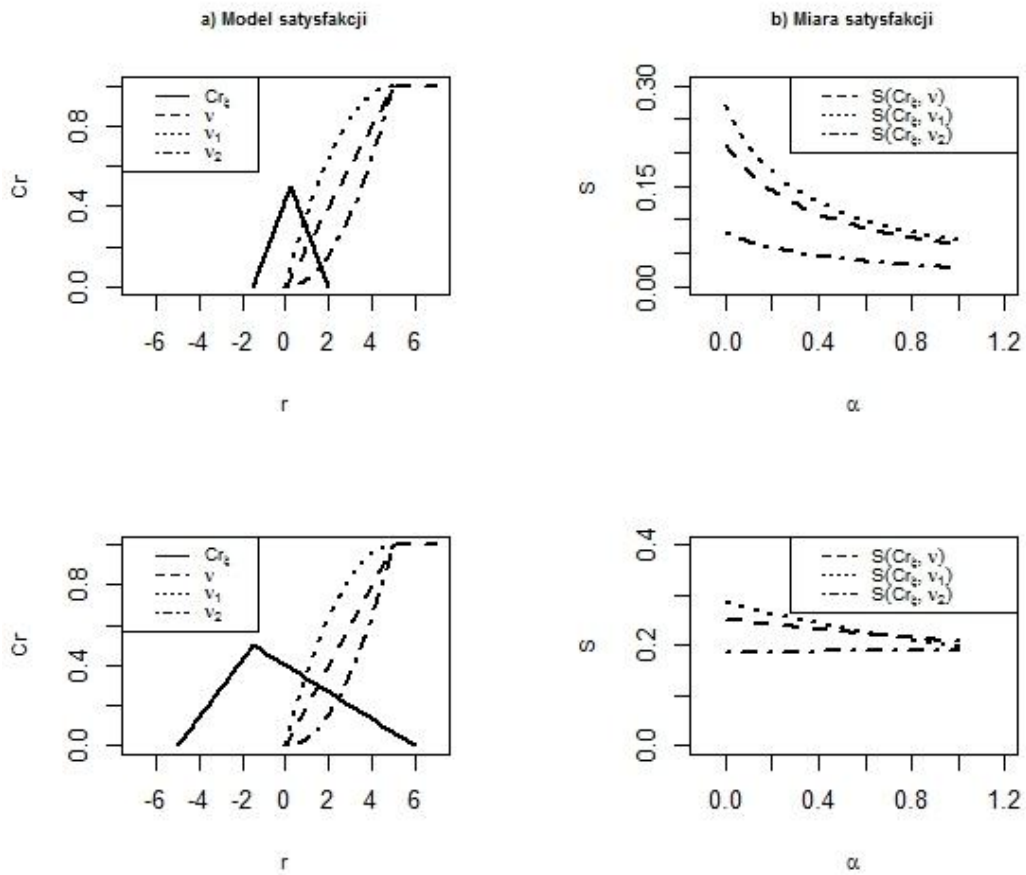
$$\begin{aligned} S &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \min \{ Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r), \nu \} / (\int_{r_{min}}^{r_{max}} \min \{ Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r), \nu \} + \\ &\alpha \int_{r_{min}}^{r_{max}} \min \{ Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r), \bar{\nu} \} + \beta \int_{r_{min}}^{r_{max}} \min \{ \overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)}, \nu \} ). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Warto zauważyć, że przyjęta funkcja miary podobieństwa zależnie od przyjętych parametrów awersji do ryzyka i parametru żalu staje się:

- miarą I rodzaju, dla  $\alpha = 0, \beta = 1$ ,
- miarą II rodzaju, dla  $\alpha = 1, \beta = 0$ ,
- miarą III rodzaju, dla  $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ .

Zatem dla inwestora skupiającego uwagę jedynie na zyskach, o zerowej awersji do ryzyka, funkcja podobieństwa I rodzaju będzie sprawdzała jedynie stopień realizacji oczekiwań, uwzględniając część wspólną oraz niespełnione oczekiwania. W odwrotnym przypadku, dla inwestora o maksymalnej awersji do ryzyka, to zawieranie się oczekiwań w wybranym portfelu będzie brane pod uwagę wraz z niebezpieczeństwem wyniku poniżej oczekiwań. Inwestor, który w równym stopniu zwraca uwagę

Rysunek 3.9: Funkcje wiarygodności portfela i oczekiwań inwestora (kolumna a) oraz odpowiadające im poziomy satysfakcji w zależności od parametru  $\alpha$  (kolumna b)



Źródło: opracowanie własne

na niespełnione oczekiwania jak i na niepewność, będzie mierzył swoją satysfakcję funkcją podobieństwa III rodzaju. Przykład poziomu satysfakcji w zależności od parametru  $\alpha$  dla różnych funkcji oczekiwań przedstawia rys. 3.9.

Zadanie optymalizacji portfela będzie się przedstawiało następująco:

$$\max S(Cr(\theta \in \Theta : \sum x_i \xi_i(\theta) = r), \gamma)$$

przy ograniczeniach:

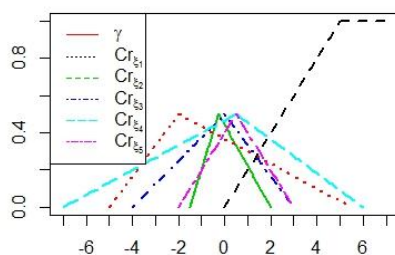
$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0$$

(3.54)

**Przykład 10** Wybieramy portfel złożony z 5 akcji, opisanych rozmytymi stopami zwrotu: około  $-0,25$ , około  $-2$ , około  $0$ , i około  $1$  (por. tabela 3.8, rys. 10). Oczekiwania inwestora będą w pełni spełnione przez stopę zwrotu powyżej  $5$ , ale będą częściowo spełnione każdą dodatnią stopą zwrotu, dodatkowo w celu dywersyfikacji założone zostało, że maksymalny udział w portfelu nie może przekroczyć  $0,5$  ( $x_i \leq 0,5, \forall i$ ). Wyniki różnych modeli optymalizacji portfela prezentuje tabela 3.8. Zadanie minimalizacji wariancji, semiwariancji i entropii zostały rozwiązane z ograniczeniem na wartość oczekiwaną powyżej poziomu  $0$ . W przypadku ograniczenia wartości oczekiwanej powyżej  $1$ , rozwiązania nie odnalazły dopuszczalnych rozwiązań. Rozwiązania zadania maksymalizacji satysfakcji zależy od parametru awersji do ryzyka i parametru żalu. Jak można było oczekiwać, portfel inwestora o dużej awersji do ryzyka i niskim poczuciu żalu ma niższą wariancję i wartość oczekiwaną od portfela inwestora o małej awersji do ryzyka i wysokim poczuciu żalu. Zadanie z wysokim parametrem żalu wybiera do portfela głównie składniki 2 i 5, ponieważ wiarygodność, że stopy zwrotu będą wysokie, jest dodatnia. Aktywa te nie są uwzględnione w wynikach innych zadań, które sugerują, głównie składniki 1 i 3.

Rysunek 3.10: Funkcje wiarygodności aktywów oraz funkcja oczekiwań inwestora.



Źródło: opracowanie własne

Tabela 3.7: Rozmyte stopy zwrotów.

i	$\mu_i$	E	V	SV	H	S: $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$
1	$(-1,5;-0,25;1,5)$	-0,125	0,4247	0,3465	1,5	0,0528
2	$(-5;-0,5;6,5)$	0,125	6,4798	4,9824	5,75	0,2513
3	$(-3;0,4;2,5)$	2,2715	1,9069	3,5	0,1763	0,0850
4	$(-7;1,5;6)$	0,5	8,8529	8,2721	6,5	0,2687
5	$(-2;0,5;3)$	0,5	1,0417	1,0417	2,5	0,1463

Źródło: opracowanie własne



Tabela 3.8: Rozwiązanie

Zadanie	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	E	V
(3.2) $E[\xi] \geq 0$	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.1875	0.69859
(3.3) $V[\xi] \leq 3$	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.5000	0.225	1.1914
(3.5) $E[\xi] \geq 0$	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.1875	0.69859
(3.9) $E[\xi] \geq 0$	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.1875	0.69859
(3.54) $\alpha = 0, \beta = 1$	0.0000	0.0000	0.5000	0.0005	0.4995	0.225	1.1935
(3.54) $\alpha = 0.25, \beta = 0.75$	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.1875	0.6986
(3.54) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$	0.0000	0.0062	0.4938	0.5000	0.0000	0.2261	4.3134
(3.54) $\alpha = 0.75, \beta = 0.25$	0.0000	0.4968	0.0032	0.5000	0.0000	0.3119	6.5295
(3.54) $\alpha = 1, \beta = 0$	0.0001	0.4998	0.0001	0.5000	0.0001	0.3125	6.5449

Źródło: opracowanie własne

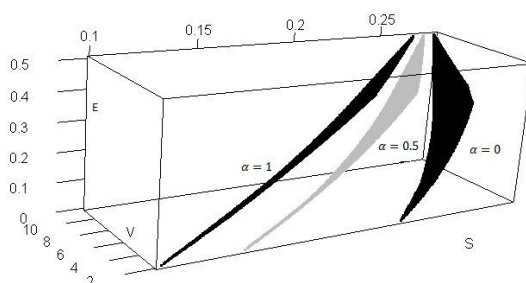
**Przykład 11** Zależność poziomej satysfakcji od wartości oczekiwanej i wariancji portfela 3-składnikowego (3.9).

Tabela 3.9: Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, wariancja, pozioma satysfakcji.

	$\mu$	$E[\xi]$	$V[\xi]$	$S[\xi; \alpha = 0; \beta = 1]$	$S[\xi; \alpha = 0.5]$	$S[\xi; \alpha = 1; \beta = 0]$
A	$(-3; -0.25; 3.5)$	0	0,1019	0,1389	0,2183	1,9747
B	$(-4.5; -0.1; 6)$	0,325	0,1982	0,22996	0,2737	5,1838
C	$(-8; 1.5; 7)$	0,5	0.2698	0.2763	0.2831	11,4342

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.11: Zależność wariancji i wartości oczekiwanej od satysfakcji inwestora.



Źródło: opracowanie własne

W zaproponowanym modelu maksymalizacji satysfakcji zastąpiono potrzebę ustalenia w kryteriach granicznych wartości miar ryzyka bądź zysku określeniem oczekiwań inwestora (w formie liczby rozmytej). Przedstawione przykłady potwierdziły,

że maksymalizowanie wartości oczekiwanej nie jest jednoznaczne z maksymalizacją satysfakcji inwestora. Zadanie maksymalizacji satysfakcji skupia się przede wszystkim na wiarygodności wystąpienia wyższych, a więc oczekiwanych przez inwestora stóp zwrotu, a nie jak zadanie średnia-wariancja na wartości uśrednionej zysku.

### **3.2.4 Podsumowanie**

Modele przedstawione w tym podrozdziale nawiązują bezpośrednio do teorii decyzji ryzykownych, rozważają motywacje osiągnięć i stosunek do niepewności inwestora. Dzięki temu podejściu zadania można indywidualizować zależnie od preferencji. Zadania te wspomagają decyzję i charakteryzują się intuicyjnością w określaniu kryterium. Wymagają jednak empirycznego przetestowania, czy są równie skuteczne, w rozumieniu minimalizacji strat i maksymalizacji zysku, jak zadania oparte o standardowe miary niepewności i zysku.

# Rozdział 4

## Koncepcja badania i opis danych

### 4.1 Cele i plan badania

Celem badania empirycznego jest uzyskanie odpowiedzi na następujące pytania:

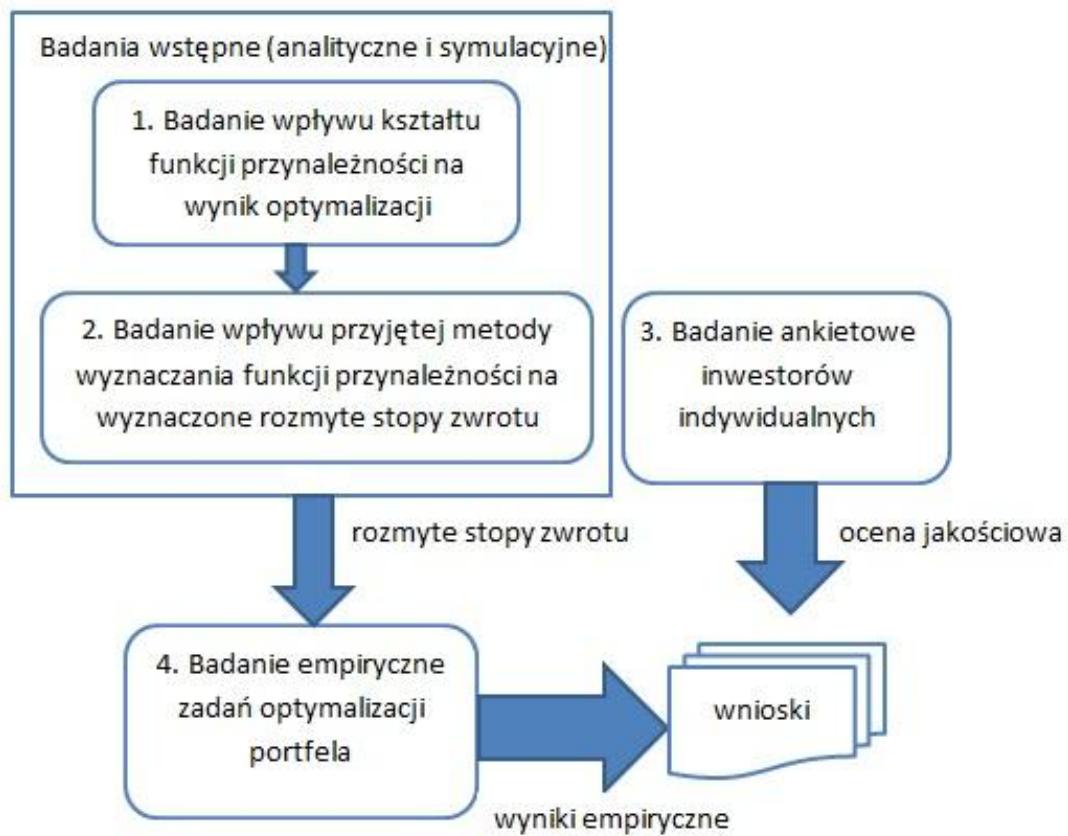
1. Jak wyznaczyć funkcję przynależności rozmytej stopy zwrotu? Jak wyznaczać kształt funkcji bazowej funkcji przynależności? Jak określić punkty charakterystyczne?
2. Czy kształt funkcji bazowej funkcji przynależności ma wpływ na wynik zadań optymalizacji portfela?
3. Czy przybliżenie różnych kształtów kształtem liniowym wpływa istotnie na zmianę w doborze udziałów w wyznaczanym portfelu?
4. Czy inwestorzy indywidualni korzystają z analizy portfelowej?
5. Czy inwestorzy indywidualni korzystają z miar ryzyka? Które z miar ryzyka są wykorzystywane i uważane za przydatne?
6. Czy można określić, które z zadań opartych na pojęciu zmiennej rozmytej ma większą skuteczność?
7. Czy zadania optymalizacji uwzględniające preferencje inwestorów są równie skuteczne co zadania oparte na miarach niepewności i zysku?

Ze względu na cele rozprawy badanie podzielono na 4 części. Dwie z nich są badaniami wstępnymi: analityczno-symulacyjnym. W oparciu o ich wyniki zostanie przeprowadzone badanie główne o charakterze empirycznym. Trzecie zadanie ma charakter ankietowy i zostaje przeprowadzone równoległe do innych. Zależności między zadaniami zostały przedstawione na rysunku 4.1.

Ogólny plan badań przedstawia się następująco:

1. Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności
  - (a) Badanie analityczne wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik zadania optymalizacji.
  - (b) Badanie symulacyjne wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik zadania optymalizacji.
2. Badanie wpływu przyjętej metody wyznaczania funkcji przynależności na wyznaczone stopy zwrotu.

Rysunek 4.1: Schemat badania



Źródło: opracowanie własne

3. Badanie ankietowe wśród inwestorów indywidualnych GPW.
4. Badanie empiryczne zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego.

w poniższych podrozdziałach scharakteryzowano szczegółowo metodyki poszczególnych badań.

## 4.2 Badanie ankietowe wśród inwestorów indywidualnych

Celem badania ankietowego jest uzyskanie informacji na temat sposobów doboru spółek do portfela inwestycyjnego oraz preferencji inwestorów indywidualnych. Wyniki badania ankietowego pozwolą uzyskać odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy tradycyjne modele optymalizacji portfela są znane i wykorzystywane w praktyce?
2. Czy inwestorzy sprawdzają miary ryzyka i zysku własnych portfeli, przed i w trakcie inwestycji?
3. w jaki sposób inwestorzy oceniają swoją inwestycję?
4. Jak przedstawia się ich awersja do ryzyka?
5. w jaki sposób inwestorzy definiują swoje oczekiwania?

Na podstawie tej analizy będzie można przeprowadzić jakościową ocenę istniejących zadań optymalizacji portfela i wysunąć wnioski o ich przystępności dla inwestorów. Jest to badanie niezależne od innych, jednak istotne dla końcowych wniosków.

### 4.2.1 Charakterystyka inwestorów

Głównymi źródłami wiedzy na temat inwestorów indywidualnych w Polsce są raporty GPW oraz Ogólnopolskie Badanie Inwestorów (OBI). Raporty GPW powstają na podstawie ankiet przeprowadzonych wśród krajowych biur maklerskich i ograniczają się do badania udziału różnych grup inwestorów w obrotach instrumentami finansowymi na warszawskim parkiecie. W 2012 roku udział w badaniu wzięli udział wszyscy krajowi członkowie GPW<sup>1</sup>.

Wyniki badania wskazują, że w pierwszym półroczu 2012 roku, podobnie jak w roku poprzednim, na Głównym Rynku akcji dominowali inwestorzy zagraniczni, którzy odpowiadali za 48% obrotów akcjami, a krajowi inwestorzy indywidualni wygenerowali obroty na poziomie 18%. Natomiast inwestorzy indywidualni krajowi są dominującą grupą na rynku NewConnect (ok.72% obrotów).

---

<sup>1</sup>Członkiem giełdy jest podmiot dopuszczony do działania na giełdzie, a w szczególności do zawierania transakcji giełdowych. Na koniec 2012 r. status członka giełdy posiadało 60 podmiotów, w tym 31 z siedzibą na terenie Polski

Ogólnopolskie Badanie Inwestorów przeprowadzane jest corocznie od 2002 roku przez Stowarzyszenie Inwestorów Indywidualnych. Stowarzyszenie Inwestorów Indywidualnych (SII) jest największą organizacją zrzeszającą inwestorów giełdowych w Polsce (ponad 7 tys. członków), która działa od 1999 roku i należy do europejskich organizacji inwestorskich Euroshareholders i Euroinvestors oraz Światowej Federacji Inwestorów WFIC. W swojej działalności koncentruje się na edukacji, analizach i ochronie praw inwestorskich. W roku 2012 badaniem OBI objęto ponad 6 tys. respondentów. Wyniki przedstawiają szeroką charakterystykę inwestorów od ich struktury demograficznej, informacji o portfelu, poprzez motywację inwestowania, źródła informacji, aż do opinii na temat działania rynku.

*Od wielu lat podstawowa charakterystyka inwestorów jest niemal niezmienna. W skrócie, statystyczny polski inwestor to młody mężczyzna, mieszkający w dużym mieście, posiadający wyższe wykształcenie, a co za tym idzie dobrą pracę i oszczędności, które chce pomnażać na giełdzie, a inwestycje traktuje głównie jako dodatkowe źródło przychodu.*<sup>2</sup> Kobiety stanowią jedynie 12% próby badawczej. Najwięcej inwestorów, aż 43%, jest w wieku 26-35 lat. Kolejne pod względem liczebności są osoby w wieku 36-45 lat (23,5%) oraz do 25 lat (16,5%). Natomiast wśród osób z portfelami o wartości poniżej 10 tys. zł, aż 78% stanowią osoby poniżej 35 roku życia. Najliczniejszą grupę, aż 3/4 badanych, stanowią inwestorzy z wykształceniem wyższym. W przypadku osób posiadających oszczędności przekraczające 0,5 mln zł, niemal połowa ma wykształcenie ekonomiczne. Ponad 41% badanych mieszka w zaledwie kilku największych miastach w kraju, aż 16% w samej Warszawie. Ponadto występuje koncentracja inwestorów w pięciu województwach: mazowieckim (22,3%), śląskim (12%), małopolskim (11,3%), dolnośląskim (9,6%) i wielkopolskim (8,8%). Inwestorzy biorący udział w badaniu najczęściej zatrudniani są na umowę o pracę lub zlecenie (65,4%), kolejną grupą są osoby prowadzące własną działalność gospodarczą (15%). Odsetek osób określających się jako zawodowy inwestor giełdowy, a więc niezatrudnionych i poświęcających cały swój czas na śledzenie rynku i transakcje, wynosi jedynie 2,2%, jest on nadal niższy niż w latach 2009-2010. W 2012 roku liczba rachunków giełdowych się ustabilizowała (wzrost w stosunku do 2011 r. jedynie o 10,9 tys.) i wynosi 1,509 mln. Według wyników badania OBI inwestorzy zdecydowanie najczęściej, aż w 94,3% inwestują poprzez własny rachunek inwestycyjny (bezpośrednio). Inwestorów lokujących środki poprzez fundusze inwestycyjne jest 36,2%, a samodzielnie poza rynkiem kapitałowym 17,8%.

Co piąty inwestor poświęca na inwestycje wiele godzin dziennie (20,5%), co trzeci maksymalnie godzinę (30,3%), a 27,2% proces ten zajmuje do kilku godzin w miesiącu lub krócej. Badani inwestorzy kierują się przede wszystkim własnymi analizami (61,8%) oraz wyczuciem (57,4%). Największa grupa inwestorów (38%) przy podejmowaniu decyzji łączy ze sobą analizę techniczną i fundamentalną. Analiza techniczna jest preferowana przez 21,8%, a analiza fundamentalna przez 17,6%, podczas gdy 21,5% przyznaje, że nie potrafi analizować instrumentów finansowych. Ciekawym wydaje się fakt, że wśród wykorzystywanych analiz nie wymieniono analizy portfelowej. W odpowiedzi „inne” inwestorzy wymieniali najczęściej dane makroekonomiczne, fazy cyklu koniunkturalnego oraz analizy statystyczne.

---

<sup>2</sup>Łukasz Porębski, Wstęp do Ogólnopolskiego Badania inwestorów, 2012

Wyniki ankiet ukazały problem niskiej dywersyfikacji portfeli. W przeciągu ostatnich 12 miesięcy 85% badanych inwestorów posiadało w portfelu akcje notowane na GPW. Co trzeci nie różnicuje portfela pod względem kategorii aktywów - 23,8% posiada jedynie akcje. Większość inwestorów nie dywersyfikuje swojego portfela nawet w ramach kategorii, posiadając jedynie walory 1-3 spółek (odsetek ten wzrósł z poziomu 31,8% do 51,6% w roku 2012), w tym aż 6,8% jedną spółkę. Z tego powodu planowane badanie poświęcone jest głównie tematowi analizowania portfela i sprawdza znajomość i wykorzystywanie podstawowych miar ryzyka i zysku.

#### **4.2.2 Ankieta *Wybór portfela akcji — kryteria i preferencje inwestorów***

Ankieta została przeprowadzona przez Stowarzyszenie Inwestorów Indywidualnych w terminie od lipca 2013 do września 2013 roku za pośrednictwem portalu: <http://www.sii.org.pl/>. Ankieta składa się z 14 zamkniętych pytań. Obok pytań dotyczących danych socjodemograficznych osób badanych, znalazły się w niej pytania o stosowane analizy, sposoby oceny ryzyka i wartości oczekiwanej. Kolejną grupą pytań były pytania oceniające przydatność różnego rodzaju informacji, jak i stopnie zadowolenia z wyników inwestycji w pięciostopniowej skali Likerta. Kwestionariusz ankiety znajduje się w dodatku A.

### **4.3 Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik optymalizacji**

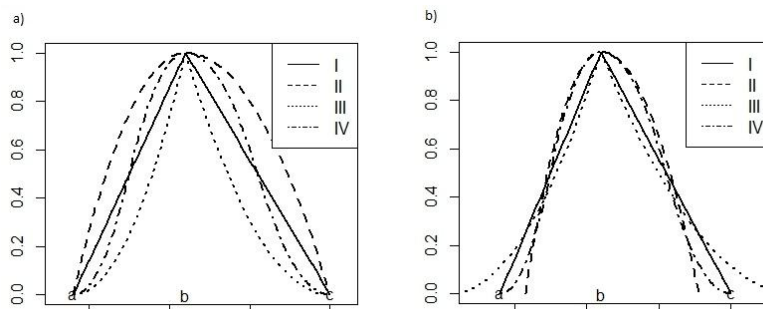
Przedstawione w rozdziale 3 zadania optymalizacji są publikowane i prezentowane tylko dla trójkątnych lub normalnych zmiennych rozmytych, a ich funkcje przynależności są ustalane arbitralnie. Celem badania jest sprawdzenie czy kształt trójkątny funkcji przynależności zmiennej rozmytej jest wystarczającym przybliżeniem rozmytych stóp zwrotu. Badanie obejmuje 4 różne kształty funkcji przynależności:

1. trójkątny, o funkcji przynależności opisanej wzorem (2.15),
2. paraboliczny, o funkcji przynależności opisanej wzorem (2.20),
3. normalny, o funkcji przynależności opisanej wzorem (2.17),
4. SZ, o funkcji przynależności opisanej wzorem (2.19).

Kształty te zostaną zbadane w dwóch przypadkach (por. rys. 4.2):

- a) przy założeniu stałych parametrów  $a, b, c$ ,
- b) przy założeniu stałego pola pod wykresem.

Rysunek 4.2: Badane kształty na przykładzie symetrycznych zmiennych rozmytych



Źródło: opracowanie własne

Podstawowe miary dla rozpatrywanych kształtów przedstawia tabela 4.1.

Tabela 4.1: Podstawowe miary dla różnych kształtów

Measure	1	2	3	4
$E[\xi]$	$\frac{a+2b+c}{4}$	$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a+4b+c}{6}$	$\frac{a+2b+c}{4}$
$V[\xi]^*$	$\frac{(b-a)^2}{6}$	$\frac{(b-a)^2}{4}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{(b-a)^2}{6}$
$H[\xi]$	$\frac{c-a}{2}$	$(c-a)\frac{\pi-\ln 2}{3}$	$(c-a)$	$(c-a)$
$VaR[\xi]^*$	$2\alpha(b-a)+a$	$\sqrt{1-2\alpha}(b-a)+b$	$\sqrt{2\alpha}(b-a)+a$	$\sqrt{\alpha}(b-a)+a$
$cVaR[\xi]^*$	$(b-a)\alpha+a$	$\frac{a-b}{3\alpha}(\sqrt{1-2\alpha}^3-1)+b$	$\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha}(b-a)+a$	$\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}(b-a)+a$
Podstawowe miary dla różnych kształtów przy założeniu stałego pola pod wykresem				
$E[\xi]$	$\frac{a+2b+c}{4}$	$\frac{a+2b+c}{4}$	$\frac{a+2b+c}{4}$	$\frac{a+2b+c}{4}$
$V[\xi]^*$	$\frac{(b-a)^2}{6}$	$\frac{9(b-a)^2}{64}$	$\frac{9(b-a)^2}{48}$	$\frac{(b-a)^2}{6}$
$H[\xi]$	$\frac{c-a}{2}$	$(c-a)\frac{\pi-2\ln 2}{8}$	$(c-a)$	$(c-a)$
$VaR[\xi]^*$	$2\alpha(b-a)+a$	$\sqrt{1-2\alpha}(b-\frac{3}{4}a)+b$	$(2+\frac{2}{3}\ln 2+2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1))$	$4+6\ln 2-\frac{17}{12}\ln 3+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$
$cVaR[\xi]^*$	$(b-a)\alpha+a$	$\frac{3a-4b}{12\alpha}(\sqrt{1-2\alpha}^3-1)+b$	$\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha}(b-\frac{3}{2}a)+\frac{2}{3}a$	$\sqrt{\alpha}(b-a)+a$
* dla symetrycznych zmiennych, a więc $SV[\xi] = V[\xi]$				
** przy założeniu poziomu ufności $\alpha \leq 0.25$				

Źródło: opracowanie własne



W pierwszym etapie badania zostanie przetestowana hipoteza: *Wynik zadania optymalizacji portfela jest niezależny od kształtu funkcji przynależności.* W przypadku odrzucenia powyższej hipotezy, zbadana zostanie hipoteza: *Nie istnieją różnice istotne statystycznie pomiędzy wynikami zadań optymalizacji dla różnych kształtów funkcji przynależności.*

Pierwsza hipoteza zostanie sprawdzona za pomocą porównania analitycznych rozwiązań zadań optymalizacji. W pierwszym kroku zbadane zostaną symetryczne rozmyte stopy zwrotu, w sytuacji równości wyników, przypadki zostaną uogólnione na niesymetryczne zmienne rozmyte.

W przypadku badania drugiej hipotezy zostanie przeprowadzona symulacja. Badanie będzie obejmowało następujące kroki:

1. 10 losowań parametrów charakteryzujących funkcję przynależności,
2. rozwiązanie zadań optymalizacji dla każdego z badanych kształtów,
3. obliczenie różnic pomiędzy wektorami zadań optymalnych: pomiędzy wynikami zadań dla kształtów 1 i 2, 1 i 3, 1 i 4,
4. 5000 powtórzeń kroków 1-3,
5. wyznaczenie statystyk opisowych,
6. przeprowadzenie testu Wilcoxon dla par obserwacji.

Test Wilcoxon jest odpowiednikiem testu t-Studenta dla zmiennych powiązanych<sup>3</sup>. Jest on najczęściej wykorzystywany do porównywania danych zebranych przed i po eksperymencie, w celu zbadania, czy nastąpiła istotna statystycznie zmiana. W rozważanym przypadku eksperyment polega na zmianie kształtu funkcji przynależności zmiennej rozmytej 2, 3, 4 na kształt trójkątny. Szczegółowy opis testu znajduje się w załączniku B. w badaniu zostaną uwzględnione następujące zadania wykorzystujące miary niepewności:

- zadanie średnia-wariancja: zadanie minimalizacji wariancji przy założonym poziomie wartości oczekiwanej (VE) i zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy założonym poziomie wariancji (EV),
- zadanie średnia-semiwariancja: zadanie minimalizacji semiwariancji przy założonym poziomie wartości oczekiwanej (SVE) i zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy założonym poziomie semiwariancji (ESV),
- zadanie średnia-entropia: zadanie minimalizacji entropii przy założonym poziomie wartości oczekiwanej (HE) i zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy założonym poziomie entropii (EH),
- zadanie średnia-VaR: zadanie minimalizacji wartości zagrożonej przy założonym poziomie wartości oczekiwanej (VaRE) i zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy założonym poziomie wartości zagrożonej (EVaR),

---

<sup>3</sup>zmiennie łącznie obserwowane — obserwacje z dwóch zmiennych są połączone w pary

- zadanie średnia-cVaR: zadanie minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej przy założonym poziomie wartości oczekiwanej (cVaRE) i maksymalizacja wartości oczekiwanej przy założonym poziomie cVaR (EcVaR).
- zadanie maksymalizacji satysfakcji (S) dla awersji do ryzyka 0,5 oraz parametrze żalu 0,5.

## 4.4 Badanie wpływu przyjętej metody wyznaczenia funkcji przynależności na wyznaczone rozmyte stopy zwrotu

w związku z trudnością wykorzystania podejść eksperckich, analiza wpływu przyjętej metody wyznaczenia funkcji przynależności rozmytej stopy zwrotu zostanie ograniczona do trzech metod z podejścia statystyczno-częstościowego, przedstawionych w paragrafie 2.4. Analiza będzie miała na celu sprawdzenie, czy parametry wygenerowanej funkcji przynależności zmiennej rozmytej różnią się istotnie zależnie od przyjętej metody ich wyznaczenia. Po tym etapie podjęta zostanie próba odpowiedzi na pytania: *którą metodę wybrać do wyznaczenia stóp zwrotu do badania empirycznego, oraz czy badanie główne należy przeprowadzić dla zmiennych rozmytych wygenerowanych różnymi metodami, w celu zbadania zależności skuteczności od tych metod?*

Analiza zostanie oparta, analogicznie do badania poprzedniego, na sprawdzeniu różnic pomiędzy wektorami funkcji dyskretnej oraz teście Wilcoxona. Ponadto sprawdzone zostanie również, czy dalsza aproksymacja funkcji ciągłej nie niweluje tych różnic. Obliczenia zostaną wykonane na danych rzeczywistych — logarytmicznych dziennych stopach zwrotu, wykorzystywanych później w badaniu empirycznym. Opisują je następujące kroki:

1. wyznaczenie dyskretnych funkcji przynależności dla wszystkich okresów badania empirycznego,
2. obliczenie różnic pomiędzy wektorami wartości wyznaczonych funkcji,
3. wyznaczenie statystyk opisowych,
4. przeprowadzenie testu Wilcoxona dla par obserwacji.

w badaniu wykorzystano pakiet obliczeniowy *R*, w stworzonym oprogramowaniu wykorzystano wbudowane w nim funkcje: wyznaczanie histogramów *hist*<sup>4</sup>, obliczania równań *uniroot*<sup>5</sup> (wyznaczenie współczynników  $\alpha$  w metodzie *K* oraz  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  w metodzie *BP*), *constrOptim*<sup>6</sup> do zaimplementowania zmodyfikowanej metody najmniejszych kwadratów oraz *wilcox.test*<sup>7</sup> do wyznaczenia testu Wilcoxona. Przy

<sup>4</sup>Szczegółowy opis funkcji <http://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/graphics/html/hist.html>

<sup>5</sup>Szczegółowy opis funkcji: <http://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/uniroot.html>

<sup>6</sup><http://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/constrOptim.html>

<sup>7</sup><http://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/wilcox.test.html>

konstruowaniu histogramu wykorzystano przedziały o równej szerokości prawostronnie domknięte wyznaczone według reguły Sturgesa<sup>8</sup>, która określa liczbę przedziałów jako  $1 + \log_2 N$ , gdzie  $N$  - liczba obserwacji.

## 4.5 Badanie empiryczne zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego.

Badanie główne będzie obejmowało wyznaczenie i testowanie portfeli wyznaczonych za pomocą różnych zadań optymalizacji opartych o pojęcie zmiennej rozmytej z akcji wchodzących w skład indeksu WIG20 GPW w okresie od lipca 2008 roku do lipca 2013 roku. Optymalne portfele zostaną wyznaczone dla zadań rozpatrywanych w badaniu wstępnym, a więc: EV, ESV, EH, EVaR, EcVaR, VE, SVE, HE, VaRE, cVaR, S1 (zadanie maksymalizacji satysfakcji o parametrach  $\alpha = 1, \beta = 0$ ), S2 ( $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ ), S3 ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ).

**Charakterystyka danych** Badanie empiryczne zostanie przeprowadzone na dziennych danych spółek notowanych na GPW. Do badania wybrano spółki należące do indeksu WIG20, ponieważ, jak pokazują statystyki, są to spółki najchętniej wybierane przez inwestorów indywidualnych (ich udział w obrotach tej grupy inwestorów w roku 2011 wyniósł 76,6% a w 2012 aż 79,7%).

Indeks WIG20 jest obliczany od 16 kwietnia 1994 roku, na podstawie wartości portfela akcji 20 największych i najbardziej płynnych spółek z Głównego Rynku GPW wyznaczanych w rankingu w oparciu o dane po ostatniej sesji stycznia, kwietnia, lipca i października. Ranking obliczany jest na podstawie obrotów za ostatnie 12 miesięcy oraz wartości akcji w wolnym obrocie na dzień rankingu. Korekty okresowe dokonywane są po sesji w trzeci piątek czerwca, września i grudnia, a rewizja roczna, po sesji w trzeci piątek marca. Udział jednej spółki w indeksie nie może przekroczyć 15%. Pakiety spółek, których udziały są powyżej tych limitów są zmniejszane. WIG20 jest indeksem typu cenowego, co oznacza że przy jego obliczaniu bierze się pod uwagę jedynie ceny zawartych w nim transakcji, a nie uwzględnia się dochodów z tytułu dywidend i praw poboru. Pakiety akcji uczestników indeksu wyznaczane są w oparciu o liczbę akcji w wolnym obrocie i zaokrąglane do pełnych tysięcy akcji.

do badania zostanie wykorzystany okres od lipca 2008 roku do lipca 2013. Notowania WIG20 w badanym okresie przedstawia rysunek 4.3. Sytuację na rynku można krótko scharakteryzować następująco<sup>9</sup>. W roku 2008 dominującym czynnikiem, który determinował trendy na rynku giełdowym były negatywne informacje przede wszystkim ze Stanów Zjednoczonych. Ostatecznie według stanu na koniec roku tylko w przypadku 15 spółek, notowanych na GPW przez cały rok, stopa zwrotu była wyższa od zera. W 2008 roku wartość indeksu WIG20 spadła aż o 48%, choć był to spadek mniejszy niż zanotowały indeksy małych i średnich spółek. Także w ujęciu branżowym spadły wartości wszystkich obliczanych przez giełdę indeksów.

<sup>8</sup>Sturges, H. A. (1926) The choice of a class interval. Journal of the American Statistical Association 21, 65–66.

<sup>9</sup>opis na podstawie Roczników Giełdowych publikowanych na [http://www.gpw.pl/roczniki\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/roczniki_gieldowe)

Rysunek 4.3: Notowania WIG20 w okresie 01.07.2008-01.07.2013



Źródło: [www.gpw.pl](http://www.gpw.pl)

w przeciwieństwie do roku 2008, rok 2009 był jednym z najbardziej udanych dla inwestorów w dotychczasowej historii giełdy warszawskiej. Wartość szerokiego indeksu rynkowego WIG w całym roku wzrosła o ponad 46%, co pod względem rocznych stóp zwrotu daje trzeci wynik w historii polskiego rynku - wyższe stopy zwrotu osiągnęli inwestorzy tylko w latach 1993 i 1996. Wśród indeksów cenowych najwyższy zysk osiągnęły spółki małe, a indeks największych spółek giełdowych w całym roku wzrósł o 33%, przy czym w okresie od 17 lutego (roczne minimum) do 4 grudnia (roczne maksimum) wartość indeksu WIG20 wzrosła aż o 85%. Ten wzrost na rynku to głównie zasługa spółek branży deweloperskiej i spożywczej (ich indeksy sektorowe wzrosły o ponad 120%). Najgorsze wyniki zanotowały spółki reprezentujące sektor usług telekomunikacyjnych.

Rok 2010 był kolejnym rokiem dobrej koniunktury giełdowej. Wartość indeksu WIG w całym roku wzrosła o ponad 18%. Wśród indeksów cenowych najwyższą stopę zwrotu osiągnął indeks spółek średnich mWIG — wzrost o blisko 20 %, następnie WIG20 — wzrost o ponad 14 %. Z perspektywy branż najwyższą stopę zwrotu osiągnęły spółki sektora chemicznego oraz spożywczego, najniższą deweloperzy oraz spółki informatyczne. W całym roku dodatnią stopę zwrotu uzyskało 237 spółek.

Rok 2011 był okresem istotnej zmienności rynkowej wywołanej niepokojem w strefie euro. W rezultacie dużej niepewności na rynkach finansowych Europy, zapoczątkowane w sierpniu spadki poskutkowały ujemnymi stopami zwrotu głównych indeksów giełdowych. Wartość indeksu WIG, obejmującego spółki z Głównego Rynku, w całym roku spadła o 20,8%. Wśród indeksów cenowych najmniej straciły akcje największych spółek tworzących indeks WIG20 (spadek o 21,2%). Najlepsze rezultaty zanotowała branża chemiczna i telekomunikacyjna. W całym roku jedynie 52 spółki uzyskały dodatnią stopę zwrotu. W tym roku po raz pierwszy spadkowi indeksów towarzyszył rekordowy w historii giełdy poziom obrotów akcjami.

Po niezbyt udanym dla inwestorów giełdowych roku 2011, rok 2012 przyniósł wzrost wartości głównych indeksów giełdowych oraz większości indeksów branżowych. Wartość indeksu WIG w całym roku wzrosła o 26,2%. Wśród indeksów cenowych najbardziej wzrósł indeks spółek małych sWIG80 — wzrost o 22,9%, a następnie WIG20 — wzrost o 20,4%.

W pierwszym półroczu 2013 roku rynek znalazł się pod wpływem zarówno decyzji politycznych, jak i zapowiedzi dotyczące zmian w systemie Otwartych Funduszy Emerytalnych oraz procesów globalnych, takich jak spadek cen surowców. Najważniejsze indeksy, WIG i WIG20, zanotowały dotkliwe spadki. Z drugiej strony, inwestycje w małe i średnie spółki przyniosły zyski. W drugim kwartale spółki z WIG20 z udziałem w akcjonariacie Skarbu Państwa spisywały się wyraźnie gorzej od pozostałych uczestników indeksu.

Historyczne wskaźniki indeksu WIG20 w tym okresie przedstawia tabela 4.2. Na przestrzeni badanego okresu w skład indeksu wchodziły spółki przedstawione

Tabela 4.2: Historyczne wskaźniki w latach 2008-2012

Parametr	2012	2011	2010	2009	2008
Stopa zwrotu PLN (%)	20,45	-21,85	14,88	33,47	-48,21
Stopa zwrotu EUR (%)	31,96	-29,90	18,71	33,65	-55,35
C/Z	9,64	8,38	13,02	21,71	8,48
C/WK	1,33	1,17	1,61	1,75	1,57
Stopa dywidendy (%)	1,33	1,17	1,61	1,75	1,57
Zmienność	16,48	21,98	19,17	35,01	34,37
Średni spread (pb)	16,56	16,62	20,46	29,77	29,47
Udział w obrotach (%)	80,00	77,78	77,27	74,80	78,52
Udział dużych transakcji * w obrotach (%)	68,35	74,27	76,75	67,50	78,01
Średnia wartość transakcji (tys. PLN)	26,16	29,73	30,78	21,93	28,42
Średnia wartość zlecenia ( tys. PLN)	45,47	51,67	55,83	40,02	51,38

\*transakcje powyżej 10 tys. EURO

Źródło: [http://www.gpw.pl/plik?ph\\_content\\_start=getFile&fwmf\\_id=1497](http://www.gpw.pl/plik?ph_content_start=getFile&fwmf_id=1497), dostęp dnia 21.08.2013 r.

w tabeli 4.3, a skład indeksu w poszczególnych okresach prezentuje tabela 4.4.

W rozpatrywanym okresie zaszły następujące zmiany składu indeksu:

- 20 marca 2009 spółkę Polnord zastąpiła spółka Cyfrowy Polsat;
- 19 marca 2010 spółkę Agora zastąpiła spółka PGE;
- 17 maja 2010 spółkę Cersanit zastąpiła spółka PZU SA;
- 17 grudnia 2010 spółkę Bioton zastąpiła spółka Tauron;
- 21 marca 2011 spółkę Polimex-Mostostal zastąpiła spółka Kernel Holding oraz spółkę Cyfrowy Polsat zastąpiła spółka Lubelski Węgiel Bogdanka S.A;
- 6 kwietnia 2011 spółkę Bank Zachodni WBK w wyniku nadzwyczajnej rewizji indeksu zastąpiła spółka Bank Handlowy;
- 16 września 2011 Czeską spółkę CEZ[5] zastąpiła Jastrzębska Spółka Węglowa;

- 16 marca 2012 spółkę PBG zastąpiła spółka Boryszew a spółkę Getin Holding zastąpiła spółka Synthos;
- 18 marca 2013 spółkę TVN zastąpiła spółka Eurocash.

Za benchmark przyjęto notowania WIG20. W związku z powyższymi korektami portfele będą konstruowane z aktywów przedstawionych w tabeli 4.4, zależnie od daty początku okresu testowego.

Według OBI z 2012 roku, okres lokowania środków na rynku akcji GPW w 38,6% badanych przypadków wynosi do roku, powyżej roku w 37,9%, a w 15,1% poniżej miesiąca. Dlatego badanie empiryczne będą przeprowadzane na następujących długościach okresów testowych:

- A miesięczny, poprzedzony kwartalnym okresem obserwacji rynku,
- B kwartalny, poprzedzony półrocznym okresem obserwacji,
- C półroczny, poprzedzony rocznym okresem obserwacji,
- D rocznym, poprzedzonym półtorarocznym okresem obserwacji danych,

Zatem w przypadku A będzie to 7 okresów badania, przedstawionych na rysunku 4.6, dla przypadków B-D 5 okresów przedstawionych na rysunkach 4.5-4.7, wymienionych w tabeli 4.5.

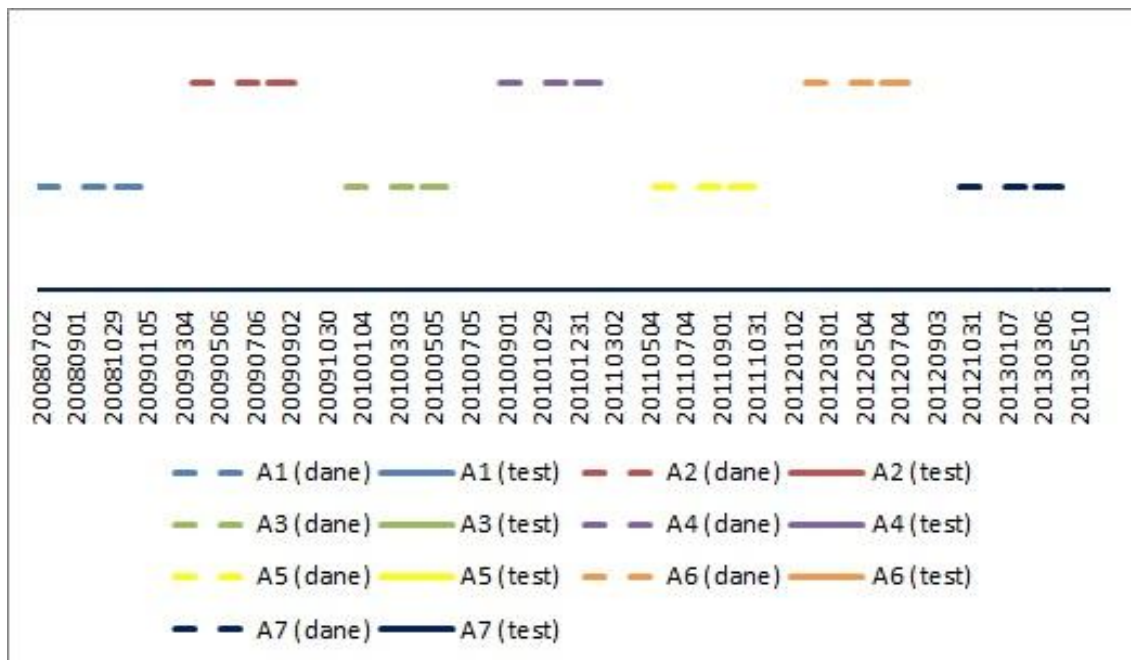
Tabela 4.5: Okresy badania

Nr	Okres analizy danych	Okres testowy
A		
1	od 2008-07-01	(2008-11-03, 2008-12-16)
2	od 2009-03-17	(2009-07-27, 2009-09-07)
3	od 2009-12-01	(2010-04-13, 2010-05-26)
4	od 2010-08-19	(2010-12-28, 2011-02-09)
5	od 2011-05-09	(2011-09-14, 2011-10-26)
6	od 2012-01-24	(2012-06-04, 2012-07-17)
7	od 2012-10-10	(2013-02-21, 2013-04-08)
B		
1	od 2008-07-01	(2009-03-17, 2009-07-27)
2	od 2009-06-15	(2010-02-26, 2010-07-08)
3	od 2010-05-26	(2011-02-09, 2011-06-20)
4	od 2011-05-09	(2012-01-24, 2012-06-04)
5	od 2012-04-19	(2013-01-10, 2013-05-23)
C		

1	od 2008-07-01	(2009-12-01, 2010-08-19)
2	od 2009-03-17	(2010-08-19, 2011-05-09)
3	od 2009-12-01	(2011-05-09, 2012-01-24)
4	od 2010-08-19	(2012-01-24, 2012-10-10)
5	od 2011-05-09	(2012-10-10, 2013-06-28)
D		
1	od 2008-07-01	(2010-08-19, 2012-01-24)
2	od 2008-11-03	(2010-12-28, 2012-06-04)
3	od 2009-03-17	(2011-05-09, 2012-10-10)
4	od 2009-07-27	(2011-09-14, 2013-02-21)
5	od 2009-12-01	(2011-10-26, 2013-06-28)

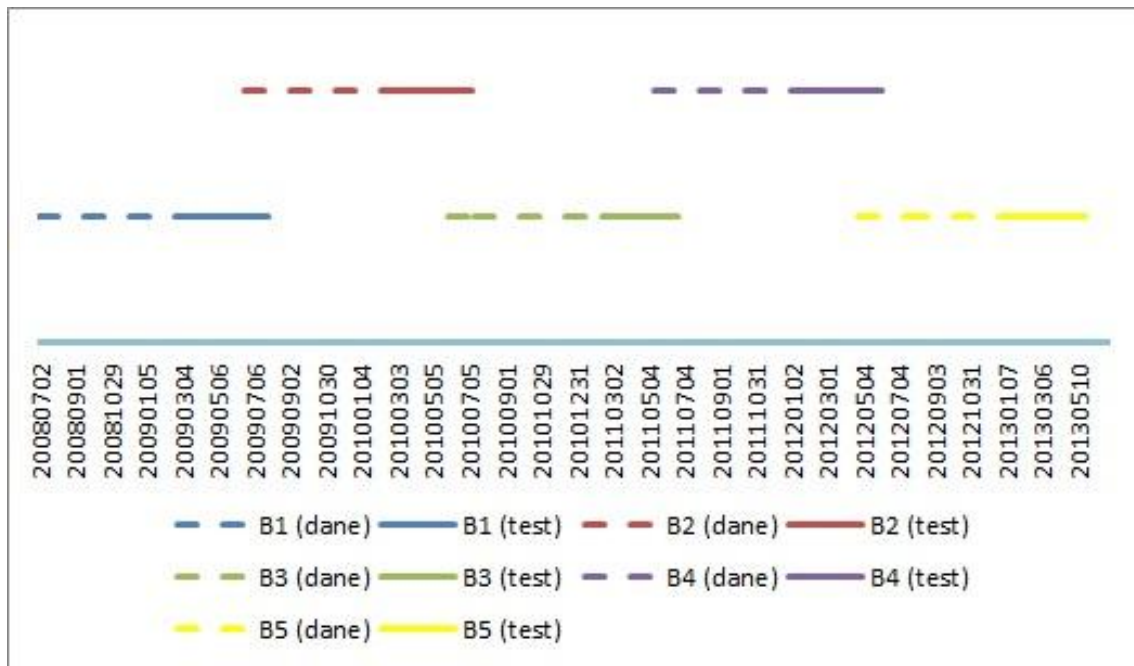
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4.4: Miesięczne okresy badania



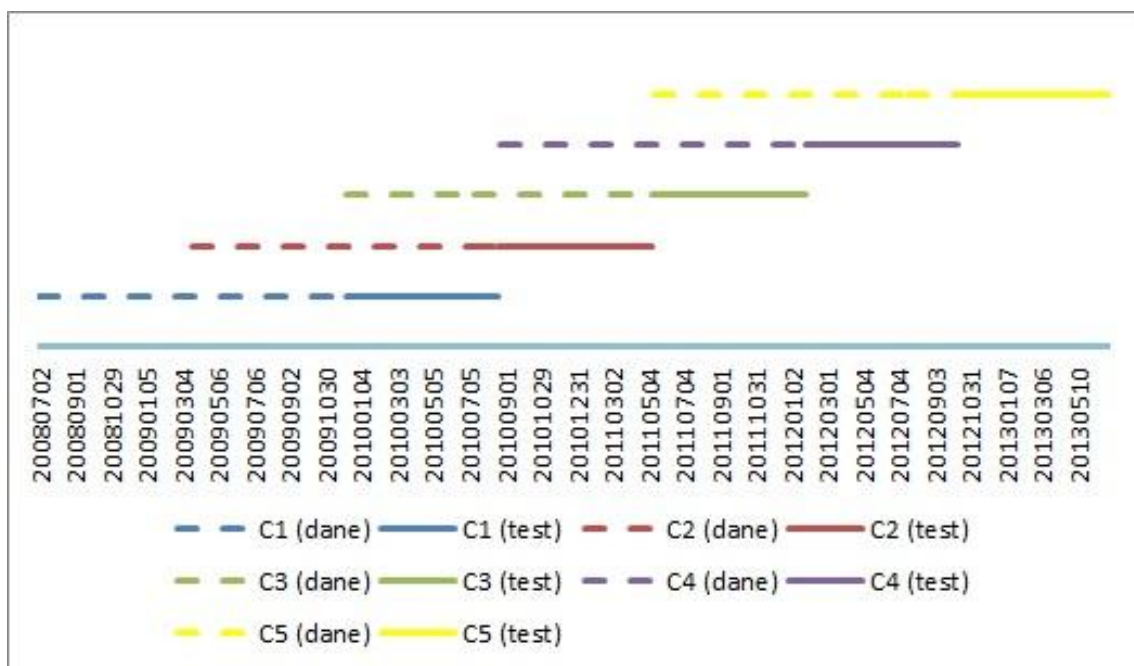
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4.5: Kwartalne okresy badania



Źródło: opracowanie własne

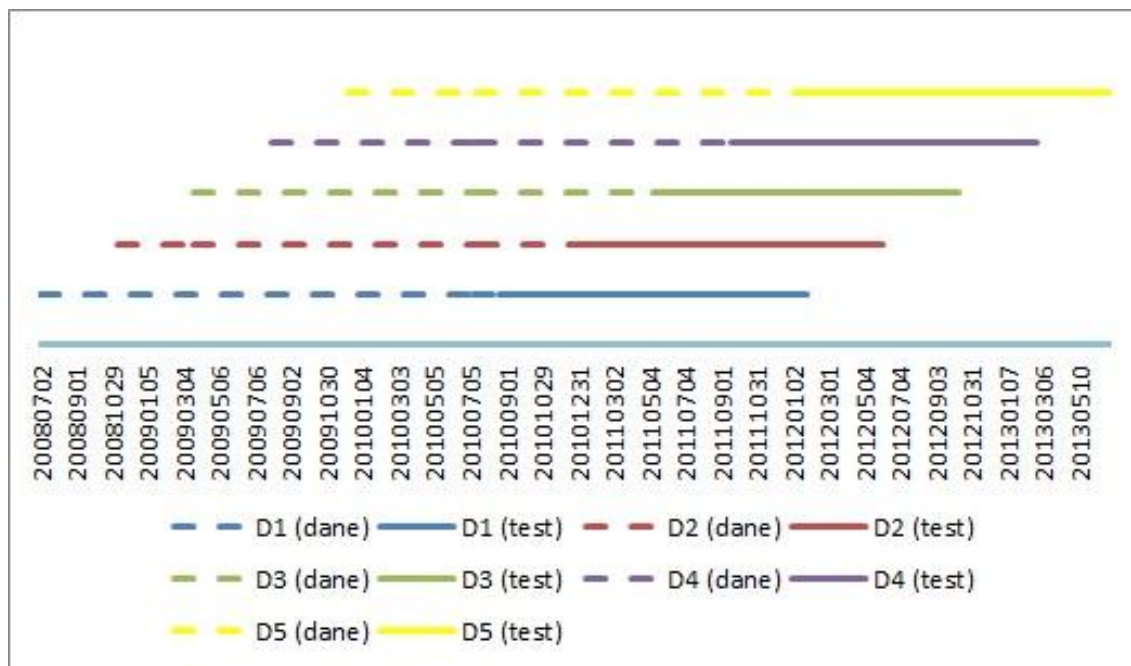
Rysunek 4.6: Półroczne okresy badania



Źródło: opracowanie własne



Rysunek 4.7: Roczne okresy badania



Źródło: opracowanie własne

## 4.6 Syntetyczna miara oceny zadań optymalizacji

W świetle niskiej popularności analizy portfelowej istotnym wydaje się zmiana podejścia do oceny zadań optymalizacji i ocena jej jako zjawiska złożonego. Wiąże się to z wprowadzeniem dodatkowych kryteriów oceny obok uzyskanej stopy zwrotu z symulacji lub badania empirycznego. Zwiększenie liczby zmiennych diagnostycznych wiąże się również z zastosowaniem wielowymiarowej analizy porównawczej w celach klasyfikacji zadań.

W celu całościowej oceny różnych zadań optymalizacji uwzględnione zostaną następujące kryteria oceny:

- Znajomość, intuicyjność i przydatność kryteriów optymalizacji.

Niska intuicyjność i trudność w zrozumieniu kryteriów optymalizacji zniechęca inwestorów do wykorzystania metod analizy portfelowej.

- Wrażliwość zadań na kształt funkcji przynależności.

w przypadku rozmytych zadań optymalizacji wążliwość zadań na kształt przynależności powoduje, że źle wyznaczona rozmyta stopa zwrotu, może powodować błędne wyniki niezależnie od jakości zadania.

- Złożoność obliczeniowa.

Zagadnienie efektywności obliczeniowej może zostać pominięte dla małych zbiorów danych, jednak jest ważne dla bardzo dużych zbiorów, w szczególności przy dużej liczbie rozpatrywanych spółek. Przy wyborze zadania należy wziąć pod uwagę klasę złożoności obliczeniowej, gdyż bezpośrednio wpływa ona na czas obliczeń.

- Uzyskane wyniki na danych rzeczywistych.

**Intuicyjność kryteriów optymalizacji.** Wyniki badań ankietowych wykazały niską znajomość zadań optymalizacyjnych wśród inwestorów. Jedną z możliwych przyczyn jest niska intuicyjność i trudność w zrozumieniu kryteriów optymalizacji. Z tego powodu do miary syntetycznej postanowiono wprowadzić dwa wskaźniki:

- $k_1$  — przydatność informacyjna miar niepewności — zmienna oceniająca przydatność informacji płynącej z interpretacji wykorzystanych w zadaniu miar niepewności. Jest to stymulatna wyznaczona na podstawie odpowiedzi na pytanie 5 przeprowadzonej ankiety (*Proszę ocenić w skali 1-5 przydatność informacji: Średnia stopa zwrotu wynosi 10%, a ...*) w następujący sposób:

$$k_1 = (\% \text{odpowiedzi bardzo duża} - \% \text{odpowiedzi bardzo mała})w_1 + (\% \text{odpowiedzi duża} - \% \text{odpowiedzi mała})w_2, \quad (4.1)$$

gdzie  $w_1$  i  $w_2$  wagi poszczególnych odpowiedzi.

- $k_2$  - zgodność kryteriów z intuicyjną oceną - zmienna oceniająca zgodność kryteriów optymalizacji z intuicyjną oceną inwestorów. Jest to stymulanta wyznaczona na podstawie odpowiedzi na pytanie 8 ankiety (*Wyniki z inwestycji porównuje Pan/Pani z:*) w następujący sposób:

$$k_2 = \% \text{odpowiedzi na dane kryterium}, \quad (4.2)$$

Przy czym kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej na podstawie dowodu 3.2.2 jest utożsamiane z odpowiedziami *a. z najlepszym z wyników z danego okresu* i *c. z najgorszym z wyników z danego okresu*.

**Wrażliwość zadań na zmianę kształtu funkcji przynależności.** We wstępnym badaniu przeprowadzona została analiza wrażliwości wyników zadań na zmianę kształtu funkcji przynależności rozmytych stóp zwrotu, w celu oceny, czy kształt trójkątny funkcji przynależności zmiennej rozmytej jest wystarczającym przybliżeniem rozmytych stóp zwrotu. Wśród rozmytych zadań optymalizacji pożądaną cechą jest brak tej wrażliwości, dzięki czemu można uprościć wyznaczanie rozmytej stopy zwrotu. Ponadto, zadania optymalizacji dla prostszych kształtów przybierają postać mniej złożoną, co przekłada się bezpośrednio na niższą złożoność obliczeniową. Niedokładne określenie kształtu przy dużej wrażliwości może natomiast prowadzić do błędów w wyniku optymalizacji.

Przy wykorzystaniu wyniku symulacji badania wstępnego określono zmienną diagnostyczną, destymulantę, jako:

$$k_3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 \bar{d}_{ij}, \quad (4.3)$$

gdzie  $\bar{d}_{ij}$  średnia różnic wektorów wyników zadania optymalizacji dla kształtów  $i$  oraz  $j$ .

**Złożoność obliczeniowa.** Poprzez złożoność obliczeniową będziemy rozumieć liczbę zasobów niezbędnych do wykonania algorytmu. W zależności od rozważanego zasobu mówimy o złożoności czasowej czy też pamięciowej. Oczywiście w większości wypadków liczba potrzebnych zasobów będzie się różnić w zależności od danych wejściowych z zakresu danego zagadnienia. Przyjętą miarą złożoności czasowej jest liczba operacji podstawowych w zależności od rozmiaru wejścia. Pomiar rzeczywistego czasu zegarowego jest mało użyteczny ze względu na silną zależność od sposobu realizacji algorytmu, użytego kompilatora oraz maszyny, na której algorytm wykonujemy. Dlatego w charakterze czasu wykonania rozpatruje się zwykle liczbę operacji podstawowych (dominujących). Operacjami podstawowymi mogą być na przykład: podstawienie, porównanie lub prosta operacja arytmetyczna. Porównując złożoność algorytmów bierzemy pod uwagę asymptotyczne tempo wzrostu, czyli to jak zachowuje się funkcja określająca złożoność dla odpowiednio dużych, granicznych argumentów (rozmiarów danych wejściowych) ignorując zachowanie dla małych danych. Mówimy, że funkcja  $f$  jest:

- co najwyżej rzędu  $g$ , gdy istnieją takie stałe  $n_0 > 0$  oraz  $c > 0$ , że:

$$\forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$

- co najmniej rzędu  $g$ , gdy istnieją takie stałe  $n_0 > 0$  oraz  $c > 0$ , że:

$$\forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$$

- dokładnie rzędu  $g$ , gdy istnieją takie stałe  $n_0 > 0$  oraz  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ , że:

$$\forall_{n \geq n_0} c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n).$$

Warunkiem wystarczającym, by funkcja  $f$  była dokładnie rzędu  $g$ , jest spełnienie następującej zależności:

$$0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty. \quad (4.4)$$

Wyróżniamy następujące rzędy złożoności obliczeniowej:

- 1 — stała;
- $\log_2(n)$  — logarytmiczna;
- $n$  — liniowa;
- $n \log_2(n)$  — liniowo-logarytmiczna;
- $n^2$  — kwadratowa;
- $n^c$  — wielomianowa stopnia  $c$ ;
- $c^n$  — wykładnicza.

Szersze omówienie zagadnienia można odnaleźć w [Gri06]. W przypadku ciągłych problemów optymalizacyjnych złożoność obliczeniowa rozpatrywana jest w klasach złożoności, a więc zbiorach problemów obliczeniowych o podobnej złożoności. Najczęściej wymieniane są klasy problemów  $P$  i  $NP$ . Klasa  $P$  to zbiór problemów decyzyjnych, które można rozwiązać na maszynie Turinga w czasie wielomianowym ( $n^{O(1)}$ ), natomiast klasa  $NP$  to zbiór problemów decyzyjnych, które można rozwiązać

na niedeterministycznej maszynie Turinga w czasie wielomianowym. Różnica pomiędzy problemami P i NP polega na tym, że w przypadku P znalezienie rozwiązania ma złożoność wielomianową, podczas gdy dla NP sprawdzenie podanego z zewnątrz rozwiązania ma taką złożoność. W przypadku rozpatrywanych problemów decyzyjnych mamy do czynienia z problemami programowania liniowego, należącymi do klasy P oraz problemami programowania nieliniowego klasy NP. Zmienną diagnostyczną zdefiniowano następująco:

$$k_4 = \begin{cases} 0 & \text{dla klasy } P \\ 1 & \text{dla klasy } NP \end{cases} \quad (4.5)$$

**Wyniki empiryczne.** Głównym celem optymalizacji jest uzyskanie największej wartości zysku ważonego ryzykiem. W celu porównania skuteczności zadań wykorzystane zostaną różnice z przyjętym benchmarkiem - indeksem WIG20. Określono dwie zmienne diagnostyczne:

- $k_5$  — destymulante, średnią wartości bezwzględnych ujemnych różnic z benchmarkiem,
- $k_6$  — stymulante, średnią dodatnich różnic z benchmarkiem.

**Miara syntetyczna.** Ze względu na różny charakter zmiennych przed etapem agregacji niezbędny jest proces unitaryzacji zmiennych. Zastosowana będzie metoda unitaryzacji zerowanej, umożliwiająca unormowanie zmiennych diagnostycznych poprzez badanie rozstępu cechy. Jest to metoda uniwersalna, może być używana do normowania różnych zmiennych niezależnie od ich rodzaju, znaku, wielkości, jednostek. W zależności od charakteru zmiennej diagnostycznej normowanie odbywa się za pomocą następujących wzorów:

- dla stymulant:

$$z_i = \frac{x_i - \min_i x_i}{\max_i x_i - \min_i x_i}, \quad (4.6)$$

- dla destymulant:

$$z_i = \frac{\max_i x_i - x_i}{\max_i x_i - \min_i x_i}. \quad (4.7)$$

W pracy ograniczymy się do najprostszej bezwzorcowej formuły miernika syntetycznego. Zakładając, że wszystkie zmienne opisujące zadania zostały doprowadzone do postaci stymulant, a ich wartości zostały znormalizowane, miernik syntetyczny zostanie skonstruowany następująco:

$$MS = \sum_{i=1}^6 w_i Z_i, \quad (4.8)$$

gdzie  $w_i$  - oznacza wagę zmiennej diagnostycznej  $k_i$ ,  $Z_i$  - wartość zmiennej diagnostycznej  $k_i$  po unitaryzacji. Największą wagę przyznano kryteriom zysku,  $w_5 = w_6 = 0,25$  dla zmiennych  $k_5$  i  $k_6$ . Następnie przyjęto, że wszystkie inne kryteria oceny zadań w jednakowy sposób wpływają na jego ocenę, a więc  $w_i = 0,125$  dla  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Tabela 4.3: Spółki należące do indeksu WIG20 na przestrzeni 07.2008-07.2013

Skrót	Nazwa
ACP	Asseco Poland SA
AGO	Agora SA
BHW	Bank Handlowy w Warszawie SA
BIO	Bioton SA
BRE	Bre Bank SA
BZW	Bank Zachodni WBK SA
CEZ	Cez a.s.
CPS	Cyfrowy Polsat SA
CST	Rovese SA (dawniej Cersanit)
EUR	Eurocash SA
GTC	Globe Trade Centre SA
JSW	Jastrzębska Spółka Węglowa SA
KER	Kernel Holding SA
KGH	KGHM Polska Miedź SA
LTS	Grupa Lotos SA
LWB	Lubelski Węgiel Bogdanka SA
PBG	PBG SA
PEO	Bank Polska Kasa Opieki SA
PGE	PGE Polska Grupa Energetyczna SA
PGN	Polskie Górnictwo Naftowe i Gazownictwo SA
PND	Polnord SA
PKN	Polski Koncern Naftowy Orlen SA
PKO	Powszechna Kasa Oszczędności Bank Polski SA
PXM	Polimex - Mostostal SA
PZU	Powszechny Zakład Ubezpieczeń SA
SNS	Synthos SA
TPE	Tauron Polska Energia SA
TPS	Telekomunikacja Polska SA
TVN	TVN SA

Źródło: opracowanie własne

Tabela 4.4: Skład WIG20 dla różnych podokresów okresu badania

01.07.2008	20.03.2009	19.03.2010	17.05.2010	17.12.2010	21.03.2011	6.04.2011	16.09.2011	16.03.2012	18.03.2013
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20.03.2009	19.03.2010	17.05.2010	17.12.2010	21.03.2011	6.04.2011	16.09.2011	16.03.2012	01.07.2013	
PKO	PKO	PKO	PKO	PKO	PKO	PKO	PKO	PKO	PKO
PEO	PEO	PEO	PEO	PEO	PEO	PEO	PEO	PEO	PEO
KGH	KGH	KGH	KGH	KGH	KGH	KGH	KGH	KGH	KGH
CST	CST	CST	PZU	PZU	PZU	PZU	PZU	PZU	PZU
PKN	PKN	PKN	PKN	PKN	PKN	PKN	PKN	PKN	PKN
TPS	TPS	TPS	TPS	TPS	TPS	TPS	TPS	TPS	TPS
AGO	AGO	PGE	PGE	PGE	PGE	PGE	PGE	PGE	PGE
BZW	BZW	BZW	BZW	BZW	BZW	BHW	BHW	BHW	BHW
GTN	GTN	GTN	GTN	GTN	GTN	GTN	GTN	SNS	SNS
ACP	ACP	ACP	ACP	ACP	ACP	ACP	ACP	ACP	ACP
CEZ	CEZ	CEZ	CEZ	CEZ	CEZ	CEZ	JSW	JSW	JSW
PGN	PGN	PGN	PGN	PGN	PGN	PGN	PGN	PGN	PGN
GTC	GTC	GTC	GTC	GTC	GTC	GTC	GTC	GTC	GTC
TVN	TVN	TVN	TVN	TVN	TVN	TVN	TVN	TVN	EUR
BRE	BRE	BRE	BRE	BRE	BRE	BRE	BRE	BRE	BRE
PBG	PBG	PBG	PBG	PBG	PBG	PBG	PBG	BRS	BRS
PXM	PXM	PXM	PXM	PXM	KER	KER	KER	KER	KER
LTS	LTS	LTS	LTS	LTS	LTS	LTS	LTS	LTS	LTS
PND	CPS	CPS	CPS	CPS	LWB	LWB	LWB	LWB	LWB
BIO	BIO	BIO	BIO	TPE	TPE	TPE	TPE	TPE	TPE

Źródło: opracowanie własne

# Rozdział 5

## Analiza wyników badania

### 5.1 Badanie ankietowe inwestorów indywidualnych

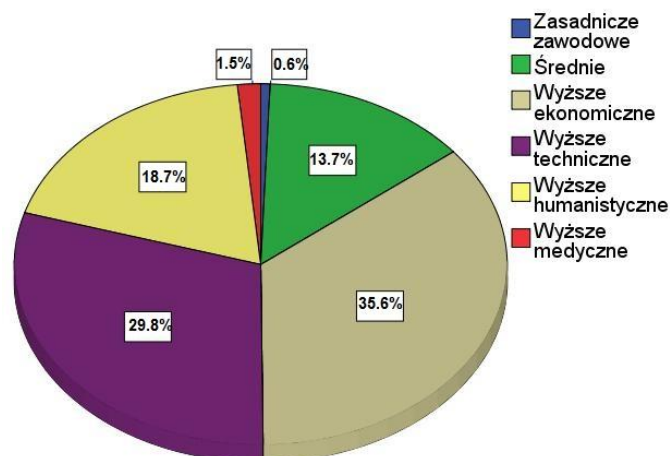
Badanie ankietowe zostało przeprowadzone przez Stowarzyszenie Inwestorów Indywidualnych w okresie od 22 czerwca do 2 września 2013 roku, za pośrednictwem portalu SII<sup>1</sup>. Informacje o badaniu były przekazywane przez serwisy SII, newsletter, a także w trakcie organizowanych spotkań i konferencji. Ankietowanymi byli aktywni inwestorzy, korzystający w różnym zakresie z działalności SII, próba ta nie ma charakteru losowego, stąd nie będzie służyła do wnioskowania o całej populacji inwestorów indywidualnych, a jedynie posłuży uzasadnieniu podejść i próbie oceny jakościowej zadań optymalizacji. Według Krajowego Depozytu Papierów Wartościowych liczba wszystkich rachunków maklerskich w I półroczu 2013 r. wynosiła 1 486 815. Należy pamiętać, że część z nich jest rachunkami nieaktywnymi tzw. martwymi. W badaniu wzięło udział 332 respondentów, co daje maksymalny błąd statystyczny oszacowania ok. 5,38% na poziomie ufności 0,95.

**Struktura ankietowanych.** w 85% były to osoby z wyższym wykształceniem, w tym blisko 36% miało wykształcenie ekonomiczne a prawie 30% wykształcenie techniczne, jedynie 14% respondentów miało wykształcenie średnie (rys. 5.1, tabela C.15 dodatek C). Wśród badanych dominowały osoby w wieku 26-35 lat (44%), a prawie co czwarta badana osoba była w wieku 36-45 lat, osoby do 25 lat stanowiły 19% badanych, natomiast osoby z przedziału 46-55 lat oraz osoby powyżej 55 lat po 6% (rys. 5.2, tabela C.14 dodatek C). Wśród najmłodszych inwestorów (do 25 lat) dominowały osoby z wykształceniem średnim i wyższym ekonomicznym (po 41,27%), wśród najstarszych inwestorów (wiek powyżej 55 lat) osoby z wykształceniem wyższym technicznym (65%). Wśród osób z wykształceniem wyższym ekonomicznym ponad 95% ankietowanych miało mniej niż 46 lat (tabela C.14, dodatek C). Blisko połowa badanych (45,8%) to inwestorzy z doświadczeniem 1-5 letnim, a co czwarta z doświadczeniem ponad 5 lat jednak mniej niż 10 lat. Osoby inwestujące ponad 10 lat stanowiły 16,4%, a poniżej roku 13% (rys. 5.3, tabela C.16 dodatek C). Wśród inwestorów o długoletnim doświadczeniu (powyżej 10 lat) ponad 50% to osoby w wieku 36-45 lat, wśród najkrócej inwestujących (poniżej roku) ponad 88% jest w wieku do 35 lat. Z najstarszej grupy wiekowej połowa badanych inwestuje na rynku dłużej niż 10 lat, tak samo sytuacja przedstawia się w grupie wiekowej 46-55 lat. Wśród najmłodszych uczestników rynku ponad 63% inwestuje już dłużej niż rok a krócej niż 5 lat (tabela C.26 dodatek C). W badaniu wzięły udział jedynie

---

<sup>1</sup><http://www.sii.org.pl/>

Rysunek 5.1: Struktura wykształcenia respondentów



Źródło: opracowanie własne

23 kobiety, co daje niecałe 7%. Ogólnopolskie badanie inwestorów również ukazuje dominację mężczyzn, ale odsetek kobiet w próbie badawczej jest prawie dwukrotnie większy. W związku z tak małą próbą w analizach szczegółowych nie będzie brana pod uwagę zależność od płci ankietowanych.

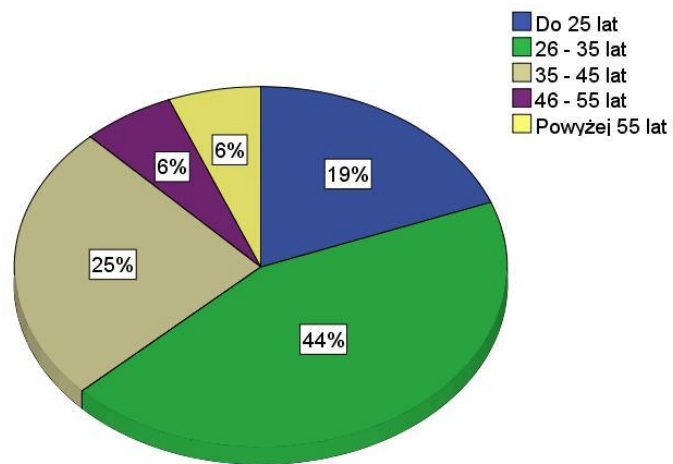
**Stosowane analizy przy wyborze portfela.** Podczas wyboru portfela akcji tylko niecałe 5% ankietowanych całkowicie unika decyzji na podstawie intuicji, co czwarty ankietowany przyznaje się do używania jej często, a 39% czasami. Również co czwarty badany często opiera swoje decyzje na bieżących przewidywaniach ekspertów, a blisko 30% zawiera im czasami. Wśród analiz, największą popularnością cieszą się analiza techniczna (opiera się na niej zawsze aż 31%, a często 35%) oraz fundamentalna (zawsze wykorzystywana przez 28%, a często przez 38%). Analizy fundamentalnej nie używa nigdy jedynie niecałe 2% ankietowanych, a technicznej niecałe 4%. Najrzadziej używana jest analiza portfelowa. Zawsze stara się oprzeć na niej jedynie 6%, często 22%, a nie jest używana nigdy przez ponad 15%. Popularność wykorzystywanych metod doboru przedstawiają rysunki 5.4-5.8, tabela C.1.

Udział osób z różnym wykształceniem w wykorzystywaniu analizy portfelowej ukazuje rysunek 5.9. Osoby o niewielkim doświadczeniu w inwestowaniu (poniżej roku) w ponad 38% wykorzystują analizę portfelową, jednak wśród osób z doświadczeniem 1-5 letnim to już niecałe 20%, a blisko 30% korzysta z niej rzadko (ok. 24% czasami). Wśród osób inwestujących na rynku powyżej 5 lat a mniej niż 10 najczęściej padały odpowiedzi czasami i rzadko (odpowiednio 29% i 28%), natomiast wśród inwestorów z największym doświadczeniem, prawie co czwarty czasami jak również co czwarty nigdy nie korzysta z tego typu analiz. Odsetek zawsze korzystających w różnych grupach doświadczeń waha się pomiędzy 4-8%, jednak odsetek osób wykorzystujących często analizę portfelową maleje wraz z doświadczeniem - w grupie poniżej roku takie osoby stanowią 39%, a w grupie powyżej 10 lat jedynie 18% obserwacji tej grupy (rys. 5.10, tabela kontyngencji C.19 dodatek C).

Oczekiwanej stopy zwrotu nie szacuje jedynie niespełna 8% badanych, co czwarty ankietowany oblicza lub szacuje ją czasami, często ponad 28%, a zawsze nieco ponad 23% (tabela C.2). Jednak w przypadku ryzyka nie szacuje go blisko 14% anki-

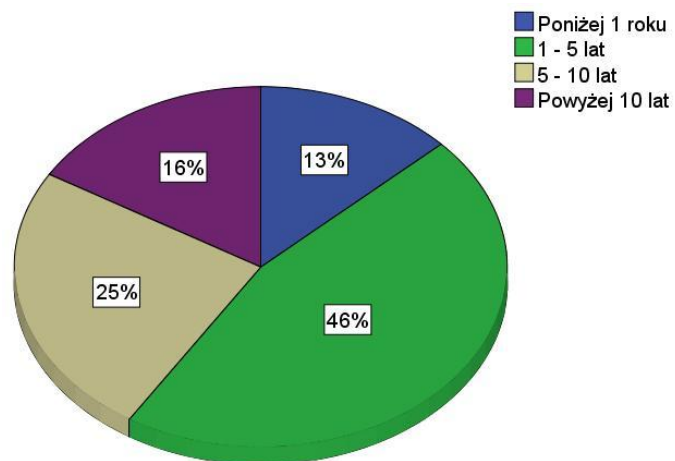


Rysunek 5.2: Struktura wieku respondentów



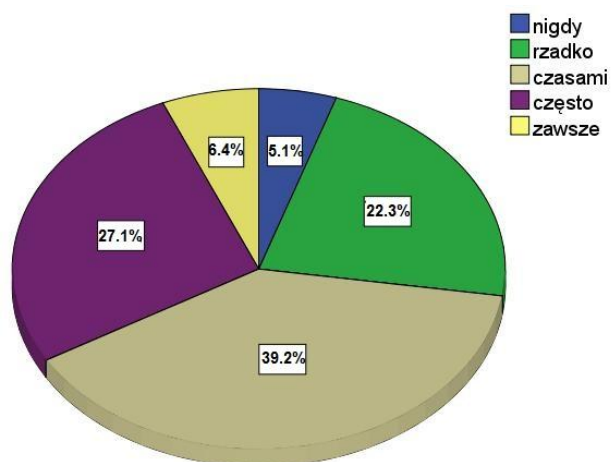
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.3: Doświadczenie inwestorów



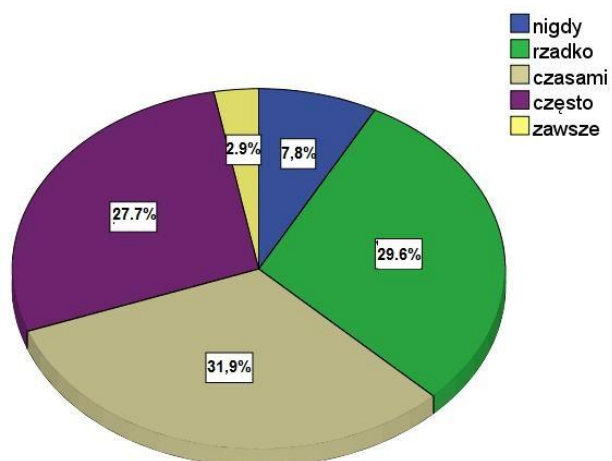
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.4: Częstość wykorzystania intuicji przy wyborze portfela



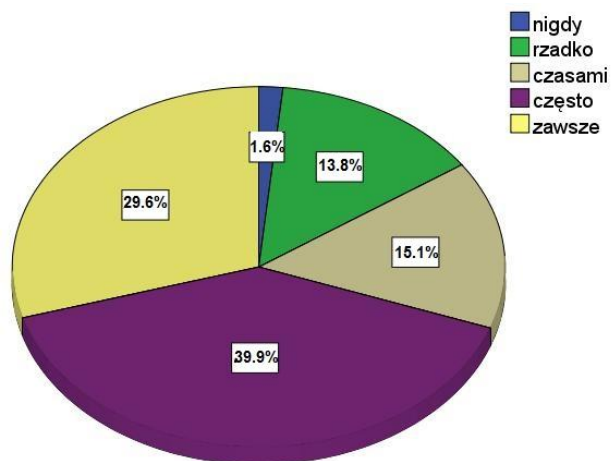
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.5: Częstość wykorzystania opinii ekspertów przy wyborze portfela



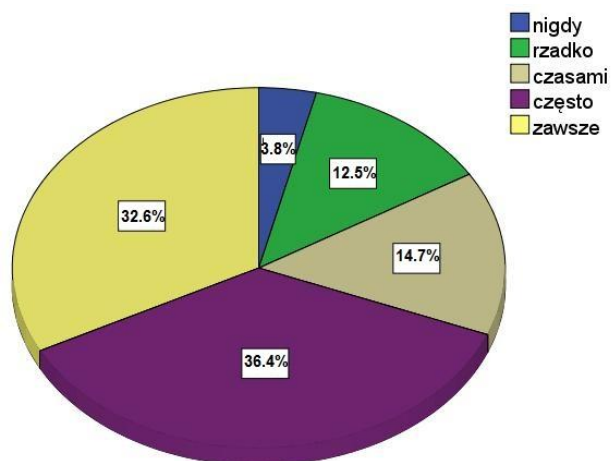
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.6: Częstość wykorzystania analizy fundamentalnej przy wyborze portfela



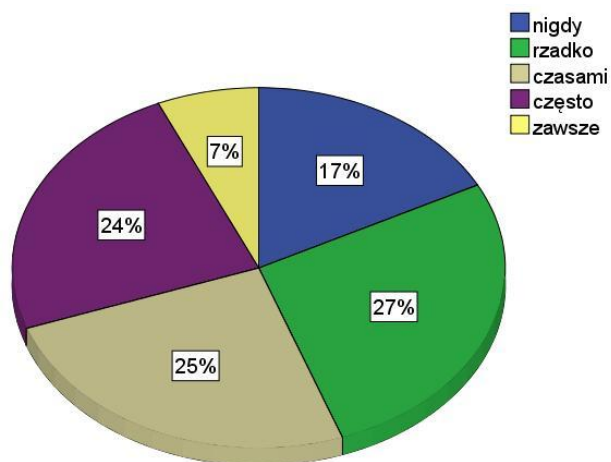
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.7: Częstość wykorzystania analizy technicznej przy wyborze portfela



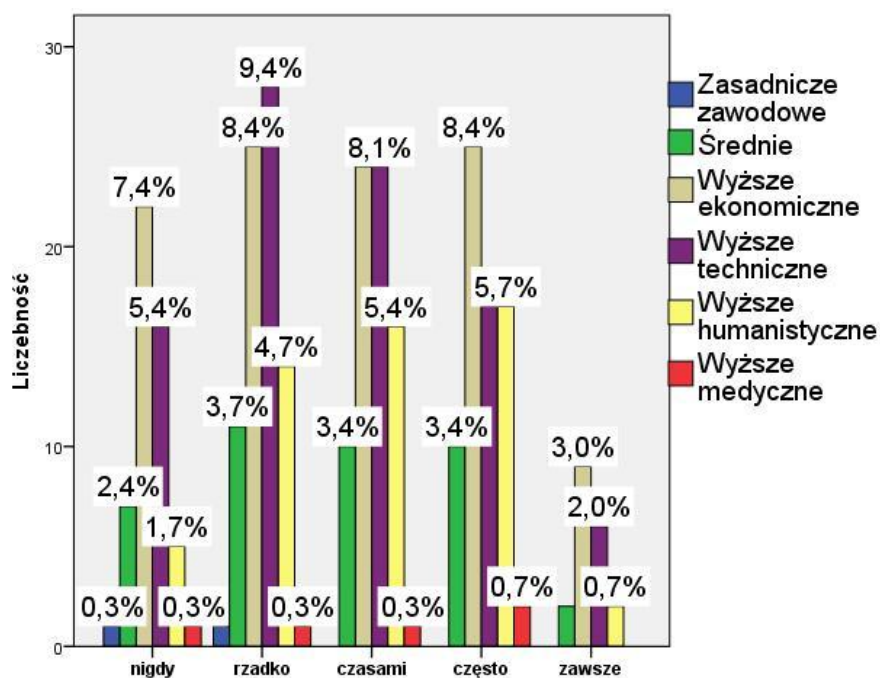
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.8: Częstość wykorzystania analizy portfelowej przy wyborze portfela



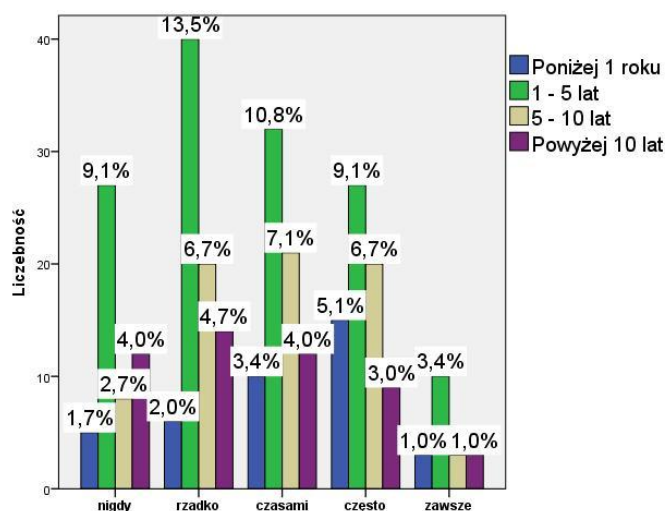
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.9: Wykorzystanie analizy portfelowej względem wykształcenia.



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.10: Wykorzystanie analizy portfelowej skategoryzowane liczbą lat funkcjonowania na rynku w roli inwestora

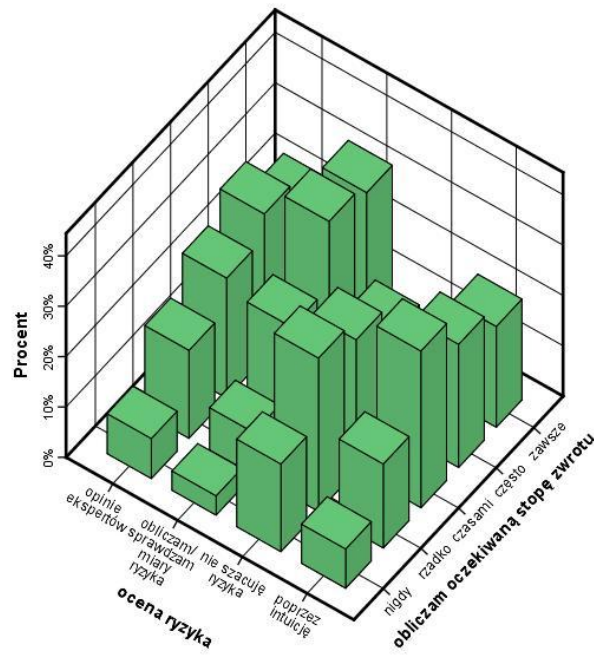


Źródło: opracowanie własne

etowanych, a aż 46% opiera się w szacunkach na intuicji i opinii ekspertów, niecałe 40% oblicza lub sprawdza miary ryzyka (tabela C.3), w tym 13% to osoby z wykształceniem wyższym ekonomicznym, a po ok. 9% osoby z wykształceniem wyższym technicznym i humanistycznym. Zgodnie z intuicją, test  $\chi^2$  potwierdza statystycznie istotną zależność pomiędzy sposobem szacowania ryzyka a częstotliwością szacowania stopy zwrotu (rys. 5.11, wyniki statystyki C.21, tabela kontyngencji C.20 dodatek C). Blisko 55% osób zawsze szacujących oczekiwaną stopę zwrotu, oblicza lub sprawdza miary ryzyka. Jedynie niecałe 4% z osób biorących pod uwagę miary ryzyka nigdy nie oblicza oczekiwanej stopy zwrotu, a powyżej 95% oblicza ją czasami i częściej. Jednak wśród osób często i czasami obliczających oczekiwaną stopę zwrotu 11% nie szacuje ryzyka, a jedynie nieco ponad 41% opiera się na miarach ryzyka.

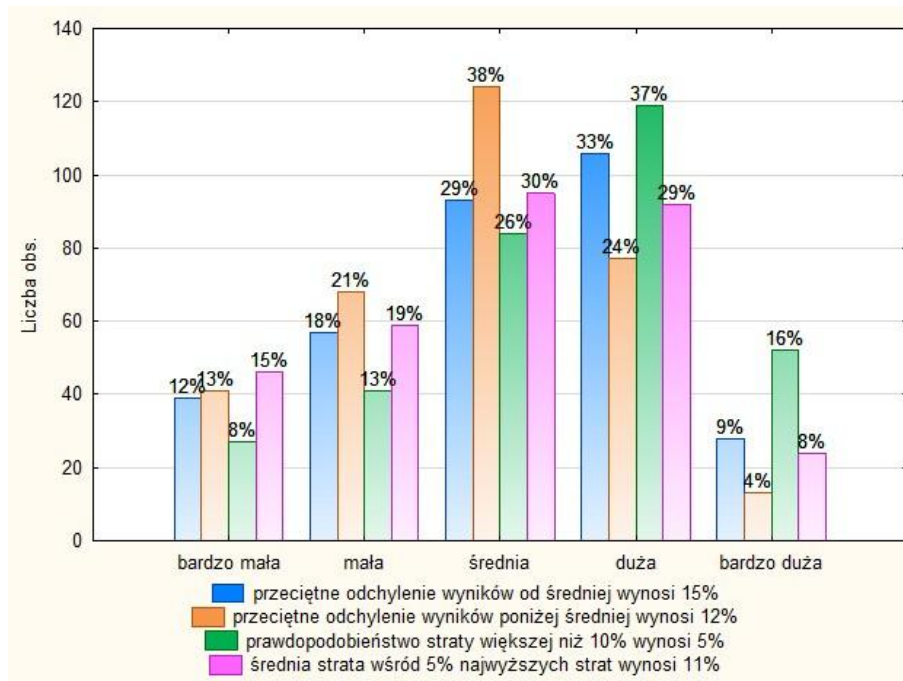
w pytaniu 5 ankietowani oceniali przydatność informacji niesionej przez poszczególne miary ryzyka. Blisko 12% uznało informację o odchyleniu standardowym za bardzo mało przydatną, ponad 17% za mało, a 28% i 32% respondentów odpowiednio wskazało na średnią i dużą przydatność. Jedynie nieco ponad 8% uznało tę informację za bardzo ważną. W przypadku informacji niesionej przez semiwariancję, także ok. 12% uznało ją za bardzo mało przydatną, co około piąty ankietowany za mało przydatną. Średnia przydatność przypisana została semiwariancji przez ponad 37%, a duża przez 23% respondentów, za bardzo istotną uznało ją jedynie niecałe 4%. Nieco wyżej oceniana jest informacja niesiona przez wartość zagrożoną. Za bardzo mało przydatną uznało ją jedynie 8% ankietowanych, natomiast za mało istotną informację 12%. Średnią istotność tej informacji wskazał co czwarty respondent, dużą blisko 36%, a bardzo dużą ponad 15%, w tym po 4,65% stanowiły osoby niezacujące ryzyka i opierające się na intuicji, a 5,26% osób obliczających miary ryzyka. Analogicznie do miary semiwariancji oceniana jest przydatność informacji przekazywanej przez warunkową wartość zagrożoną, za małą i bardzo małą uznało ją ponad 30%, a bardzo dużą przydatność wskazało nieco ponad 7%. Ocenę przydatności miar przedstawia rys. 5.12.

Rysunek 5.11: Rozkład dwuwymiarowy: częstotliwość obliczania oczekiwanej stopy zwrotu × sposoby szacowania ryzyka.



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.12: Ocena przydatności informacji: Średnia stopa zwrotu wynosi 10%, a



Źródło: opracowanie własne

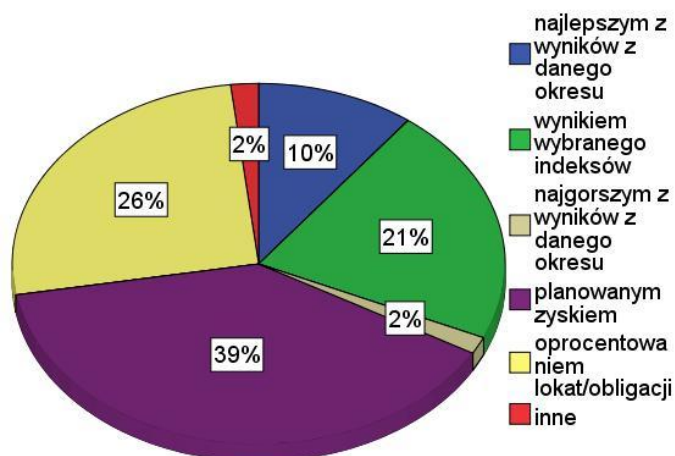
**Stosunek do zysku.** Pytania w ankiecie od 4 i 6-8 miały na celu zbadanie sposobu wyznaczania oczekiwań co do stopy zwrotu z inwestycji oraz oceny uzyskanej w jej wyniku stopy zwrotu. Ponad 60% respondentów przyznało, że ich oczekiwania, co do stopy zwrotu są zmienne i uzależnione od bieżących warunków i nastrojów panujących na rynku, blisko 14% uzależnia je od oprocentowania lokat i innych instrumentów, a niecałe 9% od zdobywanego doświadczenia. Jedynie 4,5% badanych osób ma pewne stałe oczekiwania, a 9% nie potrafi ocenić, co wpływa na ich oczekiwania (tabela C.4, dodatek C). Tylko 6% określa swoje oczekiwania w sposób ostry, poprzez konkretną liczbę, połowa wyraża oczekiwania nieskończonym przedziałem, określając minimalną zadowalającą stopę zwrotu - *oczekuję stopy zwrotu co najmniej 10%*, a 42% przedziałem zamkniętym, nie licząc na zyski powyżej pewnego małego prawdopodobnego poziomu (tabela C.6, dodatek C). Wśród osób uzależniających swoje oczekiwania od nastrojów i stanu rynku jedynie 5% określa oczekiwaną stopę zwrotu dokładnie jako pewną liczbę, wśród osób o stałej preferencji jest to już jedna trzecia. Wśród osób o zmiennych oczekiwaniach co do stopy zwrotu aż 80% wyraża swoje oczekiwania przedziałem (skończonym lub nieskończonym).

Pytanie 7 pozwoliło na określenie kształtu funkcji oczekiwań. Dla 14% zadowolenie z wyniku rośnie wraz ze wzrostem stopy zwrotu liniowo, dla blisko 14,3% rośnie coraz szybciej, dla blisko 65% ankietowanych wzrost zadowolenia jest funkcją wypukłą, a wklęsłą dla niecałych 10%, dla ok. 11% tempo wzrostu zadowolenia ulegało zmianie, a nieco ponad 3% odpowiedzi zawierało braki w przynajmniej jednym punkcie.

Przy ocenie inwestycji ponad 39% porównuje wyniki z planowanym zyskiem, ponad 1/4 z oprocentowaniem lokat/obligacji, a co piąta osoba z wynikiem wybranego indeksu. Jedynie 10% porównuje uzyskaną stopę zwrotu z najlepszym wynikiem z danego okresu, a jedynie 5 osób wskazało, że w ocenie sugeruje się najgorszym wynikiem z danego okresu. Wśród odpowiedzi inne: 3 osoby nie stosowały żadnego benchmarku, jedna porównuje wyniki ze swoimi poprzednimi wynikami, a jedna z trzema najpopularniejszymi odpowiedziami jednocześnie. w przypadku osób porównujących wyniki z wybranym indeksem ponad 75% uzależniało swoją oczekiwaną stopę zwrotu od warunków i nastrojów na rynku i analogicznie wśród osób uzależniających oczekiwaną stopę zwrotu z doświadczeniem, ponad 65% porównywało wynik z planowanym zyskiem, a ponad 60% osób uzależniających swoje oczekiwania od oprocentowania lokat i innych instrumentów, porównywało z nim wyniki. Jednak wśród osób porównujących wyniki z planowanym zyskiem, ponad połowa (57%) to osoby uzależniające oczekiwaną stopę zwrotu od nastrojów i warunków panujących na rynku. Wśród osób niepotrafiących określić sposobu wyznaczania oczekiwanej stopy zwrotu co trzecia porównuje wyniki z oprocentowaniem lokat lub obligacji, a ponad 36% z planowanym zyskiem (tabela kontyngencji C.27, dodatek C). Nie wykazano istotnego wpływu wieku, doświadczenia ani wykształcenia na sposób oceny inwestycji.

**Stosunek do ryzyka.** Pytania 9, 11, 12, 13 dotyczyły stosunku do ryzyka. Wśród ankietowanych nieco ponad połowa oceniła, że woli mniej ryzykować, licząc się z możliwością osiągnięcia mniejszego zysku, a nieco ponad 42% woli ryzykować, licząc na osiągnięcie większego zysku, niecałe 5% woli nie ryzykować, rezygnując z ryzykownych inwestycji. Oceniając swoją skłonność do ryzyka w pięciostopniowej skali, ponad połowa określiła ją jako średnią, a 30% wskazało na wysoką (rys. 5.14,

Rysunek 5.13: Wyniki z inwestycji porównuję z:



Źródło: opracowanie własne

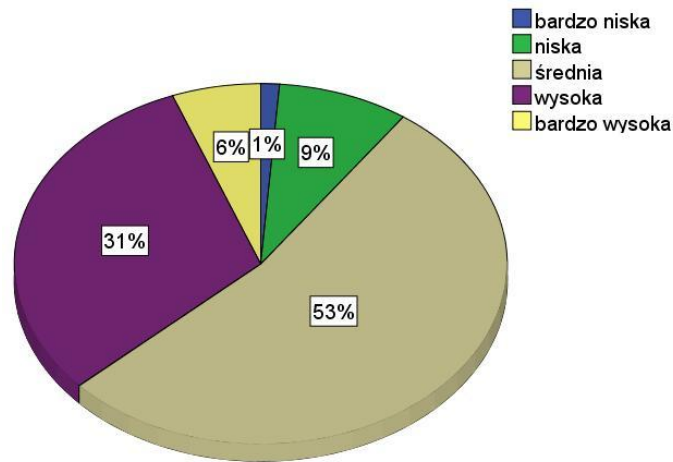
tabela C.12 dodatek C). W grupie osób o niskiej i bardzo niskiej skłonności do ryzyka praktycznie brakuje osób inwestujących ponad 10 lat (5 osób). Wśród osób o niskiej skłonności do ryzyka ponad 70% to osoby inwestujące krócej niż 5 lat. Wśród osób o wysokiej skłonności do ryzyka przeważają (57%) inwestorzy z doświadczeniem 1-5 letnim, a częściej niż co czwarty posiada doświadczenie 5-10 letnie (rys. 5.16 i rys. 5.15, tabela C.22 dodatek C). Statystycznie istotna okazała się również zależność skłonności do ryzyka od wykształcenia (tabele C.24, C.23). Wśród osób o dużej skłonności do ryzyka ponad połowa były to osoby z wykształceniem wyższym technicznym, wśród osób o średniej skłonności do ryzyka 40% stanowiły osoby o wykształceniu wyższym ekonomicznym, a co piąta osoba miała wykształcenie wyższe techniczne i średnie. W badanej próbie nie wykazano zależności pomiędzy wiekiem inwestora a skłonnością do ryzyka.

Respondenci w pytaniu 13 mieli za zadanie wybrać jeden z trzech portfeli, który po inwestycji 10 tys. dawałby jeden z trzech wyników określonych pewnym przedziałem. Wszystkie wyniki miały wartość oczekiwaną (przy założeniu rozkładu jednostajnego) 10,225 tys. zł, a różne szerokości przedziału. Wynik portfela nr 1 określony był przedziałem od 9,25 do 11,2 tys. zł, portfela nr 2 od 8,5 tys. do 11,95 tys. zł, portfela nr 3 od 7,75 tys. do 12,7 tys. zł. Pytanie to potwierdziło oceny respondentów, co do skłonności do ryzyka (istotna zależność statystyki  $\chi^2$ ). 3/4 respondentów o bardzo niskiej skłonności do ryzyka wybrałoby portfolio pierwsze, a 1/4 drugi, blisko 68% osób o niskiej skłonności do ryzyka wybierze portfolio nr 1, co ok. piąta osoba nr 2, a co dziesiąta nr 3. Nieco ponad połowa osób o średniej skłonności do ryzyka oraz prawie połowa osób o wysokiej skłonności do ryzyka wybierze portfolio nr 2. Blisko 65% osób o wysokiej skłonności do ryzyka wybierze portfolio nr 3. Porównanie wyników pytania 10 i 11 pozwoliło zauważyć, że procentowo poziom akceptacji strat jest mniejszy od poziomu zadowolenia z zysków o tym samym poziomie.

**Podsumowanie — ocena przydatności zadań optymalizacji.** w podsumowaniu wyników ankiety najważniejszymi z punktu widzenia pracy są następujące wnioski. Badani inwestorzy głównie posługują się intuicją oraz opiniami ekspertów (46%)

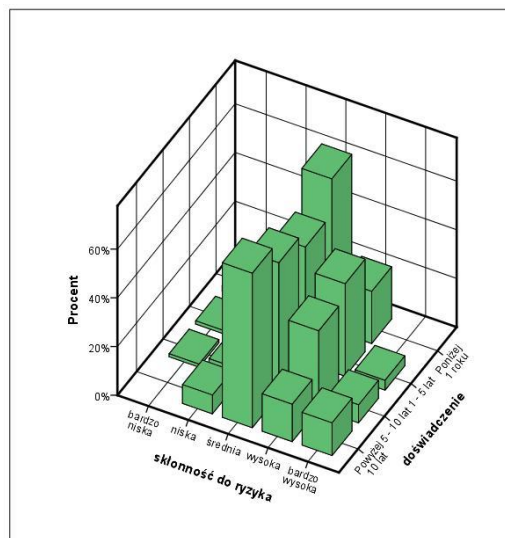


Rysunek 5.14: Ocena skłonności do ryzyka



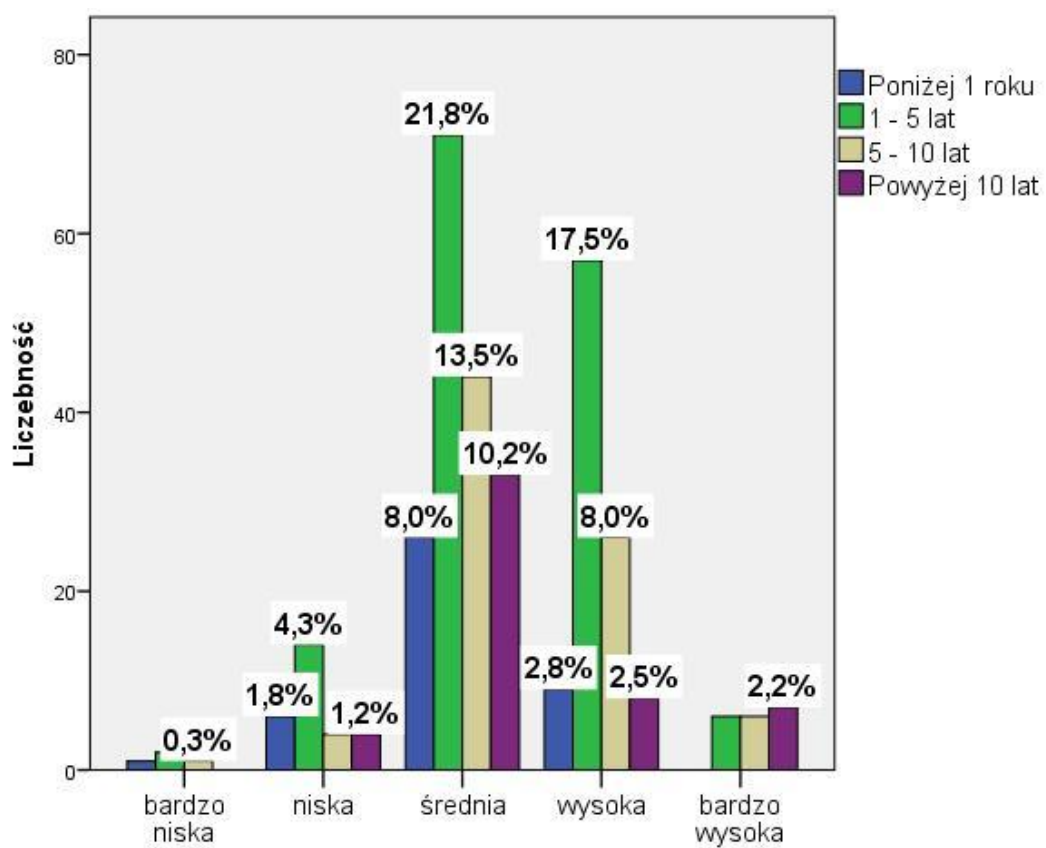
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.15: Rozkład dwuwymiarowy: skłonność do ryzyka a liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.16: Liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor, kategorie względem skłonności do ryzyka



Źródło: opracowanie własne

i miarami ryzyka (40%), a aż 14% w ogóle nie szacuje ryzyka. Najmniej popularną z analiz jest analiza portfelowa (blisko połowa nie używa jej nigdy, bądź rzadko), nawet wśród osób z wykształceniem wyższym ekonomicznym. Może to sugerować słabe poznanie i zrozumienie tej metody. Niski odsetek osób szacujących lub sprawdzających miary ryzyka wraz z niskimi ocenami ich interpretacji, szczególnie dotyczącymi miar semiwariancji i warunkowej wartości zagrożonej (odpowiednio 33,7% i 33,2% przydatności określanej mianem niskiej i bardzo niskiej), pozwala na niższą ocenę zadań optymalizacji opartą właśnie o nie. Jakkolwiek ponad połowa inwestorów stara się wyznaczać często i zawsze wartość oczekiwaną inwestycji (51,2%). Badani do oceny zadowolenia porównują wyniki najczęściej z założonymi celami (38,6%), nie biorą pod uwagę najlepszych ani najgorszych wyników na rynku (jedynie odpowiednio 10,2% i 1,5%). Powyższe dane pozwalają na pozytywną ocenę kryterium maksymalizacji satysfakcji i negatywne odniesienie się do modelu żalu bądź zadowolenia rozumianego przez różnice pomiędzy najgorszym a najlepszym wynikiem. Natomiast do określenia oczekiwań inwestycji brane są najczęściej pod uwagę warunki i nastroje panujące na rynku (62%), dopiero po nich doświadczenie inwestora. Badanie potwierdziło analogicznie do opisu funkcji oceny w teorii perspektywy<sup>2</sup>, że oceny zysków są niższe niż poziom akceptacji dla strat o tej samej wartości. Jednak w przeciwieństwie do wyników doświadczeń Kahnemana i Tverskyego funkcja zadowolenia jest wypukła.

## 5.2 Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik optymalizacji

Badanie zostało podzielone na dwie części. W pierwszej badano warunki istnienia ekstremum i sprawdzano analitycznie czy są one równoważne przy założeniu różnych kształtów funkcji przynależności. W drugiej części badania sprawdzano różnice pomiędzy wektorami rozwiązań zadań, których rozwiązania nie były równoważne. Wyjątek tutaj stanowi zadanie maksymalizacji satysfakcji, które na etapie analitycznym nie zostanie rozważane, a jedynie sprawdzone empirycznie.

### 5.2.1 Badanie analityczne

Rozpatrywane problemy możemy sprowadzić do problemów programowania liniowego (5.1) lub kwadratowego (5.2).

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

---

<sup>2</sup>Teoria perspektywy Kahnemana i Tverskyego opisuje rzeczywisty proces podejmowania decyzji przez ludzi. W myśl tej teorii po etapie analizy możliwych decyzji następuje etap oceny, przypisania subiektywnych wartości możliwym skutkom decyzji i tak funkcja oceny jest wklęsła dla prognoz pozytywnych oraz wypukła dla prognoz negatywnych, a także bardziej płaska dla prognoz pozytywnych, niż dla prognoz negatywnych

gdzie  $c$  - wektor współczynników funkcji celów,  $A$ -macierz współczynników dla warunków ograniczających,  $b$ -wektor wartości ograniczeń,  $x$ -wektor udziałów.

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & g_i(x) = 0, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k \\ & g_i(x) \leq 0, \text{ dla } i = k + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.2)$$

W pierwszym przypadku bazowe rozwiązanie dopuszczalne:

$$\begin{bmatrix} x^B & x^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

jest rozwiązaniem minimalnym, gdy zachodzi warunek:

$$\bar{c} = c^N - c^B B^{-1}N \geq 0, \quad (5.4)$$

gdzie  $B$  - macierz bazowa,  $N$  - macierz niebazowa,  $c^B$  - współczynniki funkcji celu przy zmiennych bazowych. W przypadku problemu programowania kwadratowego rozwiązanie minimalne wyznaczają warunki konieczne i dostateczne Kuhna-Tuckera:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx_i} &= 0 && \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \\ g_i(x) &= 0 && \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \\ \lambda_i g_i(x) &= 0 && \text{dla } i = k + 1, k + 2, \dots, n \\ g_i(x) &\leq 0 && \text{dla } i = k + 1, k + 2, \dots, n \\ \lambda_i, \gamma_i &\geq 0. \end{aligned}$$

w przypadku zadań maksymalizacji wykorzystujących symetryczne stopy zwrotu, wszystkie zadania niezależnie od typu zadania i kształtu mają tę samą funkcję celu, a różnią się funkcjami ograniczeń. Natomiast w przypadku minimalizacji wszystkie zadania mają ograniczenie na minimalną wartość oczekiwaną wyrażone nierównością:  $b \geq \eta$ , różnią się jednak funkcją celu. Pozwala to, w przypadku symetrycznym dla założeń o stałych parametrach (wariant (a)) oraz o stałych polach pod wykresem (wariant (b)), określić następującą postać zadań:

**EV,ESV — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu maksymalnego poziomu wariancji/semiwariancji**

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & C(\sum_{i=1}^n x_i (b_i - a_i))^2 \leq \nu \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdzie  $C \in \{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\}$  dla wariantu (a) oraz  $C \in \{\frac{1}{6}, \frac{9}{64}, \frac{9}{48}\}$  dla wariantu (b).

**EH — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu maksymalnego poziomu entropii**

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
 & \text{przy ograniczeniach} \\
 & C \sum_{i=1}^n x_i (b_i - a_i) \leq \nu \\
 & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & \forall_i x_i \geq 0,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

- gdzie dla wariantu (a)

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{\pi - 2 \ln 2}{3} & \text{dla kształtu 2,} \\ \left( \frac{8}{3} + 2 \ln 2 + \frac{(8\sqrt{2})}{3} \ln(\sqrt{2} - 1) \right) & \text{dla kształtu 3,} \\ \left( \frac{8}{3} + 4 \ln 2 - \frac{17}{6} \ln 3 + \frac{2\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}-1)}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.7}$$

- gdzie dla wariantu (b)

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{\pi - 2 \ln 2}{4} & \text{dla kształtu 2,} \\ \left( 4 + 3 \ln 2 + 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1) \right) & \text{dla kształtu 3,} \\ \frac{2}{3} \left( 4 + 6 \ln 2 - \frac{17}{4} \ln 3 + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.8}$$

**EVaR — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu maksymalnego poziomu wartości zagrożonej**

- dla wariantu (a)

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
 & \text{przy ograniczeniach} \\
 & \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \leq \nu \\
 & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & \forall_i x_i \geq 0,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$C = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla kształtu 1,} \\ \sqrt{2\alpha} & \text{dla kształtu 3,} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.10}$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (\sqrt{1 - 2\alpha}(a_i - b_i) - b_i) \leq \nu \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

- dla wariantu (b)

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \leq \nu \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$C = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla kształtu 1,} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.13}$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (\sqrt{1 - 2\alpha}(-b_i + \frac{3}{4}a_i) - b_i) \leq \nu \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

dla kształtu 3:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (\sqrt{2\alpha}(-b_i + \frac{3}{2}a_i) - \frac{3}{2}a_i) \leq \nu \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

**EcVaR — Zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu maksymalnego poziomu warunkowej wartości zagrożonej**

- dla wariantu (a)

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \leq \nu \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \forall_i x_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} & \text{dla kształtu 3,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \quad (5.17)$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{a-b}{3\alpha} \sqrt{(1-2\alpha)^3} (a_i - b_i) - b_i \right) \leq \nu \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

- dla wariantu (b)

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \leq \nu \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \quad (5.20)$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{3a-4b}{12\alpha} \sqrt{(1-2\alpha)^3} (a_i - b_i) - b_i \right) \leq \nu \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

dla kształtu 3:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} (-b_i + \frac{3}{2}a_i) - \frac{3}{2}a_i \right) \leq \nu \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

**VE,SVE — zadanie minimalizacji wariancji/semiwariancji przy ograni-**

czeniu na minimalną wartość oczekiwaną

$$\min C(\sum_{i=1}^n x_i(b_i - a_i))^2$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0,$$

gdzie  $C \in \{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\}$  dla wariantu (a) oraz  $C \in \{\frac{1}{6}, \frac{9}{64}, \frac{9}{48}\}$  dla wariantu (b).  
(5.23)

**HE** — zadanie minimalizacji entropii przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną

$$\min C \sum_{i=1}^n x_i(b_i - a_i)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \tag{5.24}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0,$$

- gdzie dla wariantu (a)

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{\pi - 2 \ln 2}{3} & \text{dla kształtu 2,} \\ \left( \frac{8}{3} + 2 \ln 2 + \frac{(8\sqrt{2})}{3} \ln(\sqrt{2} - 1) \right) & \text{dla kształtu 3,} \\ \left( \frac{8}{3} + 4 \ln 2 - \frac{17}{6} \ln 3 + \frac{2\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}-1)}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.25}$$

- gdzie dla wariantu (b)

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{\pi - 2 \ln 2}{4} & \text{dla kształtu 2,} \\ \left( 4 + 3 \ln 2 + 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1) \right) & \text{dla kształtu 3,} \\ \left( \frac{2}{3}(4 + 6 \ln 2 - \frac{17}{4} \ln 3 + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}) \right) & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.26}$$

**VaRE** — zadanie minimalizacji wartości zagrożonej przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną

– dla wariantu (a)

$$\min \sum_{i=1}^n x_i(C(a_i - b_i) - a_i) \text{ przy ograniczeniach}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0,$$

(5.27)



$$C = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla kształtu 1,} \\ \sqrt{2\alpha} & \text{dla kształtu 3,} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \quad (5.28)$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n x_i(\sqrt{1-2\alpha}(a_i - b_i) - b_i) \\ \text{przy ograniczeniach} \\ \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

– dla wariantu (b)

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n x_i(C(a_i - b_i) - a_i) \\ \text{przy ograniczeniach} \\ \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$C = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla kształtu 1,} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \quad (5.31)$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n x_i(\sqrt{1-2\alpha}(\frac{3}{4}a_i - b_i) - b_i) \\ \text{przy ograniczeniach} \\ \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

dla kształtu 3:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n x_i(\sqrt{2\alpha}(\frac{3}{2}a_i - b_i) - \frac{3}{2}a_i) \\ \text{przy ograniczeniach} \\ \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

**EcVaR — zadanie minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną**

– dla wariantu (a)

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$C = \begin{cases} \alpha & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} & \text{dla kształtu 3,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.35}$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{a_i - b_i}{3\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} (a_i - b_i) - b_i \right) \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{5.36}$$

– dla wariantu (b)

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n x_i (C(a_i - b_i) - a_i) \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$C = \begin{cases} 1 & \text{dla kształtu 1,} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla kształtu 4,} \end{cases} \tag{5.38}$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{3a_i - 4b_i}{12\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} (a_i - b_i) - b_i \right) \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \forall_i x_i \geq 0, \end{aligned} \tag{5.39}$$

dla kształtu 3:

$$\min(\sum_{i=1}^n x_i(\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} \sum_{i=1}^n x_i(\frac{3}{2}a_i - b_i) - \frac{3}{2}a_i)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i \geq \eta \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\forall_i x_i \geq 0,$$

Rozwiązania zadań w przypadku symetrycznych stóp zwrotu przedstawiają się następująco:

**EV,ESV — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu na maksymalny poziom wariancji / semiwariancji**

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{(b_j - a_j) - \sqrt{\frac{\nu}{C}}}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} - \sum_{i=1}^n \frac{(b_j - a_j) - (b_i - a_i)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} t_i \\ x_j &= \frac{\sqrt{\frac{\nu}{C}} - (b_k - a_k)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} - \sum_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i) - (b_j - a_j)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} t_i \\ \forall_{i \neq j, k} x_i &= t_i \geq 0, \\ t_j &= t_k = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & ((b_j > b_k \wedge ((b_k - a_k) \geq (b_j - a_j)) \wedge ((b_j - a_j)b_k \geq (b_k - a_k)b_j)) \vee \\ & (b_j < b_k \wedge ((b_k - a_k) \leq (b_j - a_j)) \wedge ((b_j - a_j)b_k \leq (b_k - a_k)b_j))) \\ & \wedge \forall b_i \geq \frac{(b_i - a_i)(b_j - b_k) - b_k(b_j - a_j) + b_j(b_k - a_k)}{C((b_j - a_j) - (b_k - a_k))} \end{aligned}$$

**EH — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu na maksymalny poziom entropii**

$$x^B = \begin{bmatrix} x_k & x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(b_j - a_j) - \frac{\nu}{C}}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} & \frac{\frac{\nu}{C} - (b_k - a_k)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$(b_j - a_j < b_k - a_k) \wedge (b_j \leq b_k) \quad (5.43)$$

$$\forall_i b_i \leq \frac{(b_i - a_i)(b_j - b_k) - b_j(b_k - a_k) + b_k(b_j - a_j)}{C((b_j - a_j) - (b_k - a_k))} \quad (5.44)$$

$$(b_j - a_j \geq b_k - a_k) \wedge (b_j > b_k) \quad (5.45)$$

**EVaR, EcVaR — zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu na maksymalny poziom wartości zagrożonej / warunkowej wartości zagrożonej rozwiązania dla kształtów 1, 3 i 4:**

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{C_3 a_j - C_1(C_2 a_j - b_j) + \nu}{C_1(b_j - C_2 a_j) + C_3 a_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - C_3 a_k} \\ x_j &= \frac{-\nu - C_3 a_k - C_1(b_k - C_2 a_k)}{C_1(b_j - C_2 a_j) + C_3 a_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - C_3 a_k}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \forall_i b_i &\geq \frac{(b_j - b_k)(C_1(C_2 a_i - b_i) - C_3 a_i) + b_j(C_1(C_2 a_k - b_k) - C_3 a_k)}{C_1(b_j - C_2 a_j) + C_3 a_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - C_3 a_k} \\ &+ \frac{b_k(C_3 a_j - C_1(C_2 a_j - b_j))}{C_1(b_j - C_2 a_j) + C_3 a_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - C_3 a_k}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

gdzie

$$C_1 = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla VaR kształtu 1 (a),(b),} \\ \sqrt{2\alpha} & \text{dla VaR kształtu 3 (a), (b),} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla VaR kształtu 4 (a),(b),} \\ \alpha & \text{dla cVaR kształtu 1 (a), (b),} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} & \text{dla cVaR kształtu 3 (a), (b),} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla cVaR kształtu 4 (a), (b),} \end{cases} \quad (5.48)$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{dla VaR i cVaR kształtu 3 (b),} \\ 1 & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \quad (5.49)$$

$$C_3 = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{dla VaR i cVaR kształtu 3 (b),} \\ 1 & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \quad (5.50)$$

rozwiązania dla kształtu 2:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{b_j - C_1(C_2 a_j - b_j) + \nu}{C_1(b_j - C_2 a_j) + b_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - b_k} \\ x_j &= \frac{-\nu - b_k - C_1(b_k - C_2 a_k)}{C_1(b_j - C_2 a_j) + b_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - b_k}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\forall_i b_i \geq \frac{(b_j - b_k)(C_1(C_2 a_i - b_i) - b_i) + b_j(C_1(C_2 a_k - b_k) - b_k) + b_k(b_j - C_1(C_2 a_j - b_j))}{C_1(b_j - C_2 a_j) + b_j - C_1(b_k - C_2 a_k) - b_k}, \quad (5.52)$$

gdzie

$$C_1 = \begin{cases} \sqrt{1 - 2\alpha} & \text{dla VaR wariant (a),(b)} \\ \frac{a_i - b_i}{3\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} & \text{dla cVaR wariant (a)} \\ \frac{3a_i - 4b_i}{12\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} & \text{dla cVaR wariant (a)} \end{cases} \quad (5.53)$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{dla VaR wariant (b),} \\ 1 & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \quad (5.54)$$

**VE, SVE — zadanie minimalizacji wariancji/semiwariancji przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną**

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{b_j - \eta}{b_j - b_k} - \sum_{i=1}^n \frac{b_j - b_i}{b_j - b_k} t_i, \\ x_j &= \frac{\eta - b_k}{b_j - b_k} - \sum_{i=1}^n \frac{b_i - b_k}{b_j - b_k} t_i, \\ \forall_{i \neq j, k} x_i &= t_i, \\ t_j &= t_k = 0, \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (b_j > b_k \wedge ((b_j - a_j) \geq (b_k - a_k)) \wedge ((b_j - a_j)b_k \geq (b_k - a_k)b_j)) \vee \\ & (b_j < b_k \wedge ((b_j - a_j) < (b_k - a_k)) \wedge ((b_j - a_j)b_k > (b_k - a_k)b_j)) \wedge \\ & \forall_i b_i \geq \frac{(b_i - a_i)(b_k - b_j) - b_j(b_k - a_k) + b_k(b_j - a_j)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)} \end{aligned}$$

**HE** — zadanie minimalizacji entropii przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{b_j - \eta}{b_j - b_k}, \\
x_k &= \frac{\eta - b_k}{b_j - b_k}, \\
\Leftrightarrow ((b_j - a_j) \leq (b_k - a_k) \wedge (b_j < b_k)) \vee ((b_j - a_j) \geq (b_k - a_k) \wedge (b_j > b_k)) \wedge \\
\forall_i b_i &\geq \frac{(b_i - a_i)(b_k - b_j) - b_j(b_k - a_k) + b_k(b_j - a_j)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

**VaRE, cVaRE** — zadanie minimalizacji wartości zagrożonej/ warunkowej wartości zagrożonej przy ograniczeniu na minimalną wartość oczekiwaną dla kształtów 1,3,4:

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{\eta - b_k}{b_j - b_k}, \\
x_k &= \frac{b_j - \eta}{b_j - b_k}, \\
\Leftrightarrow \forall_i C_1(C_2 a_i - b_i) - a_i &\geq \frac{b_i(C_1(C_2 a_j - b_j) - a_j - C_1(C_2 a_k - b_k) + a_k) - b_k(C_1(C_2 a_j - b_j) - a_j)}{b_j - b_k} \\
&\quad + \frac{b_j(C_1(C_2 a_k - b_k) - a_k)}{b_j - b_k},
\end{aligned} \tag{5.57}$$

gdzie

$$C_1 = \begin{cases} 2\alpha & \text{dla VaR kształtu 1 (a),(b)} \\ \sqrt{2\alpha} & \text{dla VaR kształtu 3 (a), (b)} \\ \sqrt{\alpha} & \text{dla VaR kształtu 4 (a), (b)} \\ \alpha & \text{dla cVaR kształtu 1 (a), (b),} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha} & \text{dla cVaR kształtu 3 (a), (b)} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} & \text{dla cVaR kształtu 4 (a), (b)} \end{cases} \tag{5.58}$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{dla VaR i cVaR kształtu 3 (b),} \\ 1 & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \tag{5.59}$$

dla kształtu 2:

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{\eta - b_k}{b_j - b_k}, \\
x_k &= \frac{b_j - \eta}{b_j - b_k}, \\
\Leftrightarrow \forall_i C_1(C_2 a_i - b_i) - b_i &\geq \frac{b_i(C_1(C_2 a_j - b_j) - b_j - C_1(C_2 a_k - b_k) + b_k) - b_k(C_1(C_2 a_j - b_j) - b_j)}{b_j - b_k} \\
&\quad + \frac{b_j(C_1(C_2 a_k - b_k) - b_k)}{b_j - b_k}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

gdzie

$$C_1 = \begin{cases} \sqrt{1 - 2\alpha} & \text{dla VaR wariant (a),(b)} \\ \frac{a_i - b_i}{3\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} & \text{dla cVaR wariant (a)} \\ \frac{3a_i - 4b_i}{12\alpha} \sqrt{(1 - 2\alpha)^3} & \text{dla cVaR wariant (a)} \end{cases} \tag{5.61}$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{dla VaR wariant (b),} \\ 1 & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \quad (5.62)$$

Wyniki analizy dla symetrycznych stóp zwrotu przedstawia tabela 5.1.

Tabela 5.1: Wyniki analizy dla symetrycznych stóp zwrotu

Wariant	Rodzaj zadania							
	EV;ESV	EH	EVaR	EcVaR	VE;SVE	HE	VaRE	cVaRE
(a)	≠	≠	≠	≠	=	=	≠	≠
(b)	≠	≠	≠	≠	=	=	≠	≠

Źródło: opracowanie własne

Z analizy można wysunąć następujące wnioski:

- Rozwiązanie optymalne zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej przy zadanej maksymalnej wartości entropii, wariancji, semiwariancji, wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej dla liczb symetrycznych zależy od przyjętego kształtu zmiennej rozmytej.
- Rozwiązanie optymalne zadania minimalizacji entropii przy zadanej wartości oczekiwanej dla liczb symetrycznych nie zależy od przyjętego kształtu zmiennej rozmytej.
- Rozwiązanie optymalne zadania minimalizacji wariancji przy zadanej wartości oczekiwanej dla liczb symetrycznych nie zależy od przyjętego kształtu zmiennej rozmytej.
- Przy danym kształcie rozwiązanie zadania minimalizacji entropii oraz minimalizacji wariancji (semiwariancji) przy zadanej minimalnej wartości oczekiwanej są równe, pod warunkiem:

$$\forall_i b_i > \frac{(b_i - a_i)(b_k - b_j) - b_j(b_k - a_k) + b_k(b_j - a_j)}{(b_j - a_j) - (b_k - a_k)}.$$

## 5.2.2 Badanie empiryczne

Badanie empiryczne wpływu kształtu funkcji przynależności na wynik optymalizacji zostało przeprowadzone w formie symulacji. Dla każdego z badanych zadań wyznaczono skład optymalnych portfeli przy założeniu różnych kształtów funkcji przynależności, następnie przeanalizowano różnice pomiędzy wektorami rozwiązań zadań wykorzystujących kształt trójkątny i innymi kształtami według kroków opisanych w paragrafie 4.3. Problematyczne okazało się przeprowadzenie badania dla zadań z użyciem miar wariancji i semiwariancji. Wartości semiwariancji w zależności od kształtu przedstawione zostały w tabeli 5.2, wartości wariancji dla kształtu 4 nie udało się przedstawić w postaci jednego wzoru i należy je rozważać w zależności od położenia wartości oczekiwanej w stosunku do parametrów zmiennej rozmytej. Ze względu na złożoności funkcji stosowane algorytmy przeszukiwawacze okazały się nieefektywne i czasochłonne.

Tabela 5.2: Wartość semiwariancji dla różnych kształtów zmiennej rozmytej

Kształt	Semiwariancja
1	$\frac{(m-a)^3}{6(b-a)} + \frac{m-b}{6} \left(1 + \frac{m-b}{a-b} - \frac{m-c}{b-c}\right) \max\{0, m-b\}$
2	$\frac{(m-a)^2}{12(b-a)^2} (3a^2 - 4ab + 4bm - m^2 - 2ma) + (m-b) \left(\frac{1}{2} + \frac{(m-b)^2}{3(b-c)^2} + \frac{(m-b)^2}{12(b-a)^2}\right) \max\{0, m-b\}$
3	$\frac{(m-a)^4}{12(b-a)^2} + (m-b) \left(\frac{8(b-c)^2 + (c-b)(c+b-2m) + (m-c)^2}{12(b-c)^2} + \frac{2(b-a) + (m+b)^2 + 4a(m-b)}{12(b-a)^2}\right) \max\{0, m-b\}$
4	$\frac{(m-a)^4}{6(b-a)^2} + \left(\frac{c-a}{4}\right)^2 \left(-\left(\frac{c-a}{4(b-a)}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{(m-b)^2 + (a-m)^2}{(b-a)^2} - \frac{(c-a)(b+a-2m)}{3(b-a)^2}\right) + \frac{(m-b)^3}{6} \left(\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2}\right) \max\{0, m-b\}$

Źródło: opracowanie własne

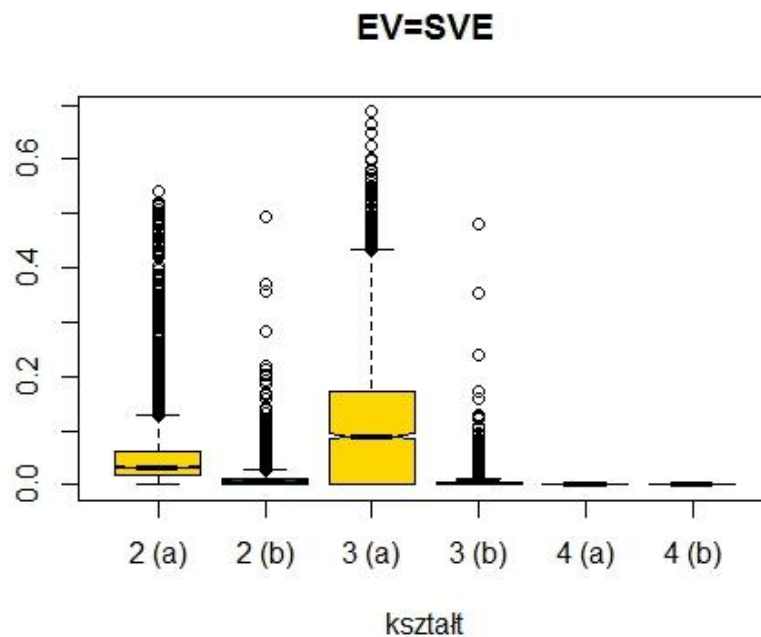
Statystyki opisowe różnic poszczególnych wektorów rozwiązań przedstawia tabela D.1. Można zauważyć, że:

- Najmniejsze różnice, niezależnie od typu zadania, charakteryzują wyniki dla kształtu trójkątnego i gaussowskiego, wyniosły one średnio 0,0717 z medianą 0,0232 dla zadań maksymalizacji zysku oraz 0,0676 z medianą 0 dla zadań minimalizacji niepewności<sup>3</sup>. Największe różnice wystąpiły pomiędzy kształtami trójkątnym i normalnym: średnia dla zadań maksymalizacji 0,5762 z medianą 0,6052, natomiast dla zadań minimalizujących niepewność średnio 0,2703 o medianie 0,0032. Znaczący wpływ na wielkość tych różnic mają wyniki dla zadań wykorzystujących wartość zagrożoną i warunkową wartość zagrożoną. Różnice pomiędzy kształtami trójkątnym i normalnym dla tych dwóch zadań były znacząco wyższe od innych różnic (por. rys. 5.19 z rys. 5.18, 5.21).
- Mniejsze różnice charakteryzują również zadania w wariancie ( $b$ ), a więc w przypadku, gdy stałe jest pole pod wykresem funkcji, ze średnią odległością cosinusową 0,037 przy średniej dla wariantu ( $a$ ) 0,2046.
- Wyniki nie pokazują znaczących różnic pomiędzy wynikami dla symetrycznych i niesymetrycznych przypadków. Biorąc pod uwagę oba warianty i wszystkie kształty, jedynie w 5 przypadkach różnice między średnimi były wyższe niż 0,05.
- Zadania maksymalizacji zysku charakteryzowały się większymi różnicami w stosunku do odpowiednich zadań minimalizacji niepewności. Wśród zadań maksymalizacji najmniejsze różnice charakteryzowały zadania EV/ESV (dla liczb symetrycznych), a największe zadania EcVaR. Biorąc pod uwagę zadania minimalizacji najmniejszymi różnicami charakteryzowało się zadanie HE, a największymi zadania VaRE. Wyniki zadań wykorzystujących miary wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej wykazują bardzo duże różnice jedynie dla kształtów trójkątnego i normalnego, a małe dla innych przypadków.

Wykresy odległości cosinusowej dla poszczególnych zadań przedstawiają rysunki od 5.17 do 5.21.

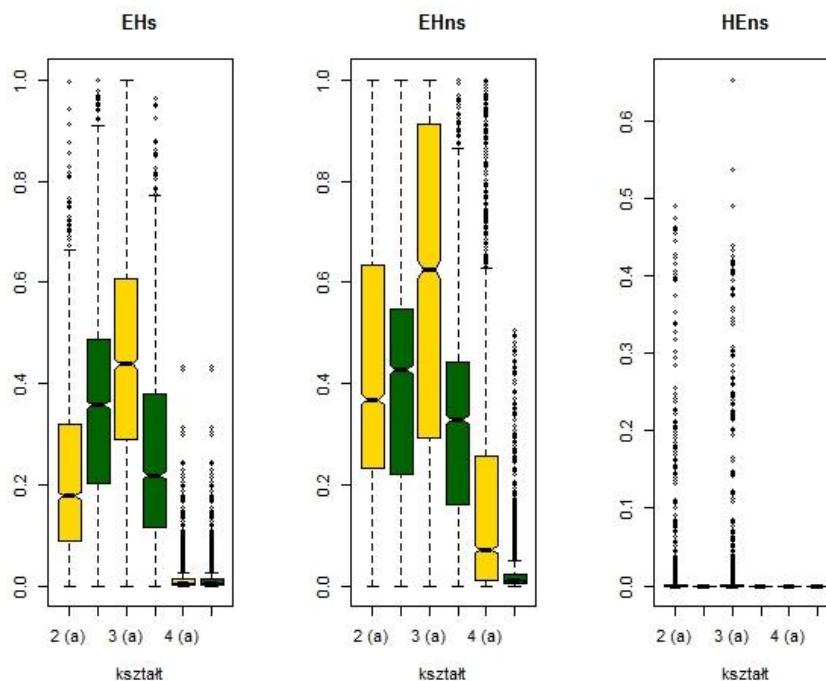
<sup>3</sup>Nie uwzględniając zadań: HE i VE(s) dla których wyniki są takie same

Rysunek 5.17: Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów zadań EV oraz VE przy założeniu symetryczności stóp zwrotu.



Źródło: opracowanie własne

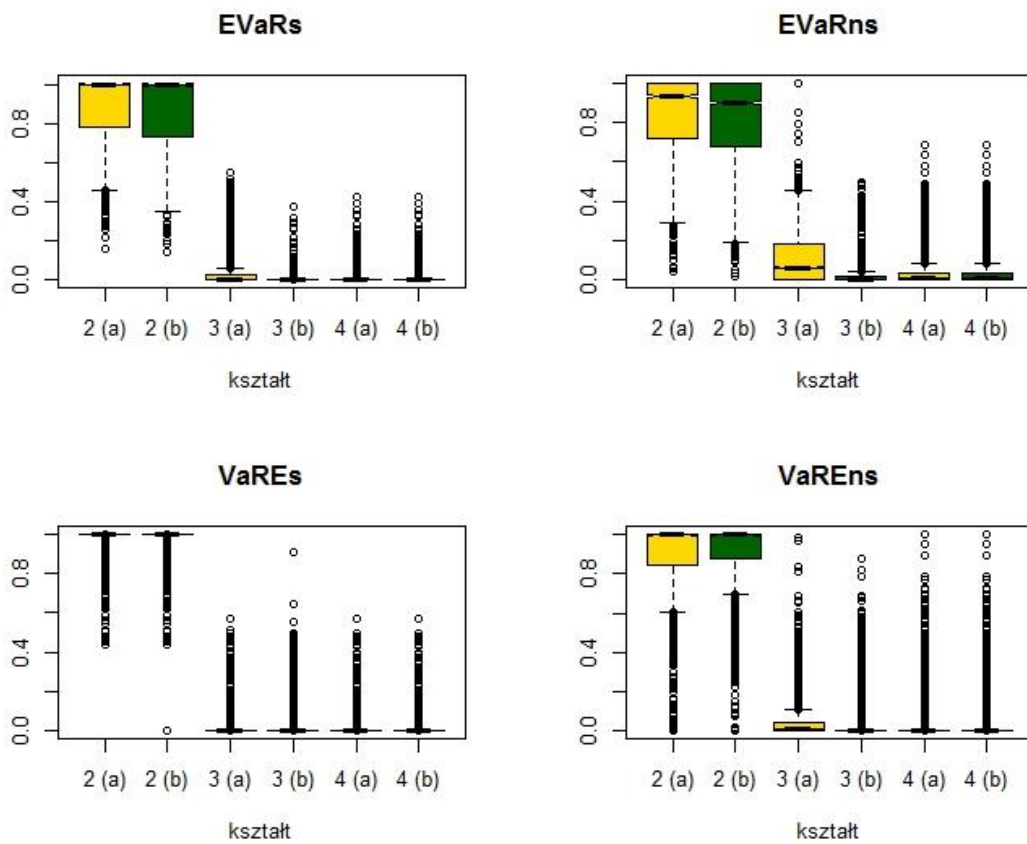
Rysunek 5.18: Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów zadań EH oraz HE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns)



Źródło: opracowanie własne

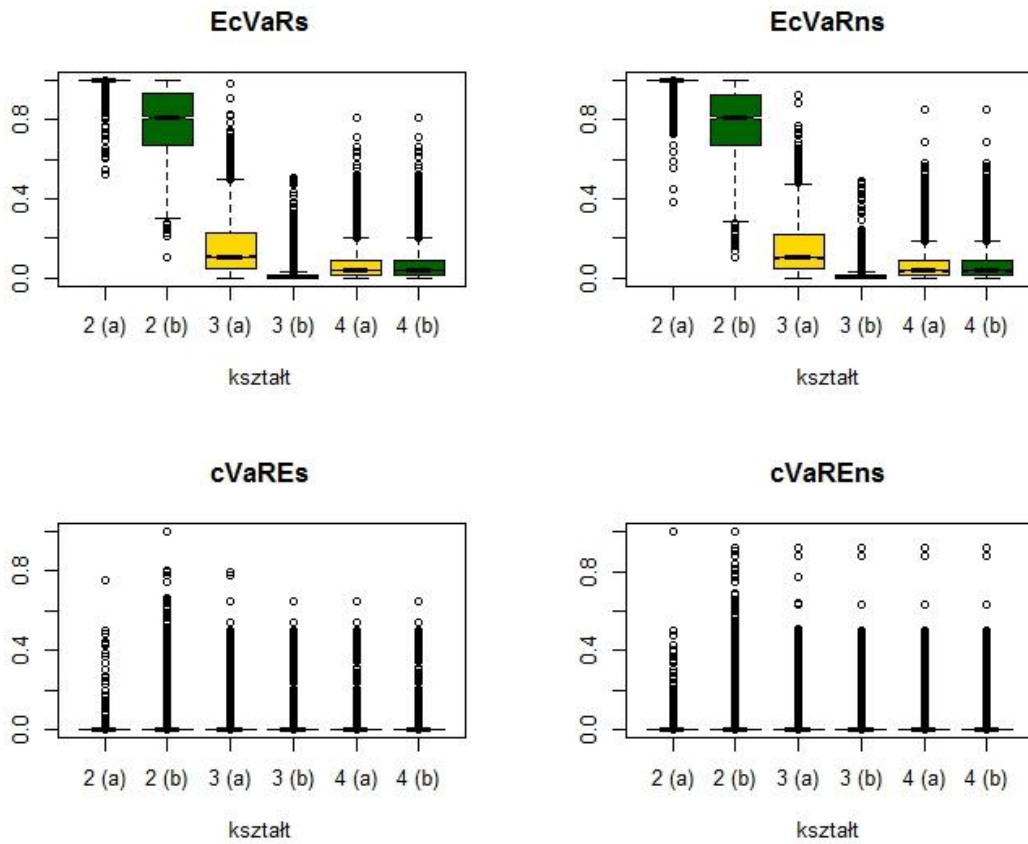


Rysunek 5.19: Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach EVaR oraz VaRE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns)



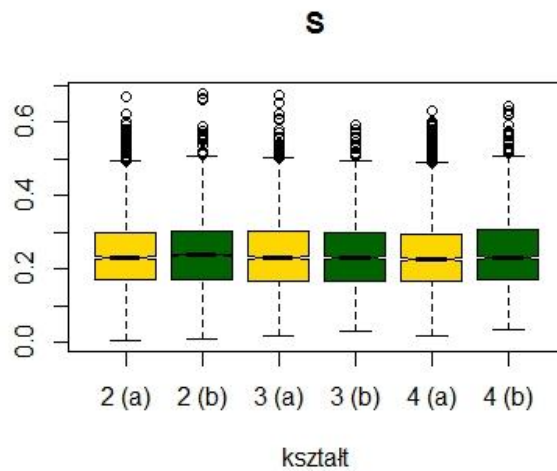
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.20: Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach ECVaR oraz CVaRE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns)



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.21: Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach maksymalizacji satysfakcji



Źródło: opracowanie własne

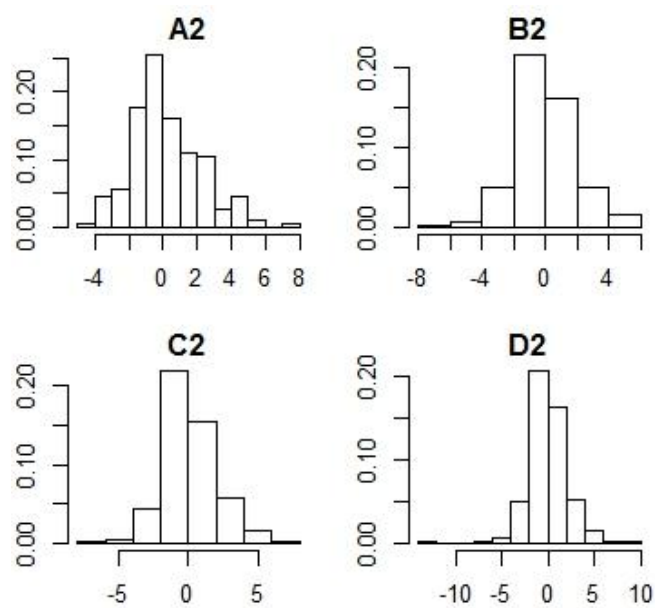
### 5.3 Badanie wpływu przyjętej metody wyznaczenia funkcji przynależności na wyznaczone rozmyte stopy zwrotu

Do badania wykorzystano metody statystyczno-częstościowe omówione w paragrafie 2.4. Badanie polegało na analizie różnic pomiędzy dyskretnymi funkcjami wyznaczonymi z różnych metod, a także różnic pomiędzy ciągłymi funkcjami (ich współczynnikami). Wyznaczanie ciągłej rozmytej stopy zwrotu, składa się z następujących kroków:

1. wyznaczenia histogramu logarytmicznych stóp zwrotu na podstawie dziennych notowań spółki w trakcie okresu analizy danych,
2. wyznaczenia dyskretnych funkcji przynależności metodami:
  - transformacji bijektywnej Dubois i Prade (oznaczana  $BP$ ),
  - zachowania niepewności Klira (oznaczana  $K$ ),
  - maksymalizacji entropii (oznaczana  $ME$ ),
3. interpolacji ciągłych funkcji przynależności z narzuceniem warunków: normalności funkcji przynależności oraz trójkątnego kształtu.

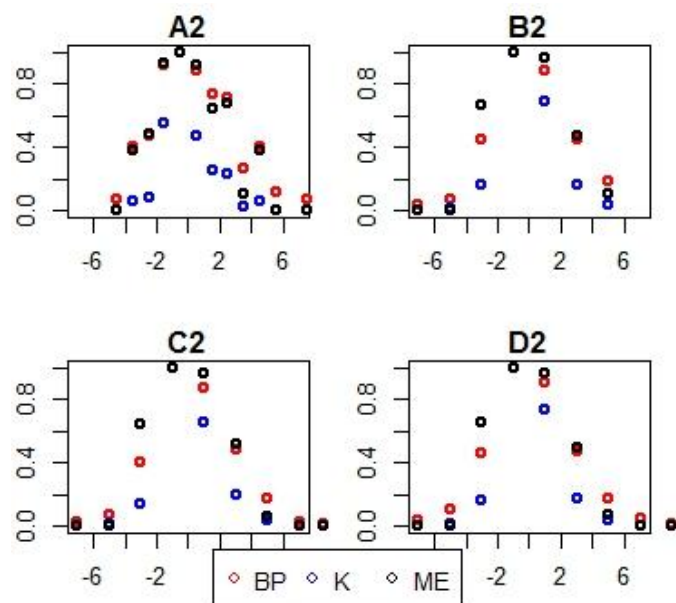
Podczas wyznaczania dyskretnych funkcji przynależności przy użyciu metody maksymalizacji entropii ważonej problematyczne okazało się wyznaczenie parametrów  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  w 58 przypadkach na 440. Odległości (cosinusowa i euklidesowa) wyznaczone pomiędzy funkcjami przynależności przedstawia tabela E.1, przykładowe dyskretne funkcje przynależności przedstawia rysunek 5.23. Największe różnice zanotowano pomiędzy podejściami o różnym założeniu co do entropii - a więc w metodzie zachowania entropii Klira oraz maksymalizacji entropii ważonej, najmniejsze dla metod  $BP$  i  $ME$ . Średnia odległość pomiędzy wyznaczonymi dyskretnymi funkcjami przynależności korzystając z miary cosinusowej podobieństwa dla metod  $BP$  i  $ME$  to 0,0200 przy 0,0657 dla metod  $K$  i  $BP$  oraz 0,0848 dla metod  $ME$  i  $K$ . Wyniki testu Wilcoxona dla porównania metod  $BP$  i  $K$  na poziomie istotności 0,05 wskazują, że jedynie w około 15% przypadków należy odrzucić hipotezę zerową o braku istotnych różnic pomiędzy wektorami dyskretnych funkcji przynależności wyznaczonymi tymi metodami.

Rysunek 5.22: Histogramy wyznaczone dla ACP w różnych okresach.



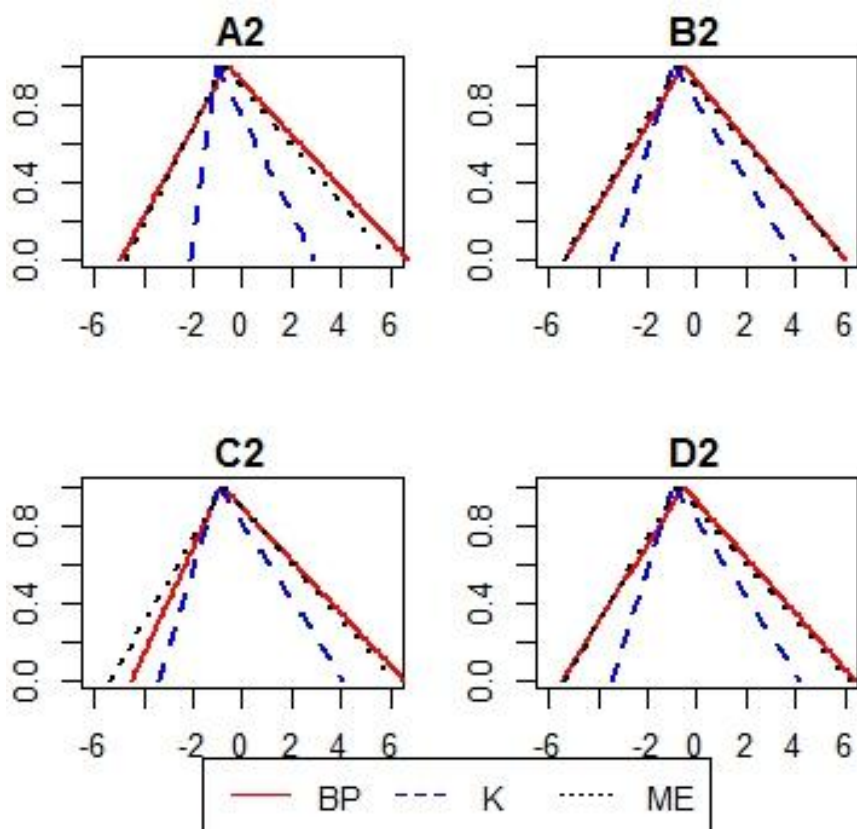
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.23: Dyskretne funkcje przynależności wyznaczone dla ACP.



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.24: Ciągłe funkcje przynależności wyznaczone dla ACP.



Źródło: opracowanie własne

Wyznaczone ciągłe funkcje przynależności przedstawia tabela E.2. Niezależnie od spółki i okresu najwęższym nośnikiem charakteryzują się funkcje przynależności wyznaczone metodą *K*. Przykładowe funkcje wyznaczone różnymi metodami przedstawia rysunek 5.24. Różnice po interpolacji pomiędzy parametrami wyznaczonymi różnymi metodami zmniejszyły się, szczególnie mocno dla metod *K* i *ME*, nadal najmniejsze odległości charakteryzują metody *BP* i *ME*. Odległości są mniejsze niż 0,05 w ponad 90% przypadków dla wszystkich metod.

Badanie wykazało, że metody *BP* i *ME* przy założeniu wartości oczekiwanej na poziomie mediany zwracają zbliżone wyniki. Można zauważyć również, że wraz z wydłużeniem okresu analizy danych, maleją średnie odległości wektorów niezależnie od metod. Zaletą metod *BP* i *K* jest istnienie rozwiązania niezależnie od danych. Za wadę metody *K* można uznać zmniejszenie nośników zbiorów w stosunku do dziedziny histogramów, co jest sprzeczne z zasadą spójności możliwości-prawdopodobieństwa. Zaletą metody *ME* jest również możliwość uwzględnienia informacji niezawartych w danych poprzez wyznaczenie inne niż z danych historycznych wartości oczekiwanej. Jednak ze względu na szeroki horyzont czasowy badania oraz pominięcie roli eksperta w wyznaczaniu funkcji przynależności nie jest to uwzględnione w zakresie niniejszej pracy. Z powyższych powodów do dalszych badań wykorzystane zostaną rozmyte stopy zwrotu wyznaczone metodą transformacji bijektywnej Dubois i Prade.

## 5.4 Badanie empiryczne zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego

Badanie empiryczne zadań optymalizacji wykorzystujących rozmytą stopę zwrotu w ujęciu teorii wiarygodności Liu polegało na wyznaczeniu na ich podstawie udziałów w portfelach akcji notowanych w indeksie WIG20 Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie w wybranych podokresach od lipca 2008 roku do lipca 2013 roku, a następnie sprawdzeniu uzyskanych stóp zwrotu z poszczególnych portfeli w okresie testowym. Szczegółowy opis danych przedstawiono w paragrafie 4.5. Składy portfeli wyznaczano z ograniczeniem na maksymalny udział jednej spółki w portfelu wynoszącym 0,15. W celu zapewnienia istnienia zbioru rozwiązań dopuszczalnych, przy ograniczeniu niepewność portfela, przyjęto, że wartość wybranej miary niepewności nie może być większa niż wartość środkowa tej miary z rozpatrywanych spółek w okresie analizy danych. Analogicznie wyznaczono minimalne oczekiwane stopy zwrotu w zadaniach minimalizacji niepewności. W przypadku zadania maksymalizacji satysfakcji oczekiwania inwestorów przedstawia funkcja  $\gamma$  z parametrem  $a$  wyznaczonym jako wartość środkowa oczekiwanych stóp zwrotu poszczególnych akcji i parametrem  $b$  będącym maksymalną dzienną stopą zwrotu z akcji badanych spółek występująca w okresie analizy danych.

### 5.4.1 Badanie A

Na badanie A składa się siedem podokresów analizy danych oraz następujące po nich trzydziestodnie okresy testowe. Wyznaczone portfele przedstawione są w tabelach od F.1 do F.7. Uzyskane stopy zwrotu z poszczególnych portfeli przedstawia tabela 5.3. Kolorem czerwony oznaczono stopy niższe (zielonym wyższe) od stopy zwrotu z indeksu WIG20.

**Okres A1.** Z okresu analizy danych wyznaczono rozmyte stopy zwrotu akcji poszczególnych spółek. Z dwudziestu rozpatrywanych tylko dwie miały oczekiwane stopy zwrotu dodatnie: ACP oraz PNG.

Podokres testowy A1 obejmuje notowania od 2008-11-03 do 2008-12-16, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.25. W badanym okresie akcje spółki GTC uzyskały najwyższą dzienną stopę zwrotu 17,28 % (dnia 2008-11-24), jak również najniższą -18,42% (w dniu 2008-11-13). Średnio najwyższe stopy zwrotu (nieco ponad 0.5%) uzyskiwały akcje BRE, a najniższe -1,8% akcje BIO. Największą stopę zwrotu z badanego okresu uzyskał CST 12,85%, a najniższą BIO -76,54%.

Skład wyznaczonych portfeli przedstawiono w tabeli F.1. Portfele wyznaczone zadaniami maksymalizacji wartości oczekiwanej były mocno do siebie zbliżony. Zawierały głównie spółki: ACP, BZW, GTN, PGN, PKN, PKO. Największe udziały w portfelu będącym rozwiązaniem zadania maksymalizacji satysfakcji miały: BZW, CST, GTC, PGN, PND, PXM. Zadania minimalizacji niepewności wskazywały na różne walory, jedynie zadania minimalizacji wartości zagrożonej i minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej wskazały dokładnie ten sam portfel, złożony z: ACP, BIO, BZW, LTS, PGN, PKN, TPS.

Tabela 5.3: Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu A

okres	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
EV	-0,1417	-0,0069	-0,0466	0,0373	0,0891	0,0964	-0,0060
ESV	-0,1155	0,0617	-0,0459	0,0252	0,1010	0,1164	-0,0224
EH	-0,0570	0,0569	-0,0458	0,0270	0,1127	0,1202	-0,0263
EVaR	-0,0570	0,0569	-0,0458	0,0393	0,0994	0,1202	-0,0263
EcVaR	-0,0570	0,0569	-0,0458	0,0392	0,0997	0,1197	-0,0263
S1	-0,0877	0,0768	-0,0617	0,0149	0,1452	0,1096	-0,0218
S2	-0,0560	0,1196	-0,0564	-0,0169	0,1050	0,1065	-0,0335
S3	-0,0584	0,1279	-0,0528	-0,0153	0,0950	0,1070	-0,0302
VE	-0,1610	0,0936	-0,0434	0,0079	0,0895	0,0975	-0,0136
SVE	-0,0553	0,1856	-0,0612	0,0115	0,0714	0,0944	-0,0241
HE	-0,1443	0,0137	-0,0556	0,0097	0,0887	0,0958	-0,0133
VaRE	-0,2375	-0,0150	-0,0644	0,0041	0,0850	0,0942	-0,0092
cVaRE	-0,2375	-0,0020	-0,0644	0,0041	0,0850	0,0942	-0,0092
WIG20	-0,0611	0,0874	-0,0706	-0,0177	0,0534	0,0752	-0,0278

Źródło: opracowanie własne

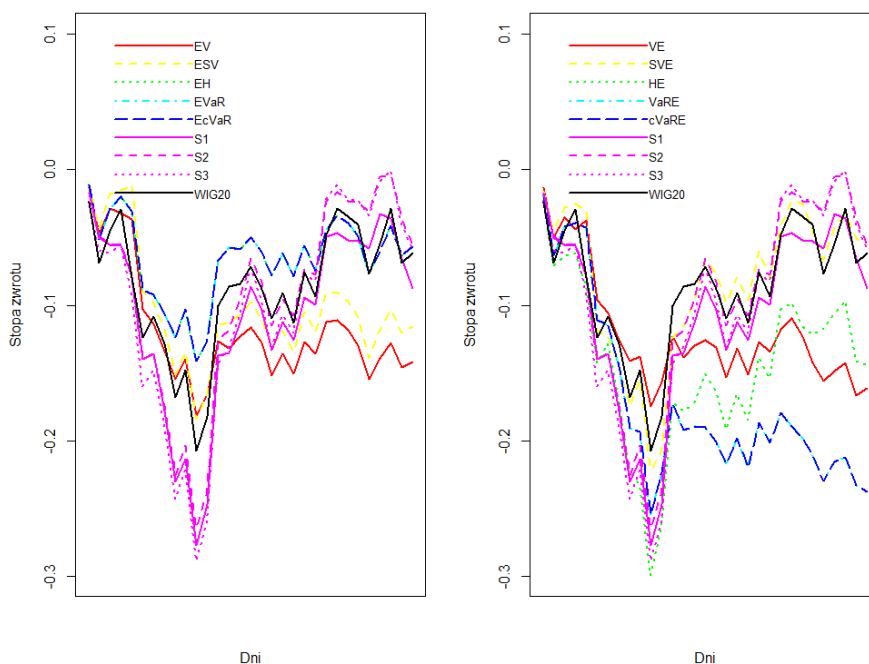
Stopy zwrotu z portfeli wyznaczonych poszczególnymi zadaniami przedstawiono na rysunku 5.26. W okresie testowym wszystkie portfele zanotowały straty, najniższą z nich zadanie SVE, najwyższą cVaRE i VaRE.

Rysunek 5.25: Kurs indeksu WIG20 od 2008-11-03 do 2008-12-16 (okres testowy A1)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.26: Wyniki portfeli od 2008-11-03 do 2008-12-16 (okres testowy A1)



Źródło: opracowanie własne

**Okres A2.** Rozmyte stopy zwrotów akcji w 7 przypadkach na 20 miały wartość oczekiwaną poniżej 0, najwyższą wartość oczekiwaną rozmyta stopa zwrotu spółki BIO<sup>4</sup>. Podokres testowy A2 obejmuje notowania od 2009-07-27 do 2009-09-07, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.27. Najwyższą dzienną stopę zwrotu 12.7 % uzyskało GTN (dnia 2009-08-13), najniższą -9,64% TVN (2009-08-04). Średnio

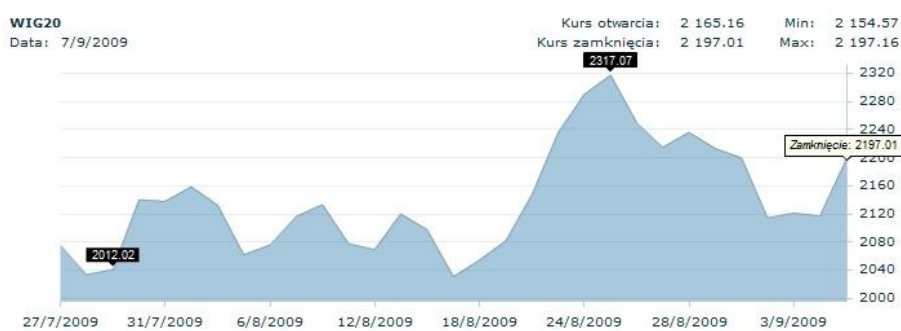
<sup>4</sup>Jednak rozmyta stopa zwrotu spółki BIO w tym okresie może budzić wątpliwość, co do poprawności wyznaczenia ze względu na prawie równe wartości parametrów b i c



najwyższe stopy zwrotu 1,24% uzyskiwały akcje BRE, a najniższe -0.445% akcje BIO. Z okresu testowego najwyższą stopę zwrotu uzyskał BRE (38,41%), za nim CST (30,07%), BZW (27,08%). Jedynie 4 spółki zanotowały stratę, w tym najniższą stopę BIO (-13,81%).

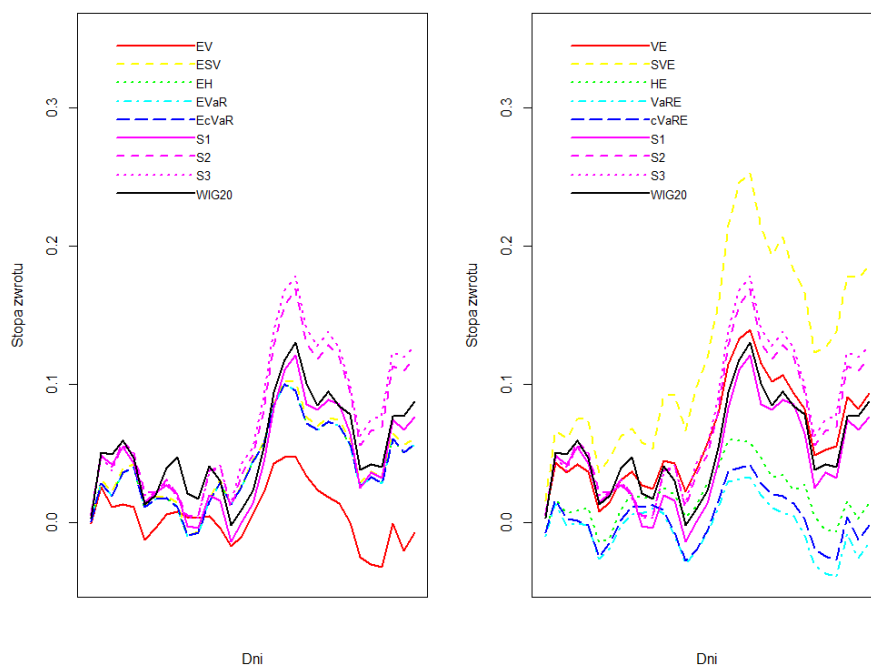
Spółka BIO miała 15% udział we wszystkich portfelach zadań maksymalizacji oraz zadań minimalizacji VaR i cVaR. Rozwiązania zadań maksymalizacji satysfakcji zawierały również wysoki udział spółki CST. Zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej ponownie wskazały zbliżone do siebie portfele (wyjątek zadanie EV), a zadania VaRE i cVaR portfela o dokładnie takim samym składzie. Najlepszy wynik w okresie testu uzyskało zadanie SVE 18,56%, następnie S2, S3 oraz VE. Stopy zwrotu pozostałych portfeli są niższe od stopy zwrotu uzyskanej z indeksu WIG20. Stopy zwrotu z portfeli przedstawiono na rysunku 5.28.

Rysunek 5.27: Kurs indeksu WIG20 od 2009-07-27 do 2009-09-07 (okres testowy A2)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.28: Stopy zwrotu portfeli od 2009-07-27 do 2009-09-07 (okres testowy A2)



Źródło: opracowanie własne

**Okres A3.** Wśród wyznaczonych rozmytych stóp zwrotów, dominowały te o ujemnej wartości oczekiwanej (w 14 na 20 akcji).

Podokres testowy A3 obejmuje okres od 2010-04-13 do 2010-05-26, kurs indeksu WIG20 w tym okresie przedstawia rysunek 5.29. Najwyższą dzienną stopę zwrotu w tym okresie 10,85 % uzyskał BRE (2010-05-25), najniższą -8,17% CTS (2010-05-13). Średnie dzienne stopy zwrotu wszystkich spółek były bardzo zbliżone do zera. Tylko dwie spółki: CPS i PKN nie zanotowały straty po okresie testowym, a ich stopy zwrotu były zbliżone do zera.

Ponownie zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej miały podobne rozwiązania. Ich portfele bazowały na spółkach: CEZ, GTN, PKN, PKO i TPS. Portfele wyznaczone zadaniami minimalizacji niepewności (z wyjątkiem zadania SVE) także przedstawiały zbliżone do siebie udziały. Zadanie maksymalizacji satysfakcji spółki: BRE, CPS, PZU i zależnie od parameterów awersji do ryzyka oraz żalu GTN i PXM (dla  $\alpha = 0$ ) lub BZW i GTC (dla wyższej awersji do ryzyka).

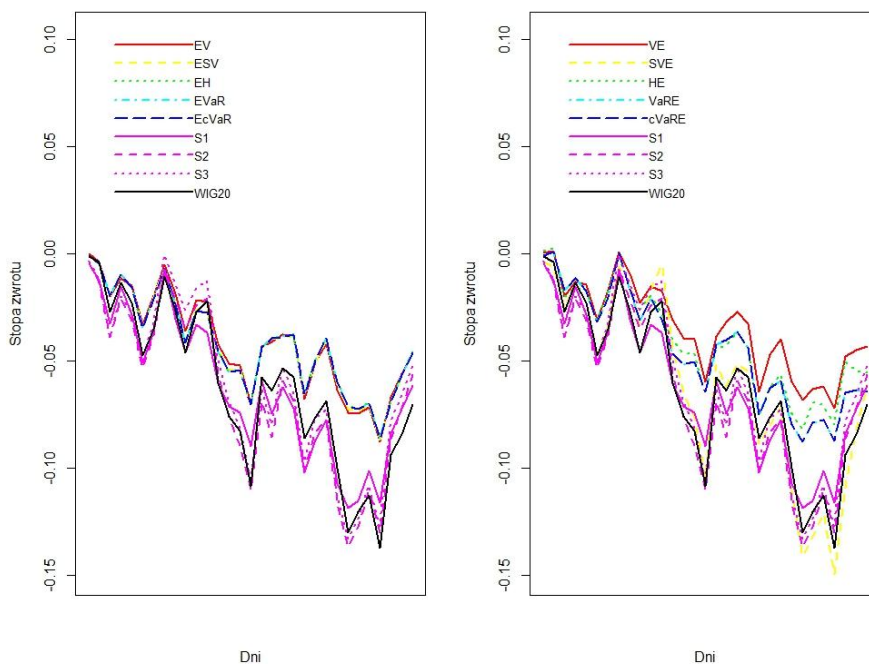
W badanym okresie wszystkie uzyskane stopy zwrotu były niższe od 0, jednocześnie nieznacznie wyższe niż stopy zwrotu z indeksu WIG20. Uzyskane stopy zwrotu przedstawiono na rysunku 5.30.

Rysunek 5.29: Kurs indeksu WIG20 od 2010-04-13 do 2010-05-26, (okres testowy A3)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.30: Stopy zwrotu portfeli od 2010-04-13 do 2010-05-26, (okres testowy A3)



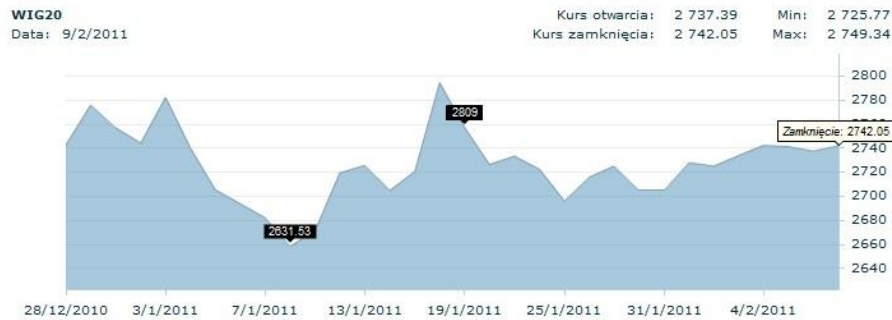
Źródło: opracowanie własne

**Okres A4.** Z okresu analizy danych wyznaczono rozmyte stopy zwrotów akcji charakteryzujące się nośnikami o nieznacznej szerokości, co wskazuje na niższą zmienność w okresie analizy danych. Wyjątkiem jest jedynie rozmyta stopa zwrotu TPE, którą charakteryzuje również najniższa oczekiwana stopa zwrotu (-2,26).

Podokres testowy A4 obejmuje okres od 2010-12-28 do 2011-02-09, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.31. w tym okresie najwyższą dzienną stopę zwrotu uzyskały akcje TPS nieco ponad 9% (2011-01-04), najniższą GTC -10,15% (2011-01-20). Średnie dzienne stopy zwrotu oscylowały bardzo blisko zera. Ponad połowa spółek zanotowała w tym okresie ujemne stopy zwrotu. Największe ze strat to: GTC -15,27% oraz PEO -11,04%, najwyższą stopę zwrotu uzyskał KER 12,67%.

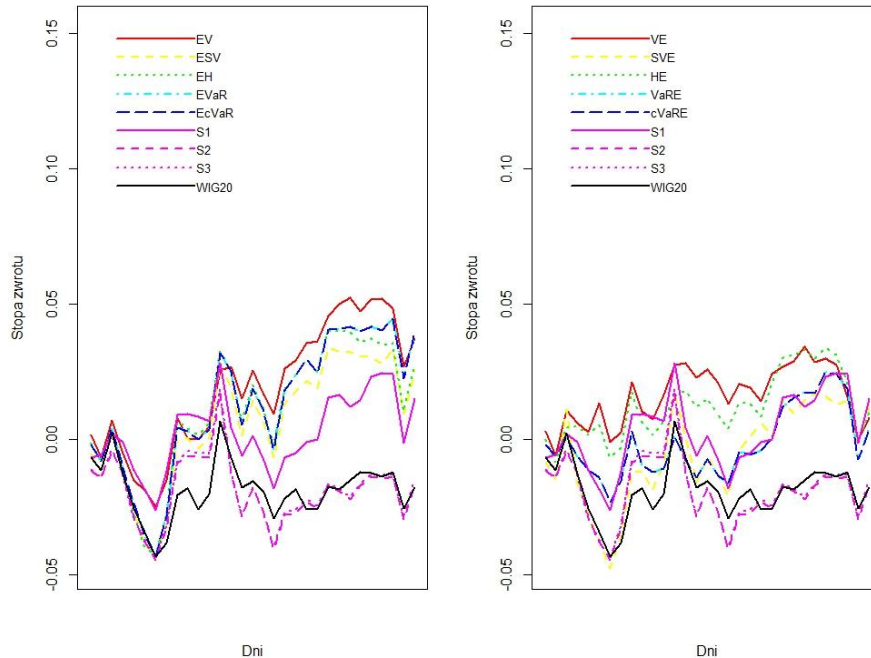
Rozwiązania zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej jak również satysfakcji przy zerowej awersji do ryzyka różnią się nieznacznie. Rozwiązania zadań VaRE i cVaRE są identyczne i nieznacznie się różnią od zdania HE. Stopy zwrotu z portfeli przedstawiono na rysunku 5.32. W okresie testowym A4 wszystkie z portfeli uzyskały wynik lepszy od wyniku indeksu WIG20.

Rysunek 5.31: Kurs indeksu WIG20 od 2010-12-28 do 2011-02-09 (okres testowy A4)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.32: Stopy zwrotu portfeli od 2010-12-28 do 2011-02-09 (okres testowy A4)

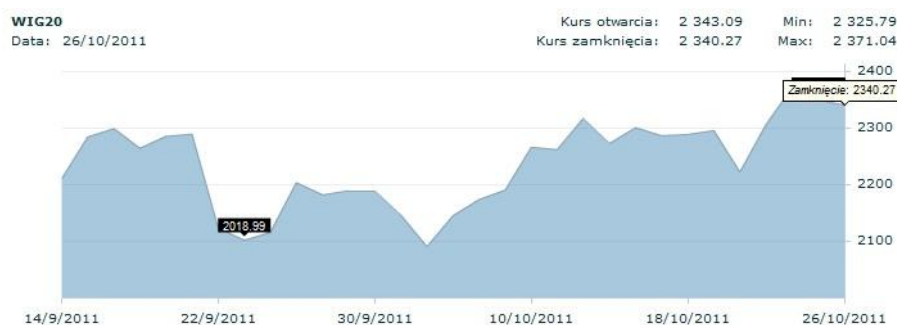


Źródło: opracowanie własne

**Okres A5.** w okresie analizy dany A5 tylko 3 wyznaczone rozmyte stopy zwrotu miały wartości oczekiwane dodatnie, w tym najwyższą 2,76 TPE. Funkcja przynależności zmiennej rozmytej TPE charakteryzuje również najszerszy nośnik funkcji przynależności, co można zinterpretować jako dużą zmienność. Podokres testowy

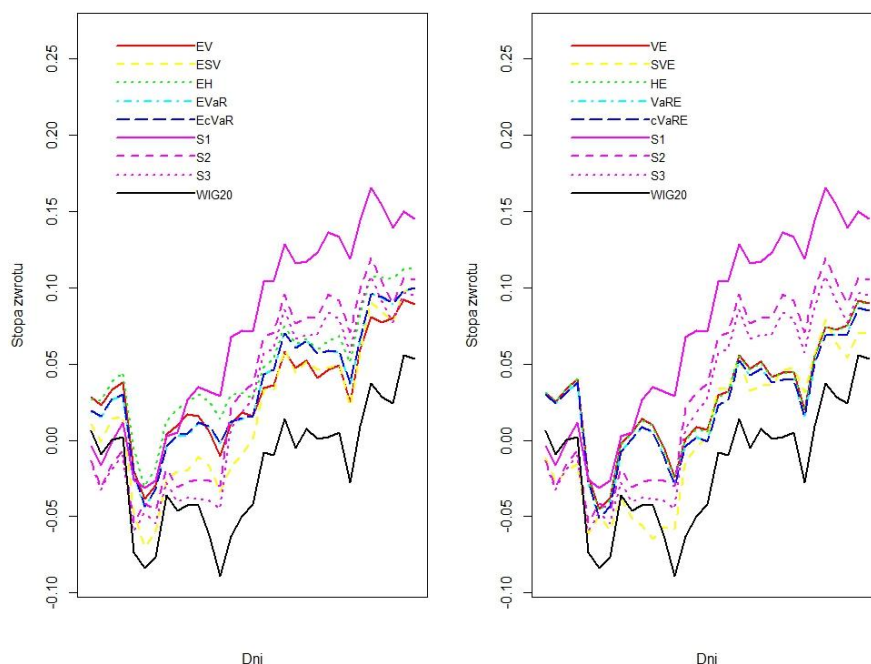
A5 obejmuje okres od 2011-09-14 do 2011-10-26, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.33. w tym okresie maksymalną dzienną stopę zwrotu zanotował PBG (14,6% dnia 2011-10-06), minimalną KGH (-14,33%, 2011-09-23). Aż 17 spółek uzyskało dodatnią stopę zwrotu z podokresu testowego, w tym 7 ponad 10% wzrosty (PKO, PEO, PBG, LTS, GTC, BRE, BHW, ACP). Największe udziały w portfelach wybranych przez zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej miały akcje spółek: ACP, BRE, JSW, PGN, TPE, TPS, przez zadania maksymalizacji satysfakcji: GTC, GTN, KER, PBG, PZU, TPE. Zadania minimalizacji wskazywały na spółki: ACP, BHW, JSW, PGN, PKN, PKO i TPS (z wyjątkiem zadania SVE). Stopy zwrotu portfeli przedstawiono na rysunku 5.34. Wszystkie rozwiązania dały wyższe stopy zwrotu niż indeks WIG20, od ok 3 punktów procentowych (VaRE i cVaR) do 9 punktów procentowych (S1).

Rysunek 5.33: Kurs indeksu WIG20 od 2011-09-14 do 2011-10-26 (okres testowy A5)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.34: Stopy zwrotu portfeli od 2011-09-14 do 2011-10-26 (okres testowy A5)



Źródło: opracowanie własne

**Okres A6.** Podokres testowy A6 obejmuje okres od 2012-06-04 do 2012-07-17, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.35. Najwyższą jak również najniższą dzienną stopę zwrotu zanotował GTC ( 7,78% 2012-06-13 i -5,97% 2012-06-11), a jedynie BRS zanotował stratę w okresie testowym. Zadanie EV do portfela wybrało głównie (udziały powyżej 10%) akcje spółek: ACP, BHW, BRE, PKO i TPS. W portfelach wyznaczonych przez inne zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej znalazły się: GTC, JSW, KGH, LWB, PKO. Zadania maksymalizacji satysfakcji wskazały na: BRS, KER, LWB, PZU i TPE, a zadania minimalizacji niepewności na spółki: ACP, BHW, BRE, PGN, PKO, TPS. Stopy zwrotu z portfeli wyznaczonych zadaniami maksymalizacji przedstawiono na rysunku 5.36. Wszystkie portfele uzyskały dodatnie stopy zwrotu, przy czym zadania minimalizacji niepewności wynik lepszy od indeksu WIG20 o około 2 punkty procentowe a zadania maksymalizacji od 2 do 4,5 punkty procentowego.

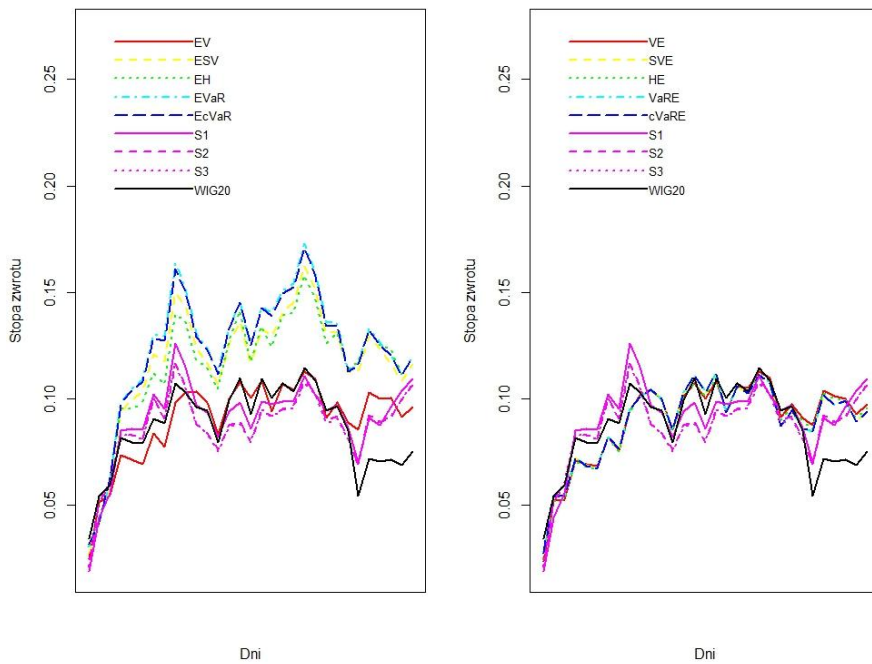
**Okres A7.** Połowa z wyznaczonych wartości oczekiwanych rozmytych stóp zwrotów było dodatnich, a połowa ujemnych, prawie wszystkie bardzo zbliżone do 0. Podokres testowy A7 obejmuje okres od 2013-02-21 do 2013-04-08, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.37. w tym okresie maksymalny dzienny spadek wynosił -5,1% dla akcji KER (2013-03-22), spółka ta uzyskała również najniższą stopę zwrotu z okresu testowego -14%. Spółka SNS zanotowała najwyższy dzienny wzrost 7,87% (2013-03-06), przy najlepszym wyniki z całego okresu 10,65%. Zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej w swoich portfelach z udziałem powyżej 10% mają spółki: ACP, BHW, KGH, LTS, PGN, PKN, TVN. Porfele zadań maksymalizacji satysfakcji składają się głównie z: BRS, KER, PGE, PGN i TVN, natomiast zadania minimalizacji niepewności (z wyłączeniem zadania SVE): ACP, BHW, BRE, JSW,

Rysunek 5.35: Kurs indeksu WIG20 od 2012-06-04 do 2012-07-17 (okres testowy A6)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.36: Stopy zwrotu portfeli od 2012-06-04 do 2012-07-17 (okres testowy A6)



Źródło: opracowanie własne

PEO, PGN, PKO.

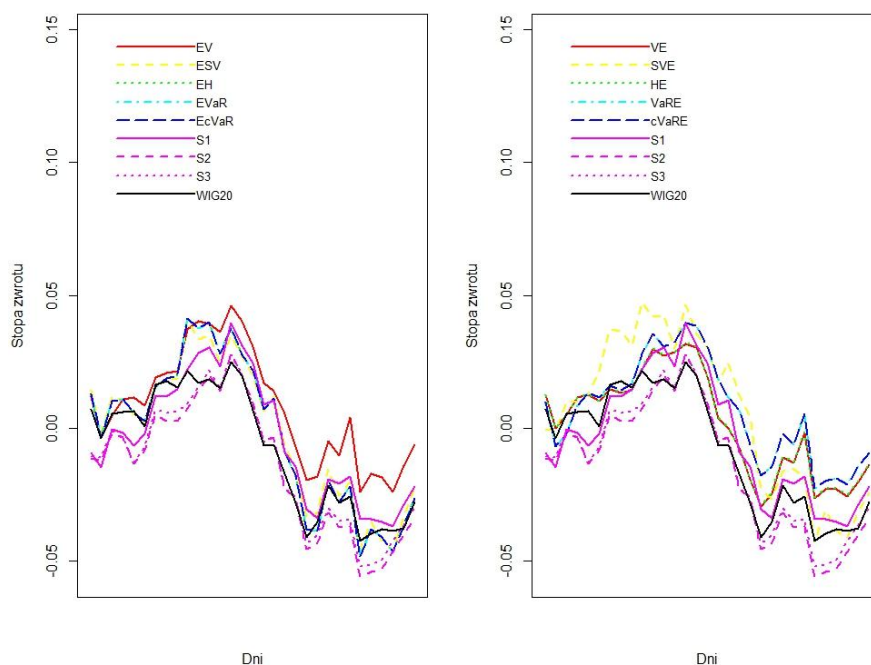
w ostatnim okresie testowym badania A wszystkie stopy zwrotu uzyskane z wybranych portfeli są ujemne, jednak większe od stopy z indeksu WIG20 (wykres nr 5.38).

Rysunek 5.37: Kurs indeksu WIG20 od 2013-02-21 do 2013-04-08 (okres testowy A7)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.38: Stopy zwrotu portfeli od 2013-02-21 do 2013-04-08 (okres testowy A7)



Źródło: opracowanie własne

## 5.4.2 Badanie B

Badanie B składa się z 5 okresów analizy danych o długości 180 dni oraz następujących po nich dziewięćdziesięciodniowych okresów testowych. Wyznaczone udziały



Tabela 5.4: Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu B

	B1	B2	B3	B4	B5
EV	0,2861	0,0374	0,0714	-0,0544	-0,0778
ESV	0,2813	0,0277	0,0813	-0,0715	-0,1099
EH	0,2816	0,0527	0,0773	-0,0466	-0,1149
EVaR	0,2816	0,0560	0,0805	-0,0582	-0,1085
EcVaR	0,2816	0,0564	0,0805	-0,0565	-0,1101
S1	0,4524	0,0684	0,0578	-0,5171	-0,1117
S2	0,4650	0,0599	0,0607	-0,5604	-0,1242
S3	0,4507	0,0588	0,0630	-0,5648	-0,1245
VE	0,3009	0,0530	0,0179	-0,2268	-0,0442
SVE	0,4611	0,0676	0,0873	-0,5364	-0,0210
HE	0,2469	0,0473	0,0147	-0,0185	-0,0157
VaRE	0,2875	0,0471	0,0086	-0,0300	-0,0222
cVaRE	0,2875	0,0471	0,0086	-0,0300	-0,0222
WIG20	0,3397	0,0307	0,0369	-0,0651	-0,0427

Źródło: opracowanie własne

poszczególnych zadań w poszczególnych okresach przedstawiają tabele nr F.8 - F.12, stopy zwrotu z tych okresów przedstawia tabela 5.4.

**Okres B1.** Wszystkie wyznaczone z okresu analizy danych rozmyte stopy zwrotu charakteryzują się ujemnymi wartościami oczekiwanymi i dość szerokim nośnikiem (od 14 do 27%). Podokres testowy B1 obejmuje okres od 2009-03-17 do 2009-07-27, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.39. w badanym okresie tylko TPS uzyskała ujemną stopę zwrotu, a aż 13 spółek stopy zwrotu powyżej 30%, przy czym KGH blisko 80% wzrost.

Portfele wyznaczone na podstawie zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej składały się głównie ze spółek: ACP, BRE, GTN, PBG, PGN, PKN, TPS. Zadania maksymalizacji satysfakcji: BRE, CPS, CST, GTC, GTN, PEO, PXM. Zadanie VE: ACP, PGN, PKN, TPS, zadanie SVE: AGO, BRE, CEZ, LTS, PEO, PKN. Portfele VaRE i cVaR są takie same i zbliżone składem do rozwiązania zadania HE: ACP, BIO, PBG, PGN, TPS oraz BRE i GTN (dla VaRE i cVaRE), a także LTS i PKN (dla HE).

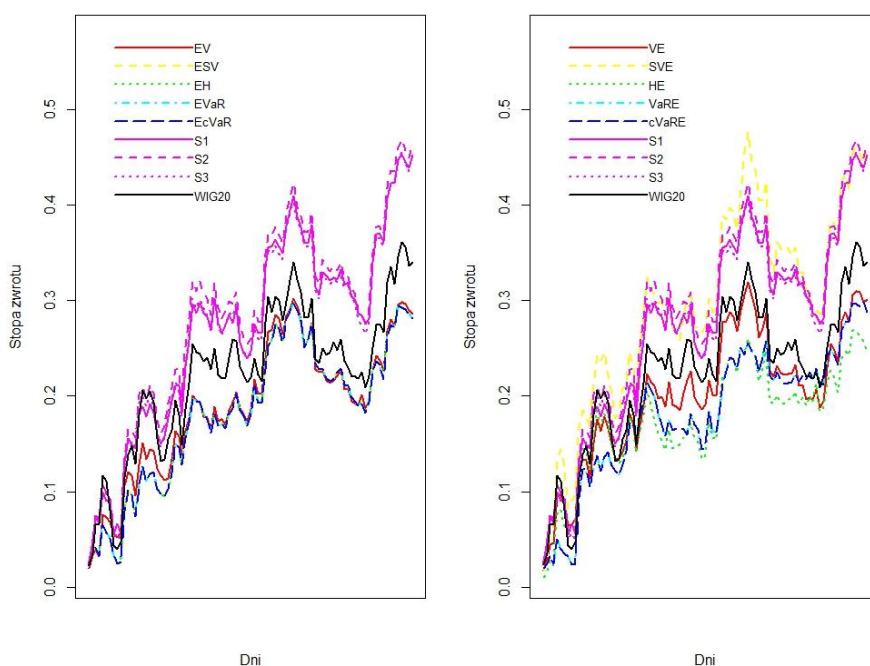
Uzyskane w okresie testowym stopy zwrotu przedstawiono na rysunku 5.40. Najwyższe stopy zwrotu uzyskały zadania maksymalizacji satysfakcji oraz minimalizacji samiwariancji, inne zadania uzyskały wynik nieco gorszy niż stopa zwrotu z inwestycji w indeks WIG20.

Rysunek 5.39: Kurs indeksu WIG20 od 2009-03-17 do 2009-07-27 (okres testowy B1)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.40: Stopy zwrotu portfeli od 2009-03-17 do 2009-07-27 (okres testowy B1)

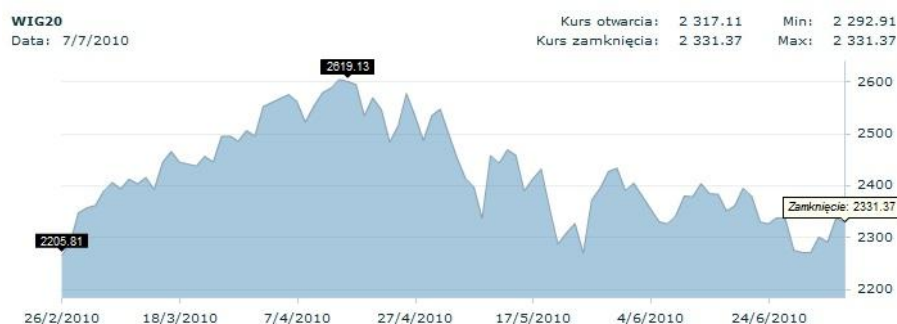


Źródło: opracowanie własne

**Okres B2.** Jedynie 7 z 20 wyznaczonych rozmytych stóp zwrotu ma ujemne wartości oczekiwane (wszystkie większe niż  $-0,22$ ). Podokres testowy B2 obejmuje okres od 2010-02-26 do 2010-07-08, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.42. Najwyższą dzienną stopę zwrotu 10,85 % uzyskało BRE (dnia 2010-05-27), najniższą  $-10\%$  BIO w dniu 2010-06-24. Tylko 6 spółek uzyskało ujemne stopy zwrotu z badanego okresu, maksymalna stopa zwrotu to 21,14% spółki BRE. Zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej wskazywały na spółki: BIO, BZW, GTN, PKO, TVN. Zadania maksymalizacji satysfakcji BIO i BZW, oprócz tego BRE i CST oraz AGO, PEO (zadania z niezerową awersją do ryzyka), a także GTN i PKO (zadanie z zerową awersją do ryzyka). Liniowe zadania minimalizacji (HE, cVaR

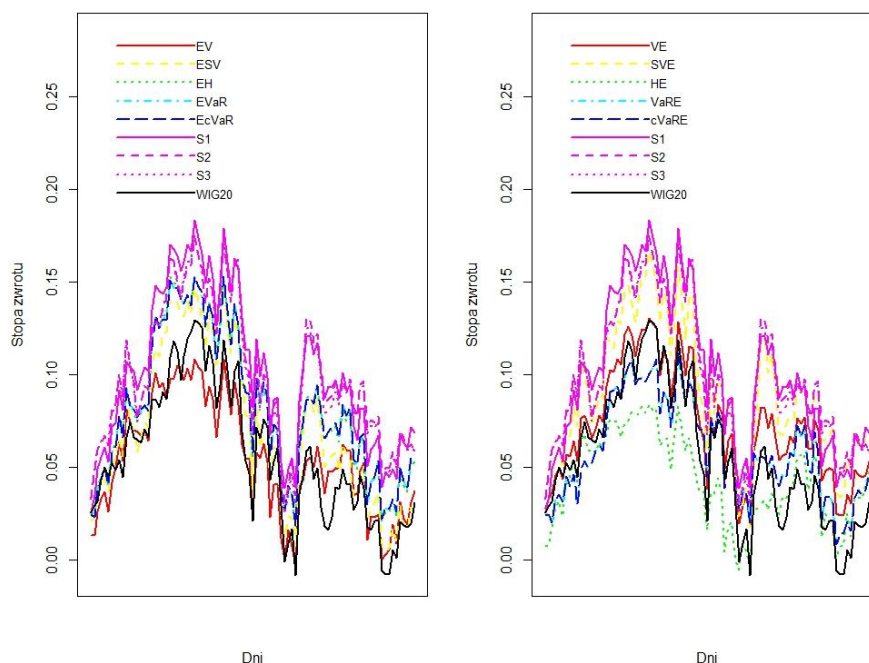
i VaR) ponownie miały zbliżone składy portfeli, głównie: ACP, CEZ, GTN, PBG. Zadanie minimalizacji semiwariancji wskazało skład zbliżony do zadania maksymalizacji satysfakcji z zerowym parametrem żalu. Zadanie minimalizacji wariancji nie udało się znaleźć optymalnego rozwiązania. Stopy zwrotu z portfeli przedstawiono na rysunku 5.42. Najniższe stopy zwrotu, niższe niż z indeksu, uzyskały portfele zadań EV i ESV, najwyższą S i SVE, wyższą o niecałe 3 punkty procentowe od stopy zwrotu z WIG20.

Rysunek 5.41: Kurs indeksu WIG20 od 2010-02-26 do 2010-07-08 (okres testowy B2)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.42: Stopy zwrotu portfeli od 2010-02-26 do 2010-07-08 (okres testowy B2)



Źródło: opracowanie własne

**Okres B3.** Podokres testowy B3 obejmuje okres od 2011-02-09 do 2011-06-20, kurs indeksu WIG20 w tym okresie przedstawia rysunek 5.43. Najwyższą dzienną

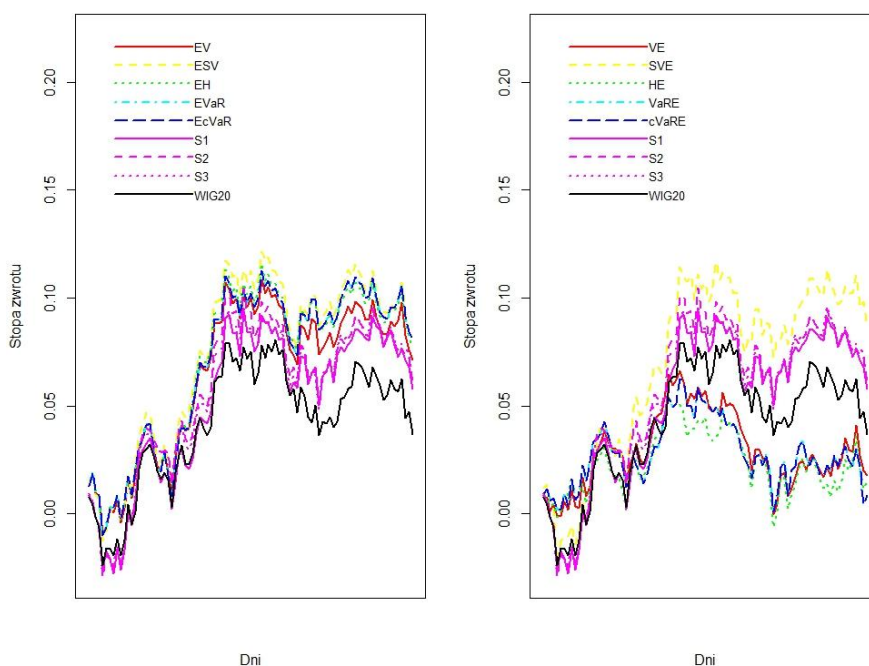
stopę zwrotu 6,35% uzyskał PKN (2011-04-04), najniższą -6,37% GTC w dniu 2011-05-18. Najniższe stopy zwrotu w badanym okresie uzyskały PBG (-26,95%), PXM (-12,4%), GTC (-10%), największe CEZ (14,86%), PKN (13,01%), LTS (11%), PGN (10,59%), TPS (10,06%). Portfele wyznaczone w oparciu o zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej składały się głównie z: BRE, GTN, KGH, LTS, PZU, TPS. Zadania maksymalizacji satysfakcji wskazywały na: BRE, CPS, KGH, TPE. Zadanie VE: CEZ, GTN, PBG, zadanie SV: BRE, KGH, LTS, PKN, PZU, TPE i TPS. Zadania minimalizacji wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej dobrały do portfeli akcje: BZW, CPS, GTN, LTS, PBG, PGN, a zadanie minimalizacji entropii: CEZ, GTC, GTN, PBG, PGN, PZU. Stopy zwrotu z portfeli przedstawiono na rysunku 5.44.

Rysunek 5.43: Kurs indeksu WIG20 od 2011-02-09 do 2011-06-20 (okres testowy B3)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.44: Stopy zwrotu portfeli od 2011-02-09 do 2011-06-20 (okres testowy B3)

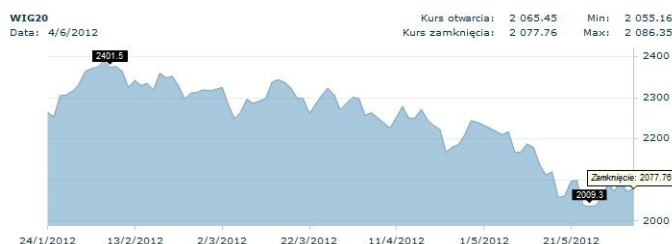


Źródło: opracowanie własne

**Okres B4.** Z wyznaczonych rozmytych stóp zwrotów największą wartość oczekiwaną ma stopa zwrotu TPE 2,52 (1 z 3 dodatnich wartości oczekiwanych) przy najszerszym nośniku wynoszącym aż 37,7. Pozostałe wartości oczekiwane znajdują się w przedziale od -0,5 do 0,5. Podokres testowy B4 obejmuje okres od 2012-01-24 do 2012-06-04, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.45. w okresie testowym największą i najmniejszą dzienną stopę zwrotu zanotował PBG (16,41% dnia 2012-05-23 i -62,12% dnia 2012-06-06), a w całym okresie -68%. Stopy zwrotu z badanego okresu były nieujemne tylko dla akcji spółek: ACP (ok. 2%), BHW (ok. 1%), PGN (ok. 5%), LWB (0,9%), KGH (ok. 1%).

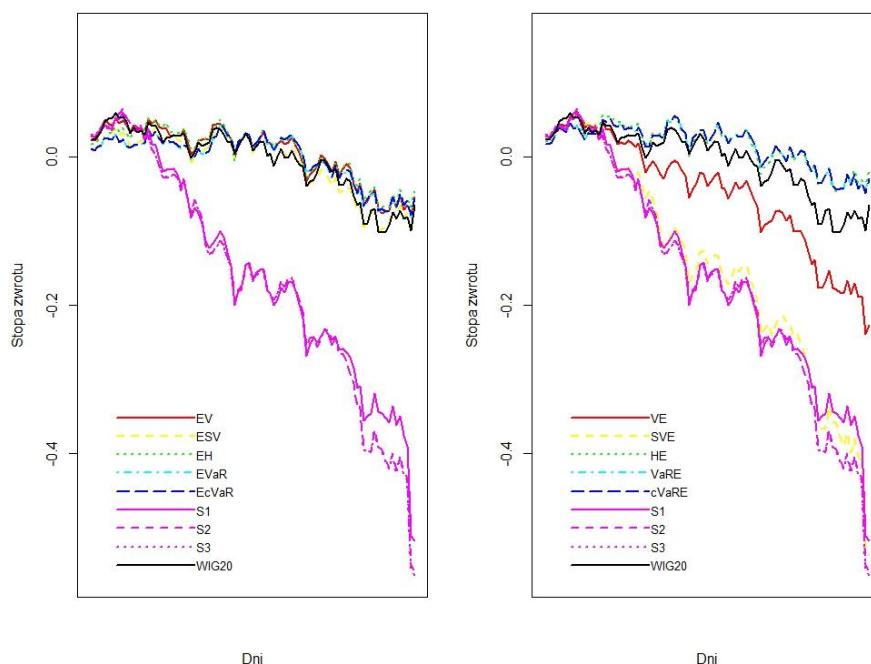
Stopy zwrotu z wyznaczonych portfeli przedstawia rysunek nr 5.46. Portfele wyznaczone zadaniem maksymalizacji satysfakcji oraz minimalizacji semiwariancji zanotowały straty ok 50%. Portfele te w składzie miały 15% udział akcji PBG. Poniżej stopy zwrotu z indeksu wypadły również portfele wyznaczone zadaniami minimalizacji wariancji i maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu na semiwariancję. Żaden z portfeli nie uzyskał dodatnich stóp zwrotu w okresie B4.

Rysunek 5.45: Kurs indeksu WIG20 od 2012-01-24 do 2012-06-04 (okres testowy B4)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

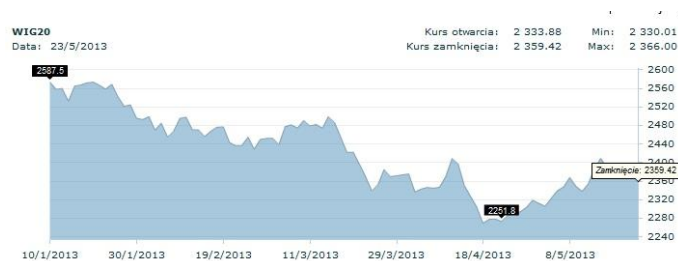
Rysunek 5.46: Stopy zwrotu portfeli od 2012-01-24 do 2012-06-04 (okres testowy B4)



Źródło: opracowanie własne

**Okres B5.** w odróżnieniu do poprzedniego okresu w tym okresie rozmyta stopa zwrotu TPE ma najniższą wartość (-2,14) nadal przy bardzo dużym nośniku zmiennej rozmytej. Najwyższą wartością oczekiwaną posiada zmienna rozmyta spółki LWB. Podokres testowy B5 obejmuje okres od 2013-01-10 do 2013-05-23, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.48. Najniższą dzienną stopę zwrotu (-32%, 2013-02-13) jak również najniższą stopę zwrotu z badanego okresu (-0.46%) zanotowało TPS. Najwyższe stopy zwrotu uzyskały BRE (21,21%), PGN (16,72%), SNS (13%), jednocześnie bardzo niskie stopy zwrotu BRS (-35,4%), KGH (-26,9%), JSW (-21,68%).

Rysunek 5.47: Kurs indeksu WIG20 od 2013-01-10 do 2013-05-23 (okres testowy B5)



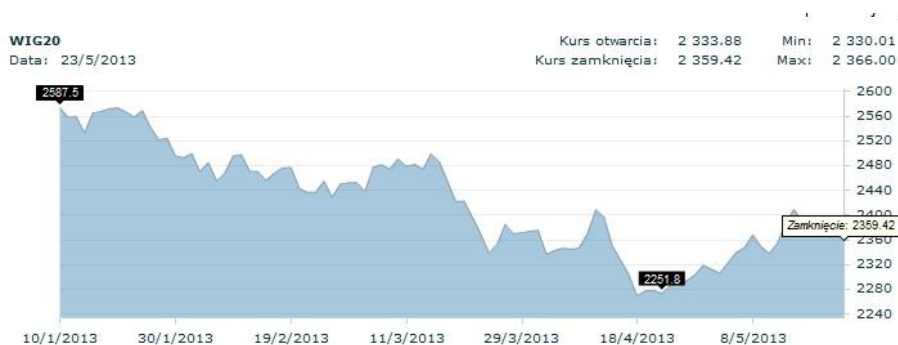
Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Tabela 5.5: Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu C

	C1	C2	C3	C4	C5
EV	0,0037	0,1467	-0,2164	0,0751	-0,0939
ESV	-0,0269	0,2904	-0,3339	0,0888	-0,0315
EH	-0,0243	0,2298	-0,2850	0,0363	-0,1399
EVaR	-0,0243	0,2735	-0,2900	0,0401	-0,1460
EcVaR	-0,0243	0,2744	-0,2900	0,0403	-0,0984
S1	0,0363	0,2675	-0,3021	-0,0366	-0,1524
S2	0,0113	0,1543	-0,2108	-0,2841	-0,1404
S3	0,0151	0,1500	-0,1933	-0,3021	-0,1346
VE	0,0574	0,0967	-0,2485	-0,0813	-0,0782
SVE	0,0888	0,2329	-0,2772	-0,1077	-0,0855
HE	0,0291	0,1530	-0,2818	0,0381	-0,0777
VaRE	0,0291	0,0573	-0,2774	0,0306	-0,0849
cVaRE	0,0291	0,0573	-0,2774	0,0306	-0,0849
WIG20	0,0299	0,1557	-0,2188	0,0531	-0,0951

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.48: Stopy zwrotu od 2013-01-10 do 2013-05-23 (okres testowy B5)



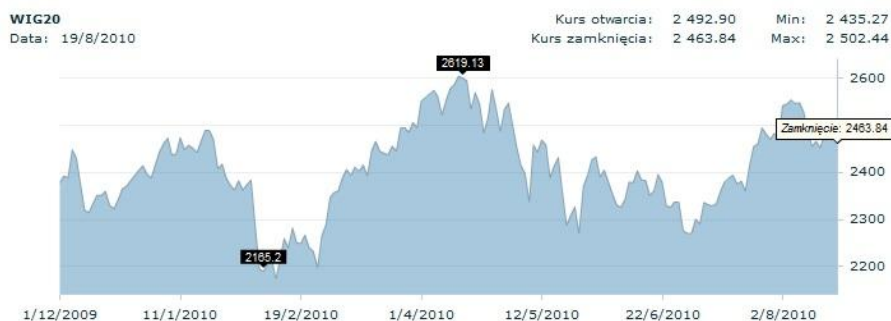
Źródło: opracowanie własne

### 5.4.3 Badanie C

Badanie C obejmuje 5 okresów analizy danych o długości 360 dni oraz następujące po nich półroczne okresy testowe. Stopy zwrotu z okresów testowych przedstawia tabela 5.5. Skład portfeli w poszczególnych okresach testowych zawierają tabele F.13 - F.17.

**Okres C1** Podokres testowy C1 obejmuje okres od 2009-12-01 do 2010-08-19, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.49. Największy dzienny spadek zanotował BIO -10% w dniu 2010-06-24, tracąc w całym okresie -18,23%, oprócz niego 6 spółek po okresie testowym miało ujemne stopy zwrotu do -9%. Jednocześnie inne spółki zanotowały wzrosty np. TVN 33,95%, PKN 21,11%, PXM 19,41%, TPS 14,9%. Zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej wybrały zbliżone składem portfele z: ACP, BZW, GTC, LTS, PEO, PKO. Zadania maksymalizacji satysfakcji obok GTC, BZW i PEO wybrało BRE i CST. Liniowe zadania minimalizacji duże udziały przypisało: ACP, CEZ, GTN, LTS, PBG. Zadanie VS wybrało wszystkie akcje do portfela, a SV: ACP, CEZ, KGH, PEO i TVN. Stopy zwrotu z portfeli przedstawia na rysunku 5.50. Cztery zadania miały ujemną stopę zwrotu (ESV, EH, EVaR, EcVaR), jednak jedynie rozwiązania zadań S1, VE i SVE były wyższe od stopy zwrotu z indeksu WIG20.

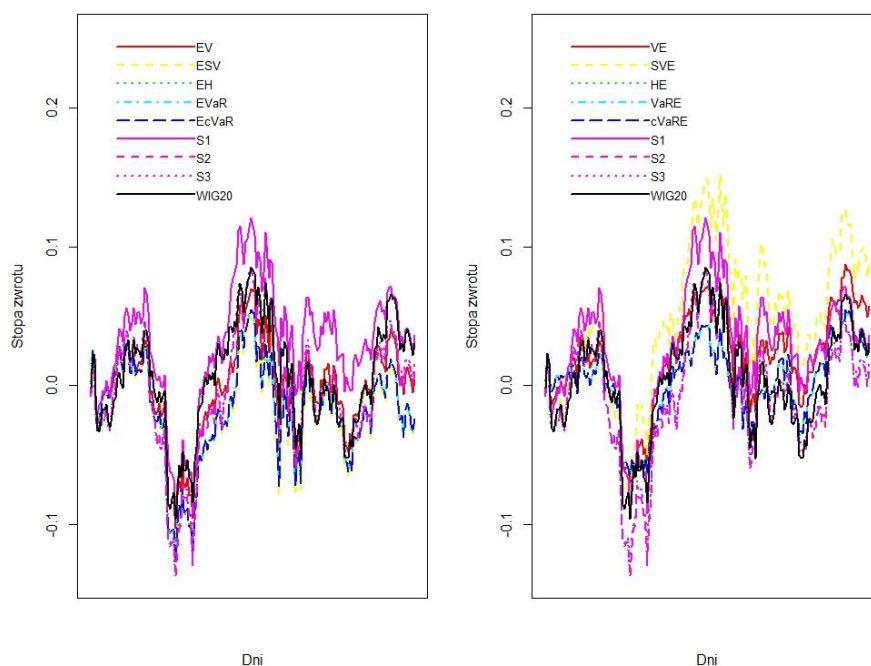
Rysunek 5.49: Kurs indeksu WIG20 od 2009-12-01 do 2010-08-19 (okres testowy C1)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)



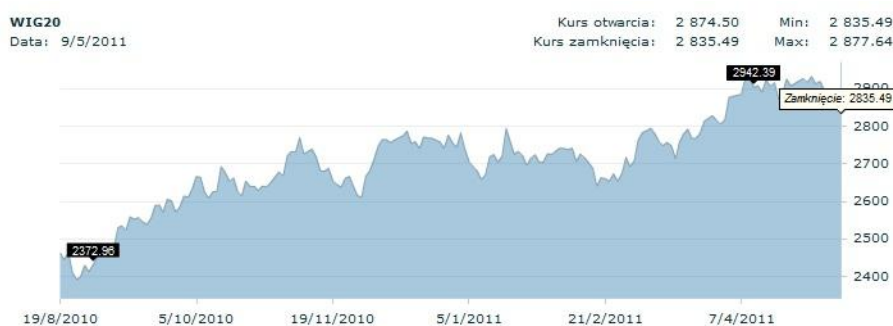
Rysunek 5.50: Stopy zwrotu portfeli od 2009-12-01 do 2010-08-19 (okres testowy C1)



Źródło: pracowanie własne

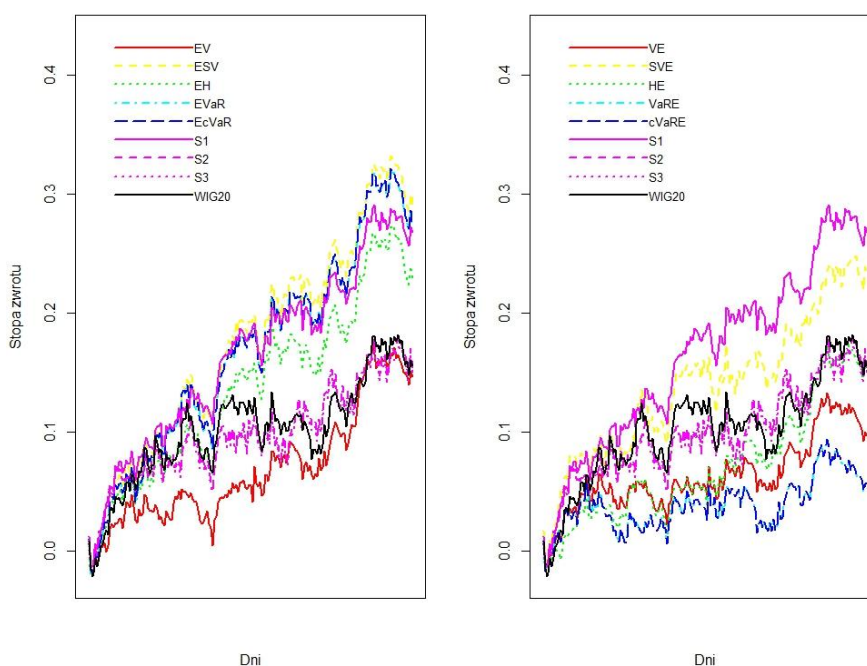
**Okres C2.** Podokres testowy C2 obejmuje okres od 2010-08-19 do 2011-05-09, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.51 Najwyższą, jak również najniższą dzienną stopę zwrotu uzyskało BIO (13,3% dwukrotnie dnia 2010-12-21 i 2010-12-30 oraz -13,35% w dniu 2010-12-20), kończąc całość okresu ze stopą zwrotu -27,19%. Większe straty zanotowały PXM -38,08 i PBG -38,38%. Skład wybranych portfeli przedstawia tabela F.14. Zadania VaRE i cVaRE w rozwiązaniu dały identyczne udziały w portfelach, zbliżone rozwiązanie reprezentowało zadanie HE (w składzie wspólnie m.in. ACP, CEZ, GTN, TPS), analogicznie zadania EVaR i EcVaR wraz z EH (z głównymi udziałami spółek: BRE, GTN, KGH, LTS, PKO, TVN). Zbliżone portfele prezentowały również zadania maksymalizacji satysfakcji z parametrami  $\alpha = 0,5$  i  $\alpha = 1$  (w składzie: BIO, BRE, BZW, KGH, PGE, TVN). Stopy zwrotu z portfeli przedstawia rysunek nr 5.52. Stopy zwrotu z okresu badania portfeli wyznaczonych przez zadania minimalizacji niepewności są niższe od 15,57% stopy zwrotu z WIG20. Zadania maksymalizacji satysfakcji z awersją do ryzyka 0,5 i 1, mają wynik zbliżony do WIG20, zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu wariancji nieco niższy. Natomiast wyniki portfeli innych zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej są od 7 do 14 punktów procentowych wyższe niż WIG20.

Rysunek 5.51: Kurs indeksu WIG20 od 2010-08-19 do 2011-05-09 (okres testowy C2)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

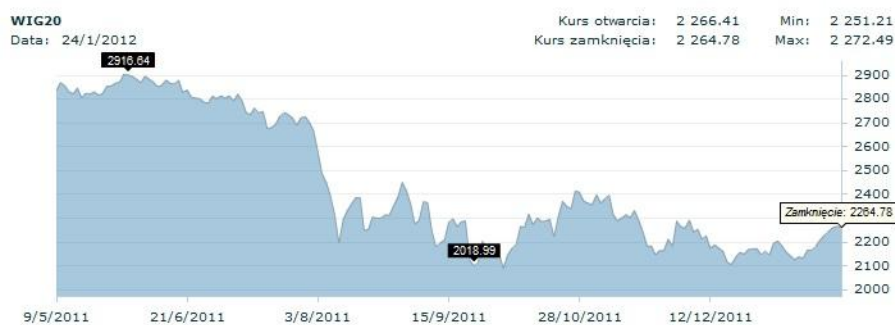
Rysunek 5.52: Stopy zwrotu portfeli od 2010-08-19 do 2011-05-09 (okres testowy C2)



Źródło: opracowanie własne

**Okres C3.** Podokres testowy C3 obejmuje okres od 2011-05-09 do 2012-01-24, kurs indeksu WIG20 w tym okresie przedstawia rysunek 5.53. Najwyższa dzienna stopa zwrotu wyniosła nieco ponad 14% dla PBG (2011-10-06), tyle samo wyniosła największa dzienna strata dla KGH w dniu 2011-11-21. Największą stratę z okresu testowego blisko 85% zanotował GTN, 70% stracie GTZ, a blisko 50% TVN. Dodatnią stopę zwrotu miały jedynie akcje TPS i LWB, obie jedynie ok 5%. Akcje TPS wybrane zostały w zadaniach maksymalizacji wartości oczekiwanej oraz minimalizacji wariancji i semiwariancji, jednocześnie posiadający w portfolio akcje GTN. Akcje LWB zostały wybrane w zadaniach maksymalizacji satysfakcji razem z akcjami TVN. W badanym okresie WIG20 i wszystkie portfele osiągnęły straty. Jedynie

Rysunek 5.53: Kurs indeksu WIG20 od 2011-05-09 do 2012-01-24 (okres testowy C3)

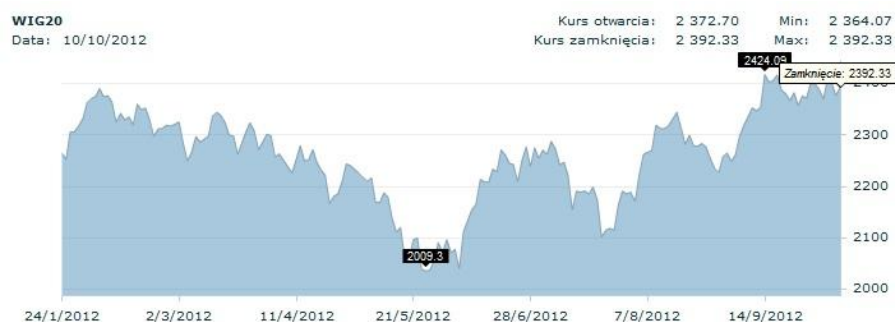


Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

portfele uzyskane w zadaniach EV, S2 i S3 osiągnęły wynik nieznacznie lepszy niż wynik indeksu. Stopy zwrotu z portfeli przedstawiono na rysunku 5.54.

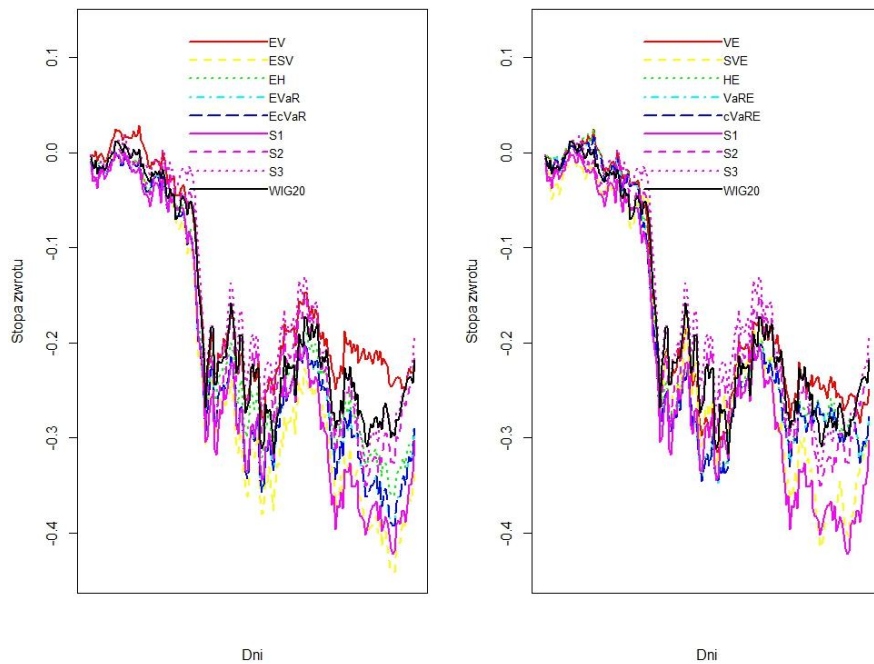
**Okres C4.** Podokres testowy C4 obejmuje okres od 2012-01-24 do 2012-10-10, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.55. Największą stratę zanotowało ponownie PBG — kurs zamknięcia w ostatnim dniu okresu testowego był dwukrotnie niższy niż w dniu rozpoczęcia testu. Największe zyski KGH ok. 42%, a ponad 20% zyski również spółki LTS, PZU. Akcje PBG zostały wybrane do portfela w przypadku zadań S2 i S3, stąd najgorszy wynik w tym okresie, jedynie dwa zadania optymalizacji (EV i ESV) uzyskały wyniki powyżej indeksu WIG20. Stopy zwrotu z portfeli wyznaczonych zadaniami optymalizacji przedstawiono na rysunku 5.56, a skład poszczególnych portfeli w tabeli F.16.

Rysunek 5.55: Kurs indeksu WIG20 od 2012-01-24 do 2012-10-10 (okres testowy C4)



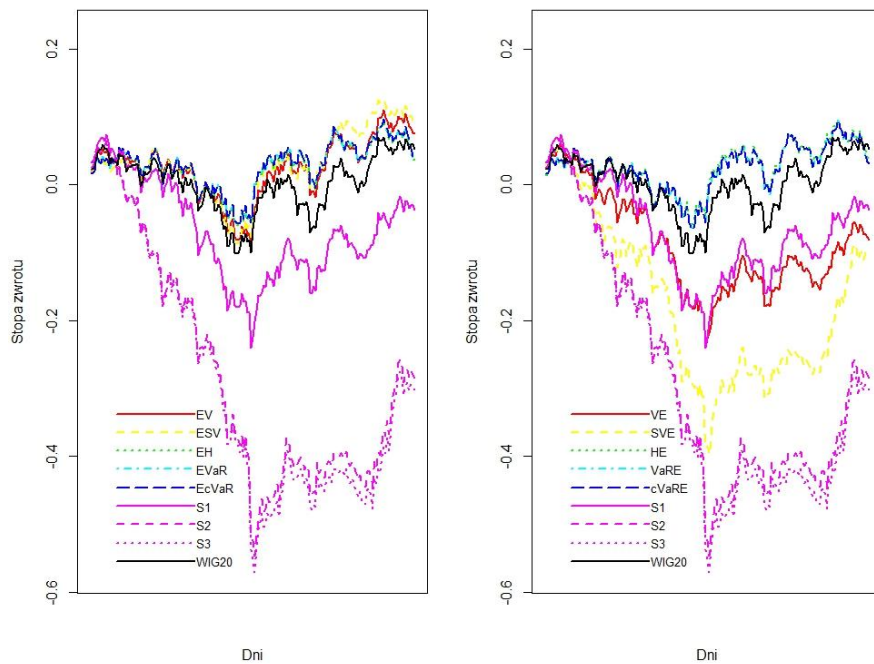
Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.54: Stopy zwrotu portfeli od 2011-05-09 do 2012-01-24 (okres testowy C3)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

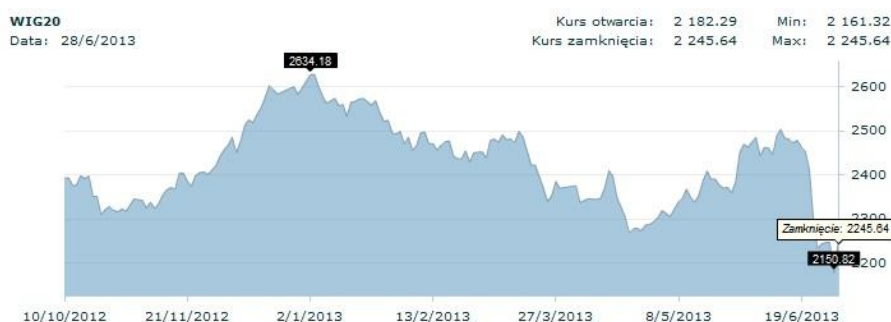
Rysunek 5.56: Stopy zwrotu portfeli od 2012-01-24 do 2012-10-10 (okres testowy C4)



Źródło: opracowanie własne

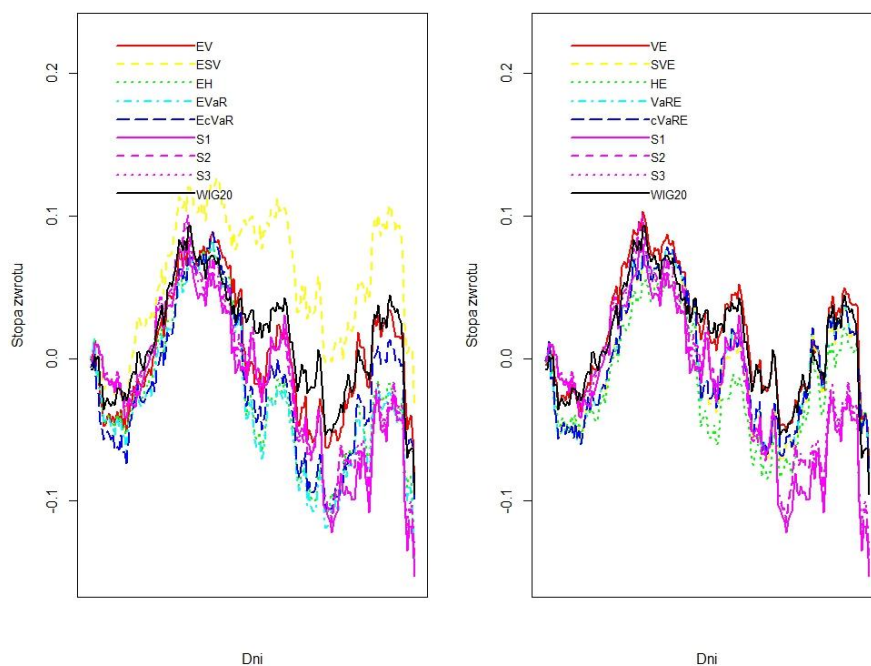
**Okres C5.** Podokres testowy C5 obejmuje okres od 2012-10-10 do 2013-06-28, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.57. Maksymalny dzienny wzrost wynosił jedynie 9,18% dla PGN (2012-11-07), a minimalną dzienną stopę zwrotu zanotowało TPS -32,74% (2013-02-13). Siedem spółek uzyskało dodatnie stopy zwrotu z badanego okresu, najwyższe stopy zwrotu to 43% dla TVN, 34% dla PGN blisko 20% dla BRE. Najniższe stopy zwrotu to -40,71% dla JSW, -33,98% dla BRS, -31,11 dla KER. Portfel uzyskane w zadaniach maksymalizacji satysfakcji zawierały zarówno akcje KER jak i BRS. Portfele zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej głównie: ACP, LWB, PGN, TPE i TPS. Natomiast wyniki zadań minimalizacji (z wyjątkiem VE) zawierały akcje ACP, BHW, JSW, PGN, PKN i TPS. W okresie testowym C5 wszystkie stopy zwrotu były ujemne. Zadania minimalizacji niepewności dawały portfele w stopach zwrotu o 1-2 punkty procentowe lepsze niż wynik WIG20. Portfel wyznaczony przez zadanie EV minimalnie, a portfel zadania ESV stopę zwrotu o blisko 6 punktów procentowych wyższą stopę niż indeks. Uzyskane stopy zwrotu przedstawia rysunek 5.58.

Rysunek 5.57: Kurs indeksu WIG20 od 2012-10-10 do 2013-06-28 (okres testowy C5)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.58: Stopa zwrotu portfeli od 2012-10-10 do 2013-06-28 (okres testowy C5)



Źródło: opracowania własne

#### 5.4.4 Badanie D

Badanie D obejmuje 5 okresów analizy danych o długości 540 dni oraz następujących po nich rocznych okresów testowych. Uzyskane stopy zwrotu przedstawia tabela 5.6.

**Okres D1.** Podokres testowy D1 obejmuje okres od 2010-08-19 do 2012-01-24, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.59. Cztery spółki (BIO, CPS, PBG, PXM) zanotowały niemal 100% spadki, wzrosty wynosiły do 30% (KGH). Dodatnią stopę zwrotu uzyskał jedynie portfel będący rozwiązaniem zadania minimalizacji semiwariancji (zbudowany z akcji BRE, KGH, PEO, PKN, PZU), ujemne stopy zwrotu dużo niższe (15-20 punktów procentowych) od poziomu indeksu WIG20 uzyskały portfele EV, HE, VaRE, cVaRE. Stopy zwrotu uzyskiwane przez okres testowy przedstawiono na rysunku 5.60.

Tabela 5.6: Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu D

	D1	D2	D3	D4	D5
EV	-0,2141	-0,3076	-0,4935	0,1056	0,0380
ESV	-0,0601	-0,2533	-0,2502	0,1713	0,0766
EH	-0,0600	-0,4735	-0,2361	0,1745	0,0639
EVaR	-0,0600	-0,3145	-0,2196	0,1691	0,0639
EcVaR	-0,0600	-0,3063	-0,2295	0,1611	0,0639
S1	-0,1389	-0,5346	-0,2616	0,1551	0,1652
S2	-0,0212	-0,3643	-0,1209	0,1201	0,1329
S3	-0,0964	-0,3852	-0,1091	0,0779	0,1343
VE	-0,1631	-0,3109	-0,6191	-0,1190	0,0130
SVE	0,0615	-0,2747	-0,0753	0,2981	0,2046
HE	-0,2052	-0,6507	-0,5998	-0,3068	-0,2612
VaRE	-0,2511	-0,4290	-0,6399	-0,3030	-0,0017
cVaRE	-0,2511	-0,4290	-0,6399	-0,3030	0,0098
WIG20	-0,0588	-0,2739	-0,1887	0,0722	-0,0028

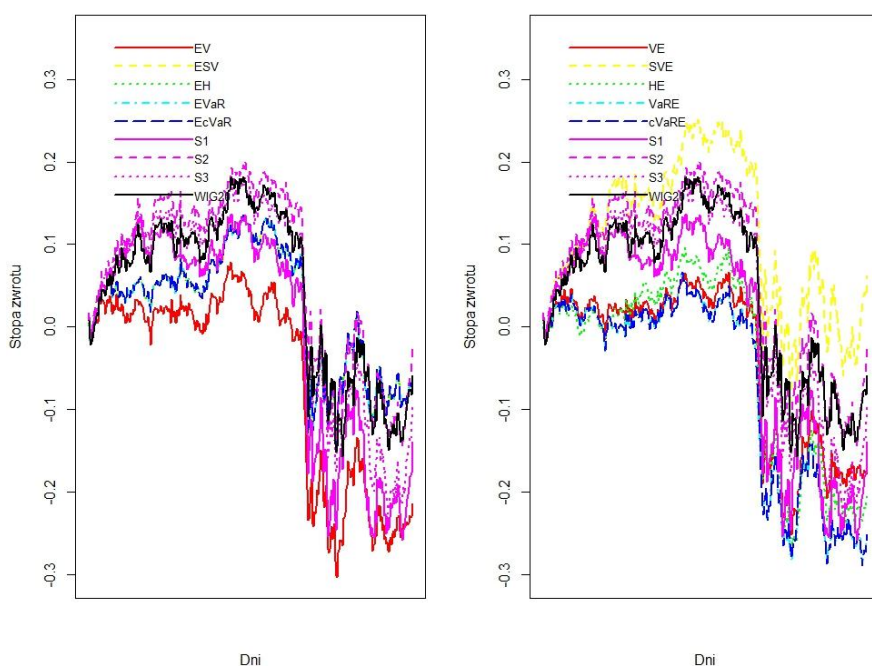
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5.59: Kurs indeksu WIG20 od 2010-08-19 do 2012-01-24 (okres testowy D1).



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.60: Stopy zwrotu portfeli od 2010-08-19 do 2012-01-24 (okres testowy D1).



Źródło: opracowanie własne

**Okres D2.** Podokres testowy D2 obejmuje okres od 2010-12-28 do 2012-06-04, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.61. Najwyższy wzrost a także najniższą dzienną stopę zwrotu uzyskało PBG (16.,1% 2012-05-23 oraz -62,13% dnia 2012-06-06), w całym badanym okresie zmniejszając swoją wartość czternastokrotnie. Wysokie spadki zanotowały także PXM (blisko trzykrotny spradek), TVN (-80%). Wygenerowane zyski były dużo niższe do 22% dla spółki CEZ. Wszystkie portfele uzyskały ujemne stopy zwrotu. Przy stracie ponad 27% na indeksie WIG20, jedynie strata z portfela wyznaczonego przez zadanie ESV była mniejsza, największą stratę 65% zanotował portfel HE, portfel zadania maksymalizacji satysfakcji S1 stratę ponad



50%, a EH blisko 50%. Stopy zwrotu z portfeli w okresie testowym przedstawia rysunek 5.62.

Rysunek 5.61: Kurs indeksu WIG20 od 2010-12-28 do 2012-06-04 (okres testowy D2)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.62: Stopy zwrotu portfeli od 2010-12-28 do 2012-06-04 (okres testowy D2)



Źródło: opracowanie własne

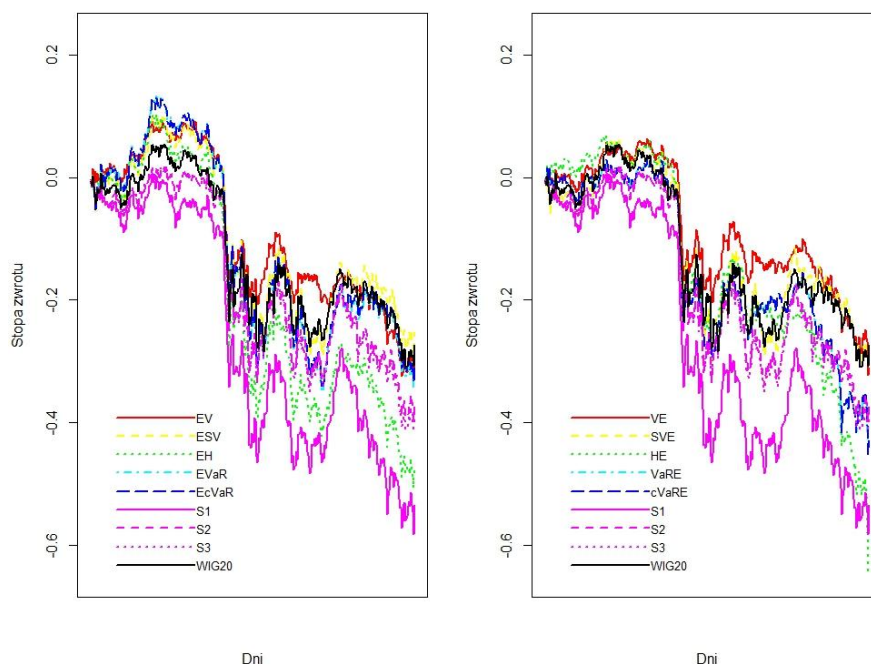
**Okres D3.** Podokres testowy D3 obejmuje okres od 2011-05-09 do 2012-10-10, kurs indeksu WIG20 w tym okresie przedstawia rysunek 5.63. Jedynie spółki KGH i LWB uzyskały stopy zwrotu około 10%, oprócz nich BHW, PGN, PZN i TPS nieznacznie dodatnie stopy zwrotów, inne spółki charakteryzowały znaczące spadki. Podobnie jak w poprzednim okresie wszystkie portfele uzyskały ujemne stopy zwrotu. Straty mniejsze niż z indeksu WIG20 uzyskały portfele wyznaczone przez zadanie minimalizacji semiwariancji i zadania maksymalizacji satysfakcji S2 i S3. Inne zadania minimalizacji niepewności zanotowały znaczące straty (wszystkie ponad 50%). Skład poszczególnych portfeli przedstawia tabela F.20, natomiast stopy zwrotu z okresu testowego rysunek 5.64.

Rysunek 5.63: Kurs indeksu WIG20 od 2011-05-09 do 2012-10-10 (okres testowy D3)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.64: Stopy zwrotu portfeli od 2011-05-09 do 2012-10-10 (okres testowy D3)



Źródło: opracowanie własne

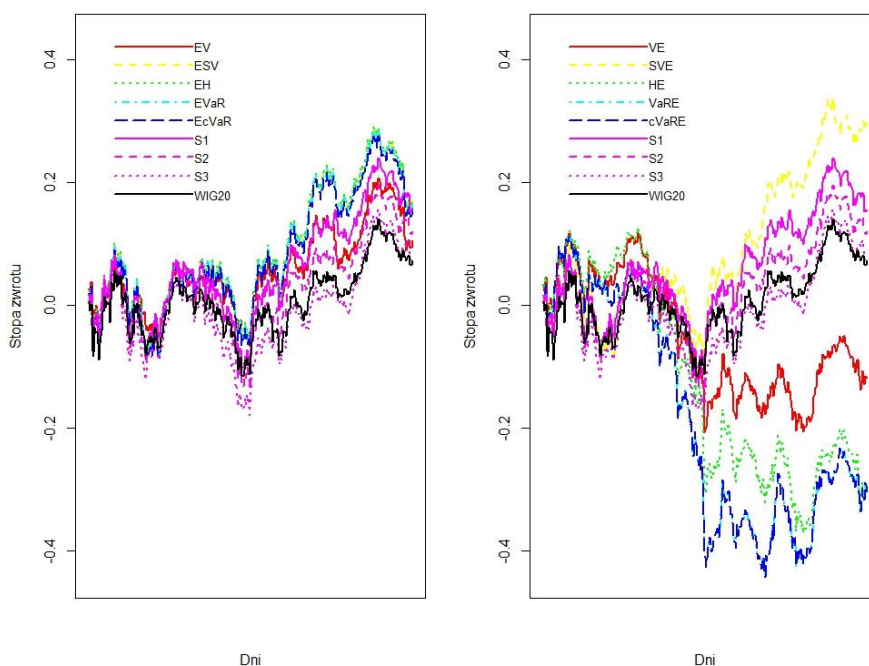
**Okres D4.** Podokres testowy D4 obejmuje okres od 2011-09-14 do 2013-02-21, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.65. Ponad połowa spółek uzyskała dodatnie stopy zwrotu z badanego okresu, w tym maksymalna wynosiła 47% dla BRE, zaraz za nim ze stopą zwrotu 45,5% LTS, następnie PKN, PGN i BHW uzyskało stopy zwrotu około 38%. Największe straty ponosiło jak w poprzednich okresach PBG. W badanych okresach stopy zwrotu wyższe od poziomu WIG20 zanotowały wszystkie portfele wyznaczone przez zadania maksymalizacji oraz zadanie minimalizacji semiwariancji. Inne zadania minimalizacji zanotowały straty, opierając swoje portfele na akcjach: ACP, BHW, JSW, PBG, PGN. Udziały akcji w poszczególnych portfelach zawiera tabela F.21, a stopy zwrotu w okresach testowych rysunek 5.66.

Rysunek 5.65: Kurs indeksu WIG20 od 2011-09-14 do 2013-02-21 (okres testowy D4)



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.66: Stopy zwrotu portfeli od 2011-09-14 do 2013-02-21 (okres testowy D4)



Źródło: opracowanie własne

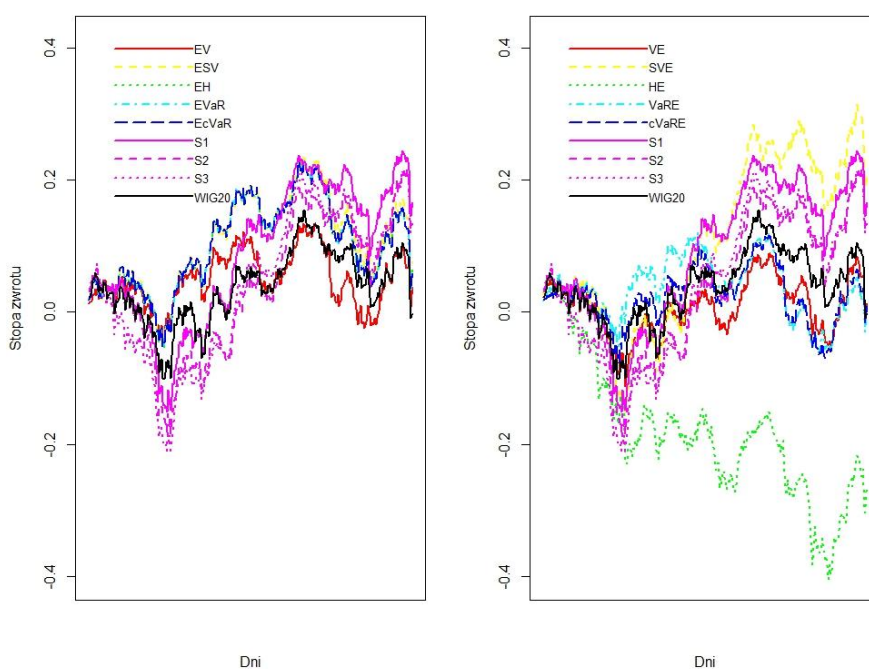
**Okres D5.** Podokres testowy D5 obejmuje okres od 2011-10-26 do 2013-06-28, kurs indeksu WIG20 przedstawia rysunek 5.67. Sytuacja prezentowała się analogicznie do okresu D4, jednak stopa zwrotu indeksu WIG20 spadła poniżej zera, a portfele wyznaczone na podstawie optymalizacji (z wyjątkiem zadania HE) uzyskały wynik lepszy niż WIG20.

Rysunek 5.67: Kurs indeksu WIG20 od 2011-10-26 do 2013-06-28 (okres testowy D5).



Źródło: [http://www.gpw.pl/indeksy\\_gieldowe](http://www.gpw.pl/indeksy_gieldowe)

Rysunek 5.68: Stopy zwrotu portfeli od 2011-10-26 do 2013-06-28 (okres testowy D5).



Źródło: opracowanie własne

### 5.4.5 Podsumowanie

Przeprowadzone badanie na danych rzeczywistych ukazało, grupy zadań zwracających podobne wyniki. Przy wspólnej zasadzie dobierania ograniczeń na niepewność zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej zwracały podobne wektory rozwiązań (te same spółki z udziałem powyżej 10%), jedynie dobór spółek przez zadanie EV wyraźnie się różnił w wielu okresach. Udziały w portfelach wyznaczonych zadaniami satysfakcji były podobne niezależnie od swoich parametrów, choć wektory rozwiązań zadanie S1 (parametr awersji do ryzyka 1) zbliżały się również do rozwiązań zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej. Przy jednakowym ograniczeniu na minimalną

wartość oczekiwaną zadania minimalizacji niepewności także zwracają podobne wektory, przy czym wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej mają takie same rozwiązania, a wyjątek stanowi zadanie SVE. Odstępstwa w zadaniach EV i SVE, mogą być spowodowane zastosowaniem algorytmu suboptymalnego i zakończenia obliczeń wraz z końcem ilości iteracji. W wynikach brak wyraźnego podziału poziomów zysków ze względu na funkcję celu maksymalizacji zysku i minimalizacji niepewności. Uzyskane wyniki nie są lepsze niż wyniki indeksu. Nie da się wybrać zadania zwracającego wyraźnie wyższe stopy zwrotu od innych. W okresach średniej długości (badanie B i C) średnio wszystkie portfele uzyskały wynik poniżej wyniku z indeksu WIG20. Najlepsze wyniki portfele uzyskały w badaniu obejmującym okres najkrótszy (badania A). Sytuacja taka może być spowodowana zbyt długim okresem analizy danych, co mogło pociągnąć za sobą nieprawidłowe określenie rozmytych stóp zwrotu.

## 5.5 Syntetyczna ocena zadań optymalizacji

Przeprowadzenie powyższych analiz pozwoliło na wielowymiarową ocenę zadań optymalizacji portfela akcji. Wyniki oceny przedstawia tabela 5.7 a po przeprowadzeniu unitaryzacji tabela 5.8. Najwyższe oceny skuteczności uzyskały zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu wartości zagrożonej, semiwariancji i warunkowej wartości zagrożonej. Zadania wykorzystujące wartość zagrożoną zostały najlepiej ocenione ze względu na przydatność informacyjną miar niepewności oraz niską złożoność obliczeniową, wysoko ocenione zostały również niewielkie odchylenia poniżej indeksu WIG20 w sytuacjach strat. Zadanie maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu niepewności miarą semiwariancji otrzymało wysokie oceny zarówno dzięki niskiej wrażliwości na zmianę kształtu funkcji przynależności, jak i przydatność informacyjną, jednak przede wszystkim uzyskało najwyższe wyniki ze skuteczności empirycznej na podstawie uzyskanych stóp zwrotu z okresów testowych. Proponowane zadanie maksymalizacji satysfakcji zostało wysoko ocenione ze względu na zgodność kryterium optymalizacji z intuicją, jednak traci na braku informacji o niepewności związanej z portfelem, złożoności obliczeniowej oraz nie uzyskało również zadowalających wyników empirycznych w sytuacji spadku notowań. Najgorszą ocenę uzyskało zadanie minimalizacji entropii pomimo niskiej wrażliwości na zmianę kształtu funkcji przynależności i prostoty obliczeniowej.

Tabela 5.8: Ocena skuteczności poszczególnych zadań optymalizacji

Kryterium	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	Miara syntetyczna
EV	0,9069	0,0000	<b>0,9177</b>	0,0000	0,6249	0,1148	0,4130
ESV	0,8404	0,0000	<b>0,9177</b>	0,0000	0,9426	0,7032	<b>0,6312</b>
EH	0,0000	0,0000	<b>0,2005</b>	1,0000	0,8385	0,4771	0,4790
EVaR	1,0000	0,0000	<b>0,2057</b>	1,0000	0,9672	0,5307	<b>0,6502</b>
EcVaR	0,8730	0,0000	<b>0,0000</b>	1,0000	1,0000	0,5218	<b>0,6146</b>
S	0,0000	1,0000	<b>0,3594</b>	0,0000	0,2831	0,5102	0,3683
VE	0,9069	0,0000	<b>1,0000</b>	0,0000	0,4712	0,0671	0,3729
SVE	0,8404	0,0000	<b>1,0000</b>	0,0000	0,0000	1,0000	0,4800
HE	0,0000	0,0000	<b>0,9979</b>	1,0000	0,1824	0,1285	0,3275
VaRE	1,0000	0,0000	<b>0,1179</b>	1,0000	0,2215	0,0000	0,3201
cVaRE	0,8730	0,0000	<b>0,5269</b>	1,0000	0,2295	0,0230	0,3631

Źródło: opracowanie własne

Tabela 5.7: Wyniki zadań poszczególnych kryteriów oceny

Kryterium	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
EV	0,02633	0,11900	0,03148	1,00000	0,08807	0,02380
ESV	-0,04900	0,11900	0,03148	1,00000	0,04498	0,05328
EH	-1,00000	0,11900	0,30599	0,00000	0,05910	0,04195
EVaR	0,13167	0,11900	0,30400	0,00000	0,04164	0,04463
EcVaR	-0,01200	0,11900	0,38275	0,00000	0,03719	0,04419
S	-1,00000	0,39000	0,24518	1,00000	0,13443	0,04361
VE	0,02633	0,11900	0,00000	1,00000	0,10891	0,02141
SVE	-0,04900	0,11900	0,00000	1,00000	0,17283	0,06814
HE	-1,00000	0,11900	0,00082	0,00000	0,14808	0,02449
VaRE	0,13167	0,11900	0,33764	0,00000	0,14278	0,01805
cVaRE	-0,01200	0,11900	0,18107	0,00000	0,14170	0,01920

Źródło: opracowanie własne

# Zakończenie

Rozprawa porusza zagadnienie optymalizacji portfela inwestycyjnego w ujęciu teorii wiarygodności Liu. Zaprezentowano teoretyczne ramy koncepcji rozmytej stopy zwrotu zdefiniowanej na przestrzeni wiarygodności i omówiono własności zadań optymalizacji. Zaproponowano nowe metody wyznaczania funkcji przynależności i nową metodę optymalizacji portfela opartą na pojęciu satysfakcji. Przeprowadzono badania mające na celu wielokryterialną ocenę skuteczności przedstawionych zadań. Zaprezentowane w poprzednich rozdziałach wyniki badań dostarczają wielu ciekawych wniosków dotyczących zadań optymalizacji portfela inwestycyjnego w ujęciu teorii wiarygodności Liu:

- rozmyta stopa zwrotu jest zmienną niezależną;
- wszystkie zadania optymalizacji w ujęciu teorii wiarygodności charakteryzują się niską dywersyfikacją portfela;
- wartości dyskretnej funkcji przynależności wyznaczonych metodami opartymi o dane historyczne są zbliżone, a aproksymacja liniowa ciągłych funkcji zmniejsza istniejące różnice;
- przybliżenie funkcji przynależności kształtem trójkątnym jest uzasadnione w przypadku kształtu  $SZ$ . W przypadku innych kształtów błędy aproksymacji są uzależnione od rozważanego typu zadań i przyjętych założeń co do pola powierzchni lub parametrów zadania.
- wyniki empiryczne portfeli uzyskanych w wyniku zadań wykorzystujących wartość zagrożoną i warunkową wartość zagrożoną są równoważne;
- średnio stopy zwrotu portfeli wyznaczonych zadaniami optymalizacji nie odbiegały znacząco od poziomu benchmarku;
- średnio stopy zwrotu portfeli wyznaczonych zadaniami maksymalizacji zysku uzyskiwały lepsze wyniki niż portfele uzyskane drogą minimalizacji niepewności;
- średnio stopy zwrotu portfeli wyznaczonych zadaniami optymalizacji w krótszych okresach testowych były wyższe niż te wyznaczane i testowane na podstawie dłuższych okresów.

Realizację głównego celu rozprawy oraz postawionych hipotez badawczych, przeprowadzono poprzez wypełnienie zadań sprecyzowanych w celach szczegółowych. Klasyfikacja niepewności w ujęciu konsensualnym została zaprezentowana w paragrafie 1.1. Metodyka wyznaczania funkcji przynależności i wiarygodności zmiennej rozmytej przedstawiona została w paragrafie 2.4. Przedstawiono również propozycję wyznaczania funkcji przynależności zmiennej rozmytej przy wykorzystaniu zadania

maksymalizacji entropii ważonej. Paragraf 3.2.3 zawiera autorskie zadanie maksymalizacji satysfakcji zdefiniowanej jako stopień podobieństwa wyniku do oczekiwań. Zaproponowano zastąpienie kryteriów maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka, kryterium maksymalizacji satysfakcji. Dzięki temu inwestor, definiując zadanie, musi jedynie określić własne oczekiwania oraz indywidualny stosunek do ryzyka. Przedstawione przykłady i badania empiryczne potwierdziły, że maksymalizowanie wartości oczekiwanej nie jest jednoznaczne z maksymalizacją satysfakcji inwestora. Zadanie maksymalizacji satysfakcji skupia się przede wszystkim na wiarygodności wystąpienia wyższych stóp zwrotu, a nie jak zadanie średnia-wariancja na wartości uśrednionej zysku. Cel czwarty został zrealizowany poprzez badanie analityczne i empiryczne zadań optymalizacji, którego wyniki przedstawia rozdział 5. W świetle niskiej popularności i aplikacyjności analizy portfelowej istotnym novum jest zmiana podejścia do oceny zadań optymalizacji i wprowadzenie dodatkowych kryteriów oceny takich jak intuicyjność kryteriów czy złożoność obliczeniowa.

Pierwsza z hipotez cząstkowych mówi, że inwestorzy podejmują decyzje pod wpływem intuicji. Według badań przeprowadzanych corocznie dla Fundacji Kronenberga *Postawy Polaków wobec oszczędzania* ponad połowa Polaków przyznaje, że wszystkie swoje dochody przeznacza na bieżące potrzeby, a jedynie około 10% osób poza bieżącymi wydatkami w każdym miesiącu odkłada pewną sumę pieniędzy. W ciągu ostatnich 5 lat poziomy te oscylują wokół podobnych poziomów (różnice rzędu 1-4 punktów procentowych). Wśród osób oszczędzających w 2013 roku jedynie 3% zadeklarowało inwestycje w akcje spółek notowanych na giełdzie papierów wartościowych, a 4% w obligacje państwowe. W latach 2008-2012 blisko połowa badanych przy podejmowaniu decyzji odnośnie oszczędzania ufała własnej intuicji. Według badania z 2013 roku jedna czwarta badanych informację, jak inwestować i oszczędzać najczęściej czerpie od znajomych i rodziny. Niewiele mniej, około 24% badanych kieruje się przy tym intuicją. Według badania OBI, obejmującego aktywnych inwestorów, od wielu lat inwestorzy kierują się przy podejmowaniu decyzji własnymi analizami — niecałe 62%, i własnym wyczuciem — blisko 58%. Wyniki przeprowadzonej w badaniu ankiety potwierdziły powyższy obraz inwestora. Podsumowując, hipotezę dotyczącą znaczącej roli intuicji w decyzjach finansowych zweryfikowano pozytywnie.

Drugą hipotezę cząstkową głoszącą, że zadania wykorzystujące miary stosunku do ryzyka oraz preferencje inwestorów są równie skuteczne, co zadania minimalizacji straty i maksymalizacji zysku, zweryfikowano również pozytywnie. Wartość oceny syntetycznej zadania maksymalizacji satysfakcji w przypadku jednakowej awersji do ryzyka i parametru żalu jest niższa niż zadania maksymalizacji wartości oczekiwanej przy ograniczeniu na wartość zagrożoną oraz semiwariancję, jednocześnie wyższa niż zadań minimalizacji entropii czy wartości zagrożonej. W zależności od parametrów awersji do ryzyka i parametru żalu porfele będące rozwiązaniem zadania satysfakcji zbliżają się do wartości zadań maksymalizacji wartości oczekiwanej lub minimalizacji niepewności.

Trzecia hipoteza cząstkowa nie mogła zostać zweryfikowana w ogólnym przypadku, ponieważ błędy aproksymacji są uzależnione od rozważanego typu zadań i kształtów. Hipoteza może zostać pozytywnie rozpatrzona dla kształtu  $SZ$  niezależnie od zadania oraz zadań minimalizacji wariancji, semiwariancji oraz entropii dla wszystkich kształtów. W innych przypadkach hipotezę należy odrzucić.



Główna hipoteza pracy głosiła, że *zmienna rozmyta w ujęciu teorii wiarygodności jest skutecznym aparatem formalnym opisu przyszłej stopy zwrotu w celu optymalizacji portfela aktywów finansowych*, a skuteczność rozpatrywana jest w kontekście trzech kryteriów: spójności teoretycznej, wartości informacyjnej oraz generowania zysków powyżej benchmarku. Jak wykazały rozdziały teoretyczne, przeprowadzone w nich dowody, interpretacje i przykłady wykazały, że pierwsze dwa kryteria są spełnione. Badanie empiryczne uwidocznilo jednak problemy z minimalizacją strat w okresach spadków, co spowodowało, że średnio wyniki oscylują wokół benchmarku.

Wśród ważniejszych zagadnień wymagających uwagi w kontekście rozważanego w pracy problemu można wymienić:

- próba uchylenia niezależności zmiennych rozmytych;
- uwzględnienie w wyznaczaniu rozmytych stóp zwrotu informacji lingwistycznej płynącej z rynku;
- dalsze badanie nad oceną poziomu satysfakcji inwestora z inwestycji oraz kryteriów tej oceny. Poszukiwanie odpowiedzi na pytanie czy parameter żalu i awersji do ryzyka jest stałą charakteryzującą danego inwestora, czy zmienia się w zależności od sytuacji rynkowej. W rozwoju modelu należy również określić, czy żal i awersja do ryzyka są cechami komplementarnymi czy niezależnymi od siebie.

# Dodatek A

## Test rang Wilcoxona

Test rang Wilcoxona jest to nieparametryczny test wykorzystywany do porównań wartości danej cechy w parach, przy czym jedna z wartości w parze pochodzi z populacji  $A$ , a druga  $B$ . Jest on odpowiednikiem testu t-Studenta dla prób zależnych. Wykorzystywany jest w przypadku, gdy zmienne nie spełniają założeń o normalności rozkładu lub są wyrażone na skali porządkowej. Często używa się tego testu do porównywania danych zebranych przed i po eksperymencie, w celu zbadania, czy nastąpiła istotna statystycznie zmiana. Test Wilcoxona polega na rangowaniu różnic w pomiarach dla kolejnych obserwacji. Test dwustronny przedstawia się następująco:

**Założenia** Dysponujemy ciągiem par obserwacji:  $(A_i$  i  $B_i)$ . Przeprowadzając interpretację tych par, reprezentują one obserwacje „przed doświadczeniem” i „po doświadczeniu”.

1.  $A$  i  $B$  są próbkami losowo wybranymi z populacji,
2. rozkłady prawdopodobieństwa, z których pobrane są próbki są ciągłe.

Definiujemy niezależne różnice  $Z_i = (A_i - B_i)$  dla  $1, 2, \dots, n..$  Każda zmienna  $Z_i$  pochodzi z tego samego rozkładu ciągłego o dystrybuancie  $(F_i)$  i symetrycznego względem wspólnej mediany  $\theta$ .

**Hipotezy testu.**

$H_0$  :  $\theta = 0$  - interpretowane jako brak efektu doświadczenia;

$H_1$  :  $\theta \neq 0$ .

**Statystyka testowa.** Statystyka  $T$  - mniejsza z wartości sumy rang  $r$ , dla których różnice są ujemne i dodatnie.

$$T = \min \sum_{Z_i > 0} r(|Z_i|), \sum_{Z_i < 0} r(|Z_i|)$$

w przypadku dużej próbki ( $n > 25$ ) wykorzystuje się statystykę:

$$z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Test Wilcoxona polega na rangowaniu różnic w pomiarach dla kolejnych obserwacji, można go opisać w następujących krokach:

1. obliczamy różnice pomiędzy pomiarem 1 i 2,
2. odrzucamy wszystkie  $Z_i$ , takie, że  $Z_i = 0$  i odpowiednio zmniejszamy  $n$ ,
3. rangowanie - uszeregowanie wyników od najmniejszego do najwyższego i nadanie im kolejnych rang,
4. uśredniamy rangi dla węzłów - czyli grup obserwacji o jednakowej wartości bezwzględnej,
5. sumowanie (osobno) rang dla różnic, które były ujemne i dla różnic, które były dodatnie (wyniki z brakiem różnic nie są tutaj istotne),
6. wybranie mniejszej sumy,
7. przypisanie statystyki testu Wilcoxona.

**Zbiór krytyczny.**

- w przypadku do 25 obserwacji:  $T \leq T_0$ ,
- dla większej liczby obserwacji:  $z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$  lub  $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ ,

gdzie  $T_0$  jest kwantylem rozkładu statystyki znakowanych rang Wilcoxona (przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej), a  $z_\alpha$  kwantylem rozkładu normalnego.

## Dodatek B

### Ankieta *Wybór portfela akcji* — *kryteria i preferencje inwestorów*

1. Przy wyborze aktywów wykorzystuje Pan/Pani:

		1-nigdy	2-rzadko	3-czasami	4-często	5-zawsze
a	intuicję	1	2	3	4	5
b	bieżące przewidywania ekspertów	1	2	3	4	5
c	analizę portfelową	1	2	3	4	5
d	analizę techniczną	1	2	3	4	5
e	analizę fundamentalną	1	2	3	4	5

2. Czy przed inwestycją oblicza lub szacuje Pan/Pani oczekiwaną stopę zwrotu?

1-nigdy	2-rzadko	3-czasami	4-często	5-zawsze
---------	----------	-----------	----------	----------

3. do szacowania/oceny ryzyka portfela wykorzystuje Pan/Pani:

- a) intuicję,
- b) opinie ekspertów,
- c) obliczam/sprawdzam miary ryzyka,
- d) nie szacuję ryzyka.

4. Czy oczekiwana przez Pana/Panią stopa zwrotu jest:

- a) stała,
- b) zmienna:
  - i. zależna od warunków i nastrojów panujących na rynku akcji,
  - ii. zależna od oprocentowania lokat i innych instrumentów,
  - iii. zależna od zdobywanego doświadczenia,
  - iv. inne: .....

c) trudno powiedzieć.

5. Proszę ocenić w skali 1-5 przydatność informacji: *Średnia stopa zwrotu wynosi 10%*,  
a

	1-bardzo mała	2 - mała	3 - średnia	4 - duża	5 - bardzo duża
<i>przeciętne odchylenie wyników od średniej wynosi 15%</i>	1	2	3	4	5
<i>przeciętne odchylenie wyników poniżej średniej wynosi 15%</i>	1	2	3	4	5
<i>prawdopodobieństwo straty większej niż 10% wynosi 5%</i>	1	2	3	4	5
<i>średnia strata wśród 5% najwyższych strat wynosi 11%</i>	1	2	3	4	5

6. Czy oczekiwana przez Pana/Panią stopa zwrotu jest:

- wyrażona jedną liczbą: np. *oczekuję stopy zwrotu 12%*,
- wyrażona przedziałem: np. *oczekuję stopy zwrotu od 10% do 15%*,
- wyrażona nieskończonym przedziałem: np. *oczekuje stopy zwrotu co najmniej 10%*.

7. Proszę określić zmianę poziomu zadowolenia z inwestycji po podwyższeniu stopy zwrotu:

	1 – raczej bez zmian	2 – nieznacznie lepszy	3–lepszy	4–dużo lepszy	5 – znacząco lepszy
a z 0% do 3%	1	2	3	4	5
b z 3% do 6%	1	2	3	4	5
c z 6% do 9%	1	2	3	4	5
d z 9% do 12%	1	2	3	4	5
e z 12% do 15%	1	2	3	4	5

8. Wyniki z inwestycji porównuje Pan/Pani:

- z najlepszym z wyników z danego okresu,
- z wynikiem wybranego indeksów,
- z najgorszym z wyników z danego okresu,
- z planowanym zyskiem,
- z oprocentowaniem lokat/obligacji,

f) inne:.....

9. Jakie jest Pana/Pani podejście do ryzyka?

- a) wolę nie ryzykować, nawet jeżeli może to przynieść większy zysk,
- b) wolę mniej ryzykować, licząc się z możliwością osiągnięcia mniejszego zysku,
- c) wolę więcej zaryzykować, licząc na osiągnięcie większego zysku.

10. na jakim poziomie byłoby Pana/Pani zadowolenie, gdyby po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji uzyskałby Pan/ uzyskałaby Pani stopę zwrotu:

		1-bardzo niskie	2-niskie	3-średnie	4- wysokie	5- bardzo wysokie
a	5%	1	2	3	4	5
b	10%	1	2	3	4	5
c	15%	1	2	3	4	5
d	20%	1	2	3	4	5
e	25%	1	2	3	4	5

11. w jakim stopniu jest Pan/Pani w stanie zaakceptować następujące spadki zainwestowanego kapitału po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji:

	Spadek w %	1-brak akceptacji	2-niski	3-średni	4-wysoki	5-bardzo wysoki
a	5%	1	2	3	4	5
b	10%	1	2	3	4	5
c	15%	1	2	3	4	5
d	20%	1	2	3	4	5
e	25%	1	2	3	4	5

12. Proszę ocenić Pana/Pani skłonność do ryzyka w skali 1-5:

1- bardzo niska	2-niska	3-średnia	4- wysoka	5- bardzo wysoka
-----------------	---------	-----------	-----------	------------------

13. Który portfel inwestycyjny wybrałby Pan/Pani zakładając, że jego początkowa wartość to 10 tys. zł?

- a) jego wartość po roku mieści się w przedziale od 9,25 tys. zł do 11,2 tys. zł
- b) jego wartość po roku mieści się w przedziale od 8,5 tys. zł do 11,95 tys. zł
- c) jego wartość po roku mieści się w przedziale od 7,75 tys. zł do 12,7 tys. zł

14. Wiek (respondenta):

- a) poniżej 25 lat,

- b) 25-35 lat,
- c) 36-45,
- d) 46-55,
- e) powyżej 55.

15. Wykształcenie (respondenta):

- a) podstawowe,
- b) zawodowe zasadnicze,
- c) średnie,
- d) wyższe:
  - i ekonomiczne,
  - ii techniczne,
  - iii humanistyczne,
  - iv medyczne.

16. Płeć (respondenta):

- a) kobieta,
- b) mężczyzna.

17. Liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor:

- a) poniżej 1 roku,
- b) 1-5 lat,
- c) 5-10 lat,
- d) powyżej 10 lat.

# Dodatek C

## Ankieta — wyniki

Wyniki ankiety zostaną przedstawione w postaci tabel częstości, a w przypadku badanych zależności uzupełnione o tabele krzyżowe i tabele z wynikami testu  $\chi^2$ .

Tabela C.1: [Pyt.1] Kryteria wyboru portfela akcji

		<b>1a intuicja</b>			
		Częstość	Procent	Procent	Procent
		ważnych skumulowany			
Ważne	nigdy	16	4,8	5,1	5,1
	rzadko	70	21,1	22,3	27,4
	czasami	123	37,0	39,2	66,6
	często	85	25,6	27,1	93,6
	zawsze	20	6,0	6,4	100,0
	Ogółem	314	94,6	100,0	
Braki danych		18	5,4		
Ogółem		332	100,0		
		<b>1b bierzące przewidywania ekspertów</b>			
Ważne	nigdy	24	7,2	7,8	7,8
	rzadko	91	27,4	29,6	37,5
	czasami	98	29,5	31,9	69,4
	często	85	25,6	27,7	97,1
	zawsze	9	2,7	2,9	100,0
	Ogółem	307	92,5	100,0	
Braki danych		25	7,5		
Ogółem		332	100,0		
		<b>1c analiza portfelowa</b>			
Ważne	nigdy	52	15,7	17,4	17,4



	rzadko	81	24,4	27,1	44,5
	czasami	75	22,6	25,1	69,6
	często	71	21,4	23,7	93,3
	zawsze	20	6,0	6,7	100,0
	Ogółem	299	90,1	100,0	
Braki danych		33	9,9		
Ogółem		332	100,0		

---

**1d analiza techniczna**

---

Ważne	nigdy	12	3,6	3,8	3,8
	rzadko	40	12,0	12,5	16,3
	czasami	47	14,2	14,7	31,0
	często	116	34,9	36,4	67,4
	zawsze	104	31,3	32,6	100,0
	Ogółem	319	96,1	100,0	
Braki danych		13	3,9		
Ogółem		332	100,0		

---

**1e analiza fundamentalna**

---

Ważne	nigdy	5	1,5	1,6	1,6
	rzadko	44	13,3	13,8	15,4
	czasami	48	14,5	15,1	30,5
	często	127	38,3	39,9	70,4
	zawsze	94	28,3	29,6	100,0
	Ogółem	318	95,8	100,0	
Braki danych		14	4,2		
Ogółem		332	100,0		

---

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.2: [Pyt.2] Czy przed inwestycją oblicza lub szacuje Pan/Pani oczekiwaną stopę zwrotu?

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	nigdy	25	7,5	7,6	7,6
	rzadko	51	15,4	15,4	23,0
	czasami	83	25,0	25,1	48,0
	często	94	28,3	28,4	76,4
	zawsze	77	23,2	23,3	99,7
	suma	1	,3	,3	100,0
	Ogółem	331	99,7	100,0	
Braki danych 0		1	,3		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.3: [Pyt.3] do szacowania/oceny ryzyka portfela wykorzystuje Pan/Pani

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	intuicję	90	27,1	27,2	27,2
	nie szacuję ryzyka	46	13,9	13,9	41,1
	miary ryzyka	132	39,8	39,9	81,0
	opinie ekspertów	63	19,0	19,0	100,0
	Ogółem	331	99,7	100,0	
Braki danych		1	,3		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.4: [Pyt.4] Oczekiwana przez inwestora stopa zwrotu jest

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	stała	15	4,5	4,5	4,5
zmienna	zależna od warunków i nastrojów	206	62,0	62,4	67,0
	zależna od oprocentowania lokat itp.	29	8,7	8,8	75,8
	zależna od doświadczenia	46	13,9	13,9	89,7
	inna	4	1,2	1,2	90,9
	trudno powiedzieć	30	9,0	9,1	100,0
Braki danych		2	,6		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.5: [Pyt.5] Ocena przydatności informacji

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
<b>przeciętne odchylenie wyników od średniej wynosi 15%</b>					
Ważne	bardzo mała	39	11,7	12,1	12,1
	mała	57	17,2	17,6	29,7
	średnia	93	28,0	28,8	58,5
	duża	106	31,9	32,8	91,3
	bardzo duża	28	8,4	8,7	100,0
	Ogółem	323	97,3	100,0	
Braki danych		9	2,7		
Ogółem		332	100,0		
<b>przeciętne odchylenie wyników poniżej średniej wynosi 12%</b>					
Ważne	bardzo mała	41	12,3	12,7	12,7
	mała	68	20,5	21,1	33,7
	średnia	124	37,3	38,4	72,1
	duża	77	23,2	23,8	96,0
	bardzo duża	13	3,9	4,0	100,0
	Ogółem	323	97,3	100,0	
Braki danych		9	2,7		

Ogółem		332	100,0		
<b>prawdopodobieństwo straty większej niż 10% wynosi 5%</b>					
Ważne	bardzo mała	27	8,1	8,4	8,4
	mała	41	12,3	12,7	21,1
	średnia	84	25,3	26,0	47,1
	duża	119	35,8	36,8	83,9
	bardzo duża	52	15,7	16,1	100,0
	Ogółem	323	97,3	100,0	
Braki danych		9	2,7		
Ogółem		332	100,0		
<b>średnia strata wśród 5% najwyższych strat wynosi 11%</b>					
Ważne	bardzo mała	46	13,9	14,6	14,6
	mała	59	17,8	18,7	33,2
	średnia	95	28,6	30,1	63,3
	duża	92	27,7	29,1	92,4
	bardzo duża	24	7,2	7,6	100,0
	Ogółem	316	95,2	100,0	
Braki danych		16	4,8		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.6: [Pyt.6] Sposób określania oczekiwanej stopy zwrotu

	Częstość	Procent	Procent	Procent
			ważnych	skumulowany
Ważne	4	1,2	1,2	1,2
wyrażona liczbą	20	6,0	6,0	7,2
wyrażona nieskończonym przedziałem	168	50,6	50,6	57,8
wyrażona przedziałem	140	42,2	42,2	100,0
Ogółem	332	100,0	100,0	

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.7: [Pyt.7] Zmiana poziomu zadowolenia w zależności od zmiany stopy zwrotu

<b>z 0 do 3%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	raczej bez zmian	143	43,1	44,0	44,0
	nieznacznie lepszy	90	27,1	27,7	71,7
	lepszy	52	15,7	16,0	87,7
	dużo lepszy	16	4,8	4,9	92,6
	znacząco lepszy	24	7,2	7,4	100,0
	Ogółem	325	97,9	100,0	
Braki danych		7	2,1		
Ogółem		332	100,0		
<b>z 3% do 6%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	raczej bez zmian	50	15,1	15,6	15,6
	nieznacznie lepszy	131	39,5	40,9	56,6
	lepszy	90	27,1	28,1	84,7
	dużo lepszy	31	9,3	9,7	94,4
	znacząco lepszy	18	5,4	5,6	100,0
	Ogółem	320	96,4	100,0	
Braki danych		12	3,6		
Ogółem		332	100,0		
<b>z 6% do 9%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	raczej bez zmian	20	6,0	6,2	6,2
	nieznacznie lepszy	53	16,0	16,5	22,7
	lepszy	173	52,1	53,9	76,6
	dużo lepszy	57	17,2	17,8	94,4
	znacząco lepszy	18	5,4	5,6	100,0
	Ogółem	321	96,7	100,0	

Braki danych		11	3,3		
Ogółem		332	100,0		
<b>z 9% do 12%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	raczej bez zmian	13	3,9	4,0	4,0
	nieznacznie lepszy	32	9,6	9,9	13,9
	lepszy	107	32,2	33,0	46,9
	dużo lepszy	132	39,8	40,7	87,7
	znacząco lepszy	40	12,0	12,3	100,0
	Ogółem	324	97,6	100,0	
Braki danych		8	2,4		
Ogółem		332	100,0		
<b>z 12% do 15%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	raczej bez zmian	17	5,1	5,2	5,2
	nieznacznie lepszy	21	6,3	6,5	11,7
	lepszy	82	24,7	25,3	37,0
	dużo lepszy	76	22,9	23,5	60,5
	znacząco lepszy	128	38,6	39,5	100,0
	Ogółem	324	97,6	100,0	
Braki danych		8	2,4		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.8: [Pyt.8] Porównywanie wyników inwestycji

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	z najlepszym z wyników	34	10,2	10,4	10,4
	z wynikiem indeksów	70	21,1	21,3	31,7
	z najgorszym z wyników	5	1,5	1,5	33,2
	z planowanym zyskiem	128	38,6	39,0	72,3
	z oprocentowaniem lokat	85	25,6	25,9	98,2
	inne	6	1,8	1,8	100,0
	Ogółem	328	98,8	100,0	
Braki danych		4	1,2		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.9: [Pyt.9] Podejście do ryzyka

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne		7	2,1	2,1	2,1
	<i>wolę mniej ryzykować ...</i>	169	50,9	50,9	53,0
	<i>wolę nie ryzykować ...</i>	16	4,8	4,8	57,8
	<i>wolę więcej zaryzykować...</i>	140	42,2	42,2	100,0
	Ogółem	332	100,0	100,0	

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.10: [Pyt.10] Poziom zadowolenia, w przypadku następujących stóp zwrotu po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji.

		5%			
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	bardzo niskie	91	27,4	27,8	27,8
	niskie	106	31,9	32,4	60,2
	średnie	106	31,9	32,4	92,7

	wysokie	19	5,7	5,8	98,5
	bardzo wysokie	5	1,5	1,5	100,0
	Ogółem	327	98,5	100,0	
Braki danych		5	1,5		
Ogółem		332	100,0		

---

**10%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	bardzo niskie	18	5,4	5,5	5,5
	niskie	73	22,0	22,3	27,8
	średnie	122	36,7	37,3	65,1
	wysokie	95	28,6	29,1	94,2
	bardzo wysokie	19	5,7	5,8	100,0
	Ogółem	327	98,5	100,0	
Braki danych		5	1,5		
Ogółem		332	100,0		

---

**15%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	bardzo niskie	2	,6	,6	,6
	niskie	24	7,2	7,3	8,0
	średnie	117	35,2	35,8	43,7
	wysokie	104	31,3	31,8	75,5
	bardzo wysokie	80	24,1	24,5	100,0
	Ogółem	327	98,5	100,0	
Braki danych		5	1,5		
Ogółem		332	100,0		

---

**20%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	niskie	4	1,2	1,2	1,2
	średnie	36	10,8	11,0	12,3
	wysokie	126	38,0	38,7	50,9



	bardzo wysokie	160	48,2	49,1	100,0
	Ogółem	326	98,2	100,0	
Braki danych		6	1,8		
Ogółem		332	100,0		
<b>25%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	średnie	20	6,0	6,2	6,2
	wysokie	65	19,6	20,0	26,2
	bardzo wysokie	240	72,3	73,8	100,0
	Ogółem	325	97,9	100,0	
Braki danych		7	2,1		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.11: [Pyt.11] Poziom akceptacji następujących spadków zainwestowanego kapitału po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji.

<b>5%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	brak akceptacji	8	2,4	2,5	2,5
	niski	26	7,8	8,0	10,5
	średni	61	18,4	18,8	29,3
	wysoki	77	23,2	23,8	53,1
	bardzo wysoki	152	45,8	46,9	100,0
	Ogółem	324	97,6	100,0	
Braki danych		8	2,4		
Ogółem		332	100,0		
<b>10%</b>					
		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	brak akceptacji	13	3,9	4,0	4,0
	niski	61	18,4	18,7	22,6

	średni	91	27,4	27,8	50,5
	wysoki	103	31,0	31,5	82,0
	bardzo wysoki	59	17,8	18,0	100,0
	Ogółem	327	98,5	100,0	
Braki danych		5	1,5		
Ogółem		332	100,0		

---

**15%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
					ważnych skumulowany
Ważne	brak akceptacji	66	19,9	20,2	20,2
	niski	79	23,8	24,2	44,5
	średni	111	33,4	34,0	78,5
	wysoki	47	14,2	14,4	92,9
	bardzo wysoki	23	6,9	7,1	100,0
	Ogółem	326	98,2	100,0	
Braki danych		6	1,8		
Ogółem		332	100,0		

---

**20%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
					ważnych skumulowany
Ważne	brak akceptacji	126	38,0	39,0	39,0
	niski	105	31,6	32,5	71,5
	średni	45	13,6	13,9	85,4
	wysoki	26	7,8	8,0	93,5
	bardzo wysoki	21	6,3	6,5	100,0
	Ogółem	323	97,3	100,0	
Braki danych		9	2,7		
Ogółem		332	100,0		

---

**25%**

---

		Częstość	Procent	Procent	Procent
					ważnych skumulowany
Ważne	brak akceptacji	183	55,1	56,5	56,5
	niski	70	21,1	21,6	78,1

	średni	29	8,7	9,0	87,0
	wysoki	16	4,8	4,9	92,0
	bardzo wysoki	26	7,8	8,0	100,0
	Ogółem	324	97,6	100,0	
Braki danych		8	2,4		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.12: [Pyt.12] Skłonność do ryzyka

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	bardzo niska	4	1,2	1,2	1,2
	niska	28	8,4	8,6	9,8
	średnia	174	52,4	53,4	63,2
	wysoka	101	30,4	31,0	94,2
	bardzo wysoka	19	5,7	5,8	100,0
	Ogółem	326	98,2	100,0	
Braki danych		6	1,8		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.13: [Pyt.13] Wybór portfela przy założeniu, że jego początkowa wartość wynosi 10 tys. zł, a wartość po roku mieści się w przedziale:

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	od 9,25 tys. zł	116	34,9	35,5	35,5
Ważne	do 11,2 tys. zł				
	od 8,5 tys. zł	148	44,6	45,3	80,7
	do 11,95 tys. zł				
	od 7,75 tys.	63	19,0	19,3	100,0
	do 12,7 tys. zł				
	Ogółem	327	98,5	100,0	
Braki danych		5	1,5		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.14: [Pyt.14] Wiek

		Częstość	Procent	Procent	Procent
				ważnych	skumulowany
Ważne	do 25 lat	63	19,0	19,1	19,1
	26 - 35 lat	144	43,4	43,8	62,9
	35 - 45 lat	82	24,7	24,9	87,8
	46 - 55 lat	20	6,0	6,1	93,9
	Powyżej 55 lat	20	6,0	6,1	100,0
	Ogółem	329	99,1	100,0	
Braki danych		3	,9		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.15: [Pyt.15] Wykształcenie

	Częstość	Procent	Procent	Procent
			ważnych	skumulowany
Ważne				
Zasadnicze zawodowe	2	,6	,6	,6
Średnie	45	13,6	13,7	14,3
Wyższe ekonomiczne	117	35,2	35,6	49,8
Wyższe techniczne	98	29,5	29,8	79,6
Wyższe humanistyczne	62	18,7	18,8	98,5
Wyższe medyczne	5	1,5	1,5	100,0
Ogółem	329	99,1	100,0	
Braki danych	3	,9		
Ogółem	332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.16: [Pyt.16] Liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor

	Częstość		Procent		Procent ważnych skumulowany
Ważne	Poniżej 1 roku	43	13,0	13,1	13,1
	1 - 5 lat	151	45,5	45,9	59,0
	5 - 10 lat	81	24,4	24,6	83,6
	Powyżej 10 lat	54	16,3	16,4	100,0
	Ogółem	329	99,1	100,0	
Braki danych		3	,9		
Ogółem		332	100,0		

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.17: [Pyt.17] Płeć

		Częstość		Procent		Procent ważnych skumulowany
Ważne	Kobieta	23	6,9	7,0	7,0	
	Mężczyzna	305	91,9	93,0	100,0	
	Ogółem	328	98,8	100,0		
Braki danych		4	1,2			
Ogółem		332	100,0			

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.18: Tabela krzyżowa: wiek × wykształcenie

Wiek	Zasadnicze Zawodowe	Średnie	Wykształcenie				Ogółem	
			Wysze					
			Wysze	Wyższe	Wyższe	Wyższe		
Do 25 lat	Liczebność	0	26	26	7	4	0	63
	% z Wiek	0,0%	41,3%	41,3%	11,1%	6,3%	0,0%	100,0%
26 - 35 lat	% z Wykształcenie	0,0%	57,8%	22,2%	7,2%	6,5%	0,0%	19,2%
	% z Ogółem	0,0%	7,9%	7,9%	2,1%	1,2%	0,0%	19,2%
	Liczebność	0	8	56	47	31	2	144
35 - 45 lat	% z Wiek	0,0%	5,6%	38,9%	32,6%	21,5%	1,4%	100,0%
	% z Wykształcenie	0,0%	17,8%	47,9%	48,5%	50,0%	40,0%	43,9%
	% z Ogółem	0,0%	2,4%	17,1%	14,3%	9,5%	,6%	43,9%
46 - 55 lat	Liczebność	1	5	30	27	16	2	81
	% z Wiek	1,2%	6,2%	37,0%	33,3%	19,8%	2,5%	100,0%
	% z Wykształcenie	50,0%	11,1%	25,6%	27,8%	25,8%	40,0%	24,7%
Powyżej 55 lat	% z Ogółem	,3%	1,5%	9,1%	8,2%	4,9%	,6%	24,7%
	Liczebność	1	5	3	3	7	1	20
	% z Wiek	5,0%	25,0%	15,0%	15,0%	35,0%	5,0%	100,0%
Ogółem	% z Wykształcenie	50,0%	11,1%	2,6%	3,1%	11,3%	20,0%	6,1%
	% z Ogółem	,3%	1,5%	,9%	,9%	2,1%	,3%	6,1%
	Liczebność	0	1	2	13	4	0	20
Ogółem	% z Wiek	0,0%	5,0%	10,0%	65,0%	20,0%	0,0%	100,0%
	% z Wykształcenie	0,0%	2,2%	1,7%	13,4%	6,5%	0,0%	6,1%
	% z Ogółem	0,0%	,3%	,6%	4,0%	1,2%	0,0%	6,1%
Ogółem	Liczebność	2	45	117	97	62	5	328
	% z Wiek	,6%	13,7%	35,7%	29,6%	18,9%	1,5%	100,0%
	% z Wykształcenie	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% z Ogółem	,6%	13,7%	35,7%	29,6%	18,9%	1,5%	100,0%

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.19: Tabela krzyżowa: częstotliwość wykorzystania analizy portfelowej × doświadczenie na rynku

	Doświadczenie					Ogółem
	Poniżej 1 roku		1 - 5 lat		Powyżej 10 lat	
	5	27	8	12	52	
analizę portfelową nigdy	Liczebność					
	% z analizę portfelową	9,6%	51,9%	15,4%	23,1%	100,0%
	% z doświadczenie	12,8%	19,9%	11,1%	24,0%	17,5%
	% z Ogółem	1,7%	9,1%	2,7%	4,0%	17,5%
rzadko	Liczebność	6	40	20	14	80
	% z analizę portfelową	7,5%	50,0%	25,0%	17,5%	100,0%
	% z doświadczenie	15,4%	29,4%	27,8%	28,0%	26,9%
	% z Ogółem	2,0%	13,5%	6,7%	4,7%	26,9%
czasami	Liczebność	10	32	21	12	75
	% z analizę portfelową	13,3%	42,7%	28,0%	16,0%	100,0%
	% z doświadczenie	25,6%	23,5%	29,2%	24,0%	25,3%
	% z Ogółem	3,4%	10,8%	7,1%	4,0%	25,3%
często	Liczebność	15	27	20	9	71
	% z analizę portfelową	21,1%	38,0%	28,2%	12,7%	100,0%
	% z doświadczenie	38,5%	19,9%	27,8%	18,0%	23,9%
	% z Ogółem	5,1%	9,1%	6,7%	3,0%	23,9%
zawsze	Liczebność	3	10	3	3	19
	% z analizę portfelową	15,8%	52,6%	15,8%	15,8%	100,0%
	% z doświadczenie	7,7%	7,4%	4,2%	6,0%	6,4%
	% z Ogółem	1,0%	3,4%	1,0%	1,0%	6,4%
Ogółem	Liczebność	39	136	72	50	297
	% z analizę portfelową	13,1%	45,8%	24,2%	16,8%	100,0%
	% z doświadczenie	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% z Ogółem	13,1%	45,8%	24,2%	16,8%	100,0%

Źródło: opracowanie własne



Tabela C.20: Tabela krzyżowa: częstotliwość szacowania stopy zwrotu × sposoby szacowania ryzyka

szacowanie stopy zwrotu	nigdy	Liczebność	szacowanie ryzyka					Ogółem
			intuicję	nie szacując	ryzyka	miary	ryzyka	
			7	8	5	5	25	
szacowanie stopy zwrotu		% z szacowaniem stopy zwrotu	28,0%	32,0%	20,0%	20,0%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	7,8%	17,4%	3,8%	7,9%	7,6%	
		% z Ogółem	2,1%	2,4%	1,5%	1,5%	7,6%	
rzadko		Liczebność	15	14	11	11	51	
		% z szacowaniem stopy zwrotu	29,4%	27,5%	21,6%	21,6%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	16,7%	30,4%	8,4%	17,5%	15,5%	
		% z Ogółem	4,5%	4,2%	3,3%	3,3%	15,5%	
czasami		Liczebność	28	12	28	15	83	
		% z szacowaniem stopy zwrotu	33,7%	14,5%	33,7%	18,1%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	31,1%	26,1%	21,4%	23,8%	25,2%	
		% z Ogółem	8,5%	3,6%	8,5%	4,5%	25,2%	
często		Liczebność	22	9	45	18	94	
		% z szacowaniem stopy zwrotu	23,4%	9,6%	47,9%	19,1%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	24,4%	19,6%	34,4%	28,6%	28,5%	
		% z Ogółem	6,7%	2,7%	13,6%	5,5%	28,5%	
zawsze		Liczebność	18	3	42	14	77	
		% z szacowaniem stopy zwrotu	23,4%	3,9%	54,5%	18,2%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	20,0%	6,5%	32,1%	22,2%	23,3%	
		% z Ogółem	5,5%	,9%	12,7%	4,2%	23,3%	
Ogółem		Liczebność	90	46	131	63	330	
		% z szacowaniem stopy zwrotu	27,3%	13,9%	39,7%	19,1%	100,0%	
		% z szacowaniem ryzyka	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
		% z Ogółem	27,3%	13,9%	39,7%	19,1%	100,0%	

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.21: Testy  $\chi^2$  dla zależności częstotliwości szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, a sposoby szacowania ryzyka

	Wartość	df	Istotność
	Wartość	df	asymptotyczna (dwustronna)
Chi-kwadrat Pearsona	35,229a	12	,000
Iloraz wiarygodności	35,404	12	,000
N Ważnych obserwacji	330		
a. 10,0% komórek (2) ma liczebność oczekiwaną mniejszą niż 5. Minimalna liczebność oczekiwana wynosi 3,48.			
<b>przy agregacji dla pyt.2: 1 z 2 rzadko i mniej i 4 z 5 - często i więcej</b>			
	Wartość	df	Istotność
	Wartość	df	asymptotyczna (dwustronna)
Chi-kwadrat Pearsona	33,461a	6	,000
Iloraz wiarygodności	32,783	6	,000
N Ważnych obserwacji	330		
a. 0,0% komórek (0) ma liczebność oczekiwaną mniejszą niż 5. Minimalna liczebność oczekiwana wynosi 10,59.			

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.22: Tabela krzyżowa skłonność do ryzyka × doświadczenie na rynku w roli inwestora

skłonność do ryzyka	bardzo niska	Liczebność	doświadczenie				Ogółem
			Poniżej 1 roku	1 - 5 lat	5 - 10 lat	Powyżej 10 lat	
		Liczebność	1	2	1	4	8
		% z skłonność	25,0%	50,0%	25,0%	0,0%	100,0%
		% z doświadczenie	2,4%	1,3%	1,2%	0,0%	1,2%
		% z Ogółem	,3%	,6%	,3%	0,0%	1,2%
		Liczebność	6	14	4	4	28
		% z skłonność	21,4%	50,0%	14,3%	14,3%	100,0%
niska		% z doświadczenie	14,3%	9,3%	4,9%	7,7%	8,6%
		% z Ogółem	1,8%	4,3%	1,2%	1,2%	8,6%
		Liczebność	26	71	44	33	174
średnia		% z skłonność	14,9%	40,8%	25,3%	19,0%	100,0%
		% z doświadczenie	61,9%	47,3%	54,3%	63,5%	53,5%
		% z Ogółem	8,0%	21,8%	13,5%	10,2%	53,5%
wysoka		Liczebność	9	57	26	8	100
		% z skłonność	9,0%	57,0%	26,0%	8,0%	100,0%
		% z doświadczenie	21,4%	38,0%	32,1%	15,4%	30,8%
		% z Ogółem	2,8%	17,5%	8,0%	2,5%	30,8%
		Liczebność	0	6	6	7	19
		% z skłonność	0,0%	31,6%	31,6%	36,8%	100,0%
		% z doświadczenie	0,0%	4,0%	7,4%	13,5%	5,8%
		% z Ogółem	0,0%	1,8%	1,8%	2,2%	5,8%
		Liczebność	42	150	81	52	325
Ogółem		% z skłonność	12,9%	46,2%	24,9%	16,0%	100,0%
		% z doświadczenie	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% z Ogółem	12,9%	46,2%	24,9%	16,0%	100,0%

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.23: Tabela krzyżowa skłonność do ryzyka × wykształcenie

		wykształcenie					Ogółem
		Zasadnicze zawodowe	Średnie ekonomiczne	Wyższe techniczne	Wyższe humanistyczne	Wyższe medyczne	
skłonność do ryzyka	bardzo niska	Liczebność	0	0	2	0	4
		% z skłonność	0,0%	0,0%	50,0%	0,0%	100,0%
		% z wykształcenie	0,0%	0,0%	1,7%	0,0%	0,0%
niska		% z Ogółem	0,0%	0,0%	,6%	0,0%	1,2%
	Liczebność	0	5	15	5	28	
	% z skłonność	0,0%	17,9%	53,6%	17,9%	100,0%	
średnia		% z wykształcenie	0,0%	11,4%	12,8%	5,2%	8,6%
	% z Ogółem	0,0%	1,5%	4,6%	1,5%	,3%	
	Liczebność	0	15	57	59	174	
wysoka		% z skłonność	0,0%	8,6%	32,8%	33,9%	100,0%
	% z wykształcenie	0,0%	34,1%	48,7%	60,8%	75,0%	
	% z Ogółem	0,0%	4,6%	17,5%	18,2%	,9%	
bardzo wysoka		Liczebność	1	20	40	23	100
	% z skłonność	1,0%	20,0%	40,0%	23,0%	100,0%	
	% z wykształcenie	50,0%	45,5%	34,2%	23,7%	30,8%	
Ogółem		% z Ogółem	,3%	6,2%	12,3%	7,1%	30,8%
	Liczebność	1	44	3	10	19	
	% z skłonność	5,3%	21,1%	15,8%	52,6%	100,0%	
		% z wykształcenie	50,0%	9,1%	2,6%	10,3%	5,8%
	% z Ogółem	,3%	1,2%	,9%	3,1%	5,8%	
	Liczebność	2	44	117	97	325	
		% z skłonność	,6%	13,5%	36,0%	29,8%	100,0%
	% z wykształcenie	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
	% z Ogółem	,6%	13,5%	36,0%	29,8%	1,2%	

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.24: Statystyki  $\chi^2$  dla skłonności do ryzyka i wykształcenia

	Wartość	df	Istotność
	Wartość	df	asymptotyczna (dwustronna)
Chi-kwadrat Pearsona	41,301a	20	,003
Iloraz wiarygodności	41,656	20	,003
N Ważnych obserwacji	325		

---

a. 56,7% komórek (17) ma liczebność oczekiwaną mniejszą niż 5. Minimalna liczebność oczekiwana wynosi ,02.

**po agregacji grup skłonności do ryzyka niskiej z bardzo niskiej oraz  
wykształcenia średniego z zawodowym i wyższego humanistycznego z medycznym**

---

	Wartość	df	Istotność
	Wartość	df	asymptotyczna (dwustronna)
Chi-kwadrat Pearsona	27,932a	9	,001
Iloraz wiarygodności	28,705	9	,001
N Ważnych obserwacji	325		

a. 18,8% komórek (3) ma liczebność oczekiwaną mniejszą niż 5. Minimalna liczebność oczekiwana wynosi 2,69.

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.25: Tabela krzyżowa: skłonność do ryzyka × wybrany portfel w pyt.13

skłonność do ryzyka	bardzo niska	wybierz portfel				Ogółem
		od 9,25 tys. zł do 11,2 tys. zł		od 8,5 tys. zł do 11,95 tys. zł		
		3	1	3	4	
niska	% z skłonności do ryzyka	75,0%	25,0%	0,0%	100,0%	
	% z wybierz portfel	2,6%	7%	0,0%	1,2%	
	% z Ogółem	9%	3%	0,0%	1,2%	
średnia	Liczebność	19	6	3	28	
	% z skłonności do ryzyka	67,9%	21,4%	10,7%	100,0%	
	% z wybierz portfel	16,7%	4,1%	4,8%	8,6%	
wysoka	% z Ogółem	5,9%	1,9%	9%	8,6%	
	Liczebność	67	91	16	174	
	% z skłonności do ryzyka	38,5%	52,3%	9,2%	100,0%	
bardzo wysoka	% z wybierz portfel	58,8%	61,5%	25,8%	53,7%	
	% z Ogółem	20,7%	28,1%	4,9%	53,7%	
	Liczebność	21	48	32	101	
Ogółem	% z skłonności do ryzyka	20,8%	47,5%	31,7%	100,0%	
	% z wybierz portfel	18,4%	32,4%	51,6%	31,2%	
	% z Ogółem	6,5%	14,8%	9,9%	31,2%	
Ogółem	Liczebność	4	2	11	17	
	% z skłonności do ryzyka	23,5%	11,8%	64,7%	100,0%	
	% z wybierz portfel	3,5%	1,4%	17,7%	5,2%	
Ogółem	% z Ogółem	1,2%	6%	3,4%	5,2%	
	Liczebność	114	148	62	324	
	% z skłonności do ryzyka	35,2%	45,7%	19,1%	100,0%	
Ogółem	% z wybierz portfel	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
	% z Ogółem	35,2%	45,7%	19,1%	100,0%	
	Liczebność	35,2%	45,7%	19,1%	100,0%	

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.26: Tabela krzyżowa: wiek × doświadczenie inwestycyjne na rynku

	Wiek						Ogółem
	do 25 lat	26 - 35 lat	35 - 45 lat	46 - 55 lat	Powyżej 55 lat		
Doświadczenie							
Poniżej 1 roku	Liczebność	20	18	4	0	1	43
	% z Doświadczenie	46,5%	41,9%	9,3%	0,0%	2,3%	100,0%
	% z Wiek	31,7%	12,5%	4,9%	0,0%	5,0%	13,1%
	% z Ogółem	6,1%	5,5%	1,2%	0,0%	,3%	13,1%
1 - 5 lat	Liczebność	40	77	23	5	6	151
	% z Doświadczenie	26,5%	51,0%	15,2%	3,3%	4,0%	100,0%
	% z Wiek	63,5%	53,5%	28,4%	25,0%	30,0%	46,0%
	% z Ogółem	12,2%	23,5%	7,0%	1,5%	1,8%	46,0%
5 - 10 lat	Liczebność	3	43	27	5	3	81
	% z Doświadczenie	3,7%	53,1%	33,3%	6,2%	3,7%	100,0%
	% z Wiek	4,8%	29,9%	33,3%	25,0%	15,0%	24,7%
	% z Ogółem	,9%	13,1%	8,2%	1,5%	,9%	24,7%
Powyżej 10 lat	Liczebność	0	6	27	10	10	53
	% z Doświadczenie	0,0%	11,3%	50,9%	18,9%	18,9%	100,0%
	% z Wiek	0,0%	4,2%	33,3%	50,0%	50,0%	16,2%
	% z Ogółem	0,0%	1,8%	8,2%	3,0%	3,0%	16,2%
Ogółem	Liczebność	63	144	81	20	20	328
	% z Doświadczenie	19,2%	43,9%	24,7%	6,1%	6,1%	100,0%
	% z Wiek	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% z Ogółem	19,2%	43,9%	24,7%	6,1%	6,1%	100,0%

Źródło: opracowanie własne

Tabela C.27: Tabela krzyżowa: sposoby oceny wyników × sposób wyznaczania oczekiwań

	sposoby oceny wyników										Ogółem
	z najlepszym z indeksem z najgorszym z planowanym zyskiem z oprocentowaniem										
	1	2	1	2	1	7	1	3	15		
oczekiwana: są stale	Liczebność	6,7%	13,3%	6,7%	46,7%	6,7%	20,0%	6,7%	20,0%	100,0%	
	% z oczekiwana	2,9%	2,9%	20,0%	5,5%	1,2%	50,0%	1,2%	50,0%	4,6%	
	% z oceny	,3%	,6%	,3%	2,1%	,3%	,9%	,3%	,9%	4,6%	
	% z Ogółem	24	52	3	74	51	1	205			
zależą od warunków i nastrojów panujących na rynku akcji	Liczebność	11,7%	25,4%	1,5%	36,1%	24,9%	,5%	100,0%			
	% z oczekiwana	70,6%	75,4%	60,0%	57,8%	60,0%	16,7%	62,7%			
	% z oceny	7,3%	15,9%	,9%	22,6%	15,6%	,3%	62,7%			
	% z Ogółem	3	2	1	5	18	0	29			
oprocentowania lokat i innych instrumentów	Liczebność	10,3%	6,9%	3,4%	17,2%	62,1%	0,0%	100,0%			
	% z oczekiwana	8,8%	2,9%	20,0%	3,9%	21,2%	0,0%	8,9%			
	% z oceny	,9%	,6%	,3%	1,5%	5,5%	0,0%	8,9%			
	% z Ogółem	2	7	0	29	5	1	44			
zdobywanego doświadczenia	Liczebność	4,5%	15,9%	0,0%	65,9%	11,4%	2,3%	100,0%			
	% z oczekiwana	5,9%	10,1%	0,0%	22,7%	5,9%	16,7%	13,5%			
	% z oceny	,6%	2,1%	0,0%	8,9%	1,5%	,3%	13,5%			
	% z Ogółem	4	5	0	11	10	0	30			
trudno powiedzieć	Liczebność	13,3%	16,7%	0,0%	36,7%	33,3%	0,0%	100,0%			
	% z oczekiwana	11,8%	7,2%	0,0%	8,6%	11,8%	0,0%	9,2%			
	% z oceny	1,2%	1,5%	0,0%	3,4%	3,1%	0,0%	9,2%			
	% z Ogółem	0	1	0	2	0	1	4			
inna	Liczebność	0,0%	25,0%	0,0%	50,0%	0,0%	25,0%	100,0%			
	% z oczekiwana	0,0%	1,4%	0,0%	1,6%	0,0%	16,7%	1,2%			
	% z oceny	0,0%	,3%	0,0%	,6%	0,0%	,3%	1,2%			
	% z Ogółem	34	69	5	128	85	6	327			
Ogółem	Liczebność	10,4%	21,1%	1,5%	39,1%	26,0%	1,8%	100,0%			
	% z oczekiwana zależna	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%			
	% z sposoby oceny wyników	10,4%	21,1%	1,5%	39,1%	26,0%	1,8%	100,0%			
	% z Ogółem										

Źródło: opracowanie własne



## Dodatek D

# Badanie wpływu kształtu funkcji przynależności — wyniki

Tabela D.1: Statystyki odległości euklidesowej (d) oraz cosinusowej (d cos) pomiędzy wektorami rozwiązań dla kształtu trójkątnego i innych kształtów

Zadanie	kształt	II				III				IV			
	wariant	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
	miara	d		d cos		d		d cos		d		d cos	
EV/ESV	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,1335	0,0000	0,0190	0,0000	0,0000	0,0284	0,0000	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,1742	0,0527	0,0324	0,0062	0,2942	0,0368	0,0900	0,0030	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,1873	0,0535	0,0560	0,0114	0,2653	0,0394	0,1153	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q3	0,2401	0,0718	0,0629	0,0117	0,4077	0,0507	0,1731	0,0058	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	max	0,8292	0,4939	0,5406	0,4949	1,0369	0,4829	0,6874	0,4823	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
EH	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,1914	0,2875	0,0872	0,2010	0,3473	0,2158	0,2883	0,1128	0,0344	0,0344	0,0026	0,0026
	mediana	0,2715	0,3864	0,1774	0,3569	0,4379	0,2996	0,4381	0,2181	0,0501	0,0501	0,0057	0,0057
	średnia	0,2776	0,3706	0,2135	0,3628	0,4202	0,3028	0,4545	0,2503	0,0611	0,0611	0,0136	0,0136
	Q3	0,3683	0,4606	0,3186	0,4881	0,5063	0,4029	0,6070	0,3785	0,0731	0,0731	0,0121	0,0121
	max	0,6588	0,7065	0,9960	1,0000	0,7065	0,6741	1,0000	0,9983	0,4503	0,4503	0,4318	0,4318
EH (ns)	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,4761	0,4419	0,2330	0,2196	0,6361	0,3676	0,2929	0,2929	0,0904	0,0635	0,0093	0,0093
	mediana	0,6514	0,6157	0,3683	0,4261	0,7393	0,5270	0,6245	0,6245	0,2570	0,0904	0,0723	0,0723
	średnia	0,6408	0,5406	0,4299	0,4055	0,7741	0,4673	0,6010	0,6010	0,3688	0,1164	0,1631	0,1631
	Q3	0,8454	0,6978	0,6326	0,5455	1,0200	0,6268	0,9135	0,9135	0,6282	0,1410	0,2572	0,2572
	max	1,2240	0,9953	1,0000	1,0000	1,2247	0,9746	1,0000	1,0000	1,2234	0,7011	0,9994	0,9994
EVaR	min	0,2525	0,2372	0,1599	0,1406	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,5759	0,5587	0,7841	0,7373	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,6618	0,6615	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,6223	0,6154	0,8757	0,8591	0,0545	0,0164	0,0272	0,0043	0,0262	0,0262	0,0080	0,0080
	Q3	0,6743	0,6723	1,0000	1,0000	0,0993	0,0000	0,0203	0,0000	0,0347	0,0347	0,0021	0,0021
	max	0,7070	0,7071	1,0000	1,0000	0,5070	0,4125	0,5515	0,3752	0,4920	0,4920	0,4919	0,4919
EVaR (ns)	min	0,0895	0,0872	0,0187	0,0177	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,5407	0,5300	0,7047	0,6679	0,0488	0,0000	0,0040	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,6231	0,6164	0,9311	0,8992	0,1677	0,0330	0,0636	0,0020	0,0658	0,0658	0,0094	0,0094
	średnia	0,5968	0,5890	0,8343	0,8158	0,1892	0,0542	0,1332	0,0190	0,0781	0,0781	0,0317	0,0317
	Q3	0,6631	0,6620	1,0000	1,0000	0,2815	0,0861	0,1880	0,0166	0,1180	0,1180	0,0319	0,0319

	max	0,7069	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,4973	1,0000	0,4973	0,5243	0,5243	0,6877	0,6877
EcVaR	min	0,7097	0,2887	0,5238	0,1026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,8941	0,7435	1,0000	0,6741	0,2088	0,0506	0,0218	0,0005	0,1251	0,0173	0,1220	0,0173
	mediana	0,9209	0,8097	1,0000	0,8086	0,3015	0,1083	0,0593	0,0036	0,1846	0,0386	0,1807	0,0386
	średnia	0,9195	0,8064	0,9947	0,7893	0,3323	0,1609	0,0791	0,0161	0,2197	0,0765	0,2121	0,0765
	Q3	0,9432	0,8860	1,0000	0,9355	0,4397	0,2296	0,1068	0,0133	0,2700	0,0918	0,2700	0,0918
	max	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	0,9789	1,0000	0,6971	1,0000	0,8703	0,8078	0,8703	0,8078
EcVaR(ns)	min	0,5535	0,3018	0,3799	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0755	0,0000
	Q1	0,8939	0,7388	1,0000	0,2283	0,2048	0,0218	0,0476	0,0005	0,1220	0,1220	0,7813	0,0163
	mediana	0,9203	0,8093	1,0000	0,3149	0,2944	0,0593	0,1027	0,0039	0,1807	0,1807	0,8973	0,0372
	średnia	0,9196	0,8035	0,9945	0,3415	0,3258	0,0791	0,1552	0,0152	0,2121	0,2121	0,8448	0,0740
	Q3	0,9432	0,8820	1,0000	0,4355	0,4313	0,1068	0,2187	0,0130	0,2700	0,2700	0,9524	0,0847
	max	0,9997	0,9995	1,0000	0,6846	0,8901	0,6971	0,9245	0,4928	0,8703	0,8703	1,0000	0,8529
HE (ns)	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,0244	0,0000	0,0072	0,0000	0,0271	0,0000	0,0271	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q3	0,0181	0,0000	0,0003	0,0000	0,0182	0,0000	0,0182	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	max	0,6729	0,0000	0,4904	0,0000	0,7093	0,0000	0,7093	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaRE	min	0,4466	0,4466	0,4402	0,4402	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,6258	0,6257	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,6443	0,6442	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,6433	0,6432	0,9871	0,9870	0,0248	0,0349	0,0153	0,0250	0,0188	0,0188	0,0120	0,0120
	Q3	0,6629	0,6628	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	max	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	0,5109	0,6469	0,5673	0,9031	0,5109	0,5109	0,5673	0,5673
VaRE (ns)	min	0,0350	0,0000	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,5788	0,5936	0,8469	0,8852	0,0302	0,0000	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,6313	0,6322	1,0000	1,0000	0,0688	0,0000	0,0106	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,6061	0,6091	0,8890	0,9014	0,1095	0,0695	0,0584	0,0553	0,0684	0,0684	0,0546	0,0546
	Q3	0,6570	0,6556	1,0000	1,0000	0,1416	0,0279	0,0455	0,0013	0,0348	0,0348	0,0022	0,0022
	max	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	0,6484	0,6343	0,9865	0,8795	0,6635	0,6635	1,0000	1,0000
CVaRE	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,0098	0,0654	0,0049	0,0327	0,0461	0,0286	0,0200	0,0144	0,0277	0,0277	0,0139	0,0139
	Q3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	max	0,8126	0,9808	0,7503	1,0000	0,8652	0,7596	0,7941	0,6518	0,7596	0,7596	0,6518	0,6518
CVaRE(ns)	min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Q1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	mediana	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	średnia	0,0106	0,0054	0,0576	0,0271	0,0457	0,0339	0,0231	0,0174	0,0335	0,0335	0,0335	0,0172
	Q3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	max	0,7071	0,5000	0,9826	1,0000	0,9280	0,9280	0,9196	0,9196	0,9280	0,9280	0,9280	0,9196
S	min	0,0680	0,0506	0,0284	0,0100	0,0649	0,0811	0,0185	0,0224	0,0632	0,0871	0,0227	0,0324
	Q1	0,2087	0,2083	0,1676	0,1685	0,2073	0,2085	0,1657	0,1678	0,2083	0,2077	0,1701	0,1686
	mediana	0,2465	0,2507	0,2304	0,2365	0,2476	0,2472	0,2280	0,2289	0,2462	0,2463	0,2309	0,2296
	średnia	0,2500	0,2521	0,2389	0,2445	0,2494	0,2488	0,2728	0,2403	0,2494	0,2505	0,2433	0,2423
	Q3	0,2880	0,2902	0,2993	0,3037	0,2882	0,2872	0,3012	0,3021	0,2881	0,2904	0,3036	0,3067
	max	0,4918	0,5046	0,5903	0,6791	0,4700	0,4506	0,6385	0,6375	0,4958	0,4944	0,6959	0,6422

Źródło: opracowanie własne

# Dodatek E

## Badanie różnic funkcji przynależności — wyniki

Tabela E.1: Różnice dyskretnych funkcji przynależności

miara		odległość cosinusowa			odległość euklidesowa			wyniki testu Wilcozona		
okres	nazwa	K - BP	K - ME	BP - ME	K - BP	K - ME	BP - ME	K - BP	K - ME	BP - ME
A1	ACP	0,0748	0,0600	0,0880	0,6945	0,6945	0,7075	0,0140	0,1073	0,1415
	AGO	0,0243	-	-	0,3334	-	-	0,0579	-	-
	BIO	0,0228	0,1498	0,2212	0,2725	0,2725	1,0968	0,0579	0,1056	0,2807
	BRE	0,1277	-	-	1,0914	-	-	0,0058	-	-
	BZW	0,0283	0,0889	0,1470	0,3535	0,3535	0,8893	0,0568	0,7874	1,0000
	CEZ	0,1164	-	-	0,9396	-	-	0,0058	-	-
	CST	0,0266	0,0686	0,1296	0,3492	0,3492	0,8478	0,0579	0,5896	0,7874
	GTC	0,0436	0,0454	0,1186	0,4698	0,4698	0,8554	0,0591	0,1056	1,0000
	GTN	0,0952	-	-	0,8459	-	-	0,0058	-	-
	KGH	0,0360	-	-	0,4186	-	-	0,0220	-	-
	LTS	0,0762	-	-	0,7264	-	-	0,0223	-	-
	PBG	0,0987	0,0347	0,0832	1,0367	1,0367	0,8455	0,0139	0,0300	0,1073
	PEO	0,1255	0,0383	0,1202	1,0911	1,0911	0,9623	0,0059	0,0144	0,2213
	PGN	0,0904	0,0726	0,1022	0,8415	0,8415	0,8029	0,0089	0,4065	0,0753
	PKN	0,0703	0,0309	0,0894	0,8778	0,8778	0,8818	0,0053	0,0142	0,1020
	PKO	0,0876	0,0428	0,0835	0,8734	0,8734	0,7836	0,0089	0,0244	0,2361
	PND	0,0355	0,0554	0,1361	0,4027	0,4027	0,9231	0,0591	0,1056	0,2807
	PXM	0,0348	0,0690	0,1321	0,3992	0,3992	0,8632	0,0591	0,1056	1,0000
TPS	0,0687	0,0521	0,0842	0,6650	0,6650	0,6914	0,0220	0,2719	0,2049	
TVN	0,1061	-	-	0,9776	-	-	0,0091	-	-	
A2	ACP	0,1165	-	-	1,1245	-	-	0,0038	-	-
	AGO	0,1120	0,0489	0,1110	1,0314	1,0314	0,8759	0,0058	0,0829	0,2619
	BIO	0,0238	-	-	0,2844	-	-	0,0579	-	-
	BRE	0,0389	0,0864	0,1390	0,4511	0,4511	0,8638	0,0579	0,7874	0,7874
	BZW	0,1163	0,0466	0,0963	1,0637	1,0637	0,8793	0,0038	0,0145	0,0830
	CEZ	0,1124	-	-	1,3564	-	-	0,0038	-	-
	CPS	0,0749	0,0480	0,0573	0,8715	0,8715	0,6405	0,0038	0,0682	0,0144
	CST	0,0348	-	-	0,4083	-	-	0,0591	-	-
	GTC	0,0216	-	-	0,3038	-	-	0,0579	-	-
	GTN	0,0916	0,0556	0,0972	0,9281	0,9281	0,8456	0,0023	0,8443	0,0307
	KGH	0,1136	0,0428	0,0827	1,1203	1,1203	0,8677	0,0025	0,0253	0,0134
	LTS	0,0138	-	-	0,2391	-	-	0,0355	-	-

	PBG	0,0644	0,0377	0,0897	0,6654	0,6654	0,7300	0,0223	0,2049	0,4469
	PEO	0,0260	-	-	0,3402	-	-	0,0591	-	-
	PGN	0,0548	0,0378	0,0757	0,6309	0,6309	0,6841	0,0225	0,2049	0,2049
	PKN	0,0933	-	-	0,9420	-	-	0,0090	-	-
	PKO	0,1126	-	-	0,9687	-	-	0,0091	-	-
	PXM	0,0708	0,0440	0,0648	0,7998	0,7998	0,7093	0,0059	0,0190	0,1260
	TPS	0,1009	0,0280	0,0719	1,0562	1,0562	0,7869	0,0025	0,0108	0,0108
	TVN	0,0201	-	-	0,2925	-	-	0,0355	-	-
A3	ACP	0,0471	0,0520	0,1164	0,4984	0,4984	0,7954	0,0360	0,1422	0,4017
	BIO	0,0293	-	-	0,4359	-	-	0,0137	-	-
	BRE	0,0653	-	-	0,6588	-	-	0,0350	-	-
	BZW	0,1506	0,0473	0,1193	1,3702	1,3702	1,0549	0,0039	0,0051	0,0559
	CEZ	0,0773	0,0512	0,0829	0,8141	0,8141	0,7561	0,0091	0,0243	0,2859
	CPS	0,0446	0,0416	0,0795	0,4891	0,4891	0,6691	0,0141	0,2930	0,1829
	GTC	0,0598	-	-	0,5865	-	-	0,0223	-	-
	GTN	0,1021	0,0493	0,0793	0,9966	0,9966	0,7806	0,0038	0,0185	0,0684
	KGH	0,0617	0,0089	0,0875	0,6508	0,6508	0,7947	0,0225	0,0759	0,9326
	LTS	0,1241	0,0305	0,1056	1,1323	1,1323	1,0095	0,0023	0,0107	0,0206
	PBG	0,0795	-	-	0,7038	-	-	0,0037	-	-
	PEO	0,1313	0,0349	0,1333	1,2511	1,2511	1,1403	0,0059	0,0080	0,2622
	PGE	0,1225	0,0509	0,0953	1,2127	1,2127	0,8791	0,0025	0,0310	0,0054
	PGN	0,0870	-	-	0,8197	-	-	0,0059	-	-
	PKN	0,1281	0,0359	0,0840	1,1610	1,1610	0,8055	0,0059	0,0144	0,0059
	PKO	0,0493	0,0282	0,1151	0,5115	0,5115	0,8499	0,0223	0,2049	0,7998
	PXM	0,0452	0,0631	0,1083	0,4932	0,4932	0,7703	0,0215	0,9325	0,3517
	CST	0,0543	-	-	0,5668	-	-	0,0220	-	-
TPS	0,1068	-	-	0,8773	-	-	0,0091	-	-	
TVN	0,0555	-	-	0,5460	-	-	0,0225	-	-	
A4	ACP	0,0772	-	-	0,7321	-	-	0,0091	-	-
	BHW	0,0173	-	-	0,2724	-	-	0,0213	-	-
	BRE	0,0636	0,0687	0,1022	0,7269	0,7269	0,8007	0,0038	0,8240	0,0558
	CEZ	0,0748	0,0465	0,0790	0,7278	0,7278	0,6830	0,0139	0,1415	0,1415
	GTC	0,0231	-	-	0,3200	-	-	0,0568	-	-
	GTN	0,0649	-	-	0,6428	-	-	0,0058	-	-
	KER	0,0855	0,0178	0,1016	0,8250	0,8250	0,9294	0,0091	0,0580	0,9057
	KGH	0,1283	-	-	1,1996	-	-	0,0025	-	-
	LTS	0,0862	0,0632	0,0709	0,8314	0,8314	0,6448	0,0037	0,1680	0,0293
	LWB	0,0624	0,0366	0,0729	0,6710	0,6710	0,7526	0,0092	0,1551	0,4069
	PBG	0,0613	-	-	0,6682	-	-	0,0141	-	-
	PEO	0,0764	0,0342	0,0888	0,8838	0,8838	0,8646	0,0088	0,1548	0,2357
	PGE	0,0605	0,0382	0,0748	0,7331	0,7331	0,7736	0,0038	0,0453	0,1680
	PGN	0,0626	-	-	0,6701	-	-	0,0225	-	-
	PKN	0,0901	-	-	0,8941	-	-	0,0143	-	-
	PKO	0,0764	0,0190	0,0716	0,7751	0,7751	0,7377	0,0143	0,0423	0,3627
	PZU	0,0851	-	-	0,7540	-	-	0,0038	-	-
	TPE	0,0393	0,0875	0,2056	0,4316	0,4316	1,3844	0,0579	0,1056	0,1056
TPS	0,0291	-	-	0,3643	-	-	0,0223	-	-	
TVN	0,0797	0,0426	0,0997	0,8134	0,8134	0,8542	0,0091	0,3433	0,2361	

A5	ACP	0,0570	0,0649	0,1012	0,5511	0,5511	0,7233	0,0225	0,7998	0,2719
	BHW	0,0261	0,1116	0,1508	0,3237	0,3237	0,8588	0,0140	0,7263	0,4412
	BRE	0,0632	-	-	0,6454	-	-	0,0058	-	-
	GTC	0,0950	-	-	0,9189	-	-	0,0059	-	-
	GTN	0,1109	0,0576	0,1006	0,9448	0,9448	0,8512	0,0059	0,0415	0,0831
	JSW	0,1061	0,0461	0,0755	1,0923	1,0923	0,7721	0,0025	0,0108	0,0135
	KER	0,1016	-	-	0,8561	-	-	0,0059	-	-
	KGH	0,0876	-	-	0,8095	-	-	0,0059	-	-
	LTS	0,0772	0,0179	0,1163	0,7500	0,7500	0,9663	0,0141	0,0423	1,0000
	LWB	0,0886	-	-	0,8295	-	-	0,0059	-	-
	PBG	0,0173	-	-	0,2791	-	-	0,0591	-	-
	PEO	0,0726	0,0551	0,0885	0,7238	0,7238	0,7287	0,0091	0,1551	0,0972
	PGE	0,0575	-	-	0,6343	-	-	0,0091	-	-
	PGN	0,1141	0,0410	0,0901	1,0727	1,0727	0,8908	0,0025	0,0108	0,0653
	PKN	0,0672	0,0484	0,0950	0,6490	0,6490	0,7529	0,0089	0,0578	0,3428
	PKO	0,0552	0,0169	0,0865	0,5598	0,5598	0,7116	0,0138	0,2930	0,6236
	PZU	0,0250	-	-	0,3326	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0814	-	-	0,6185	-	-	0,0223	-	-	
TPS	0,0361	-	-	0,4195	-	-	0,0355	-	-	
TVN	0,0745	0,0485	0,0901	0,7578	0,7578	0,7520	0,0037	0,1422	0,1680	
A6	ACP	0,0806	0,0622	0,0885	0,7325	0,7325	0,7077	0,0059	0,6835	0,0665
	BHW	0,0509	0,0872	0,1153	0,4936	0,4936	0,7962	0,0037	0,3056	0,1416
	BRE	0,0650	0,0528	0,1027	0,6750	0,6750	0,8180	0,0091	0,1551	0,2361
	BRS	0,0283	-	-	0,3533	-	-	0,0360	-	-
	GTC	0,0631	0,0858	0,1158	0,6170	0,6170	0,7761	0,0225	0,5541	0,2719
	JSW	0,3988	-	-	23,6800	-	-	0,0340	-	-
	KER	0,0504	-	-	0,5089	-	-	0,0223	-	-
	KGH	0,1027	0,0506	0,1111	0,9779	0,9779	0,8175	0,0038	0,3063	0,0293
	LTS	0,0525	0,0110	0,0674	0,5671	0,5671	0,6434	0,0223	0,2049	0,4469
	LWB	0,0169	-	-	0,2709	-	-	0,0579	-	-
	PEO	0,1063	-	-	0,9559	-	-	0,0059	-	-
	PGE	0,0632	0,0327	0,0938	0,6316	0,6316	0,7737	0,0225	0,1508	0,7998
	PGN	0,0907	-	-	0,8151	-	-	0,0059	-	-
	PKN	0,0911	-	-	0,9857	-	-	0,0038	-	-
	PKO	0,1020	0,0242	0,0800	0,9473	0,9473	0,7531	0,0089	0,0580	0,0756
	PZU	0,0284	-	-	0,3675	-	-	0,0975	-	-
	SNS	0,0783	0,0627	0,0931	0,7063	0,7063	0,7651	0,0090	0,4069	0,2361
TPE	0,0652	-	-	0,5329	-	-	0,0350	-	-	
TPS	0,0115	-	-	0,2251	-	-	0,0340	-	-	
TVN	0,0679	0,0358	0,0693	0,6656	0,6656	0,6224	0,0138	0,7263	0,1415	
A7	ACP	0,0716	-	-	0,6435	-	-	0,0225	-	-
	BHW	0,0538	0,1551	0,1719	0,5487	0,5487	0,9115	0,0137	0,8334	0,2334
	BRE	0,0705	-	-	0,6393	-	-	0,0223	-	-
	BRS	0,0418	-	-	0,4480	-	-	0,0223	-	-
	GTC	0,0532	0,0736	0,1155	0,5445	0,5445	0,7904	0,0223	0,5541	0,3525
	JSW	0,0866	0,0570	0,1158	0,7327	0,7327	0,8527	0,0355	0,0592	0,6750
	KER	0,0819	0,0446	0,1401	0,6512	0,6512	0,9769	0,0140	0,0423	0,8336
	KGH	0,0828	-	-	0,8603	-	-	0,0141	-	-
	LTS	0,1127	-	-	1,0905	-	-	0,0058	-	-
	LWB	0,0476	-	-	0,4716	-	-	0,0360	-	-

	PEO	0,0534	-	-	0,5261	-	-	0,0355	-	-
	PGE	0,0713	0,0572	0,0738	0,6583	0,6583	0,6146	0,0223	0,9326	0,1508
	PGN	0,0272	-	-	0,3532	-	-	0,0591	-	-
	PKN	0,0828	-	-	0,8265	-	-	0,0141	-	-
	PKO	0,0587	0,0453	0,0995	0,5952	0,5952	0,7260	0,0355	0,2084	0,2945
	PZU	0,0782	0,0308	0,1107	0,8521	0,8521	0,9782	0,0360	0,0360	0,8339
	SNS	0,1321	0,0977	0,0696	1,0568	1,0568	0,6615	0,0088	0,1548	0,0243
	TPE	0,0569	-	-	0,4729	-	-	0,0220	-	-
	TPS	0,0160	-	-	0,2611	-	-	0,0975	-	-
	TVN	0,0565	0,0268	0,0555	0,5721	0,5721	0,5522	0,0355	0,4017	0,1422
B1	ACP	0,0695	-	-	0,6861	-	-	0,0059	-	-
	AGO	0,0237	-	-	0,3277	-	-	0,0355	-	-
	BIO	0,0358	-	-	0,3515	-	-	0,0220	-	-
	BRE	0,0376	0,0943	0,1580	0,4236	0,4236	0,9288	0,0591	0,2807	0,7874
	BZW	0,1178	-	-	1,0687	-	-	0,0038	-	-
	CEZ	0,0258	-	-	0,3383	-	-	0,0591	-	-
	CPS	0,0316	0,0492	0,1129	0,3910	0,3910	0,8241	0,0591	0,1056	1,0000
	CST	0,0355	0,0609	0,1219	0,4091	0,4091	0,8323	0,0579	0,7874	1,0000
	GTC	0,0408	-	-	0,4510	-	-	0,0223	-	-
	GTN	0,0278	0,0963	0,1493	0,3479	0,3479	0,8901	0,0579	0,4185	0,7874
	KGH	0,0387	-	-	0,4326	-	-	0,0225	-	-
	LTS	0,0124	-	-	0,2318	-	-	0,0579	-	-
	PBG	0,0834	0,0413	0,0853	0,8688	0,8688	0,8066	0,0059	0,0829	0,1533
	PEO	0,0330	-	-	0,3943	-	-	0,0355	-	-
	PGN	0,0637	0,0545	0,0982	0,6532	0,6532	0,7900	0,0091	0,4069	0,2361
	PKN	0,0855	0,0347	0,1054	0,9060	0,9060	0,8933	0,0037	0,0086	0,2291
	PKO	0,0951	-	-	0,9788	-	-	0,0059	-	-
PXM	0,0279	0,0720	0,1312	0,3572	0,3572	0,8520	0,0579	0,1056	0,7874	
TPS	0,0602	0,0559	0,0981	0,6216	0,6216	0,7519	0,0223	0,4469	0,2049	
TVN	0,0249	-	-	0,3359	-	-	0,0355	-	-	
B2	ACP	0,0448	0,0644	0,1181	0,4815	0,4815	0,8158	0,0355	0,5294	0,5294
	AGO	0,0897	-	-	0,8245	-	-	0,0143	-	-
	BIO	0,0833	-	-	0,7507	-	-	0,0090	-	-
	BRE	0,0769	0,0413	0,0839	0,8276	0,8276	0,8004	0,0091	0,1551	0,1551
	BZW	0,0799	-	-	0,8225	-	-	0,0089	-	-
	CEZ	0,0398	-	-	0,4468	-	-	0,0360	-	-
	CPS	0,0573	0,0536	0,0743	0,5916	0,5916	0,6755	0,0090	0,1548	0,1232
	CST	0,0679	0,0416	0,0804	0,7167	0,7167	0,7502	0,0038	0,3066	0,1682
	GTC	0,0742	-	-	0,7555	-	-	0,0140	-	-
	GTN	0,0447	-	-	0,4721	-	-	0,0138	-	-
	KGH	0,0790	0,0223	0,0896	0,7761	0,7761	0,8364	0,0140	0,0423	0,8336
	LTS	0,0661	-	-	0,6294	-	-	0,0223	-	-
	PBG	0,0407	0,0639	0,1145	0,4556	0,4556	0,7958	0,0220	0,9326	0,3525
	PEO	0,0735	0,0442	0,0991	0,7209	0,7209	0,7701	0,0143	0,7263	0,2936
	PGN	0,1130	0,0259	0,1006	1,0877	1,0877	1,0101	0,0025	0,0253	0,0545
	PKN	0,0770	0,0160	0,0816	0,7360	0,7360	0,7595	0,0223	0,2041	0,9325
	PKO	0,0673	0,0276	0,1005	0,6384	0,6384	0,8245	0,0223	0,1508	0,9326
PXM	0,0512	0,0533	0,0868	0,5607	0,5607	0,7002	0,0137	0,9439	0,1813	
TPS	0,1244	0,0449	0,1015	1,1133	1,1133	0,8471	0,0038	0,0684	0,0185	
TVN	0,0656	-	-	0,6352	-	-	0,0090	-	-	

B3	ACP	0,0969	-	-	0,8904	-	-	0,0091	-	-
	BRE	0,0847	0,0706	0,0934	0,8573	0,8573	0,7669	0,0059	0,3590	0,0528
	BZW	0,0212	-	-	0,2903	-	-	0,0579	-	-
	CEZ	0,0790	-	-	0,7065	-	-	0,0091	-	-
	CPS	0,0259	-	-	0,3324	-	-	0,0591	-	-
	GTC	0,0197	-	-	0,2942	-	-	0,1003	-	-
	GTN	0,0637	-	-	0,6432	-	-	0,0057	-	-
	KGH	0,1293	-	-	1,1567	-	-	0,0025	-	-
	LTS	0,0878	-	-	0,8545	-	-	0,0058	-	-
	PBG	0,0617	-	-	0,6130	-	-	0,0056	-	-
	PEO	0,0810	0,0366	0,0872	0,8896	0,8896	0,8686	0,0091	0,0580	0,2863
	PGE	0,0789	0,0372	0,0733	0,7694	0,7694	0,6883	0,0038	0,1424	0,1000
	PGN	0,0651	-	-	0,6897	-	-	0,0223	-	-
	PKN	0,1073	-	-	0,9471	-	-	0,0092	-	-
	PKO	0,0771	-	-	0,8118	-	-	0,0092	-	-
	PXM	0,0856	0,0339	0,0881	0,7860	0,7860	0,7886	0,0141	0,0423	0,3627
	PZU	0,0819	-	-	0,7542	-	-	0,0092	-	-
	TPE	0,0446	0,0611	0,1846	0,4210	0,4210	1,1622	0,0591	0,1056	0,1056
TPS	0,0218	-	-	0,3074	-	-	0,0215	-	-	
TVN	0,0819	0,0323	0,1030	0,8992	0,8992	0,9598	0,0091	0,0440	0,2863	
B4	ACP	0,0584	0,0546	0,0884	0,5847	0,5847	0,6922	0,0225	0,2049	0,2719
	BHW	0,0238	0,1018	0,1438	0,3106	0,3106	0,8371	0,0136	0,7260	0,3621
	BRE	0,0588	-	-	0,5886	-	-	0,0058	-	-
	GTC	0,0907	-	-	0,9149	-	-	0,0091	-	-
	GTN	0,1103	0,0531	0,1028	0,9261	0,9261	0,8643	0,0059	0,0415	0,0831
	JSW	0,1062	0,0492	0,0847	1,0848	1,0848	0,8363	0,0025	0,0652	0,0086
	KER	0,1066	-	-	0,8303	-	-	0,0058	-	-
	KGH	0,0860	-	-	0,7631	-	-	0,0059	-	-
	LTS	0,0741	0,0197	0,1162	0,7047	0,7047	0,9320	0,0141	0,0423	0,9442
	LWB	0,0805	-	-	0,7476	-	-	0,0059	-	-
	PBG	0,0166	-	-	0,2708	-	-	0,0579	-	-
	PEO	0,0686	0,0604	0,0901	0,6725	0,6725	0,7179	0,0091	0,2361	0,0972
	PGE	0,0609	-	-	0,6167	-	-	0,0090	-	-
	PGN	0,1188	0,0505	0,0960	1,0778	1,0778	0,9042	0,0025	0,0254	0,0376
	PKN	0,0671	0,0505	0,1017	0,6328	0,6328	0,7719	0,0089	0,0578	0,4065
	PKO	0,0556	0,0170	0,0879	0,5574	0,5574	0,7092	0,0138	0,7260	0,6236
	PZU	0,0243	-	-	0,3228	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0769	-	-	0,5805	-	-	0,0223	-	-	
TPS	0,0380	-	-	0,4330	-	-	0,0355	-	-	
TVN	0,0728	-	-	0,7247	-	-	0,0057	-	-	
B5	ACP	0,0806	0,0622	0,0885	0,7325	0,7325	0,7077	0,0059	0,6835	0,0665
	BHW	0,0509	0,0872	0,1153	0,4936	0,4936	0,7962	0,0037	0,3056	0,1416
	BRE	0,0650	0,0528	0,1027	0,6750	0,6750	0,8180	0,0091	0,1551	0,2361
	BRS	0,0283	-	-	0,3533	-	-	0,0360	-	-
	GTC	0,0631	0,0858	0,1158	0,6170	0,6170	0,7761	0,0225	0,5541	0,2719
	JSW	0,3988	-	-	23,6800	-	-	0,0340	-	-
	KER	0,0504	-	-	0,5089	-	-	0,0223	-	-
	KGH	0,1027	0,0506	0,1111	0,9779	0,9779	0,8175	0,0038	0,3063	0,0293
	LTS	0,0525	0,0110	0,0674	0,5671	0,5671	0,6434	0,0223	0,2049	0,4469
	LWB	0,0169	-	-	0,2709	-	-	0,0579	-	-

	PEO	0,1063	-	-	0,9559	-	-	0,0059	-	-
	PGE	0,0632	0,0327	0,0938	0,6316	0,6316	0,7737	0,0225	0,1508	0,7998
	PGN	0,0907	-	-	0,8151	-	-	0,0059	-	-
	PKN	0,0911	-	-	0,9857	-	-	0,0038	-	-
	PKO	0,1020	0,0242	0,0800	0,9473	0,9473	0,7531	0,0089	0,0580	0,0756
	PZU	0,0284	-	-	0,3675	-	-	0,0975	-	-
	SNS	0,0783	0,0627	0,0931	0,7063	0,7063	0,7651	0,0090	0,4069	0,2361
	TPE	0,0652	-	-	0,5329	-	-	0,0350	-	-
	TPS	0,0115	-	-	0,2251	-	-	0,0340	-	-
	TVN	0,0679	0,0358	0,0693	0,6656	0,6656	0,6224	0,0138	0,7263	0,1415
C1	ACP	0,0590	-	-	0,6008	-	-	0,0059	-	-
	AGO	0,0225	-	-	0,3130	-	-	0,0360	-	-
	BIO	0,0260	-	-	0,2866	-	-	0,0137	-	-
	BRE	0,0999	-	-	1,0365	-	-	0,0011	-	-
	BZW	0,0956	-	-	0,9852	-	-	0,0025	-	-
	CEZ	0,0634	-	-	0,6805	-	-	0,0038	-	-
	CPS	0,0992	-	-	0,9681	-	-	0,0017	-	-
	CST	0,1002	-	-	1,0144	-	-	0,0017	-	-
	GTC	0,0267	-	-	0,3473	-	-	0,0223	-	-
	GTN	0,0832	-	-	0,8151	-	-	0,0011	-	-
	KGH	0,0288	-	-	0,3626	-	-	0,0225	-	-
	LTS	0,0864	-	-	0,8086	-	-	0,0038	-	-
	PBG	0,0664	-	-	0,7062	-	-	0,0059	-	-
	PEO	0,0225	-	-	0,3151	-	-	0,0355	-	-
	PGN	0,0591	-	-	0,6299	-	-	0,0090	-	-
	PKN	0,0870	-	-	0,9043	-	-	0,0024	-	-
	PKO	0,0961	-	-	0,8792	-	-	0,0059	-	-
	PXM	0,0767	-	-	0,8097	-	-	0,0017	-	-
TPS	0,1299	0,0476	0,0860	1,2341	1,2341	0,8230	0,0017	0,0144	0,0033	
TVN	0,0202	-	-	0,2959	-	-	0,0355	-	-	
C2	ACP	0,0418	-	-	0,4674	-	-	0,0223	-	-
	BIO	0,0215	-	-	0,2560	-	-	0,0355	-	-
	BRE	0,0711	-	-	0,7806	-	-	0,0038	-	-
	BZW	0,0796	-	-	0,7655	-	-	0,0037	-	-
	CEZ	0,0387	-	-	0,4470	-	-	0,0355	-	-
	CPS	0,0604	-	-	0,6194	-	-	0,0038	-	-
	GTC	0,0656	-	-	0,6654	-	-	0,0056	-	-
	GTN	0,0512	-	-	0,5360	-	-	0,0091	-	-
	KGH	0,0727	0,0233	0,0792	0,7513	0,7513	0,7995	0,0091	0,1551	0,7223
	LTS	0,0657	-	-	0,6341	-	-	0,0141	-	-
	PBG	0,0399	0,0723	0,1149	0,4570	0,4570	0,7750	0,0223	0,9326	0,2719
	PEO	0,0626	-	-	0,6559	-	-	0,0059	-	-
	PGE	0,0761	-	-	0,7282	-	-	0,0092	-	-
	PGN	0,1126	0,0604	0,0889	1,0019	1,0019	0,8055	0,0024	0,0771	0,0205
	PKN	0,0699	-	-	0,7129	-	-	0,0092	-	-
	PKO	0,0677	0,0313	0,0979	0,6270	0,6270	0,7761	0,0225	0,2049	0,5541
	PXM	0,0550	-	-	0,5900	-	-	0,0059	-	-
	PZU	0,0629	-	-	0,6592	-	-	0,0038	-	-
TPS	0,1145	0,0569	0,1086	0,9979	0,9979	0,8249	0,0038	0,2300	0,0367	
TVN	0,0702	-	-	0,6498	-	-	0,0037	-	-	



C3	ACP	0,0891	-	-	0,8021	-	-	0,0024	-	-
	BHW	0,0283	-	-	0,3569	-	-	0,0355	-	-
	BRE	0,0424	-	-	0,4552	-	-	0,0360	-	-
	CEZ	0,0731	0,0472	0,0745	0,7367	0,7367	0,6785	0,0059	0,1027	0,1260
	GTC	0,0326	-	-	0,3926	-	-	0,0138	-	-
	GTN	0,0818	-	-	0,7828	-	-	0,0025	-	-
	KER	0,0994	-	-	0,8993	-	-	0,0038	-	-
	KGH	0,0589	0,0562	0,0874	0,5940	0,5940	0,6621	0,0225	0,5541	0,2049
	LTS	0,1055	0,0306	0,0798	0,9196	0,9196	0,7393	0,0025	0,3670	0,0054
	LWB	0,0345	-	-	0,4042	-	-	0,0141	-	-
	PBG	0,0687	-	-	0,6845	-	-	0,0023	-	-
	PEO	0,0918	0,0374	0,0880	0,9797	0,9797	0,8649	0,0059	0,0323	0,1536
	PGE	0,0900	0,0426	0,0753	0,9336	0,9336	0,7575	0,0038	0,0454	0,0684
	PGN	0,0690	-	-	0,7017	-	-	0,0092	-	-
	PKN	0,1030	0,0595	0,1054	0,9516	0,9516	0,8031	0,0025	0,4561	0,0254
	PKO	0,0886	-	-	0,8523	-	-	0,0017	-	-
	PZU	0,0385	-	-	0,4303	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0489	-	-	0,5333	-	-	0,0059	-	-	
TPS	0,0254	-	-	0,3347	-	-	0,0223	-	-	
TVN	0,0358	-	-	0,4149	-	-	0,0220	-	-	
C4	ACP	0,1079	0,0358	0,1049	0,9176	0,9176	0,8931	0,0016	0,2348	0,0303
	BHW	0,0139	-	-	0,2438	-	-	0,0088	-	-
	BRE	0,0417	-	-	0,4529	-	-	0,0058	-	-
	GTC	0,0600	-	-	0,5892	-	-	0,0090	-	-
	GTN	0,0625	-	-	0,5730	-	-	0,0059	-	-
	JSW	0,0882	0,0438	0,0788	0,8949	0,8949	0,7718	0,0025	0,1696	0,0652
	KER	0,0587	-	-	0,5613	-	-	0,0058	-	-
	KGH	0,0658	-	-	0,6396	-	-	0,0059	-	-
	LTS	0,0521	-	-	0,5215	-	-	0,0143	-	-
	LWB	0,0521	-	-	0,5161	-	-	0,0059	-	-
	PBG	0,0584	-	-	0,5869	-	-	0,0056	-	-
	PEO	0,0458	-	-	0,4952	-	-	0,0092	-	-
	PGE	0,0430	-	-	0,4660	-	-	0,0092	-	-
	PGN	0,0841	0,0545	0,0727	0,8333	0,8333	0,7211	0,0025	0,8445	0,0253
	PKN	0,0449	-	-	0,4806	-	-	0,0092	-	-
	PKO	0,0397	-	-	0,4377	-	-	0,0137	-	-
	PZU	0,0119	-	-	0,2301	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0592	-	-	0,5042	-	-	0,0141	-	-	
TPS	0,0326	-	-	0,3882	-	-	0,0223	-	-	
TVN	0,0484	-	-	0,5148	-	-	0,0057	-	-	
C5	ACP	0,1069	0,0511	0,0901	1,0092	1,0092	0,8549	0,0017	0,0175	0,0360
	BHW	0,0153	-	-	0,2504	-	-	0,0140	-	-
	BRE	0,0395	-	-	0,4411	-	-	0,0058	-	-
	BRS	0,0153	-	-	0,2561	-	-	0,0360	-	-
	GTC	0,0903	-	-	0,8432	-	-	0,0038	-	-
	JSW	0,0293	-	-	0,3657	-	-	0,0089	-	-
	KER	0,0349	-	-	0,3985	-	-	0,0225	-	-
	KGH	0,0629	-	-	0,6154	-	-	0,0091	-	-
	LTS	0,0700	-	-	0,6679	-	-	0,0143	-	-
	LWB	0,0183	-	-	0,2873	-	-	0,0579	-	-

	PEO	0,0568	-	-	0,5872	-	-	0,0091	-	-
	PGE	0,0566	-	-	0,6115	-	-	0,0090	-	-
	PGN	0,0943	0,0507	0,0916	0,8882	0,8882	0,8276	0,0025	0,1698	0,0653
	PKN	0,0494	-	-	0,5128	-	-	0,0092	-	-
	PKO	0,0462	-	-	0,4848	-	-	0,0215	-	-
	PZU	0,0182	-	-	0,2818	-	-	0,1003	-	-
	SNS	0,0916	-	-	0,7799	-	-	0,0039	-	-
	TPE	0,1027	-	-	0,7255	-	-	0,0215	-	-
	TPS	0,0701	-	-	0,7155	-	-	0,0059	-	-
	TVN	0,0639	-	-	0,6754	-	-	0,0038	-	-
D1	ACP	0,0496	-	-	0,5307	-	-	0,0059	-	-
	BIO	0,0257	-	-	0,2852	-	-	0,0138	-	-
	BRE	0,0794	-	-	0,8758	-	-	0,0011	-	-
	BZW	0,0858	-	-	0,8517	-	-	0,0025	-	-
	CEZ	0,0517	-	-	0,5574	-	-	0,0038	-	-
	CPS	0,0841	-	-	0,7938	-	-	0,0017	-	-
	GTC	0,0185	-	-	0,2858	-	-	0,0223	-	-
	GTN	0,0670	-	-	0,6661	-	-	0,0011	-	-
	KGH	0,0183	-	-	0,2790	-	-	0,0225	-	-
	LTS	0,0742	-	-	0,6983	-	-	0,0038	-	-
	PBG	0,0555	-	-	0,5805	-	-	0,0059	-	-
	PEO	0,0147	-	-	0,2516	-	-	0,0355	-	-
	PGE	0,0856	-	-	0,7875	-	-	0,0016	-	-
	PGN	0,0493	-	-	0,5276	-	-	0,0091	-	-
	PKN	0,0771	-	-	0,7791	-	-	0,0024	-	-
	PKO	0,0812	-	-	0,7341	-	-	0,0059	-	-
	PXM	0,0670	-	-	0,6921	-	-	0,0017	-	-
	PZU	0,0839	-	-	0,8228	-	-	0,0016	-	-
	TPS	0,1151	0,0505	0,0967	1,0750	1,0750	0,8409	0,0017	0,0175	0,0119
TVN	0,0790	-	-	0,7563	-	-	0,0007	-	-	
D2	ACP	0,0435	-	-	0,4798	-	-	0,0091	-	-
	BRE	0,0749	-	-	0,7727	-	-	0,0017	-	-
	BZW	0,0787	-	-	0,7287	-	-	0,0038	-	-
	CEZ	0,0414	-	-	0,4724	-	-	0,0059	-	-
	CPS	0,0684	-	-	0,6698	-	-	0,0039	-	-
	GTC	0,0139	-	-	0,2499	-	-	0,0220	-	-
	GTN	0,0560	-	-	0,5696	-	-	0,0024	-	-
	KGH	0,0789	-	-	0,7696	-	-	0,0025	-	-
	LTS	0,0682	-	-	0,6424	-	-	0,0038	-	-
	PBG	0,0416	-	-	0,4682	-	-	0,0091	-	-
	PEO	0,0109	-	-	0,2203	-	-	0,0355	-	-
	PGE	0,0713	-	-	0,6893	-	-	0,0025	-	-
	PGN	0,1032	-	-	0,9680	-	-	0,0016	-	-
	PKN	0,0708	-	-	0,6986	-	-	0,0058	-	-
	PKO	0,0704	-	-	0,6483	-	-	0,0058	-	-
	PXM	0,0546	-	-	0,5794	-	-	0,0038	-	-
	PZU	0,0736	-	-	0,7068	-	-	0,0025	-	-
	TPE	0,0305	-	-	0,3185	-	-	0,0137	-	-
	TPS	0,1071	0,0506	0,0974	1,0099	1,0099	0,8294	0,0017	0,0360	0,0253
TVN	0,0662	-	-	0,6473	-	-	0,0007	-	-	

D3	ACP	0,0929	-	-	0,8867	-	-	0,0016	-	-
	BHW	0,0560	-	-	0,5512	-	-	0,0038	-	-
	BRE	0,0617	-	-	0,6231	-	-	0,0038	-	-
	CEZ	0,0333	-	-	0,3997	-	-	0,0360	-	-
	GTC	0,0504	-	-	0,5321	-	-	0,0035	-	-
	GTN	0,0377	-	-	0,4372	-	-	0,0091	-	-
	KER	0,0458	-	-	0,5135	-	-	0,0059	-	-
	KGH	0,0674	0,0228	0,0646	0,6839	0,6839	0,6615	0,0091	0,4069	0,1551
	LTS	0,0521	-	-	0,5273	-	-	0,0143	-	-
	LWB	0,0496	-	-	0,5215	-	-	0,0038	-	-
	PBG	0,0925	0,0399	0,0837	0,8417	0,8417	0,7990	0,0007	0,1818	0,0381
	PEO	0,0521	-	-	0,5571	-	-	0,0059	-	-
	PGE	0,0593	-	-	0,5893	-	-	0,0092	-	-
	PGN	0,0928	0,0558	0,0822	0,8704	0,8704	0,7621	0,0024	0,4083	0,0202
	PKN	0,0580	-	-	0,5884	-	-	0,0091	-	-
	PKO	0,0508	0,0325	0,1004	0,5102	0,5102	0,7469	0,0225	0,3525	0,7998
	PZU	0,0559	-	-	0,5671	-	-	0,0038	-	-
TPE	0,0391	-	-	0,3787	-	-	0,0360	-	-	
TPS	0,0395	-	-	0,4378	-	-	0,0223	-	-	
TVN	0,0522	-	-	0,5312	-	-	0,0037	-	-	
D4	ACP	0,0945	0,0424	0,0904	0,8893	0,8893	0,8227	0,0011	0,1318	0,0516
	BHW	0,1151	-	-	0,8946	-	-	0,0011	-	-
	BRE	0,0522	-	-	0,5296	-	-	0,0038	-	-
	GTC	0,0527	-	-	0,5429	-	-	0,0092	-	-
	GTN	0,0383	-	-	0,4315	-	-	0,0038	-	-
	JSW	0,0293	-	-	0,3692	-	-	0,0360	-	-
	KER	0,0445	-	-	0,4882	-	-	0,0091	-	-
	KGH	0,1297	0,0614	0,1115	1,2545	1,2545	0,9283	0,0007	0,0501	0,0029
	LTS	0,0438	-	-	0,4714	-	-	0,0143	-	-
	LWB	0,0467	0,0610	0,1057	0,4913	0,4913	0,7881	0,0091	0,4772	0,1925
	PBG	0,0355	-	-	0,4123	-	-	0,0091	-	-
	PEO	0,0481	-	-	0,5160	-	-	0,0090	-	-
	PGE	0,0521	-	-	0,5331	-	-	0,0092	-	-
	PGN	0,0865	0,0482	0,0866	0,8319	0,8319	0,8047	0,0016	1,0000	0,0426
	PKN	0,0491	-	-	0,5108	-	-	0,0089	-	-
	PKO	0,1011	0,0389	0,0757	0,9538	0,9538	0,7817	0,0007	0,0937	0,0049
	PZU	0,0080	-	-	0,1925	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0459	-	-	0,4248	-	-	0,0360	-	-	
TPS	0,0363	-	-	0,4131	-	-	0,0225	-	-	
TVN	0,0481	-	-	0,5082	-	-	0,0037	-	-	
D5	ACP	0,1023	0,0506	0,1004	0,9019	0,9019	0,8304	0,0011	0,3794	0,0516
	BHW	0,0251	-	-	0,3314	-	-	0,0090	-	-
	BRE	0,0471	-	-	0,4888	-	-	0,0059	-	-
	CEZ	0,0823	0,0432	0,0798	0,8420	0,8420	0,7615	0,0025	0,1696	0,0916
	GTC	0,0533	-	-	0,5488	-	-	0,0059	-	-
	GTN	0,0495	-	-	0,5039	-	-	0,0059	-	-
	KER	0,0509	-	-	0,5177	-	-	0,0059	-	-
	KGH	0,0619	-	-	0,6181	-	-	0,0059	-	-
	LTS	0,0504	-	-	0,5132	-	-	0,0141	-	-
	LWB	0,0504	-	-	0,5144	-	-	0,0059	-	-

PBG	0,0472	-	-	0,4998	-	-	0,0035	-	-
PEO	0,0461	-	-	0,5012	-	-	0,0091	-	-
PGE	0,0459	-	-	0,4951	-	-	0,0091	-	-
PGN	0,0815	0,0501	0,0807	0,8009	0,8009	0,7622	0,0016	1,0000	0,0302
PKN	0,0462	-	-	0,4931	-	-	0,0091	-	-
PKO	0,0396	-	-	0,4374	-	-	0,0141	-	-
PZU	0,0089	-	-	0,2031	-	-	0,0223	-	-
TPE	0,0605	-	-	0,4975	-	-	0,0141	-	-
TPS	0,0293	-	-	0,3639	-	-	0,0223	-	-
TVN	0,0473	-	-	0,5045	-	-	0,0024	-	-

Źródło: opracowanie własne

Tabela E.2: Rozmyte stopy zwrotu wyznaczone metodami *BP*, *K* i *ME*

metoda		BP			K			ME		
okres	nazwa	a	b	c	a	b	c	a	b	c
A1	ACP	-7,4198	-0,2279	8,0000	-3,6650	-0,9337	5,1668	-6,8247	-1,1748	5,3750
	AGO	-13,6697	1,8983	8,9812	-10,7037	2,2189	7,7217	-18,5000	-2,5000	13,5000
	BIO	-8,1719	-2,6742	10,7587	-7,6936	-3,1571	8,1990	-13,5000	-6,4014	13,4998
	BRE	-11,9793	0,3248	10,0000	-5,5116	-0,5613	3,9011	-14,0000	-0,9999	9,9983
	BZW	-9,6559	-2,2383	13,3795	-8,0165	-2,3938	8,9521	-12,6472	-6,3644	13,3740
	CEZ	-11,8456	0,2243	10,0000	-5,3615	0,2719	3,8881	-14,0000	-0,9999	9,9983
	CST	-10,3745	-2,1107	13,1304	-8,2327	-2,3017	8,9177	-12,6533	-6,3280	13,4980
	GTC	-13,5000	-1,4671	13,5000	-8,6664	-2,3834	9,2841	-13,5000	-6,1894	13,4918
	GTN	-10,1520	0,6436	8,0000	-3,6392	-0,9195	5,5839	-16,0000	-1,0000	7,9992
	KGH	-17,9273	1,7524	8,6152	-8,9114	-1,8429	8,9348	-23,5000	-2,5000	18,5000
	LTS	-8,1099	0,5988	6,0000	-5,4839	0,9272	3,5678	-11,9999	-3,0000	6,0000
	PBG	-10,0000	0,2399	8,0000	-5,3064	-1,2184	5,4766	-9,3464	-1,4811	7,3797
	PEO	-12,0000	0,3567	10,0000	-5,6394	-0,5498	5,4310	-10,1172	-2,0948	8,3159
	PGN	-7,7941	-0,5985	10,0000	-3,4493	-1,5460	5,5050	-7,2542	-1,4750	6,0701
	PKN	-9,5072	-0,5172	9,7764	-5,3163	-1,1136	5,8849	-8,2315	-2,1606	7,7532
	PKO	-10,0000	-0,4115	10,0000	-5,1264	-1,0766	5,2225	-10,0000	-0,7297	5,9360
PND	-10,9659	-2,3176	13,5000	-8,5174	-2,4119	8,4976	-13,5000	-6,4608	13,4908	
PXM	-10,3859	-2,0954	13,5000	-8,1886	-2,3097	9,0342	-13,5000	-5,8851	13,4945	
TPS	-7,4604	-0,3059	7,6574	-3,7151	-0,9030	4,5435	-7,0340	-1,1118	5,1847	
TVN	-10,0000	-0,5914	10,0798	-5,9295	-0,1807	4,6793	-10,0000	1,0000	11,9640	
A2	ACP	-4,9332	-0,6276	6,6856	-2,0693	-1,0337	2,9410	-5,4896	1,5000	8,5000
	AGO	-10,2804	0,2343	10,0000	-4,4946	-0,8731	5,8621	-9,5629	-1,7689	7,5534
	BIO	-8,5000	12,4109	12,5006	-8,5000	12,4619	12,5003	-8,5000	7,5000	23,5000
	BRE	-10,9998	-1,5399	13,5000	-8,1861	-2,5236	10,4395	-12,6808	-6,3843	13,5000
	BZW	-9,8142	-0,9062	12,0000	-5,6763	-0,5038	4,0395	-9,3418	-2,3746	8,3675
	CEZ	-5,9911	-0,3533	6,8253	-3,0991	-0,5055	3,6605	-6,5000	0,5000	7,4909
	CPS	-9,9051	-0,0471	10,0973	-4,6078	-1,0712	5,7959	-8,1117	-1,2213	6,3694
	CST	-10,8177	-1,7270	13,5000	-8,1420	-2,3370	9,7140	-13,4976	2,5000	13,5000
	GTC	-7,8334	-2,3879	13,1569	-7,5534	-2,5205	9,0825	-13,4976	2,5000	13,5000
	GTN	-8,0088	-0,8080	10,4192	-3,4655	-1,9198	5,8828	-7,4068	-1,9800	7,2274
	KGH	-9,8886	-0,0005	12,5104	-5,4591	0,5900	5,7134	-9,1402	0,0913	8,0835
	LTS	-8,7412	-1,9788	13,2322	-7,7930	-1,6157	9,8293	-13,5000	2,5000	18,5000
	PBG	-6,0000	-0,7683	7,6396	-3,7754	-0,9100	5,1162	-6,0000	-2,2511	6,2393
	PEO	-9,7274	-1,7225	13,5000	-7,8717	-2,1081	10,3311	-23,5000	-2,5000	13,5000

	PGN	-6,0006	-0,8318	7,4938	-3,8106	-0,9963	4,7621	-5,3343	-2,5168	6,2471
	PKN	-9,6745	-0,3541	9,9244	-5,0495	-4,2089	7,4651	-10,0000	3,0001	13,9983
	PKO	-10,2282	0,7050	8,0000	-5,2386	-0,5029	5,4001	-14,0000	-5,0000	7,9919
	PXM	-7,5012	-1,5550	11,4002	-5,2001	-1,0909	5,2629	-7,8017	-2,0129	7,1832
	TPS	-6,4156	0,1638	5,9344	-3,5244	0,4810	2,8293	-6,2400	0,4145	3,6723
	TVN	-13,3339	1,7100	9,8503	-9,8334	1,4368	8,1268	-18,5000	-2,5000	13,5000
A3	ACP	-5,7539	-0,1105	5,7735	-3,4352	-0,8484	4,4978	-5,3309	-2,5313	5,9842
	BIO	-7,0000	-7,0000	7,5362	-3,0215	-0,9999	0,9998	-12,0000	3,0000	11,9726
	BRE	-6,0000	-0,7549	7,3256	-3,6735	-0,9752	4,4519	-5,9999	3,0000	12,0000
	BZW	-6,5000	-0,0562	6,5000	-2,6554	-0,8258	2,9246	-6,5000	-0,7484	4,7233
	CEZ	-3,8849	-0,2962	4,5000	-2,1574	-0,4874	2,3059	-3,7073	-1,1035	3,5125
	CPS	-5,9224	-0,6668	6,5734	-5,0849	0,3583	3,3980	-5,3712	-2,4465	5,8069
	GTC	-6,0000	-0,5681	6,5432	-3,6314	-0,8232	4,4729	-5,9999	3,0000	12,0000
	GTN	-5,0074	-0,3227	5,9084	-2,6328	-0,4871	2,7065	-4,7945	-0,7892	3,7459
	KGH	-7,7100	0,5432	6,3302	-5,2237	0,7912	3,8887	-8,0000	0,7942	5,5965
	LTS	-6,1769	0,1023	5,8249	-2,8305	0,5094	2,1087	-5,9180	0,3880	3,7299
	PBG	-3,8871	-0,2962	4,2445	-1,8052	-0,4807	2,0027	-7,5000	0,5000	7,5000
	PEO	-5,5000	-0,4584	6,3521	-1,9247	-0,7188	3,0002	-5,5000	-1,1344	4,6220
	PGE	-6,2294	0,0492	6,1786	-1,8609	-0,8772	3,2037	-5,5072	-0,5370	3,8321
	PGN	-4,1250	-0,3732	4,7113	-1,9143	-0,5087	2,2030	-5,4896	1,5000	8,5000
	PKN	-6,5000	0,8377	5,4220	-2,1684	0,5269	3,0147	-5,7152	0,4922	3,7117
	PKO	-6,3831	0,2215	6,0123	-4,5069	0,8712	3,4196	-7,5683	1,0677	5,5107
	PXM	-5,1562	-0,7355	6,4027	-3,4396	-0,9952	4,0406	-5,0651	-2,4415	5,5953
	CST	-6,1130	-0,3622	6,5885	-3,6647	-0,8489	4,7235	-10,0000	1,0000	9,9974
	TPS	-4,6413	-0,0134	4,6904	-2,6990	0,2840	1,9877	-6,5000	-0,5000	5,5000
	TVN	-6,0000	-0,4325	6,4264	-3,4421	-0,8818	4,2237	-5,9999	3,0000	12,0000
A4	ACP	-4,2495	0,0659	3,9768	-2,6893	0,4693	1,8903	-5,5000	0,5000	6,5000
	BHW	-1,6588	-0,4379	2,3087	-2,7200	3,5000	3,5000	-3,5000	3,5000	10,4980
	BRE	-3,7906	-0,0755	4,9454	-1,7417	-0,5602	3,0124	-3,6001	-0,5625	3,1361
	CEZ	-4,0996	-0,0725	4,1840	-1,9775	-0,4260	2,6381	-3,8496	-0,4669	2,7328
	GTC	-3,7551	-0,8338	5,1733	-3,1411	-0,9028	3,6406	-11,9999	-3,0000	6,0000
	GTN	-2,8189	-0,4357	4,6051	-1,8454	-0,4300	2,7053	-8,5000	-0,5000	6,4994
	KER	-4,6793	-0,3895	4,2319	-2,2231	-0,4171	1,9770	-4,6655	-0,9878	3,7341
	KGH	-5,0729	-0,3020	6,8926	-1,6943	-0,7117	3,1385	-6,5000	1,5000	8,4994
	LTS	-3,9940	-0,2075	5,0161	-1,9690	-0,4776	2,8237	-3,2292	-0,9488	3,2740
	LWB	-3,1551	-0,9726	4,8159	-2,3628	-0,4881	1,8861	-3,9711	-0,6844	2,7878
	PBG	-3,7367	-0,6754	3,8834	-2,2994	-0,4928	1,8173	-4,5000	2,5000	6,4994
	PEO	-3,8963	-0,5010	4,8412	-1,9566	-0,8736	2,8525	-3,7666	-1,1502	3,7830
	PGE	-3,7922	-0,5611	4,7916	-2,5768	-0,5387	2,6005	-4,0854	-0,9115	3,4943
	PGN	-3,2430	-0,4190	4,0189	-1,9553	-0,4958	2,2429	-5,5000	-0,5000	4,5000
	PKN	-4,5000	-0,1024	4,8082	-1,7990	-0,5252	2,7256	-4,4995	1,5000	7,5000
	PKO	-4,2670	-0,1422	4,6681	-2,7711	0,4098	1,9856	-4,5000	0,4339	2,9975
	PZU	-5,0271	0,2946	3,9751	-1,6725	-0,4716	2,7048	-5,4896	1,5000	8,5000
	TPE	-13,5000	-4,5285	13,5000	-8,6181	-5,5303	10,1465	-13,5000	-1,4312	13,5000
	TPS	-5,8138	0,7341	4,3184	-4,0390	0,7946	3,3166	-10,0000	1,0000	9,9974
	TVN	-4,0693	-0,2220	4,3618	-1,8392	-0,6272	2,6849	-3,8174	-0,9403	3,3863
	ACP	-6,0378	-0,5232	7,4231	-3,5817	-0,7430	4,5993	-5,4738	-2,1876	5,5139
	BHW	-3,4924	-0,8976	4,5051	-3,1090	-0,9677	3,3898	-6,7599	0,3090	3,1017
	BRE	-7,5318	-0,1199	7,8985	-5,2700	0,9468	3,5117	-13,9983	-1,0000	12,0000
	GTC	-9,2379	-1,2840	10,0000	-5,5525	-0,8666	3,7533	-14,0000	-0,9999	9,9983
	GTN	-10,2293	-0,4410	9,8275	-3,7860	-1,0983	3,8101	-9,3431	-1,2961	6,3739

	JSW	-5,9222	-0,2083	5,9842	-2,7134	-0,8382	2,9441	-5,0535	-0,8315	3,9022
	KER	-10,0000	-0,6729	9,2967	-3,6669	-1,2320	3,9727	-10,0000	3,0001	13,9983
	KGH	-9,2326	0,5575	8,0000	-5,4096	0,9051	3,8105	-16,0000	-1,0000	7,9992
	LTS	-9,2427	0,2521	7,4064	-5,6185	0,9422	3,5361	-10,0000	0,8684	6,2116
	LWB	-10,0000	0,3773	7,6694	-3,6307	-0,9790	5,2980	-10,0000	3,0001	13,9983
	PBG	-9,9604	-1,4941	9,9113	-7,9896	-2,2394	8,4824	-13,4976	2,5000	13,5000
	PEO	-7,8378	-0,0552	7,8727	-3,7454	-0,9878	5,3233	-7,3763	-1,2630	5,6734
	PGE	-7,6731	-0,6160	7,6613	-4,4217	-0,8903	4,0999	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-5,8480	-0,2327	5,9490	-2,1087	-0,7174	2,7270	-5,3911	-0,6467	3,8397
	PKN	-7,2189	-0,4720	7,7905	-4,1251	-0,6666	4,2489	-7,2637	-1,8386	6,0346
	PKO	-7,3272	0,3483	6,0943	-5,1835	0,8701	3,4932	-7,3200	1,0071	5,4222
	PZU	-10,3344	-1,8609	10,8642	-8,2839	-2,3291	8,5324	-18,4971	2,5000	18,5000
	TPE	-18,5000	5,0542	19,4455	-15,5533	7,5000	7,5000	-18,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-4,3955	-0,7881	5,8132	-3,3071	-0,9445	3,8957	-10,0000	-1,0000	5,9878
	TVN	-9,4370	0,5437	7,7169	-4,0040	-0,8942	5,4908	-7,5536	-1,5709	6,1578
A6	ACP	-3,8736	-0,1047	4,1825	-1,9292	-0,4082	2,6767	-3,6331	-0,5860	2,7503
	BHW	-1,0370	-0,3350	1,9275	-0,8453	-0,2411	0,9110	-1,2730	-0,5845	1,3143
	BRE	-3,8673	-0,0494	3,9902	-1,7499	-0,6198	2,6382	-3,9391	-0,4071	2,8144
	BRS	-26,7284	-0,0546	21,9078	-24,2940	8,4795	15,6224	-66,0000	-15,0000	26,0000
	GTC	-6,5737	-0,3870	7,9453	-3,3312	-0,9836	4,6119	-6,6448	-1,1488	5,0487
	JSW	-9,3675	1,7903	7,7529	-13,4976	2,5000	13,5000	-13,4976	2,5000	13,5000
	KER	-13,3701	-2,3547	15,8031	-8,8718	-3,0776	9,4741	-18,4971	2,5000	18,5000
	KGH	-5,5000	0,7381	5,0689	-1,9568	-0,3688	3,7610	-3,9417	-0,7624	3,9283
	LTS	-7,4939	0,8575	6,0704	-4,3536	0,6709	4,2154	-7,2569	1,0782	5,4005
	LWB	-8,5000	17,4707	17,4707	-8,5000	17,4992	17,4992	-8,5000	12,5000	33,4999
	PEO	-4,9141	-0,1282	5,4585	-1,8909	-0,6310	2,8653	-5,5000	1,5000	7,5000
	PGE	-7,1989	-0,6513	7,8742	-4,1748	-0,7032	4,4110	-7,6274	-1,2915	5,7233
	PGN	-4,0422	-0,3382	4,8166	-1,8576	-0,4604	2,3016	-4,4970	3,5000	10,5000
	PKN	-5,3005	0,2049	5,0692	-2,7383	0,5198	2,6971	-6,5000	0,5000	7,4909
	PKO	-4,7808	0,3272	4,6003	-2,3465	0,0585	2,8500	-4,5467	0,2818	3,5091
	PZU	-15,7088	-2,9273	16,0000	-15,0015	-4,8782	15,4810	-56,0000	-15,0000	15,9943
	SNS	-6,6524	-0,8076	7,7271	-3,6377	-1,1514	3,9584	-5,9601	-1,9409	5,9024
TPE	-21,6416	-3,4189	19,9183	-7,4931	-2,5000	2,4928	-23,5000	2,5000	23,5000	
TPS	-3,3356	-0,8162	4,5555	-3,0406	-0,8675	3,5992	-18,0000	-3,0000	6,0000	
TVN	-7,3936	-0,4499	7,6482	-5,3595	0,3366	3,8090	-7,1439	-1,2420	5,4494	
A7	ACP	-4,0033	0,3029	3,5537	-1,7135	-0,3217	2,6861	-4,5000	0,5000	5,5000
	BHW	-1,8239	-0,4850	4,1658	-1,5495	-0,6498	2,6043	-2,6139	-1,2301	2,8131
	BRE	-3,2889	-0,1148	3,6610	-1,7759	-0,4079	2,3530	-4,5000	0,5000	5,5000
	BRS	-11,3828	-2,3353	15,2016	-8,6034	-2,3818	8,9016	-28,5000	2,5000	28,4955
	GTC	-6,3368	-0,2555	6,2522	-3,3700	-0,9909	4,2315	-6,5029	-1,2329	5,0012
	JSW	-4,2997	-0,0791	3,5000	-1,7246	-0,5428	1,9264	-4,0243	-0,5173	2,7142
	KER	-6,4745	-1,2293	7,5357	-3,5557	-1,4157	3,4013	-7,8769	-1,2649	6,3445
	KGH	-4,9644	0,8685	3,7308	-2,0950	0,5569	2,2159	-5,5000	0,5000	5,5000
	LTS	-6,2042	1,2539	5,0508	-1,6231	-1,1098	3,9161	-6,5000	1,5000	6,5000
	LWB	-6,0000	-0,5238	4,4144	-3,4443	-1,0329	3,3081	-5,9999	3,0000	12,0000
	PEO	-2,7772	-0,2852	3,5000	-1,6732	-0,4521	2,0263	-7,5000	-1,5000	3,4983
	PGE	-7,4884	-0,3923	8,0000	-4,0391	-0,6203	4,5920	-6,3245	-1,3011	5,0996
	PGN	-4,0000	-0,3419	5,7058	-3,7073	0,8647	3,2925	-4,0000	3,0000	9,9758
	PKN	-4,9691	-0,0234	5,5000	-3,2344	1,1225	2,5687	-6,5000	-0,5000	5,5000
PKO	-3,6471	0,3038	2,8699	-1,8039	-0,4258	2,5097	-2,6897	-1,2314	3,0027	
PZU	-8,0000	-0,2722	6,0000	-5,2298	-1,2425	4,5144	-8,0000	-1,9479	6,0000	

	SNS	-5,0957	-0,1609	5,5000	-1,9600	-0,4848	2,0710	-4,0662	-0,4193	2,6224
	TPE	-7,4960	-2,4996	2,4830	-7,4993	-2,5000	2,4977	-28,5000	-2,5000	23,4998
	TPS	-11,4716	2,2556	3,5000	-7,6512	-2,0329	3,5000	-33,4981	-12,5000	3,5000
	TVN	-6,0000	-0,0320	7,1563	-4,1404	0,9508	3,5590	-5,4419	0,9774	5,3507
B3	ACP	-4,6761	-0,2130	4,6773	-1,8691	-0,4984	2,5492	-5,5000	0,5000	6,5000
	BRE	-4,2604	-0,1350	5,2895	-1,7796	-0,6907	2,9483	-3,9730	-0,4996	3,0251
	BZW	-3,4129	-0,9341	4,5872	-3,1072	-0,9992	3,3708	-6,0000	3,0000	9,9878
	CEZ	-4,2127	0,1068	3,8717	-1,7905	-0,4290	2,6725	-6,5000	-0,5000	5,5000
	CPS	-3,6008	-0,9531	5,5190	-3,1478	-0,9747	3,5312	-10,0000	-1,0000	5,9878
	GTC	-3,8462	-0,4886	4,0000	-3,0959	-0,8902	3,5553	-12,0000	-1,0000	4,0000
	GTN	-2,9140	-0,4074	4,0918	-1,8289	-0,4795	2,2428	-8,5000	-0,5000	6,4994
	KGH	-5,1236	-0,1091	6,7747	-1,6492	-0,6052	3,1845	-6,5000	1,5000	8,4994
	LTS	-3,9748	-0,1957	4,8202	-2,1764	-0,3726	2,9029	-5,5000	1,5000	7,5000
	PBG	-3,6026	-0,4011	3,7632	-1,9079	-0,4916	1,9012	-6,5000	1,5000	6,5000
	PEO	-4,0313	-0,6307	5,0718	-2,6501	-0,5685	2,5973	-3,9545	-1,2353	3,8518
	PGE	-4,6878	-0,2706	4,9540	-3,0010	0,1687	1,9729	-4,6530	-0,5992	3,2492
	PGN	-3,0752	-0,4216	3,9796	-1,8497	-0,6397	2,2911	-5,5000	-0,5000	4,5000
	PKN	-4,5000	-0,1830	4,9449	-1,9028	-0,4386	2,7729	-4,4995	1,5000	7,5000
	PKO	-4,2808	-0,2955	4,9523	-2,6664	-0,1710	2,7573	-6,5000	-0,5000	5,5000
	PXM	-4,1622	-0,2694	4,1081	-2,0003	-0,4542	1,9342	-3,8971	-0,9658	3,5310
	PZU	-4,1893	0,0152	4,4519	-1,8662	-0,4162	2,7739	-5,4896	1,5000	8,5000
	TPE	-11,3146	-3,3804	13,5000	-8,6166	-3,9184	8,8693	-13,5000	-6,3273	13,4983
	TPS	-5,4282	0,6488	4,2399	-3,1458	-0,7945	4,3643	-10,0000	1,0000	9,9974
TVN	-4,2974	-0,3997	4,8495	-1,9444	-0,6468	2,7271	-4,1346	-1,1623	3,8178	
B4	ACP	-6,1547	-0,6135	7,4785	-3,6648	-0,8477	4,5994	-5,4633	-2,2667	5,7002
	BHW	-3,5317	-0,8880	4,4805	-3,1252	-0,9637	3,3934	-6,6796	0,2767	3,1096
	BRE	-6,3756	-0,4547	7,8404	-5,1402	0,9443	3,3576	-13,9983	-1,0000	12,0000
	GTC	-9,0062	-1,1951	9,8868	-5,4225	-1,0449	3,9190	-12,0000	-1,0000	9,9640
	GTN	-10,3098	-0,4444	9,6539	-3,8254	-0,9764	3,8660	-9,6207	-1,2728	6,2206
	JSW	-5,8148	-0,1453	5,6525	-1,9232	-0,9423	2,9088	-4,8737	-0,6944	3,6515
	KER	-10,0000	-0,5941	9,3400	-3,5025	-1,1738	3,7622	-10,0000	3,0001	13,9983
	KGH	-8,4310	0,0964	8,0000	-5,5639	0,7775	3,6765	-16,0000	-1,0000	7,9992
	LTS	-8,6222	0,1741	7,2768	-5,4515	0,9369	3,5060	-9,7455	1,1525	5,8286
	LWB	-9,6074	0,1864	7,2667	-3,5912	-0,9674	4,5468	-10,0000	3,0001	13,9983
	PBG	-9,1720	-1,8985	10,3170	-7,8338	-2,2973	8,4223	-13,4976	2,5000	13,5000
	PEO	-7,6084	-0,0476	7,6299	-3,6345	-0,9776	5,2306	-6,6834	-1,3627	5,5127
	PGE	-7,5870	-0,7226	7,3332	-3,9568	-1,0485	3,7818	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-5,8410	-0,2278	6,0965	-1,8765	-0,7735	2,7187	-5,1067	-0,6023	3,6883
	PKN	-6,6882	-0,5648	7,7881	-3,8605	-0,7220	4,2666	-7,2209	-1,7388	6,0036
	PKO	-7,3146	0,3026	6,1255	-5,2207	0,8306	3,5070	-7,3113	0,9980	5,4208
	PZU	-10,0061	-1,9428	10,4788	-8,2168	-2,3663	8,3401	-18,4971	2,5000	18,5000
	TPE	-18,5000	4,6867	19,2074	-9,3115	-2,5001	2,4935	-18,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-5,1413	-0,3816	5,7870	-3,3099	-0,8809	4,2055	-10,0000	-1,0000	5,9878
TVN	-7,8722	-0,1198	7,4343	-3,7804	-0,9672	4,6997	-14,0000	-0,9999	9,9983	
	ACP	-3,8736	-0,1047	4,1825	-1,9292	-0,4082	2,6767	-3,6331	-0,5860	2,7503
	BHW	-1,0370	-0,3350	1,9275	-0,8453	-0,2411	0,9110	-1,2730	-0,5845	1,3143
	BRE	-3,8673	-0,0494	3,9902	-1,7499	-0,6198	2,6382	-3,9391	-0,4071	2,8144
	BRS	-26,7284	-0,0546	21,9078	-24,2940	8,4795	15,6224	-66,0000	-15,0000	26,0000
	GTC	-6,5737	-0,3870	7,9453	-3,3312	-0,9836	4,6119	-6,6448	-1,1488	5,0487
	JSW	-9,3675	1,7903	7,7529	-13,4976	2,5000	13,5000	-13,4976	2,5000	13,5000
	KER	-13,3701	-2,3547	15,8031	-8,8718	-3,0776	9,4741	-18,4971	2,5000	18,5000

	KGH	-5,5000	0,7381	5,0689	-1,9568	-0,3688	3,7610	-3,9417	-0,7624	3,9283
	LTS	-7,4939	0,8575	6,0704	-4,3536	0,6709	4,2154	-7,2569	1,0782	5,4005
	LWB	-8,5000	17,4707	17,4707	-8,5000	17,4992	17,4992	-8,5000	12,5000	33,4999
	PEO	-4,9141	-0,1282	5,4585	-1,8909	-0,6310	2,8653	-5,5000	1,5000	7,5000
	PGE	-7,1989	-0,6513	7,8742	-4,1748	-0,7032	4,4110	-7,6274	-1,2915	5,7233
	PGN	-4,0422	-0,3382	4,8166	-1,8576	-0,4604	2,3016	-4,4970	3,5000	10,5000
	PKN	-5,3005	0,2049	5,0692	-2,7383	0,5198	2,6971	-6,5000	0,5000	7,4909
	PKO	-4,7808	0,3272	4,6003	-2,3465	0,0585	2,8500	-4,5467	0,2818	3,5091
	PZU	-15,7088	-2,9273	16,0000	-15,0015	-4,8782	15,4810	-56,0000	-15,0000	15,9943
	SNS	-6,6524	-0,8076	7,7271	-3,6377	-1,1514	3,9584	-5,9601	-1,9409	5,9024
	TPE	-21,6416	-3,4189	19,9183	-7,4931	-2,5000	2,4928	-23,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-3,3356	-0,8162	4,5555	-3,0406	-0,8675	3,5992	-18,0000	-3,0000	6,0000
	TVN	-7,3936	-0,4499	7,6482	-5,3595	0,3366	3,8090	-7,1439	-1,2420	5,4494
B1	ACP	-7,3677	-0,5718	8,3929	-3,8077	-0,9689	4,3920	-14,0000	-0,9999	9,9983
	AGO	-13,2092	0,6430	10,1938	-8,2188	-2,0706	9,4429	-18,5000	-2,5000	13,5000
	BIO	-9,4606	-2,8019	11,3713	-8,1855	-2,5000	5,3659	-18,4971	2,5000	18,5000
	BRE	-9,6824	-1,9929	13,5000	-7,9290	-2,4186	9,8208	-13,5000	-6,2582	13,4723
	BZW	-10,8347	-1,1730	11,9191	-5,4965	-1,3000	3,7076	-13,9983	-1,0000	12,0000
	CEZ	-14,2236	1,9294	8,5000	-7,9638	-1,8790	8,5000	-18,5000	-2,5000	8,5000
	CPS	-11,8092	-2,0716	13,5000	-8,6884	-2,2966	8,7863	-13,3416	-6,1411	13,5000
	CST	-11,3651	-2,1470	13,5000	-8,5335	-2,4737	8,9637	-12,6358	-6,4150	13,5000
	GTC	-13,6301	-1,2597	14,1741	-8,4004	-2,4994	9,7791	-18,4971	2,5000	18,5000
	GTN	-9,3650	-2,2623	13,5000	-7,9205	-2,3473	8,9296	-13,0740	-5,9748	12,9707
	KGH	-17,0086	1,6237	10,3718	-11,1294	0,9028	8,3782	-23,5000	-2,5000	18,5000
	LTS	-12,9271	1,7864	8,0456	-7,7475	-2,0300	8,9819	-13,5000	2,5000	18,5000
	PBG	-8,5778	-0,7230	9,8729	-4,0527	-1,0956	5,3935	-8,0768	-1,7429	6,8252
	PEO	-13,4405	-0,2863	13,1260	-8,1639	-2,1704	10,1725	-23,5000	-2,5000	13,5000
	PGN	-6,3109	-0,7201	8,1209	-3,5724	-1,1419	4,6161	-7,0785	-1,1262	5,5523
	PKN	-10,0033	-0,0954	9,6813	-5,3894	-0,4866	5,7064	-9,7873	-1,5209	7,3198
PKO	-11,2628	-0,3429	10,0000	-5,3132	-1,8704	5,7664	-14,0000	-0,9999	9,9983	
PXM	-10,3142	-2,0989	13,5000	-8,1962	-2,2588	9,0872	-12,8750	-6,2400	13,5000	
TPS	-6,6062	-0,5151	7,4250	-3,5528	-0,9924	4,5324	-7,0488	-1,1182	5,1591	
TVN	-13,0592	-0,0517	10,6575	-8,1354	-2,2580	9,1180	-18,5000	-2,5000	13,5000	
B2	ACP	-5,2930	-0,5484	6,0000	-3,3893	-0,9472	3,9887	-5,0580	-2,6113	5,8483
	AGO	-8,1153	0,5233	8,0000	-3,8276	-0,8322	5,8187	-12,0000	1,0000	7,9782
	BIO	-10,0000	4,1441	7,2952	-3,8850	-1,0000	0,9977	-10,0000	5,0000	16,0000
	BRE	-8,4253	-0,6226	9,9123	-3,8504	-1,2762	5,4699	-8,4526	-1,0129	6,2111
	BZW	-7,6047	-0,2558	9,3537	-3,5419	-1,1968	5,8621	-12,0000	-1,0000	9,9640
	CEZ	-4,3697	-0,8538	6,0000	-3,3377	-1,0322	3,9694	-11,9999	-3,0000	6,0000
	CPS	-5,7936	-1,0159	8,1194	-3,8956	-0,8952	4,0409	-5,2046	-2,5903	5,9512
	CST	-7,3796	-0,9472	9,5763	-4,3073	-0,9095	5,1965	-7,5941	-1,5814	6,2323
	GTC	-7,5019	-0,5530	8,0000	-3,8262	-1,0898	4,6404	-14,0000	-5,0000	7,9919
	GTN	-3,9320	-0,9737	7,0056	-3,2264	-1,2121	4,1666	-8,0000	1,0000	13,9919
	KGH	-8,2643	0,4820	8,0000	-5,1681	0,9372	3,8759	-9,1101	0,8171	6,2657
	LTS	-6,9448	-0,1286	7,5483	-3,6564	-0,7744	5,2635	-12,0000	1,0000	7,9782
	PBG	-5,2755	-0,5881	5,8569	-3,4009	-0,9652	3,9433	-5,0557	-2,5215	5,5934
	PEO	-7,6027	-0,2759	8,4176	-3,8458	-0,8014	5,4117	-7,5952	-1,2363	5,8144
	PGN	-5,5000	-0,5122	5,6582	-1,8581	-0,8085	2,6164	-5,5000	-0,6448	3,9716
	PKN	-8,2664	1,1276	6,0000	-4,3748	0,9012	3,9354	-8,4292	1,3573	5,5348
PKO	-6,3683	-0,0957	7,9481	-4,3148	0,9321	3,5230	-7,4457	0,8574	6,0078	
PXM	-5,3417	-0,9347	7,6624	-3,6541	-0,9430	4,4335	-5,0447	-2,5602	5,8495	



	TPS	-5,9635	-0,0867	6,0034	-2,8422	-0,2835	2,9008	-4,9899	-0,8836	3,8884
	TVN	-6,0411	-0,5568	8,0000	-3,5414	-0,9531	5,2450	-14,0000	-5,0000	7,9919
C1	ACP	-5,8160	-0,7603	7,8659	-3,5508	-0,9787	4,3313	-14,0000	-0,9999	9,9983
	AGO	-12,9622	1,0008	10,5978	-7,8783	-2,0641	9,9709	-18,5000	-2,5000	13,5000
	BIO	-8,9243	-2,7466	10,2497	-8,0257	-2,5000	5,3029	-18,5000	2,5000	23,5000
	BRE	-11,7359	-0,4156	12,0893	-7,8419	2,3346	3,6119	-16,0000	1,0000	14,0000
	BZW	-9,8685	-0,7461	11,6387	-5,3861	-0,9131	4,5251	-13,9983	-1,0000	12,0000
	CEZ	-7,7324	-0,2649	7,9519	-3,9965	-0,9488	5,1968	-18,0000	-1,0000	9,9988
	CPS	-11,3362	-0,1949	9,9707	-4,1352	-1,3439	5,3993	-16,0000	1,0000	14,0000
	CST	-10,6187	-0,7257	11,6191	-5,3055	-0,9812	5,3775	-13,9999	1,0000	14,0000
	GTC	-9,0545	-2,2732	13,7386	-7,8928	-2,4587	9,4776	-18,4971	2,5000	18,5000
	GTN	-8,0835	-0,6056	9,2703	-6,6913	3,0000	3,0000	-16,0000	1,0000	14,0000
	KGH	-14,2560	1,9110	10,3877	-9,9523	2,1332	8,1339	-23,5000	-2,5000	18,5000
	LTS	-8,4761	-0,1727	9,0240	-5,3084	0,0663	5,2627	-12,0000	3,0000	17,9798
	PBG	-7,6734	-0,2889	8,0564	-3,7814	-1,0021	5,2376	-12,0000	-1,0000	9,9640
	PEO	-9,3843	-1,8748	13,5000	-7,8356	-2,1130	10,2136	-23,5000	-2,5000	13,5000
	PGN	-6,2165	-0,7772	7,8488	-3,6751	-1,0575	4,5449	-10,0000	1,0000	9,9974
	PKN	-9,5716	-0,0848	9,6192	-5,2694	-0,6418	5,6821	-13,9999	1,0000	14,0000
PKO	-9,8505	-0,0006	9,9451	-5,7305	0,7154	4,0355	-14,0000	-0,9999	9,9983	
PXM	-8,5639	-0,8509	10,0254	-5,1554	-0,9116	5,1698	-12,0000	3,0000	16,0000	
TPS	-6,8032	-0,0870	6,7329	-2,9650	-0,3485	2,9440	-5,7816	-0,6942	3,9960	
TVN	-13,0441	1,1634	9,7782	-7,8914	-2,0841	9,5412	-18,5000	-2,5000	13,5000	
C2	ACP	-4,4732	-0,8363	6,5498	-3,3344	-0,9755	4,1179	-7,9999	1,0000	8,0000
	BIO	-8,7482	-2,8192	9,9823	-8,0098	-2,5000	5,1301	-13,5000	7,5000	23,5000
	BRE	-7,6601	-0,8113	10,0553	-3,9037	-1,1767	5,3908	-10,0000	3,0001	13,9983
	BZW	-7,3320	-0,5421	9,1234	-3,6614	-1,0023	5,4100	-12,0000	3,0000	11,9726
	CEZ	-5,2558	-0,3143	5,7297	-3,2951	-0,9380	4,2307	-11,9999	-3,0000	6,0000
	CPS	-5,9952	-0,8575	8,2515	-3,8535	-0,8759	4,5315	-10,0000	3,0001	13,9983
	GTC	-6,7131	-0,8110	8,4075	-3,8763	-0,9293	4,4430	-13,9999	1,0000	14,0000
	GTN	-4,5360	-0,9395	7,6736	-3,3578	-1,1001	4,3116	-8,0000	1,0000	13,9919
	KGH	-7,5053	-0,2839	9,2228	-5,2493	0,9552	3,8198	-8,3310	0,6897	6,2489
	LTS	-6,4017	-0,4407	8,0438	-5,1241	0,7985	3,7441	-11,9983	1,0000	14,0000
	PBG	-5,3711	-0,4192	5,9511	-3,3586	-0,9434	4,2102	-5,0705	-2,4402	5,4999
	PEO	-7,2668	-0,4280	8,0687	-3,9860	-0,8480	5,1995	-10,0000	1,0000	11,9640
	PGE	-7,5924	-0,1883	8,6749	-3,7002	-0,9097	5,4785	-12,0000	-1,0000	9,9640
	PGN	-5,2908	-0,1656	5,0897	-1,8639	-0,5980	2,1435	-4,1650	-0,6963	3,2872
	PKN	-7,5978	0,1410	7,7836	-5,1835	0,9654	3,7862	-10,0000	3,0001	13,9983
	PKO	-6,3923	-0,3172	8,0000	-4,6426	0,8726	3,4726	-7,3626	0,9019	5,7662
	PXM	-5,8135	-0,8785	7,7570	-3,6984	-0,9852	4,3599	-10,0000	1,0000	11,9640
PZU	-7,4805	-0,0762	8,0097	-3,8522	-0,8366	5,4512	-10,0000	3,0001	13,9983	
TPS	-5,1779	0,0702	5,3050	-1,9534	-0,4084	3,0529	-4,5692	-0,6901	3,4702	
TVN	-6,7035	-0,5724	8,5059	-3,6653	-0,8626	5,2250	-14,0000	3,0000	16,0000	
C3	ACP	-4,2380	-0,2809	4,6873	-2,0738	-0,3925	2,6420	-6,5000	1,5000	8,4994
	BHW	-3,7143	-0,8998	5,7320	-3,1601	-0,9380	3,7732	-6,0000	3,0000	9,9878
	BRE	-5,6456	-0,1648	6,0784	-3,3205	-0,8277	4,4456	-5,9999	3,0000	12,0000
	CEZ	-3,9144	-0,2027	4,3309	-2,0226	-0,4762	2,6574	-3,7188	-0,6783	2,9466
	GTC	-5,5453	-0,1338	5,2905	-3,3121	-0,8603	4,0405	-12,0000	3,0000	11,9726
	GTN	-4,0274	-0,2722	4,9046	-1,9657	-0,4901	2,6576	-8,5000	-0,5000	6,4994
	KER	-4,6980	-0,3852	4,9738	-1,9268	-0,5250	2,0254	-7,5000	0,5000	7,5000
	KGH	-5,9679	-0,6201	7,4675	-3,7592	-0,8011	5,0981	-5,1147	-2,4674	5,6879
	LTS	-5,1607	0,1225	4,9586	-2,3313	-0,2223	2,8560	-4,8619	0,4453	3,2989

	LWB	-4,2626	-0,8795	5,9897	-3,3215	-0,9357	3,7665	-10,0000	-1,0000	8,0000
	PBG	-3,8392	-0,4521	4,0783	-2,0171	-0,4856	1,9534	-7,5000	0,5000	7,5000
	PEO	-4,9857	-0,1795	5,0692	-1,9398	-0,7973	2,8806	-4,6181	-0,7226	3,6389
	PGE	-5,0797	-0,1165	5,2352	-2,2112	-0,5837	2,8450	-4,7694	-0,5980	3,5177
	PGN	-3,6142	-0,3574	4,1193	-1,9064	-0,5421	2,1918	-5,4896	1,5000	8,5000
	PKN	-5,2926	0,2523	5,1360	-1,8708	-0,4096	3,1717	-4,5202	-0,4746	3,1432
	PKO	-4,7826	-0,0788	5,0540	-2,6256	-0,1288	2,7857	-7,5000	0,5000	8,4533
	PZU	-5,8198	0,0606	5,5530	-4,6621	0,7488	3,3952	-10,0000	1,0000	9,9974
	TPE	-7,0000	-7,0000	8,6192	-2,9858	-1,0000	0,9981	-13,9999	1,0000	14,0000
	TPS	-5,3983	0,5888	4,3844	-4,0632	0,7284	3,2998	-10,0000	1,0000	9,9974
	TVN	-5,4328	-0,2758	5,6603	-3,3185	-0,8671	4,1090	-5,9999	3,0000	12,0000
C4	ACP	-4,8214	-0,1795	5,1371	-2,9931	0,4275	1,9303	-5,0133	0,4316	3,0780
	BHW	-3,2826	-0,8671	4,2859	-3,0481	-0,9356	3,4097	-10,0000	1,0000	9,9974
	BRE	-5,8349	-0,0390	6,1237	-4,4027	0,8530	3,3073	-13,9983	-1,0000	12,0000
	GTC	-7,3697	-0,3117	6,7134	-3,6277	-0,9552	3,9518	-12,0000	-1,0000	9,9640
	GTN	-7,6517	0,1886	6,5056	-3,3802	-0,8549	4,2195	-12,0000	-1,0000	9,9640
	JSW	-4,8150	-0,1637	5,0233	-2,0538	-0,5692	2,7258	-4,5975	-0,4831	3,1410
	KER	-6,1891	-0,6279	6,1376	-3,5727	-0,9893	3,7760	-10,0000	3,0001	13,9983
	KGH	-7,2675	-0,2011	8,0000	-5,2991	0,7696	3,6966	-16,0000	-1,0000	7,9992
	LTS	-7,2837	0,4933	5,9894	-4,6881	0,7104	3,5889	-10,0000	-1,0000	8,0000
	LWB	-5,9840	-0,4774	6,2905	-3,3528	-0,9826	3,9146	-10,0000	3,0001	13,9983
	PBG	-6,3604	-0,7154	6,7553	-3,6402	-1,0658	3,9654	-12,0000	3,0000	16,0000
	PEO	-5,5894	-0,5189	6,5072	-3,4196	-0,9331	4,2290	-10,0000	1,0000	9,9974
	PGE	-5,6151	-0,6289	6,0065	-3,4685	-0,9588	3,7839	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-4,0263	-0,4233	5,0027	-1,9561	-0,6309	2,6404	-3,7250	-0,6952	3,0048
	PKN	-5,7845	-0,4384	6,4673	-3,6419	-0,7140	4,3741	-12,0000	1,0000	7,9782
	PKO	-5,7809	0,0104	5,7267	-4,5760	0,7615	3,3898	-10,0000	-1,0000	8,0000
	PZU	-8,6172	-1,9216	10,2173	-7,6889	-2,2253	8,6041	-18,4971	2,5000	18,5000
	TPE	-18,5000	5,0726	14,2612	-9,7662	-2,5000	2,8173	-18,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-5,3988	-0,0207	5,5137	-3,2829	-0,7962	4,4237	-10,0000	1,0000	9,9974
TVN	-5,9983	-0,4156	6,4399	-3,5068	-0,9021	4,2885	-14,0000	-0,9999	9,9983	
C5	ACP	-5,1086	-0,3445	5,9138	-2,0863	-0,5026	2,7285	-4,8271	-0,6796	3,5865
	BHW	-3,2881	-0,8752	4,0242	-3,0504	-0,9575	3,2657	-10,0000	-1,0000	8,0000
	BRE	-5,8211	-0,0876	5,9588	-4,6526	0,8323	3,3357	-13,9983	-1,0000	12,0000
	BRS	-17,0003	-4,2310	20,6844	-15,3753	-4,7198	16,5905	-66,0000	-15,0000	26,0000
	GTC	-8,7170	-0,7670	9,5398	-3,8389	-1,1002	4,2389	-14,0000	-0,9999	9,9983
	JSW	-4,8192	-0,3798	5,4185	-3,3530	-0,7511	4,2296	-12,0000	3,0000	16,0000
	KER	-11,2961	-2,4018	13,7940	-8,6633	-2,6087	8,6862	-18,4971	2,5000	18,5000
	KGH	-7,4607	0,0588	7,7077	-3,6925	-0,7249	5,3898	-16,0000	-1,0000	7,9992
	LTS	-7,9588	0,1439	7,4112	-5,2922	0,8302	3,7155	-10,0000	-1,0000	8,0000
	LWB	-8,5000	17,4565	17,5004	-8,5000	17,4748	17,4748	-8,5000	12,5000	33,4999
	PEO	-6,0296	-0,5899	7,4707	-3,6111	-0,9033	4,6541	-10,0000	1,0000	9,9974
	PGE	-7,3190	-0,7396	7,5014	-4,0737	-0,9844	3,9648	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-4,3334	-0,3761	5,1290	-1,8941	-0,6346	2,6746	-4,1139	-0,8058	3,3572
	PKN	-5,7505	-0,5908	7,2493	-4,7741	0,5277	3,6378	-12,0000	1,0000	7,9782
	PKO	-6,0924	0,1591	5,7918	-4,6988	0,7069	3,5549	-10,0000	-1,0000	8,0000
	PZU	-16,0499	-3,5482	16,0000	-15,0330	-4,8488	15,6759	-56,0000	-15,0000	15,9943
	SNS	-8,5350	-0,8087	9,3887	-3,7097	-1,0547	3,7369	-12,0000	3,0000	11,9726
	TPE	-18,5000	4,8245	22,9641	-15,2108	7,5000	7,5000	-18,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-4,0900	-0,0960	4,1804	-2,0574	-0,4432	2,6378	-9,5000	-1,5000	5,5000
TVN	-7,5627	-0,4434	7,4932	-4,0540	-0,9278	4,5006	-14,0000	-0,9999	9,9983	

D1	ACP	-5,5574	-0,7364	7,3411	-3,4745	-0,9711	4,2671	-14,0000	-0,9999	9,9983
	BIO	-8,9719	-2,8104	10,4248	-8,0683	-2,5000	5,2209	-18,5000	2,5000	23,5000
	BRE	-9,4696	-0,5951	10,6587	-5,2413	-0,9552	5,4235	-16,0000	1,0000	14,0000
	BZW	-8,1626	-0,7543	9,8898	-4,0941	-0,9908	4,4941	-13,9983	-1,0000	12,0000
	CEZ	-5,9159	-0,6298	7,3702	-3,5841	-0,9309	4,7124	-18,0000	-1,0000	9,9988
	CPS	-9,8074	0,0108	8,4211	-4,0387	-0,9272	4,6532	-16,0000	1,0000	14,0000
	GTC	-8,5151	-2,2748	13,0431	-7,7082	-2,3541	9,0825	-18,4971	2,5000	18,5000
	GTN	-7,3709	-0,3913	7,9288	-3,5600	-1,0910	4,5212	-16,0000	1,0000	14,0000
	KGH	-13,3948	2,0137	9,2086	-9,7891	2,0255	7,8414	-23,5000	-2,5000	18,5000
	LTS	-7,7552	-0,1627	8,1573	-5,4278	0,7653	3,8295	-12,0000	3,0000	17,9798
	PBG	-6,2111	-0,5877	7,4596	-3,5507	-0,9521	4,5396	-12,0000	-1,0000	9,9640
	PEO	-8,5661	-2,1177	12,8892	-7,6572	-2,1390	9,3911	-23,5000	-2,5000	13,5000
	PGE	-8,3311	-0,3398	9,2822	-3,8938	-0,8558	5,4860	-18,0000	-3,0000	11,9798
	PGN	-5,7984	-0,5534	6,3386	-3,5009	-0,9856	4,1701	-10,0000	1,0000	9,9974
	PKN	-8,4849	0,1643	8,3094	-5,4480	0,8813	4,0828	-13,9999	1,0000	14,0000
	PKO	-8,1559	-0,3509	9,1999	-5,4568	0,7774	3,7106	-14,0000	-0,9999	9,9983
	PXM	-7,7510	-0,5368	8,3084	-4,0080	-0,9743	4,5749	-12,0000	3,0000	16,0000
	PZU	-9,5760	-0,3002	9,7958	-3,9965	-0,9779	5,3275	-13,9999	1,0000	14,0000
	TPS	-5,9125	0,0171	5,8142	-2,7088	-0,2977	2,8941	-4,9501	-0,7714	3,7366
	TVN	-7,8523	-0,5656	9,2648	-3,8975	-0,9226	5,3007	-16,0000	1,0000	15,9976
D2	ACP	-5,4274	-0,5569	6,3924	-3,4181	-0,9259	4,1798	-14,0000	-0,9999	9,9983
	BRE	-7,9668	-0,7216	9,9207	-4,1918	-0,9150	5,3590	-16,0000	1,0000	14,0000
	BZW	-7,4734	-0,5383	8,4539	-3,6068	-0,9914	4,2504	-12,0000	3,0000	11,9726
	CEZ	-5,6276	-0,3228	5,9839	-3,4486	-0,9050	4,4154	-18,0000	-1,0000	9,9988
	CPS	-6,2367	-0,8431	8,3223	-3,7500	-0,9639	4,3508	-10,0000	3,0001	13,9983
	GTC	-7,9606	-2,2191	11,5325	-7,5529	-2,3400	8,6659	-18,4971	2,5000	18,5000
	GTN	-6,0464	-0,6515	7,4962	-3,4636	-0,9920	4,2663	-11,9983	1,0000	14,0000
	KGH	-8,0750	-0,0949	9,5468	-4,7637	0,3122	5,2383	-11,9983	1,0000	14,0000
	LTS	-7,4724	-0,0568	7,8116	-5,2475	0,7967	3,7103	-12,0000	3,0000	17,9798
	PBG	-5,5989	-0,3987	6,0141	-3,3978	-0,9376	4,2032	-12,0000	-1,0000	9,9640
	PEO	-8,2356	-2,0465	11,5265	-7,5640	-2,1470	8,9852	-23,5000	-2,5000	13,5000
	PGE	-7,6254	-0,2038	8,2152	-3,6352	-0,9433	5,3013	-18,0000	-1,0000	9,9988
	PGN	-5,1020	-0,1623	5,0050	-1,9384	-0,5982	2,2239	-7,5000	0,5000	8,4533
	PKN	-7,8349	0,1493	7,8197	-5,2077	0,9388	3,7589	-13,9999	1,0000	14,0000
	PKO	-7,5810	-0,0808	8,0375	-5,2075	0,8376	3,5830	-14,0000	-0,9999	9,9983
	PXM	-5,8412	-0,8874	7,7285	-3,7452	-0,9481	4,3078	-10,0000	5,0000	16,0000
	PZU	-8,0108	-0,2185	8,0450	-3,7794	-0,9116	5,1897	-11,9983	1,0000	14,0000
	TPE	-9,7537	-2,9422	10,8589	-8,4289	-2,5000	4,9582	-18,5000	2,5000	23,5000
	TPS	-5,7894	0,1828	5,2620	-2,6442	-0,2912	2,8611	-4,7753	-0,7485	3,6269
	TVN	-7,3984	-0,3675	8,1594	-3,7136	-0,9257	5,1725	-16,0000	1,0000	15,9976
D3	ACP	-4,6613	-0,4137	5,5929	-2,6485	-0,3682	2,6602	-7,5000	0,5000	8,4533
	BHW	-6,0264	-0,5291	7,5363	-3,3707	-0,9184	4,2603	-12,0000	3,0000	11,9726
	BRE	-7,2186	-0,2394	7,7823	-3,5793	-0,9487	5,1408	-10,0000	3,0001	13,9983
	CEZ	-4,2775	-0,6970	5,7187	-3,2378	-0,9000	4,0884	-11,9999	-3,0000	6,0000
	GTC	-5,8528	-0,7663	7,4432	-3,5788	-0,9118	4,2052	-13,9999	1,0000	14,0000
	GTN	-4,0825	-0,8705	6,5938	-3,2519	-0,9616	4,2212	-8,0000	1,0000	13,9919
	KER	-5,6058	-0,7109	6,3652	-3,6390	-0,9642	4,1018	-10,0000	1,0000	11,9640
	KGH	-6,6895	-0,4180	8,4767	-5,1890	0,8901	3,7491	-7,2465	0,8287	5,6502
	LTS	-5,7448	-0,4801	7,4750	-3,4912	-0,7957	5,1816	-11,9983	1,0000	14,0000
	LWB	-5,4437	-0,8435	7,4184	-3,5229	-0,9504	4,0492	-10,0000	3,0001	13,9983

	PBG	-4,6222	-0,4032	5,0158	-2,6303	-0,3060	1,9172	-4,5371	-0,6111	3,0572
	PEO	-6,0011	-0,6659	7,3962	-3,6236	-0,9055	4,6111	-10,0000	1,0000	11,9640
	PGE	-6,0960	-0,5462	7,7914	-3,4654	-0,9207	4,5545	-12,0000	-1,0000	9,9640
	PGN	-4,2759	-0,3327	4,8193	-1,9164	-0,5626	2,2154	-3,8216	-0,7159	3,0932
	PKN	-6,4493	-0,2870	7,4753	-5,0834	0,8836	3,6070	-10,0000	3,0001	13,9983
	PKO	-5,6759	-0,4683	7,4347	-4,5194	0,8096	3,4170	-6,4776	0,9017	5,5358
	PZU	-6,3164	-0,4554	7,5589	-3,6698	-0,8037	5,1669	-10,0000	3,0001	13,9983
	TPE	-10,2215	-3,4677	13,3126	-8,3982	-3,7500	8,6955	-13,5000	7,5000	23,5000
	TPS	-5,8141	0,2475	5,5050	-4,3188	0,7811	3,4089	-10,0000	1,0000	9,9974
	TVN	-5,9341	-0,6348	7,5520	-3,5360	-0,8344	4,4429	-14,0000	3,0000	16,0000
D4	ACP	-4,7772	-0,3101	5,1048	-2,7290	-0,2154	2,2840	-4,6545	-0,7189	3,3589
	BHW	-4,1472	-0,4211	5,9294	-1,7232	-0,5513	2,0235	-7,5000	1,5000	10,4999
	BRE	-6,3583	-0,1133	6,5837	-3,5561	-0,8168	5,0992	-13,9983	-1,0000	12,0000
	GTC	-6,4014	-0,3184	6,2748	-3,5053	-0,9310	4,1921	-12,0000	3,0000	11,9726
	GTN	-5,4286	-0,3428	6,0069	-3,2510	-0,9349	4,1129	-11,9983	1,0000	14,0000
	JSW	-3,9758	-0,8108	5,5314	-3,2085	-0,9279	3,8637	-11,9999	-3,0000	6,0000
	KER	-5,5796	-0,7030	6,0699	-3,5772	-0,9743	3,8770	-10,0000	1,0000	9,9974
	KGH	-6,7255	0,1959	6,6665	-3,6595	1,1466	2,0166	-4,9894	-0,9970	4,2316
	LTS	-6,2524	0,3638	5,7764	-4,3664	0,7309	3,5828	-10,0000	-1,0000	8,0000
	LWB	-5,7466	-0,6345	6,2332	-3,5043	-0,9436	3,8243	-5,4751	-2,3392	5,5578
	PBG	-5,3875	-0,5945	5,5147	-3,4078	-0,9656	3,6805	-12,0000	1,0000	7,9782
	PEO	-5,9327	-0,3421	6,3978	-3,4912	-0,8959	4,4769	-10,0000	1,0000	9,9974
	PGE	-6,0326	-0,4281	6,6665	-3,4273	-0,9320	4,2381	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-4,0920	-0,4460	4,8719	-1,8986	-0,5974	2,2424	-3,8419	-0,6852	3,0494
	PKN	-6,4285	0,2918	6,0546	-4,5251	0,7842	3,5783	-12,0000	1,0000	7,9782
	PKO	-5,7234	0,0757	5,6585	-2,8493	0,2715	2,6623	-5,3300	0,5159	3,0656
PZU	-8,2825	-1,8673	10,2630	-7,5527	-2,1278	8,8339	-18,4971	2,5000	18,5000	
TPE	-11,1620	-3,9050	14,0209	-9,2401	-2,5000	3,9861	-13,5000	7,5000	23,5000	
TPS	-5,4872	-0,0147	5,6877	-4,3140	0,6356	3,4552	-10,0000	1,0000	9,9974	
TVN	-5,9693	-0,4266	6,4979	-3,4969	-0,8836	4,2604	-13,9983	-1,0000	12,0000	
D5	ACP	-4,7446	-0,2526	5,1382	-2,0600	-0,4158	2,7092	-4,4135	-0,8180	3,3460
	BHW	-3,6426	-0,9187	5,4955	-3,1567	-0,9457	3,6626	-10,0000	1,0000	9,9974
	BRE	-5,9472	-0,2069	6,4783	-4,7686	0,7623	3,4559	-13,9983	-1,0000	12,0000
	CEZ	-4,2818	-0,2710	4,8682	-2,0569	-0,5667	2,7238	-4,3948	-0,5958	3,2337
	GTC	-6,5249	-0,4104	6,4501	-3,5971	-0,9114	4,1164	-12,0000	3,0000	11,9726
	GTN	-5,8037	-0,4002	6,5076	-3,3565	-0,9055	4,1823	-12,0000	-1,0000	9,9640
	KER	-5,8018	-0,6405	6,1466	-3,5143	-0,9862	3,8647	-10,0000	3,0001	13,9983
	KGH	-6,4520	-0,5919	8,0000	-5,2017	0,4901	3,9467	-16,0000	-1,0000	7,9992
	LTS	-6,5205	0,2262	6,0088	-4,7081	0,7611	3,5323	-10,0000	-1,0000	8,0000
	LWB	-5,9796	-0,4683	6,3817	-3,4195	-0,9401	4,0233	-10,0000	3,0001	13,9983
	PBG	-5,8157	-0,5947	6,1227	-3,4911	-0,9823	3,9094	-12,0000	3,0000	16,0000
	PEO	-5,6777	-0,4878	6,3758	-3,4662	-0,9216	4,2671	-10,0000	1,0000	9,9974
	PGE	-5,8064	-0,4902	6,1897	-3,4686	-0,9385	4,0724	-12,0000	3,0000	11,9726
	PGN	-3,9526	-0,4132	4,7808	-1,8870	-0,6773	2,6095	-3,7344	-0,6962	3,0112
PKN	-6,1018	0,0052	6,1281	-4,7318	0,8402	3,4385	-12,0000	1,0000	7,9782	

PKO	-5,8260	-0,0149	5,7536	-4,6411	0,7734	3,3744	-10,0000	-1,0000	8,0000
PZU	-8,4392	-1,8160	10,0413	-7,5767	-2,1580	8,7322	-18,4971	2,5000	18,5000
TPE	-14,6258	-3,3842	15,3196	-8,5771	-4,3747	8,6043	-18,5000	2,5000	23,5000
TPS	-5,2115	-0,0043	5,3238	-3,2353	-0,7952	4,3457	-10,0000	1,0000	9,9974
TVN	-5,9917	-0,3480	6,4018	-3,4721	-0,8887	4,3572	-13,9983	-1,0000	12,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela E.3: Odległości pomiędzy wektorami parametrów ciągłych funkcji przynależności

miara		odległość cosinusowa			odległość euklidesowa		
okres	nazwa	K - BP	K - ME	BP - ME	K - BP	K - ME	BP - ME
A1	ACP	0,0163	0,0185	0,0401	4,7564	2,8533	3,1757
	AGO	0,0022	0,0262	0,0377	3,2383	7,9433	10,7907
	BIO	0,0082	0,0168	0,0017	2,6484	7,0565	8,5052
	BRE	0,0085	0,0059	0,0003	8,9338	2,4162	10,4605
	BZW	0,0073	0,0277	0,0096	4,7237	5,0963	7,5340
	CEZ	0,0031	0,0059	0,0049	8,9107	2,4779	10,6572
	CST	0,0048	0,0241	0,0101	4,7297	4,8077	7,5321
	GTC	0,0065	0,0279	0,0088	6,4790	4,7223	7,4534
	GTN	0,0695	0,0262	0,1388	7,1202	6,0746	12,5948
	KGH	0,0830	0,0383	0,0090	9,7116	12,1180	17,4572
	LTS	0,0051	0,0533	0,0706	3,5944	5,2994	7,9873
	PBG	0,0235	0,0102	0,0092	5,5249	1,9426	4,4735
	PEO	0,0069	0,0164	0,0070	7,8838	3,5201	5,5462
	PGN	0,0224	0,0279	0,0502	6,3229	4,0625	3,8473
	PKN	0,0058	0,0123	0,0044	5,7500	2,9020	3,6173
PKO	0,0069	0,0315	0,0364	6,8570	4,0765	4,9377	
PND	0,0074	0,0238	0,0083	5,5702	4,8568	8,1334	
PXM	0,0053	0,0235	0,0074	4,9818	4,9051	7,8031	
TPS	0,0114	0,0180	0,0309	4,9072	2,6354	3,3868	
TVN	0,0075	0,0092	0,0251	6,7752	2,4664	8,4280	
A2	ACP	0,0211	0,0266	0,0906	4,7317	2,8511	7,0015
	AGO	0,0194	0,0181	0,0305	7,1989	3,2425	5,4176
	BIO	0,0000	0,1004	0,1011	0,0509	12,0459	12,0670
	BRE	0,0051	0,0319	0,0140	4,2722	5,1278	6,6688
	BZW	0,0353	0,0200	0,0127	8,9807	3,9465	5,9722
	CEZ	0,0023	0,0040	0,0121	4,2899	1,1959	5,2201
	CPS	0,0152	0,0148	0,0270	6,9002	4,3003	3,5537
	CST	0,0037	0,0322	0,0522	4,6760	5,0050	8,1494
	GTC	0,0134	0,0704	0,0615	4,0861	7,4895	8,9472
	GTN	0,0298	0,0180	0,0367	6,5159	3,4531	4,1647
	KGH	0,0072	0,0158	0,0058	8,1344	4,4907	4,4064
	LTS	0,0037	0,0281	0,0287	3,5512	8,3938	11,1664
	PBG	0,0024	0,0202	0,0144	3,3670	2,0395	2,8300
	PEO	0,0020	0,0882	0,0793	3,6925	13,7945	15,9512
	PGN	0,0028	0,0226	0,0096	3,5051	2,1994	2,6151
PKN	0,0977	0,0310	0,1804	6,5037	5,2871	10,9161	

	PKO	0,0166	0,0724	0,0649	5,7545	6,8391	10,1835
	PXM	0,0196	0,0318	0,0019	6,5710	4,2525	3,3624
	TPS	0,0062	0,0236	0,0115	4,2545	2,2827	2,8442
	TVN	0,0015	0,0223	0,0261	3,9113	7,5982	10,9306
A3	ACP	0,0177	0,0439	0,0150	2,7475	2,4665	2,9386
	BIO	0,1402	0,2846	0,2124	9,7239	12,0284	14,7314
	BRE	0,0039	0,0685	0,0986	3,7039	5,9957	8,8424
	BZW	0,0211	0,0160	0,0268	5,3063	1,9068	4,2452
	CEZ	0,0061	0,0182	0,0035	2,7991	1,2878	2,0586
	CPS	0,0395	0,0252	0,0898	3,4402	2,0147	3,7084
	GTC	0,0048	0,0775	0,0877	3,1562	6,5198	8,7683
	GTN	0,0061	0,0245	0,0091	3,9897	2,2224	2,4176
	KGH	0,0033	0,0033	0,0012	3,4935	0,8279	3,2595
	LTS	0,0152	0,0196	0,0069	5,0173	2,1302	3,4893
	PBG	0,0078	0,0058	0,0262	3,0649	4,9280	7,9758
	PEO	0,0204	0,0175	0,0446	4,9077	1,8575	3,9478
	PGE	0,0617	0,0186	0,1026	5,3658	2,5241	3,7157
	PGN	0,0064	0,0317	0,0605	3,3462	4,4413	7,5146
	PKN	0,0320	0,0074	0,0696	4,9654	1,9132	3,6149
	PKO	0,0137	0,0118	0,0010	3,2657	1,5403	3,7126
	PXM	0,0050	0,0265	0,0085	2,9315	1,8896	2,6741
PZU	0,0089	0,0068	0,0301	3,1160	5,3465	8,4480	
TPS	0,0158	0,0055	0,0125	3,3415	2,0849	5,2343	
TVN	0,0084	0,0760	0,0947	3,4053	6,5458	9,0598	
A4	ACP	0,0181	0,0079	0,0356	2,6364	2,8493	5,3991
	BHW	0,3192	0,1460	0,1074	4,2488	9,2715	7,0413
	BRE	0,0192	0,0254	0,0538	2,8583	1,8834	1,8625
	CEZ	0,0154	0,0195	0,0476	2,6492	1,5245	1,8749
	GTC	0,0050	0,1131	0,0745	1,6526	8,5646	9,4045
	GTN	0,0025	0,0675	0,0536	2,1346	5,9889	7,6605
	KER	0,0030	0,0070	0,0016	3,3344	0,7785	3,0624
	KGH	0,0226	0,0154	0,0681	5,0671	2,8045	7,5316
	LTS	0,0076	0,0201	0,0161	2,9967	2,0419	1,4188
	LWB	0,0486	0,0696	0,0021	3,0735	2,2050	1,8543
	PBG	0,0099	0,1036	0,1507	2,5235	4,1844	5,9767
	PEO	0,0167	0,0141	0,0163	2,8029	1,2482	2,0539
	PGE	0,0076	0,0213	0,0035	2,5056	1,3754	1,7926
	PGN	0,0042	0,0211	0,0184	2,1951	2,3091	4,2023
	PKN	0,0244	0,0392	0,0546	3,4368	3,1327	5,8472
	PKO	0,0316	0,0344	0,0014	3,1207	1,7825	2,0034
	PZU	0,0778	0,0579	0,0432	3,6680	4,7055	7,2140
TPE	0,0159	0,0125	0,0535	6,0068	3,0973	7,2028	
TPS	0,0024	0,0111	0,0079	2,0390	7,0602	8,9560	
TVN	0,0227	0,0149	0,0288	2,8195	1,2373	2,1221	
	ACP	0,0028	0,0288	0,0178	3,7490	2,5948	2,5502
	BHW	0,0046	0,1316	0,1074	1,1814	3,7553	3,8785
	BRE	0,0368	0,0060	0,0277	5,0495	7,7079	12,3298
	GTC	0,0267	0,0214	0,0028	7,2648	4,7705	10,5061
	GTN	0,0148	0,0172	0,0213	8,8406	3,6665	6,1233
	JSW	0,0171	0,0142	0,0167	4,4649	2,3404	2,5287
	KER	0,0181	0,0444	0,0852	8,2925	5,9663	12,5910

		KGH	0,0091	0,0362	0,0294	5,6823	6,9443	11,5469
		LTS	0,0136	0,0085	0,0023	5,3470	1,5431	5,1343
		LWB	0,0652	0,0531	0,0522	6,9305	6,8509	11,4934
		PBG	0,0040	0,0278	0,0512	2,5458	6,4299	8,8304
		PEO	0,0248	0,0170	0,0445	4,9109	2,5513	3,6582
		PGE	0,0047	0,0268	0,0520	4,8301	7,0982	11,5993
		PGN	0,0226	0,0176	0,0475	4,9596	2,1976	3,4666
		PKN	0,0026	0,0192	0,0088	4,7066	2,2254	3,7965
		PKO	0,0102	0,0043	0,0014	3,4107	0,9411	2,8818
		PZU	0,0025	0,0241	0,0415	3,1402	11,9980	15,0659
		TPE	0,0830	0,0096	0,1456	12,5443	4,7919	17,0200
		TPS	0,0044	0,0723	0,0568	2,2104	5,6112	7,0125
		TVN	0,0474	0,0208	0,0325	6,0449	3,2326	3,6745
	A6	ACP	0,0129	0,0213	0,0435	2,4780	1,5299	1,7147
		BHW	0,0320	0,0480	0,0071	1,0387	0,7029	0,6808
		BRE	0,0335	0,0190	0,0703	2,5762	1,2311	2,2066
		BRS	0,0473	0,0683	0,1375	10,8750	42,2181	48,9732
		GTC	0,0110	0,0310	0,0429	4,6885	2,9960	3,3463
		JSW	0,0045	0,0045	0,0000	7,1127	7,1127	0,0000
		KER	0,0084	0,0251	0,0539	7,7983	7,5583	14,3256
		KGH	0,0760	0,0281	0,0475	3,9358	2,4456	2,0304
		LTS	0,0041	0,0013	0,0083	3,6520	0,7441	3,1622
		LWB	0,0000	0,0879	0,0878	0,0403	16,7822	16,7635
		PEO	0,0245	0,0206	0,0590	4,0146	2,6762	6,2487
		PGE	0,0016	0,0199	0,0142	4,5980	2,2847	3,7401
		PGN	0,0052	0,1018	0,1357	3,3336	6,8731	9,4797
		PKN	0,0058	0,0046	0,0066	3,5059	2,7185	6,0936
	PKO	0,0073	0,0059	0,0257	3,0103	1,1170	2,3076	
	PZU	0,0043	0,1327	0,1267	2,1391	42,0610	42,2326	
	A7	SNS	0,0092	0,0140	0,0012	4,8384	2,2568	3,1299
		TPE	0,1015	0,0190	0,1726	22,4649	7,1635	26,8797
		TPS	0,0031	0,1803	0,1423	1,0021	14,8963	15,3002
		TVN	0,0213	0,0157	0,0183	4,4154	2,3503	2,8926
		ACP	0,0502	0,0127	0,0215	2,5271	2,0183	4,0445
		BHW	0,0130	0,0736	0,0257	1,5940	1,7347	1,2302
		BRE	0,0101	0,0054	0,0223	2,0214	2,2861	4,2601
		BRS	0,0100	0,0270	0,0317	6,8861	22,2059	28,3483
		GTC	0,0186	0,0147	0,0290	3,6642	1,5961	3,2352
		JSW	0,0306	0,0082	0,0347	3,0533	0,9409	2,4310
		KER	0,0169	0,0164	0,0156	5,0643	1,8403	5,2304
		KGH	0,0147	0,0126	0,0072	3,2597	1,8849	4,7310
		LTS	0,1980	0,0051	0,1586	5,2783	1,4994	6,1050
		LWB	0,0185	0,1486	0,1475	2,8310	8,3642	9,9169
	PEO	0,0059	0,1103	0,0941	1,8489	4,8765	6,1005	
	PGE	0,0026	0,0172	0,0160	4,8543	3,2547	2,4380	
	PGN	0,0511	0,0765	0,1050	2,7139	5,4223	7,0222	
	PKN	0,0489	0,0105	0,0525	3,5938	1,6033	4,6786	
	PKO	0,0591	0,0791	0,0181	2,0149	1,8142	1,2949	
	PZU	0,0137	0,0136	0,0024	3,2898	1,6757	3,2216	
	SNS	0,0108	0,0333	0,0315	4,6579	3,0671	2,1782	
	TPE	0,0000	0,0927	0,0921	0,0151	29,7132	29,7005	

		TPS	0,0965	0,1599	0,0547	5,7434	26,5122	27,8859
		TVN	0,0285	0,0131	0,0032	4,1670	2,1426	2,2146
B3		ACP	0,0192	0,0076	0,0254	3,5340	2,1235	5,4579
		BRE	0,0247	0,0322	0,0733	3,4561	2,3114	2,2030
		BZW	0,0067	0,0891	0,1265	1,2559	7,1650	8,2551
		CEZ	0,0392	0,0038	0,0408	2,7554	2,8725	5,4935
		CPS	0,0127	0,1012	0,0514	2,0389	6,4165	7,2793
		GTC	0,0061	0,1138	0,1415	0,9602	8,1698	8,9158
		GTN	0,0056	0,0448	0,0337	2,1452	6,0834	7,9134
		KGH	0,0260	0,0116	0,0615	5,0207	2,7310	7,4973
		LTS	0,0036	0,0198	0,0342	2,6348	3,5189	5,9739
		PBG	0,0056	0,0286	0,0580	2,5194	4,4157	6,7972
		PEO	0,0090	0,0154	0,0023	2,8345	1,3637	1,9287
		PGE	0,0304	0,0226	0,0119	3,4532	1,7365	2,2243
		PGN	0,0087	0,0256	0,0309	2,0977	2,4812	4,2688
		PKN	0,0145	0,0386	0,0464	3,3954	3,0596	5,7312
		PKO	0,0016	0,0122	0,0051	2,7276	2,2949	4,7251
		PXM	0,0067	0,0101	0,0007	3,0715	0,9425	2,5317
		PZU	0,0211	0,0267	0,0367	2,8980	4,5036	7,0420
		TPE	0,0094	0,0121	0,0002	5,3863	3,6688	7,1469
		TPS	0,0680	0,0077	0,0363	2,7033	7,3603	9,0516
		TVN	0,0138	0,0150	0,0204	3,1784	1,2932	2,5005
B4		ACP	0,0033	0,0260	0,0133	3,8135	2,5245	2,5416
		BHW	0,0042	0,1243	0,1032	1,1631	3,6256	3,7752
		BRE	0,0664	0,0160	0,0296	4,8558	8,7008	12,5274
		GTC	0,0230	0,0099	0,0064	6,9629	3,0011	8,9336
		GTN	0,0114	0,0189	0,0251	8,7080	3,5983	6,2625
		JSW	0,0524	0,0127	0,0674	4,8279	2,2784	3,0527
		KER	0,0187	0,0427	0,0859	8,5829	5,8837	12,8225
		KGH	0,0210	0,0453	0,0219	5,2324	7,6480	11,4350
		LTS	0,0165	0,0167	0,0014	4,9854	2,0776	4,8866
		LWB	0,0481	0,0572	0,0577	6,7026	7,3065	12,0891
		PBG	0,0021	0,0371	0,0537	2,3536	6,9419	8,9931
		PEO	0,0263	0,0161	0,0364	4,7343	2,6585	3,0861
		PGE	0,0073	0,0296	0,0659	5,0889	7,4065	12,1726
		PGN	0,0330	0,0186	0,0649	5,2368	2,5453	3,3769
		PKN	0,0028	0,0220	0,0115	4,5190	2,2014	3,9171
		PKO	0,0105	0,0047	0,0013	3,3940	0,9901	2,8393
		PZU	0,0023	0,0263	0,0431	2,8204	12,4970	15,2508
		TPE	0,2270	0,0090	0,2485	20,3822	4,8175	23,4670
		TPS	0,0082	0,0466	0,0676	2,4708	4,9020	6,9245
		TVN	0,0201	0,0104	0,0417	4,9939	6,7006	11,5116
		ACP	0,0129	0,0213	0,0435	2,4780	1,5299	1,7147
		BHW	0,0320	0,0480	0,0071	1,0387	0,7029	0,6808
		BRE	0,0335	0,0190	0,0703	2,5762	1,2311	2,2066
		BRS	0,0473	0,0683	0,1375	10,8750	42,2181	48,9732
		GTC	0,0110	0,0310	0,0429	4,6885	2,9960	3,3463
		JSW	0,0045	0,0045	0,0000	7,1127	7,1127	0,0000
		KER	0,0084	0,0251	0,0539	7,7983	7,5583	14,3256
		KGH	0,0760	0,0281	0,0475	3,9358	2,4456	2,0304
		LTS	0,0041	0,0013	0,0083	3,6520	0,7441	3,1622



	LWB	0,0000	0,0879	0,0878	0,0403	16,7822	16,7635
	PEO	0,0245	0,0206	0,0590	4,0146	2,6762	6,2487
	PGE	0,0016	0,0199	0,0142	4,5980	2,2847	3,7401
	PGN	0,0052	0,1018	0,1357	3,3336	6,8731	9,4797
	PKN	0,0058	0,0046	0,0066	3,5059	2,7185	6,0936
	PKO	0,0073	0,0059	0,0257	3,0103	1,1170	2,3076
	PZU	0,0043	0,1327	0,1267	2,1391	42,0610	42,2326
	SNS	0,0092	0,0140	0,0012	4,8384	2,2568	3,1299
	TPE	0,1015	0,0190	0,1726	22,4649	7,1635	26,8797
	TPS	0,0031	0,1803	0,1423	1,0021	14,8963	15,3002
	TVN	0,0213	0,0157	0,0183	4,4154	2,3503	2,8926
B1	ACP	0,0065	0,0263	0,0331	5,3701	6,8373	11,6324
	AGO	0,0396	0,0112	0,0261	5,7299	6,9858	11,0611
	BIO	0,0435	0,0437	0,0793	6,1467	12,6723	17,4308
	BRE	0,0040	0,0322	0,0135	4,0978	5,7244	7,6884
	BZW	0,0353	0,0079	0,0162	9,7950	3,1694	11,8800
	CEZ	0,0758	0,0340	0,0733	7,3273	6,1569	10,5545
	CPS	0,0042	0,0213	0,0083	5,6577	4,3484	7,6585
	CST	0,0047	0,0239	0,0094	5,3576	4,4531	7,2761
	GTC	0,0097	0,0128	0,0436	6,9429	7,5191	14,2475
	GTN	0,0085	0,0313	0,0090	4,7941	5,2744	7,4865
	KGH	0,0049	0,0206	0,0112	6,2497	11,1898	16,3420
	LTS	0,0851	0,0718	0,0417	6,5016	10,4944	12,0086
	PBG	0,0081	0,0175	0,0245	6,3781	3,2526	4,3200
	PEO	0,0184	0,0344	0,0702	6,3336	10,3070	15,6963
	PGN	0,0076	0,0311	0,0319	4,4677	2,7115	3,6289
	PKN	0,0025	0,0148	0,0165	6,1026	2,7668	4,7973
PKO	0,0271	0,0062	0,0360	7,4601	2,8149	9,7019	
PXM	0,0050	0,0255	0,0102	4,8974	4,8689	7,5640	
TPS	0,0090	0,0250	0,0374	4,2330	2,3862	3,5540	
TVN	0,0283	0,0070	0,0246	5,6109	6,6088	11,2555	
B2	ACP	0,0063	0,0330	0,0108	2,7979	2,0818	3,0020
	AGO	0,0355	0,0185	0,0967	4,9980	3,9139	8,6493
	BIO	0,2220	0,0681	0,3827	10,1742	8,7468	17,2761
	BRE	0,0140	0,0279	0,0550	6,4104	3,7219	4,6690
	BZW	0,0210	0,0199	0,0604	5,4390	4,4994	9,4024
	CEZ	0,0057	0,1141	0,0788	2,2848	7,9263	9,1121
	CPS	0,0122	0,0277	0,0136	4,5001	2,7435	2,8698
	CST	0,0022	0,0286	0,0182	5,3501	3,4104	3,5111
	GTC	0,0103	0,0734	0,0685	5,0086	7,8741	11,4030
	GTN	0,0161	0,0167	0,0506	2,9351	8,3218	11,1453
	KGH	0,0130	0,0143	0,0033	5,1771	1,9584	4,6115
	LTS	0,0150	0,0320	0,0874	4,0559	5,1975	8,9517
	PBG	0,0061	0,0307	0,0100	2,7052	1,9636	2,8077
	PEO	0,0113	0,0220	0,0439	4,8401	2,7747	3,7959
	PGN	0,0279	0,0155	0,0630	4,7544	1,6918	3,8893
	PKN	0,0063	0,0014	0,0114	4,4111	0,5438	4,3823
PKO	0,0371	0,0281	0,0029	4,9854	2,4154	3,9977	
PXM	0,0052	0,0292	0,0126	3,6434	2,4530	2,5601	
TPS	0,0018	0,0162	0,0112	4,4054	2,4610	2,4388	
TVN	0,0058	0,1072	0,1088	3,7411	9,1151	11,5458	

C1	ACP	0,0058	0,0488	0,0407	4,2039	8,4606	11,8870
	AGO	0,0473	0,0157	0,0374	5,9693	7,1656	11,2011
	BIO	0,0360	0,0409	0,1054	5,0337	17,1695	21,5834
	BRE	0,1062	0,0059	0,0630	9,7259	4,8823	13,2758
	BZW	0,0173	0,0126	0,0029	8,4097	4,1534	11,4040
	CEZ	0,0138	0,0427	0,0857	4,6920	10,4955	14,8040
	CPS	0,0353	0,0018	0,0484	8,6065	6,2781	14,8405
	CST	0,0042	0,0057	0,0161	8,2008	4,4810	12,4042
	GTC	0,0078	0,0471	0,0464	4,4204	11,6024	14,7798
	GTN	0,1792	0,0137	0,0983	7,3658	9,3605	14,5483
	KGH	0,0031	0,0189	0,0307	4,8632	13,0659	17,6766
	LTS	0,0009	0,0251	0,0283	4,9232	10,1336	14,6665
	PBG	0,0173	0,0075	0,0353	4,8582	4,7817	9,4808
	PEO	0,0023	0,0953	0,0782	3,6408	14,1295	16,0101
	PGN	0,0052	0,0176	0,0365	4,1777	4,7000	8,6004
	PKN	0,0035	0,0016	0,0096	5,8583	6,3228	12,1698
	PKO	0,0207	0,0161	0,0128	7,2395	4,2685	10,3383
	PXM	0,0047	0,0247	0,0467	5,9328	7,8950	13,3956
TPS	0,0027	0,0193	0,0156	5,3996	2,9838	3,0265	
TVN	0,0556	0,0162	0,0320	6,0953	7,5524	11,3308	
C2	ACP	0,0062	0,0357	0,0417	2,6889	4,2323	6,3828
	BIO	0,0384	0,1311	0,2409	4,9184	17,6576	21,6239
	BRE	0,0064	0,0284	0,0598	6,0001	5,9624	11,3446
	BZW	0,0089	0,0303	0,0709	5,2416	6,5157	11,3410
	CEZ	0,0120	0,0803	0,0949	2,5456	7,2642	9,1190
	CPS	0,0048	0,0328	0,0539	4,2926	7,9965	11,9342
	GTC	0,0042	0,0141	0,0236	4,8763	9,3624	14,0551
	GTN	0,0123	0,0140	0,0437	3,5661	7,4620	10,9393
	KGH	0,0473	0,0336	0,0033	5,9848	3,2363	3,9330
	LTS	0,0494	0,0054	0,0289	4,6535	8,2990	12,3482
	PBG	0,0092	0,0345	0,0124	2,7121	2,0925	2,6143
	PEO	0,0071	0,0060	0,0194	4,3786	4,9682	9,2381
	PGE	0,0150	0,0137	0,0422	5,0879	4,6635	9,4348
	PGN	0,0209	0,0106	0,0199	4,5399	2,1904	2,5716
	PKN	0,0230	0,0242	0,0496	4,7421	7,2504	11,4729
	PKO	0,0480	0,0348	0,0017	4,9975	2,7235	3,5581
	PXM	0,0050	0,0133	0,0274	4,0032	6,2253	10,0734
	PZU	0,0161	0,0245	0,0439	4,5043	7,1885	11,2058
TPS	0,0280	0,0192	0,0605	3,9621	2,0772	2,6638	
TVN	0,0049	0,0199	0,0431	4,4810	11,0528	15,4217	
C3	ACP	0,0050	0,0202	0,0326	2,9799	4,7771	7,5817
	BHW	0,0089	0,0730	0,1070	2,0360	6,2085	7,8864
	BRE	0,0139	0,0679	0,0822	2,9174	6,7236	8,8825
	CEZ	0,0092	0,0193	0,0305	2,5406	1,4768	1,7326
	GTC	0,0180	0,0187	0,0615	2,6604	9,8048	12,3814
	GTN	0,0067	0,0264	0,0438	3,0573	4,7539	7,5800
	KER	0,0084	0,0057	0,0273	4,0488	3,8751	7,8793
	KGH	0,0026	0,0320	0,0217	3,2442	2,7032	2,2275
	LTS	0,0103	0,0160	0,0508	3,5420	1,7170	2,6544
	LWB	0,0074	0,0387	0,0203	2,4149	6,0806	7,9076

	PBG	0,0052	0,0086	0,0239	2,7994	5,1006	7,8612
	PEO	0,0365	0,0126	0,0517	3,8012	1,5735	2,7846
	PGE	0,0164	0,0171	0,0386	3,7629	1,8105	2,6451
	PGN	0,0071	0,0331	0,0643	2,5818	5,1145	7,5368
	PKN	0,0458	0,0204	0,0906	4,0007	2,2574	2,6504
	PKO	0,0003	0,0021	0,0035	3,1305	4,3903	7,5018
	PZU	0,0161	0,0023	0,0137	2,5436	6,1733	8,4939
	TPE	0,1581	0,1866	0,1635	10,4974	11,9143	17,1569
	TPS	0,0014	0,0054	0,0075	1,7258	7,2698	8,9542
	TVN	0,0117	0,0763	0,0947	2,6883	7,1585	9,1877
C4	ACP	0,0400	0,0401	0,0013	3,7410	2,1564	2,3235
	BHW	0,0037	0,0349	0,0384	0,9096	9,0128	9,7710
	BRE	0,0260	0,0063	0,0236	3,2831	10,1042	13,0794
	GTC	0,0144	0,0016	0,0152	4,6950	5,6991	10,3075
	GTN	0,0333	0,0035	0,0244	4,9559	5,6817	10,3596
	JSW	0,0169	0,0233	0,0548	3,6149	1,9216	2,5788
	KER	0,0072	0,0438	0,0735	3,5431	9,4592	12,7170
	KGH	0,0342	0,0682	0,0256	4,8308	8,7689	11,6685
	LTS	0,0029	0,0086	0,0197	3,5421	3,6947	7,1133
	LWB	0,0102	0,0354	0,0682	3,5809	9,3612	12,7172
	PBG	0,0071	0,0315	0,0635	3,9122	11,4487	15,2068
	PEO	0,0064	0,0114	0,0343	3,1733	5,8259	8,9617
	PGE	0,0059	0,0321	0,0650	3,1075	9,4620	12,4705
	PGN	0,0084	0,0257	0,0323	3,1479	2,0387	1,8073
	PKN	0,0034	0,0392	0,0600	3,0080	6,5563	9,2620
	PKO	0,0188	0,0087	0,0228	2,7344	4,8979	7,3333
PZU	0,0015	0,0317	0,0421	1,8858	13,6296	15,3972	
TPE	0,1680	0,0381	0,2340	16,2661	9,5903	23,0011	
TPS	0,0191	0,0027	0,0335	2,5033	6,5051	8,9114	
TVN	0,0086	0,0201	0,0398	3,3276	8,7767	11,9465	
C5	ACP	0,0069	0,0261	0,0386	4,3939	2,3681	2,8774
	BHW	0,0031	0,0258	0,0190	0,7991	7,8021	8,4091
	BRE	0,0271	0,0049	0,0234	3,0154	10,2076	12,8752
	BRS	0,0029	0,1232	0,0946	4,4317	50,4499	52,5079
	GTC	0,0085	0,0219	0,0312	7,2116	5,3080	11,6803
	JSW	0,0053	0,0236	0,0413	1,9239	13,2270	15,0793
	KER	0,0075	0,0310	0,0461	5,7502	9,9009	14,8025
	KGH	0,0208	0,0584	0,1261	4,4929	8,6096	12,5841
	LTS	0,0159	0,0070	0,0230	4,6087	2,4128	6,6234
	LWB	0,0000	0,0874	0,0879	0,0315	16,7497	16,7795
	PEO	0,0043	0,0143	0,0325	3,7256	4,9675	8,5435
	PGE	0,0054	0,0301	0,0596	4,8062	7,4758	11,9510
	PGN	0,0127	0,0213	0,0360	3,4700	1,8363	2,3287
	PKN	0,0421	0,0573	0,0022	3,9048	6,4898	8,4425
	PKO	0,0113	0,0083	0,0198	2,6918	4,6357	7,1256
	PZU	0,0023	0,1244	0,1293	1,6825	41,5590	42,2071
SNS	0,0099	0,0295	0,0687	7,4355	5,7610	12,3692	
TPE	0,1160	0,0032	0,1440	16,0348	2,3855	17,0827	
TPS	0,0129	0,0434	0,0714	2,5752	5,7429	8,0437	
TVN	0,0077	0,0130	0,0276	4,6370	6,9299	11,3646	
	ACP	0,0051	0,0455	0,0417	3,7206	8,8548	11,9847

	BIO	0,0399	0,0413	0,1084	5,2908	17,0278	21,6320
	BRE	0,0044	0,0118	0,0184	6,7390	7,5069	13,8970
	BZW	0,0065	0,0147	0,0132	6,7618	6,2103	12,4270
	CEZ	0,0043	0,0740	0,0889	3,5485	12,3722	15,3548
	CPS	0,0219	0,0011	0,0285	6,9538	8,3935	15,3019
	GTC	0,0089	0,0497	0,0451	4,0427	12,3376	15,1212
	GTN	0,0147	0,0087	0,0441	5,1599	10,6422	15,7789
	KGH	0,0033	0,0233	0,0295	3,8562	14,4505	17,9464
	LTS	0,0274	0,0261	0,0661	5,0009	11,1580	15,7613
	PBG	0,0058	0,0167	0,0274	3,9670	6,3208	10,0408
	PEO	0,0054	0,1047	0,0681	3,6143	14,9513	16,3710
	PGE	0,0114	0,0374	0,0653	5,8624	10,3846	15,6765
	PGN	0,0075	0,0101	0,0347	3,1887	5,7839	8,9520
	PKN	0,0152	0,0007	0,0131	5,2536	7,9685	13,0958
	PKO	0,0411	0,0257	0,0156	6,2203	5,9339	10,7555
	PXM	0,0067	0,0248	0,0498	5,3047	9,4723	14,4983
	PZU	0,0161	0,0027	0,0291	7,1802	6,2399	13,3863
	TPS	0,0038	0,0163	0,0158	4,3462	2,4216	2,4408
	TVN	0,0067	0,0075	0,0281	5,6109	10,6849	16,2663
D2	ACP	0,0055	0,0302	0,0406	3,0115	9,3107	12,0763
	BRE	0,0030	0,0207	0,0338	5,9243	9,1726	14,7569
	BZW	0,0084	0,0267	0,0644	5,7294	6,7373	12,0835
	CEZ	0,0114	0,0473	0,0843	2,7472	13,0252	15,5861
	CPS	0,0059	0,0322	0,0609	4,6874	7,8198	12,1594
	GTC	0,0071	0,0478	0,0458	2,8979	13,4846	15,4890
	GTN	0,0062	0,0078	0,0273	4,1496	8,9695	13,0979
	KGH	0,0020	0,0019	0,0005	5,4492	6,0351	11,3833
	LTS	0,0265	0,0253	0,0655	4,7433	11,5427	15,9395
	PBG	0,0100	0,0083	0,0250	2,9008	7,5457	10,3532
	PEO	0,0038	0,0906	0,0632	2,6305	15,3982	16,5669
	PGE	0,0188	0,0498	0,1086	4,9959	10,5569	15,1135
	PGN	0,0187	0,0046	0,0297	4,2347	4,2521	8,4228
	PKN	0,0212	0,0007	0,0171	4,9006	8,7708	13,4977
	PKO	0,0318	0,0201	0,0181	5,1302	6,7745	11,0381
	PXM	0,0050	0,0645	0,1001	4,0123	10,9715	14,5330
	PZU	0,0191	0,0055	0,0221	5,1515	7,2695	12,1994
TPE	0,0458	0,0416	0,1212	6,0637	16,3068	21,6847	
TPS	0,0086	0,0147	0,0164	3,9851	2,1376	2,3102	
TVN	0,0126	0,0042	0,0308	4,7761	11,7173	16,4878	
D3	ACP	0,0047	0,0056	0,0117	3,5573	4,1322	7,6060
	BHW	0,0064	0,0325	0,0648	4,2352	8,2352	12,2188
	BRE	0,0178	0,0270	0,0518	4,5525	7,5412	11,6307
	CEZ	0,0031	0,1106	0,0917	1,9442	8,0634	9,2108
	GTC	0,0042	0,0156	0,0260	3,9594	10,6060	14,4289
	GTN	0,0073	0,0157	0,0380	2,5154	8,5777	11,0389
	KER	0,0041	0,0112	0,0286	3,0093	7,3200	10,3022
	KGH	0,0533	0,0369	0,0018	5,1296	3,1390	2,8020
	LTS	0,0048	0,0069	0,0229	3,2308	9,1582	12,3839
	LWB	0,0069	0,0347	0,0644	3,8798	8,8785	12,5117
	PBG	0,0197	0,0282	0,0008	3,6849	1,9714	2,2424
PEO	0,0036	0,0090	0,0240	3,6697	6,2954	9,9174	

	PGE	0,0055	0,0227	0,0299	4,1878	6,3074	10,1049
	PGN	0,0096	0,0177	0,0162	3,5214	1,8256	2,1033
	PKN	0,0432	0,0244	0,0542	4,2661	8,1217	11,6889
	PKO	0,0546	0,0342	0,0024	4,3719	2,4750	2,8866
	PZU	0,0062	0,0267	0,0443	3,5844	8,1839	11,5124
	TPE	0,0107	0,1185	0,1864	4,9721	15,3238	19,2812
	TPS	0,0101	0,0012	0,0092	2,6296	6,1862	8,7025
	TVN	0,0032	0,0226	0,0417	3,9316	12,2327	16,0551
D4	ACP	0,0075	0,0217	0,0046	3,4873	1,7973	2,2620
	BHW	0,0151	0,0151	0,0544	4,5988	5,9851	10,4608
	BRE	0,0195	0,0053	0,0345	3,2482	9,4071	12,5177
	GTC	0,0137	0,0221	0,0625	3,6195	8,6499	12,1716
	GTN	0,0111	0,0050	0,0273	2,9462	10,4333	13,3422
	JSW	0,0044	0,1164	0,0818	1,8395	8,3306	9,2815
	KER	0,0048	0,0130	0,0327	2,9820	6,1535	9,0890
	KGH	0,0672	0,0177	0,1055	5,6502	3,2196	3,3570
	LTS	0,0054	0,0098	0,0213	2,9161	4,5661	7,3651
	LWB	0,0055	0,0239	0,0068	3,3055	1,8536	2,9727
	PBG	0,0068	0,0326	0,0609	2,7243	7,2344	9,8061
	PEO	0,0105	0,0067	0,0332	3,1555	5,5947	8,7427
	PGE	0,0089	0,0260	0,0643	3,5970	8,6900	12,1973
	PGN	0,0085	0,0223	0,0207	3,4276	1,8550	2,1061
	PKN	0,0089	0,0148	0,0055	3,1619	5,9366	8,6764
	PKO	0,0022	0,0357	0,0262	4,1565	2,6593	2,5252
PZU	0,0012	0,0333	0,0409	1,6257	13,8297	15,3177	
TPE	0,1125	0,1258	0,3152	10,3134	15,0130	22,3369	
TPS	0,0149	0,0028	0,0069	2,6045	6,3221	8,6755	
TVN	0,0076	0,0071	0,0205	3,3656	9,7502	13,0458	
D5	ACP	0,0082	0,0215	0,0364	3,6241	1,9083	2,4711
	BHW	0,0092	0,0415	0,0373	1,8965	8,0227	9,5261
	BRE	0,0315	0,0076	0,0200	3,3857	9,7948	12,7002
	CEZ	0,0103	0,0251	0,0424	3,1042	1,6703	2,3930
	GTC	0,0099	0,0241	0,0596	3,7775	8,4915	12,1503
	GTN	0,0087	0,0113	0,0252	3,4134	7,1204	10,3994
	KER	0,0063	0,0398	0,0705	3,2495	9,6192	12,6746
	KGH	0,0380	0,0901	0,0256	4,3776	9,5567	11,6295
	LTS	0,0104	0,0078	0,0217	3,1151	4,1923	7,1460
	LWB	0,0087	0,0341	0,0637	3,5126	9,2848	12,5828
	PBG	0,0071	0,0306	0,0589	3,2331	12,1954	15,3115
	PEO	0,0069	0,0098	0,0331	3,0863	5,8320	8,9005
	PGE	0,0078	0,0275	0,0634	3,1859	9,1642	12,2764
	PGN	0,0119	0,0230	0,0361	3,0084	1,8053	1,8906
	PKN	0,0226	0,0224	0,0035	3,1318	6,2611	8,5709
	PKO	0,0204	0,0083	0,0234	2,7723	4,8414	7,2979
PZU	0,0012	0,0307	0,0413	1,6046	13,8325	15,3741	
TPE	0,0177	0,0336	0,0970	9,0920	10,7959	19,1731	
TPS	0,0195	0,0026	0,0337	2,3426	6,7661	8,9959	
TVN	0,0101	0,0061	0,0230	3,2895	9,7914	13,0086	

Źródło: opracowanie własne

# Dodatek F

## Badanie empiryczne — wyniki

Tabela F.1: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A1

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE	
Parametr	$V < 15,22$	$SV < 12,7$	$H < 10,04$	$VaR < 9,05$	$cVaR < 9,54$	$\gamma = (-0,28; 13,5)$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$	$E > -0,28$
ACP	0,1221	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0021	0,0004	0,0011	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
AGO	0,0318	0,0722	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0002	0,0094	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
BIO	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0520	0,0109	0,0020	0,0610	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0004	0,0611	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
BZW	0,1466	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1499	0,1498	0,0000	0,0000	0,1500	0,1000	0,1000	
CEZ	0,0039	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0029	0,0116	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
CST	0,0037	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,1500	0,1498	0,0000	0,0000	0,1343	0,0000	0,0000	
GTC	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1449	0,1498	0,1500	0,0000	0,1245	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,1094	0,0106	0,1000	0,1000	0,1000	0,0017	0,0001	0,0008	0,1496	0,1140	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0027	0,0000	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,1437	0,1006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0002	0,0001	0,1500	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
PBG	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0006	0,0005	0,1343	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	
PEO	0,0086	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0067	0,0292	0,1332	0,0000	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000	
PGN	0,1379	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1431	0,0046	0,1500	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	
PKN	0,0819	0,1495	0,1500	0,1500	0,1500	0,0259	0,0015	0,0006	0,0498	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
PKO	0,0049	0,0671	0,1500	0,1500	0,1500	0,0086	0,0385	0,0005	0,0001	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	
PND	0,0128	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1496	0,1500	0,0000	0,0000	0,1157	0,0000	0,0000	
PXM	0,0323	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1498	0,1500	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1453	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0045	0,0003	0,0002	0,1500	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
TVN	0,0091	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0219	0,0222	0,0053	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.2: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A2

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 9,22$	$SV < 6,97$	$H < 10$	$VaR < 8,07$	$cVaR < -8,4$	$\gamma = (0,03; 13,5)$			$E > 0,0319$	$E > 0,0319$	$E > 0,0319$	$E > 0,0320$	$E > 0,0321$
ACP	0,1429	0,0939	0,1000	0,1000	0,1000	0,0046	0,0004	0,0007	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
AGO	0,0045	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0018	0,0014	0,0008	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BIO	0,1496	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,1500	0,0500	0,0010	0,0039	0,1500	0,1000
BRE	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0422	0,1496	0,1500	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,0060	0,0069	0,0000	0,0000	0,0000	0,0320	0,0011	0,0002	0,0500	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1447	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0007	0,0003	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0137	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0018	0,0001	0,0000	0,0500	0,0926	0,0000	0,0000	0,0000
CST	0,0034	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0087	0,0959	0,1397	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0476	0,1164	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1386	0,1303	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,0415	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0068	0,0035	0,0065	0,0500	0,0000	0,0961	0,0000	0,0000
KGH	0,0072	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1491	0,1485	0,1480	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0058	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1465	0,1377	0,1128	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PBG	0,1355	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0003	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0147	0,0328	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1485	0,1494	0,0500	0,0057	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1488	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0025	0,0002	0,0003	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0056	0,0007	0,0001	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0084	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0001	0,0017	0,0500	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000
PXM	0,0980	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1452	0,0030	0,0010	0,0500	0,0000	0,0000	0,1000	0,1500
TPS	0,0188	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0002	0,0004	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0196	0,0077	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.3: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A3

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 5,52$	$SV < 4,64$	$H < 6$	$VaR < 5,44$	$cVaR < -5,73$	$\gamma = (-0,046; 7,5)$			$E > -0,046$	$E > -0,046$	$E > -0,046$	$E > -0,046$	$E > -0,046$
ACP	0,0185	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0042	0,0007	0,0617	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
BIO	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0002	0,0000	0,0139	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,0032	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1498	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,0232	0,0225	0,0000	0,0000	0,0000	0,0824	0,1493	0,1500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1396	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0002	0,0000	0,0002	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1402	0,1389	0,1445	0,0000	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0073	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,1500	0,1478	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1414	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1493	0,0001	0,0028	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KGH	0,0057	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,1494	0,1497	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0026	0,0021	0,0000	0,0382	0,1499	0,0000	0,0000	0,0000
PBG	0,0063	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0142	0,0774	0,1000	0,1000	0,1000	0,1499	0,0922	0,0103	0,0000	0,0000	0,0000	0,1000	0,1000
PGE	0,1444	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0063	0,0006	0,0117	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,0071	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0002	0,0001	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,1496	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0005	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1415	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0099	0,0011	0,0053	0,0001	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0214	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,0042	0,0049	0,0000	0,0000	0,1000	0,1500	0,1500
PZU	0,0128	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1496	0,1499	0,1453	0,0000	0,0851	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1492	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0004	0,0003	0,0002	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0118	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0040	0,0071	0,0747	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne



Tabela F.4: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A4

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	ECVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 2,93$	$SV < 2,24$	$H < 4,37$	$VaR < 3,62$	$cVaR < -3,8$	$\gamma = (-0,03; 13,5)$			$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$
ACP	0,0117	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0015	0,0010	0,1500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
BHW	0,1477	0,0001	0,0902	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0001	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,1469	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1497	0,1487	0,1498	0,0032	0,1500	0,0316	0,1500	0,1500
CEZ	0,0767	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,1500	0,0000	0,0684	0,0000	0,0000
GTC	0,0015	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,1409	0,1465	0,1479	0,0000	0,0000	0,0000	0,1000	0,1000
GTN	0,1473	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1495	0,0067	0,0071	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KER	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0013	0,0018	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KGH	0,0345	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1494	0,1497	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,1462	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1466	0,1499	0,1500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0863	0,0050	0,0021	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PBG	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0007	0,0001	0,1037	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0001	0,0764	0,0000	0,0000	0,0000	0,0109	0,0730	0,0530	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0146	0,0306	0,0000	0,0000	0,0000	0,0059	0,0067	0,0213	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1264	0,0159	0,0098	0,0998	0,0992	0,0003	0,0003	0,0006	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0147	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0006	0,1493	0,1496	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0995	0,1029	0,1500	0,1500	0,1500	0,0062	0,0086	0,0130	0,0000	0,0454	0,0000	0,0000	0,0000
PZU	0,0207	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,1389	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	0,0000	0,0546	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,0069	0,0221	0,0000	0,0002	0,0008	0,0000	0,0001	0,0017	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TVN	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0011	0,0011	0,0043	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.5: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A5

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR	
Parametr	$V < 8,36$	$SV < 6,94$	$H < 7,85$	$VaR < 7,06$	$cVaR < -7,45$	$\gamma = (-0,16; 19,45)$			$E > -0,16$	$E > -0,16$	$E > -0,16$	$E > -0,16$	$E > -0,16$	$E > -0,16$
ACP	0,1030	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1478	0,0020	0,0005	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,1423	0,0000	0,1500	0,0289	0,0357	0,0000	0,0001	0,0002	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0364	0,1500	0,1483	0,1500	0,1500	0,1482	0,0344	0,0042	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTC	0,0039	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1496	0,1500	0,1494	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1460	0,1489	0,1494	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
JSW	0,1240	0,0536	0,1017	0,1500	0,1500	0,0006	0,0006	0,0001	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
KER	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0054	0,1391	0,1485	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0009	0,1322	0,0000	0,0000	0,0000	0,0023	0,0486	0,0786	0,0000	0,0314	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,0051	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0025	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0042	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0003	0,0023	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PBG	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0524	0,1483	0,1497	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PEO	0,0059	0,1500	0,0000	0,0711	0,0643	0,0034	0,0049	0,0019	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PGE	0,0041	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0027	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PGN	0,1390	0,0623	0,1500	0,1500	0,1500	0,0015	0,0012	0,0002	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,0163	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0321	0,0082	0,0024	0,0909	0,0000	0,1000	0,1500	0,1500	
PKO	0,1454	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,0002	0,0004	0,1500	0,0000	0,1500	0,1000	0,1000	
PZU	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1469	0,1496	0,1498	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0804	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1484	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0012	0,0007	0,0000	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
TVN	0,0346	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0077	0,0072	0,0000	0,0686	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.6: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A6

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 3,7$	$SV < 3,03$	$H < 6,78$	$VaR < 5,09$	$cVaR < 6,26$	$\gamma = (0,02; 21,91)$			$E > 0,024$	$E > 0,024$	$E > 0,024$	$E > 0,024$	$E > 0,024$
ACP	0,1466	0,0292	0,0000	0,0000	0,0000	0,0009	0,0023	0,0004	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BHW	0,1451	0,0265	0,0926	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,1370	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0014	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BRS	0,0030	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1499	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0132	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1469	0,0591	0,0472	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
JSW	0,0087	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0086	0,1488	0,1469	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KER	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1497	0,1495	0,1485	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KGH	0,0095	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0043	0,0004	0,0008	0,0395	0,0093	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0021	0,0893	0,0074	0,1500	0,1238	0,0052	0,0034	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,0509	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PEO	0,0643	0,0460	0,1500	0,1000	0,1262	0,0082	0,0002	0,0026	0,0198	0,0900	0,0422	0,1000	0,1000
PGE	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0023	0,0310	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,0937	0,0217	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0007	0,0002	0,1495	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0324	0,0480	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0595	0,0008	0,0578	0,0000	0,0000
PKO	0,1452	0,1393	0,1500	0,1500	0,1500	0,0088	0,0020	0,0006	0,1317	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
PZU	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1476	0,1500	0,1491	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
SNS	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0449	0,0090	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1476	0,1499	0,1499	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1388	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0036	0,0015	0,0005	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0206	0,0193	0,0046	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.7: Skład portfeli wyznaczonych w okresie A7

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 2,64$	$SV < 2,56$	$H < 5,21$	$VaR < 4,6$	$cVaR < 4,85$	$\gamma = (-0,04; 15,2)$			$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$
ACP	0,1324	0,0002	0,1000	0,1000	0,1000	0,0056	0,0002	0,0003	0,1467	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BHW	0,1489	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1483	0,0010	0,0003	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,1362	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0017	0,0002	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRS	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1499	0,1500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0089	0,1476	0,1497	0,0000	0,0401	0,0000	0,0000	0,0000
JSW	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0018	0,0002	0,1497	0,0000	0,1500	0,1000	0,1000
KER	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1480	0,1499	0,1491	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KGH	0,0562	0,1370	0,1500	0,1500	0,1500	0,0003	0,0033	0,0007	0,1036	0,0498	0,1000	0,0000	0,0000
LTS	0,1432	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0073	0,0015	0,0062	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0028	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PEO	0,1375	0,1035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0010	0,0010	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PGE	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1499	0,1499	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1158	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1493	0,1273	0,0786	0,0000	0,1348	0,0000	0,1500	0,1500
PKN	0,0050	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0361	0,0163	0,0152	0,0000	0,0252	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1083	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0016	0,0005	0,0007	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PZU	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0905	0,1389	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
SNS	0,0024	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0423	0,0033	0,0039	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0052	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TVN	0,0014	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1500	0,1497	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.8: Skład portfeli wyznaczonych w okresie B1

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S (1;0)	S (0,5;0,5)	S (0;1)	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 16,23$	$SV < 15,58$	$H < 11,38$	$VaR < 9,89$	$cVaR < 10,35$	$\gamma = (-0,33; 14,17)$			$E > -0,33$	$E > -0,33$	$E > -0,33$	$E > -0,33$	$E > -0,33$
ACP		0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0026	0,0014	0,0002	0,1418	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
AGO	0,0152	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0001	0,0004	0,0695	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BIO	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0013	0,0013	0,0051	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,0606	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1500	0,1496	0,0305	0,1426	0,0000	0,1000	0,1000
BZW	0,0049	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0082	0,0029	0,0042	0,0149	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0002	0,0572	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
GPS	0,0076	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1486	0,0990	0,1493	0,0076	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CST	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1490	0,1418	0,1490	0,0290	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0038	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1496	0,1500	0,1500	0,0149	0,0933	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1298	0,1492	0,1500	0,1500	0,1500	0,1498	0,1492	0,1018	0,0260	0,0017	0,0000	0,1500	0,1500
KGH	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0004	0,0316	0,0523	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0410	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0003	0,0001	0,0597	0,1471	0,1000	0,0000	0,0000
PBG	0,1307	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0059	0,0001	0,0003	0,0384	0,0005	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0034	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0727	0,1499	0,1496	0,0052	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1329	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0091	0,0004	0,0001	0,1239	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,1389	0,1008	0,1000	0,1000	0,1000	0,0004	0,0021	0,0019	0,1256	0,1123	0,1500	0,0000	0,0000
PKO	0,0124	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0004	0,0006	0,0391	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0053	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,1500	0,1376	0,0345	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1495	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0011	0,0004	0,0000	0,1280	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0033	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.9: Skład portfeli wyznaczonych w okresie B2

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 6,05$	$SV < 4,93$	$H < 7,13$	$VaR < 5,74$	$cVaR < 6,05$	$\gamma = (0,07; 9,91)$			$E > 0,07$	$E > 0,07$	$E > 0,07$	$E > 0,07$	$E > 0,07$
ACP	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0000	0,0008	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
AGO	0,0019	0,1500	0,0429	0,0171	0,0134	0,0009	0,1441	0,1447	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BIO	0,1400	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1495	0,1497	0,1500	0,0500	0,1500	0,0758	0,0000	0,0000
BRE	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1491	0,1499	0,1500	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,0100	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1500	0,1500	0,0500	0,1064	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1500	0,0000	0,0571	0,0829	0,0866	0,0005	0,0010	0,0003	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0195	0,0123	0,0098	0,0500	0,0000	0,0000	0,0447	0,0447
CST	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1500	0,1499	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0051	0,0114	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1400	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1491	0,0005	0,0011	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KGH	0,0007	0,0972	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0529	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0050	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0022	0,0022	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PBG	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0002	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0036	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0064	0,1498	0,1491	0,0500	0,1436	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0012	0,0500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
PKN	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0010	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1400	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0686	0,0228	0,0500	0,0000	0,0000	0,0553	0,0553
PXM	0,0200	0,0001	0,1500	0,1500	0,1500	0,0029	0,0001	0,0013	0,0500	0,0000	0,0242	0,1500	0,1500
TPS	0,0200	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
TVN	0,1200	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0708	0,0157	0,0014	0,0500	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.10: Skład portfeli wyznaczonych w okresie B3

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 3,77$	$SV < 2,39$	$H < 4,55$	$VaR < 3,77$	$cVaR < 3,98$	$\gamma = (-0,03; 13,5)$			$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$
ACP	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0016	0,0016	0,0092	0,0094	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,1473	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1497	0,1437	0,1500	0,0242	0,1500	0,0000	0,0137	0,0137
BZW	0,0046	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0007	0,0015	0,0179	0,0000	0,0362	0,1500	0,1500
CEZ	0,0166	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0004	0,0008	0,1371	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
CPS	0,0031	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1490	0,1499	0,0401	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500
GTC	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0004	0,0718	0,0000	0,1500	0,0863	0,0863
GTN	0,1312	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0066	0,0028	0,0027	0,1246	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KGH	0,1481	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1495	0,1499	0,1499	0,0040	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,1483	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1493	0,2006	0,0025	0,0340	0,1458	0,0638	0,1500	0,1500
PBG	0,0194	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0001	0,0004	0,1381	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1312	0,1462	0,1421	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0053	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0156	0,0089	0,0735	0,0112	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,0717	0,1108	0,0707	0,1030	0,1027	0,0005	0,0015	0,0000	0,0939	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0121	0,0589	0,0000	0,0000	0,0000	0,0118	0,1497	0,1397	0,0527	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0063	0,0098	0,0293	0,0000	0,0000	0,0778	0,0688	0,0034	0,0201	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0054	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0014	0,0003	0,0510	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PZU	0,1418	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0012	0,0007	0,0041	0,0738	0,1257	0,1500	0,0000	0,0000
TPE	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	0,0018	0,1284	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1266	0,0705	0,1500	0,1470	0,1473	0,0015	0,0002	0,0001	0,0797	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TVN	0,0093	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0032	0,0197	0,0120	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.11: Skład portfeli wyznaczonych w okresie B4

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	ECVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR	
Parametr	$V < 8,32$	$SV < 7,1$	$H < 7,62$	$VaR < 6,09$	$cVaR < 7,25$	$\gamma = (-0,17; 19,21)$			$E > -0,17$	$E > -0,17$	$E > -0,17$	$E > -0,17$	$E > -0,17$	$E > -0,17$
ACP	0,0426	0,1497	0,1110	0,1500	0,1500	0,1080	0,0100	0,0073	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,11476	0,0000	0,1500	0,0900	0,1059	0,0004	0,0003	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0917	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0217	0,0393	0,0500	0,0000	0,1000	0,1500	0,1500	
GTC	0,0042	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1484	0,1495	0,1492	0,0500	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,0054	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0542	0,1491	0,1499	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
JSW	0,1419	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0022	0,0002	0,0018	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
KER	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0126	0,1455	0,1486	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0005	0,0956	0,0000	0,0000	0,0000	0,0038	0,0331	0,0234	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0078	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0038	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0046	0,0029	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PBG	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1484	0,1495	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PEO	0,0366	0,1145	0,0000	0,0100	0,0000	0,0016	0,0010	0,0008	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PGE	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0003	0,0006	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PGN	0,11423	0,0406	0,1500	0,1500	0,1500	0,0003	0,0004	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,0077	0,1496	0,0000	0,1500	0,1441	0,0759	0,0327	0,0154	0,0500	0,0000	0,0000	0,1000	0,1000	
PKO	0,1222	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0027	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	
PZU	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1402	0,1497	0,1495	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0786	0,1500	0,1390	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1365	0,1499	0,1500	0,1500	0,1500	0,0006	0,0000	0,0005	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
TVN	0,0242	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0002	0,0029	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne



Tabela F.12: Skład portfeli wyznaczonych w okresie B5

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 9,12$	$SV < 7,89$	$H < 6,78$	$VaR < 5,09$	$cVaR < 6,24$	$\gamma = (0,03; 21,9)$			$E > 0,03$	$E > 0,03$	$E > 0,03$	$E > 0,03$	$E > 0,03$
ACP	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0007	0,0011	0,1455	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BHW	0,1414	0,0033	0,0926	0,0000	0,0000	0,0007	0,0000	0,0004	0,1439	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,0530	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0016	0,1209	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
BRS	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,1497	0,1498	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0490	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1495	0,0425	0,0282	0,0054	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
JSW	0,1459	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0315	0,1446	0,1497	0,0177	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KER	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,1498	0,1499	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KGH	0,1488	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0122	0,0021	0,0007	0,0678	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0124	0,0753	0,0074	0,1500	0,1238	0,0003	0,0158	0,0006	0,0227	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,1495	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0053	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PEO	0,0628	0,1446	0,1500	0,1000	0,1262	0,0088	0,0007	0,0011	0,0563	0,1294	0,0422	0,1000	0,1000
PGE	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0281	0,0509	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,0526	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0006	0,0007	0,1296	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0217	0,0253	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0039	0,0031	0,0214	0,0001	0,0578	0,0000	0,0000
PKO	0,1356	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0014	0,0022	0,0010	0,1166	0,1204	0,1500	0,1500	0,1500
PZU	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1498	0,1492	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
SNS	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0340	0,0015	0,0035	0,0031	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1491	0,1500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,0111	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0029	0,0004	0,1387	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0069	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0079	0,0041	0,0083	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.13: Skład portfeli wyznaczonych w okresie C1

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametry	$V < 16,39$	$SV < 15,26$	$H < 9,6$	$VaR < 8,38$	$cVaR < 8,72$	$\gamma = (-0,05; 13,74)$			$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$
ACP	0,1432	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0173	0,0002	0,0003	0,0964	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
AGO	0,0252	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0736	0,1154	0,0556	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BIO	0,0056	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0009	0,0047	0,0003	0,0130	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1495	0,1499	0,1500	0,0151	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,1363	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1493	0,1479	0,0124	0,1396	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,0076	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0064	0,0010	0,0007	0,0851	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0051	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0033	0,0061	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CST	0,0164	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1488	0,1328	0,0232	0,0444	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0278	0,1461	0,1500	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,1500	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,0234	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0895	0,0002	0,0000	0,0694	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KGH	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,1485	0,1438	0,0027	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,1365	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0007	0,0010	0,0002	0,0983	0,0000	0,1000	0,1000	0,1000
PBG	0,0112	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0005	0,0005	0,1236	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,1201	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1497	0,1499	0,0004	0,1474	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1381	0,1347	0,1000	0,1000	0,1000	0,0005	0,0001	0,0002	0,1333	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0363	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0110	0,0005	0,0001	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1305	0,1191	0,1500	0,1500	0,1500	0,0118	0,0113	0,0000	0,0255	0,0685	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0180	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1083	0,0035	0,0012	0,0085	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,0129	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0003	0,1103	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0036	0,0004	0,0632	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.14: Skład portfeli wyznaczonych w okresie C2

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE
Parametr	$V < 6,52$	$SV < 5,03$	$H < 7,22$	$VaR < 5,8$	$cVaR < 6,1$	$\gamma = (0,1;10)$			$E > 0,10$	$E > 0,10$	$E > 0,10$	$E > 0,10$	$E > 0,10$
ACP	0,1493	0,0000	0,1085	0,0794	0,0765	0,0034	0,0008	0,0001	0,0673	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BIO	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,1457	0,1498	0,0092	0,0502	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,0086	0,1500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1498	0,1500	0,1496	0,0078	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZAW	0,0048	0,0071	0,0000	0,0206	0,0235	0,1499	0,1497	0,1500	0,0146	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1484	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0005	0,1430	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0115	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,0004	0,0129	0,0341	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500
GTC	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0666	0,0711	0,0113	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1482	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1497	0,0021	0,0002	0,1492	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KGH	0,0003	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,1497	0,0342	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,1122	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0134	0,0117	0,0068	0,0245	0,0000	0,0956	0,0000	0,0000
PBG	0,0162	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0002	0,0976	0,0000	0,0044	0,1500	0,1500
PEO	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0036	0,0044	0,0032	0,0103	0,0487	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0145	0,1500	0,1415	0,0000	0,0000	0,0214	0,1497	0,1488	0,0166	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PCN	0,0195	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0005	0,0002	0,0264	0,0000	0,1500	0,0014	0,0014
PKN	0,0079	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0014	0,0070	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1373	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0550	0,0160	0,0027	0,1310	0,0000	0,1500	0,0986	0,0986
PXM	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0001	0,0009	0,0296	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PZU	0,0142	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0004	0,0019	0,0110	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1435	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,1481	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0624	0,0929	0,1500	0,1500	0,1500	0,1496	0,1499	0,1498	0,0270	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.15: Skład portfeli wyznaczonych w okresie C3

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 3,75$	$SV < 3,15$	$H < 5,03$	$Var < 4,51$	$cVaR < 4,75$	$\gamma = (-0,02; 8,62)$			$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$
ACP	0,1209	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0191	0,0001	0,0007	0,1329	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BHW	0,0420	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1497	0,1377	0,0400	0,0011	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,0099	0,0396	0,0000	0,1000	0,1000	0,1489	0,1500	0,1499	0,0101	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1464	0,0000	0,1094	0,0000	0,0000	0,0033	0,0001	0,0019	0,1438	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
GTC	0,0048	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0011	0,0293	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,0910	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1490	0,0005	0,0016	0,1238	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KER	0,0438	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0049	0,0002	0,0013	0,0176	0,0000	0,0457	0,0000	0,0000
KGH	0,0097	0,1500	0,1406	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,1500	0,0069	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0703	0,0947	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0028	0,0181	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1499	0,1499	0,0186	0,0000	0,0000	0,1000	0,1000
PBG	0,0265	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0007	0,0000	0,1296	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0581	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0013	0,0000	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0594	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0080	0,0115	0,0111	0,0300	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1376	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0041	0,0019	0,0001	0,1448	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0386	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0034	0,1109	0,0001	0,0423	0,0967	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0189	0,1362	0,1500	0,1500	0,1500	0,0601	0,0013	0,0087	0,0510	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PZU	0,0119	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0054	0,1309	0,1483	0,0007	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0043	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0011	0,1500	0,0001	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,0900	0,1296	0,1500	0,1500	0,1500	0,0001	0,0003	0,0046	0,1253	0,1500	0,0543	0,0000	0,0000
TVN	0,0200	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1416	0,1497	0,1497	0,0007	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.16: Skład portfeli wyznaczonych w okresie C4

Zadanie	EV	ESV	EH	EVar	EcVar	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE	
Parametr	$V < 6,81$	$SV < 5,88$	$H < 6,13$	$Var < 5,26$	$cVaR < 5,55$	$\gamma = (-0,08; 14,26)$			$E > -0,08$	$E > -0,08$	$E > -0,08$	$E > -0,08$	$E > -0,08$	$E > -0,08$
ACP	0,0441	0,0758	0,1500	0,1500	0,1500	0,0017	0,0005	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,1398	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	0,0001	0,0001	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0838	0,1500	0,1459	0,1500	0,1500	0,0283	0,0027	0,0024	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTC	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1463	0,1495	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,1442	0,1498	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
JSW	0,1262	0,0046	0,1500	0,1500	0,1500	0,0002	0,0001	0,0009	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
KER	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0010	0,0019	0,0500	0,0187	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0785	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,1495	0,1478	0,1498	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,0119	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0044	0,0060	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0086	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0344	0,0003	0,0027	0,0500	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
PBG	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0462	0,1414	0,1490	0,0500	0,0807	0,0000	0,0000	0,0000	
PEO	0,0642	0,0172	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,0670	0,0229	0,0500	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
PGE	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0020	0,0000	0,0500	0,0000	0,1000	0,1000	0,1000	
PGN	0,1229	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0003	0,0003	0,0002	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,0447	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,1464	0,0295	0,0498	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PKO	0,0138	0,1498	0,0000	0,0172	0,0182	0,0030	0,0008	0,0016	0,0500	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	
PZU	0,0118	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1496	0,1500	0,1498	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0813	0,1500	0,1041	0,0828	0,0818	0,1500	0,1500	0,1500	0,0500	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1414	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0018	0,0015	0,0005	0,0500	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
TVN	0,0145	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1363	0,0102	0,0127	0,0500	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.17: Skład portfeli wyznaczonych w okresie C5

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR	
Parametr	$V < 5,60$	$SV < 4,74$	$H < 7,41$	$VaR < 5,9$	$cVaR < 6,99$	$\gamma = (-0,04; 22,94)$			$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$	$E > -0,04$
ACP	0,1452	0,0535	0,1500	0,1110	0,1500	0,0003	0,0003	0,0007	0,0500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,1491	0,0000	0,1500	0,1500	0,0000	0,0001	0,0005	0,0013	0,0500	0,1499	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0545	0,1183	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0003	0,0041	0,0500	0,0990	0,1500	0,1000	0,1000	
BRS	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1497	0,1500	0,1496	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTC	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1483	0,1469	0,1499	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
JSW	0,1398	0,0000	0,1500	0,1500	0,0211	0,0000	0,0006	0,0004	0,0500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	
KER	0,0045	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1458	0,1494	0,1492	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0027	0,1473	0,0000	0,0000	0,0000	0,0091	0,0309	0,0080	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0011	0,0023	0,0500	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0698	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1498	0,1500	0,1500	0,0500	0,0003	0,0003	0,0000	0,0000	
PEO	0,0192	0,1380	0,0000	0,0000	0,0789	0,0605	0,0006	0,0009	0,0500	0,0258	0,0000	0,0000	0,0000	
PGE	0,0129	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0029	0,0034	0,0500	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	
PGN	0,1466	0,1077	0,1500	0,1500	0,1500	0,0059	0,0006	0,0007	0,0500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,0970	0,1296	0,0000	0,0000	0,1500	0,0375	0,0171	0,0013	0,0500	0,1240	0,0000	0,1500	0,1500	
PKO	0,0070	0,0000	0,0058	0,0000	0,0000	0,0004	0,0014	0,0004	0,0500	0,0005	0,0997	0,0000	0,0000	
PZU	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,1497	0,1484	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
SNS	0,0043	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1365	0,0420	0,0694	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0011	0,1500	0,0942	0,1390	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1326	0,0056	0,1500	0,1500	0,1500	0,0000	0,0003	0,0007	0,0500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	
TVN	0,0112	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0056	0,0091	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.18: Skład portfeli wyznaczonych w okresie D1

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 8,89$	$SV < 7,16$	$H < 8,55$	$VaR < 7,38$	$cVaR < 7,77$	$\gamma = (0; 13,04)$			$E > 0$	$E > 0$	$E > 0$	$E > 0$	$E > 0$
ACP	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0248	0,0010	0,0001	0,1480	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BIO	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0021	0,0585	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1441	0,1498	0,1495	0,0036	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,0060	0,1499	0,1500	0,1500	0,1500	0,1441	0,1474	0,1419	0,0181	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1400	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0158	0,0011	0,0002	0,1410	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0008	0,0009	0,0111	0,0180	0,0000	0,0000	0,0000
GTC	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1499	0,1500	0,0024	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,0175	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0040	0,0005	0,0326	0,0000	0,0651	0,1257	0,1257
KGH	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,1340	0,1497	0,0145	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0400	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0008	0,0006	0,0406	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
PBG	0,1215	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0035	0,0000	0,0002	0,1318	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PEO	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1499	0,1500	0,0042	0,1496	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0245	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0515	0,0597	0,0085	0,0331	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,0238	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0002	0,0006	0,1369	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,1023	0,0990	0,1000	0,1000	0,1000	0,0101	0,0008	0,0002	0,0008	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0735	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1436	0,0484	0,0032	0,0874	0,0808	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0215	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0102	0,0007	0,0003	0,0117	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PZU	0,0068	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,1442	0,1388	0,0200	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0008	0,0004	0,1303	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,1200	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1447	0,0042	0,0458	0,0300	0,0000	0,0349	0,1243	0,1243

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.19: Skład portfeli wyznaczonych w okresie D2

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 6,64$	$SV < 5,39$	$H < 7,78$	$VaR < 6,73$	$cVaR < 7,1$	$\gamma = (-0,02; 11,53)$			$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$	$E > -0,02$
ACP	0,0994	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0008	0,0000	0,1446	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BRE	0,0100	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1486	0,1492	0,1500	0,0270	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
BZW	0,0088	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0485	0,1449	0,1479	0,0240	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0002	0,0004	0,1403	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
CPS	0,0300	0,1494	0,1500	0,1500	0,1500	0,1491	0,0711	0,0066	0,1050	0,0000	0,0405	0,1500	0,1500
GTC	0,0167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1492	0,1496	0,0122	0,0413	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1300	0,0000	0,1500	0,0579	0,0490	0,0081	0,0007	0,0030	0,0360	0,0001	0,1500	0,0351	0,0351
KGH	0,0033	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1494	0,1499	0,1479	0,0308	0,1500	0,0595	0,0000	0,0000
LTS	0,0105	0,0991	0,0000	0,1500	0,1500	0,0002	0,0005	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PBG	0,0096	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000	0,0001	0,0546	0,0000	0,1500	0,0649	0,0649
PEO	0,0038	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1496	0,1500	0,0047	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0039	0,1495	0,0000	0,0421	0,0510	0,0179	0,0138	0,0195	0,0116	0,0171	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0004	0,0002	0,1384	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0700	0,1470	0,1348	0,1500	0,1500	0,0016	0,0124	0,0026	0,0373	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,0311	0,1474	0,1500	0,1500	0,1500	0,0084	0,0032	0,0292	0,0102	0,1420	0,0000	0,0000	0,0000
PXM	0,0600	0,0075	0,1152	0,0000	0,0000	0,1480	0,0002	0,0003	0,0322	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500
PZU	0,0300	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0030	0,0039	0,0101	0,1499	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0040	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1493	0,1500	0,0039	0,0494	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,1496	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
TVN	0,0400	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0183	0,0017	0,0325	0,0276	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne



Tabela F.20: Skład portfeli wyznaczonych w okresie D3

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR
Parametr	$V < 5,63$	$SV < 4,07$	$H < 6,61$	$VaR < 5,22$	$cVaR < 5,51$	$\gamma = (0,05; 13,31)$			$E > 0,05$	$E > 0,05$	$E > 0,05$	$E > 0,05$	$E > 0,05$
ACP	0,0800	0,0000	0,0316	0,0000	0,0000	0,0014	0,0000	0,0005	0,0907	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
BHW	0,0200	0,0929	0,1500	0,1500	0,1500	0,1169	0,0312	0,0286	0,0317	0,0131	0,0000	0,0000	0,0000
BRE	0,0028	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0045	0,1476	0,1491	0,0288	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
CEZ	0,0437	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0026	0,1024	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
GTC	0,0037	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0058	0,0031	0,0059	0,0655	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
GTN	0,1359	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0619	0,0004	0,0002	0,1381	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
KER	0,0159	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0003	0,0010	0,0093	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
KGH	0,0352	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1455	0,1494	0,1500	0,0057	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
LTS	0,0734	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1435	0,1493	0,0084	0,1123	0,0660	0,0000	0,0000	0,0000
LWB	0,0086	0,0001	0,0000	0,0556	0,0192	0,0395	0,0014	0,0034	0,0365	0,0000	0,0000	0,1453	0,1453
PBG	0,0860	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0002	0,1163	0,0000	0,1356	0,1500	0,1500
PEO	0,0108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0024	0,0063	0,0007	0,0236	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
PGE	0,0151	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1454	0,1499	0,1464	0,0210	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PGN	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0001	0,0002	0,0850	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500
PKN	0,0269	0,1500	0,0684	0,0444	0,0808	0,0007	0,0037	0,1480	0,0137	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000
PKO	0,1000	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0472	0,0271	0,0042	0,0001	0,0900	0,1144	0,1047	0,1047
PZU	0,0024	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0202	0,1498	0,1489	0,0200	0,1496	0,0000	0,0000	0,0000
TPE	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1413	0,1500	0,1500	0,0013	0,0802	0,0000	0,0000	0,0000
TPS	0,1400	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0001	0,0010	0,0921	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000
TVN	0,0500	0,0065	0,0000	0,0000	0,0000	0,1207	0,0294	0,0508	0,0058	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.21: Skład portfeli wyznaczonych w okresie D4

Zadanie	EV	ESV	EH	EVAR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaRE	cVaRE	
Parametr	$V < 5,28$	$SV < 4,67$	$H < 5,99$	$Var < 5,24$	$cVaR < 5,49$	$\gamma = (-0,05; 14,02)$			$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$	$E > -0,05$
ACP	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0001	0,0012	0,1484	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,1492	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1494	0,0010	0,0001	0,1466	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,0025	0,0929	0,1000	0,0885	0,0714	0,1336	0,1497	0,1487	0,0025	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
GTC	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0035	0,0293	0,0275	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,0099	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0002	0,0029	0,0038	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
JSW	0,1429	0,0054	0,0000	0,0115	0,0286	0,0387	0,0017	0,0000	0,1477	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
KER	0,0045	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0024	0,0025	0,0008	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0124	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1476	0,1498	0,1474	0,0002	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,1458	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0014	0,0003	0,0029	0,0149	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0045	0,0018	0,0117	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PBG	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0015	0,0959	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PEO	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0050	0,1328	0,0485	0,0017	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	
PGE	0,0091	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1497	0,1476	0,0033	0,0846	0,0000	0,0000	0,0000	
PGN	0,1207	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0006	0,1476	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,0932	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0017	0,0101	0,0056	0,0120	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PKO	0,1463	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0013	0,0002	0,0006	0,1458	0,1496	0,1000	0,0000	0,0000	
PZU	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,1498	0,1499	0,0016	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1498	0,1500	0,1499	0,0004	0,0140	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1480	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0005	0,0012	0,0007	0,0818	0,0013	0,1500	0,1000	0,1000	
TVN	0,0061	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0599	0,0940	0,1500	0,0125	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

Tabela F.22: Skład portfeli wyznaczonych w okresie D5

Zadanie	EV	ESV	EH	EVaR	EcVaR	S1	S2	S3	VE	SVE	HE	VaR	cVaR	
Parametr	$V < 4,7$	$V < 4,6$	$H < 6,03$	$VaR < 5,29$	$cVaR < 5,54$	$\gamma = (-0,03; 15,32)$			$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$	$E > -0,03$
ACP	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0004	0,0374	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BHW	0,1500	0,1324	0,1500	0,1500	0,1500	0,1126	0,0004	0,0010	0,1218	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
BRE	0,1002	0,1479	0,1500	0,1500	0,1500	0,1492	0,1464	0,1495	0,1124	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
CEZ	0,1500	0,1320	0,1500	0,1500	0,1500	0,0007	0,0022	0,0001	0,1382	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
GTC	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0057	0,0137	0,1408	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
GTN	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1489	0,1487	0,1419	0,0120	0,1500	0,0000	0,0000	0,1000	
KER	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0016	0,0018	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
KGH	0,0017	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1499	0,1500	0,1493	0,0099	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LTS	0,0027	0,0194	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0016	0,0215	0,0168	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
LWB	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0089	0,0303	0,0026	0,0621	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PBG	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0036	0,0013	0,0315	0,0000	0,1000	0,0000	0,0000	
PEO	0,0036	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0941	0,0287	0,0284	0,0585	0,0000	0,0000	0,1500	0,1500	
PGE	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0063	0,0076	0,0007	0,0058	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
PGN	0,1415	0,1183	0,1000	0,1000	0,1000	0,0003	0,0014	0,0002	0,1384	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
PKN	0,1208	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0024	0,0123	0,0046	0,0823	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	
PKO	0,0103	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0018	0,0021	0,0012	0,0545	0,1500	0,1500	0,1000	0,0000	
PZU	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1499	0,1499	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
TPE	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1499	0,1500	0,1500	0,0011	0,0211	0,0000	0,0000	0,0000	
TPS	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,0016	0,0006	0,0001	0,0733	0,0000	0,1500	0,1500	0,1500	
TVN	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0145	0,1482	0,0548	0,0300	0,0789	0,0000	0,0000	0,0000	

Źródło: opracowanie własne

# Bibliografia

- [ADEH97] Ph. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath. Thinking Coherently. *Risk*, 10:68–71, 1997.
- [ADEH99] Ph. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.
- [Arr51] K. J. Arrow. Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations. *Econometrica*, 19(4):404–437, 1951.
- [AT02] C. Acerbi, D. Tasche. Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. *Economic Notes*, 31:379–388, 2002.
- [BABM97] I. Bloch, L. Aurdal, D. Bijno, J. Muller. Estimation of class membership functions for grey-level based image fusion. *International Conference on Image Processing*, wolumen 3, strony 268–271, 1997.
- [BMRB96] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, S. Bothorel. Towards general measures of comparison of objects. *Fuzzy Sets Syst.*, 84(2):143–153, 1996.
- [BT08] T. Bilgic, I.B. Turksen. Measurement and elicitation of membership functions. W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich, redaktorzy, *Handbook of Granular Computing*. John Wiley & Sons, 2008.
- [BZ70] R. E. Bellman, L. A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):141–164, 1970.
- [CCM08] Marcos Evandro Cintra, Heloisa Arruda Camargo, Maria Carolina Monard. A study on techniques for the automatic generation of membership functions for pattern recognition. *III Congresso da Academia Trinacional de Ciências*, strony 1–10, Foz do Iguacu - PR, 2008. Publicado em CD-ROM.
- [CO95] Joseph E. Chen, Kevin N. Otto. Constructing membership functions using interpolation and measurement theory. *Fuzzy Sets Syst.*, 73(3):313–327, 1995.
- [CP85] E. Czogała, W. Pedrycz. *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
- [CrC97] H. D. Cheng, Jim rong Chen. Automatically Determine the Membership Function Based on the Maximum Entropy Principle. *Information Sciences*, 96:163–182, 1997.
- [CS87] J. L Chameau, J. C. Santamarina. Membership functions I: Comparing methods of measurement. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1:287–301, 1987.
- [CS02] V. V. Cross, T. A. Sudkamp. *Similarity and Compatibility in Fuzzy Set Theory: Assessment and Applications*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag Heidelberg, 2002.
- [CT86] M. R. Civanlar, H. J. Trussel. Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:1–13, 1986.
- [Cza80] B. Czarniawska. *Podejmowanie decyzji*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, 1980.
- [DFMP04] Didier Dubois, Laurent Foulloy, Gilles Mauris, Henri Prade. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities. *Reliable Computing*, 10(4):273–297, 2004.
- [Dic45] L. R. Dice. Measures of the amount of ecologic association between species. *Ecology*, 26(3):297–302, 1945.
- [DLT72] A. De Luca, S. Termini. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*, 20(4):301–312, 1972.
- [DP83] D. Dubois, H. Prade. Unfair coins and necessity measures: Towards a possibilistic interpretation of histograms. *Fuzzy Sets and Systems*, 10(1–3):15–20, 1983.
- [DP87] D. Dubois, H. Prade. The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):279–300, 1987.
- [DP00] D. DuBois, H.M. Prade. *Fundamentals of Fuzzy Sets*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series. Kluwer Academic, 2000.

- [DP10] W. Dong, J. Peng. Two types of fuzzy risk measures with transform functions. *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD), 2010 Seventh International Conference on*, wolumen 3, strony 1090–1094, 2010.
- [DPS93] Didier Dubois, Henri Prade, Sandra Sandri. On possibility/probability transformations. *Proceedings of Fourth IFSA Conference*, strony 103–112. Kluwer Academic Publ, 1993.
- [Ell93] G.H. Elliott. Least squares data fitting using shape preserving piecewise approximations. *Numerical Algorithms*, 5(7):365–371, 1993.
- [Fis09] P.C. Fishburn. *The Foundations of Expected Utility*. Theory and Decision Library. Dordrecht and London: Reidel; Springer reprint of 1st ed. 1982 edition, wydanie 2, 2009.
- [Fra00] J. C. Francis. *Inwestycje. Analiza i zarządzanie*. WIG Press Warszawa, 2000.
- [Geo12] I. Georgescu. *Possibility Theory and the Risk*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2012.
- [GJJ<sup>+</sup>08] A. Gospodarowicz, K. Jajuga, T. Jajuga, E. Kania, W. Ronka-Chmielowiec, P. Rosiński. *Zarządzanie ryzykiem*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008.
- [Gre86] John A Gregory. Shape preserving spline interpolation. *Computer-Aided Design*, 18(1):53–57, 1986.
- [Gri06] R.P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e*. Pearson Education, 2006.
- [Grz06] P. Grzegorzewski. *Wspomaganie decyzji w warunkach niepewności, metody statystyczne dla nieprecyzyjnych danych*. Problemy Współczesnej Nauki: Informatyka. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2006.
- [GY09] X. Gao, C. You. Maximum entropy membership functions for discrete fuzzy variables. *Information Sciences*, 179(14):2353–2361, Czerwiec 2009.
- [HKTT12] T. Hasuike, H. Katagiri, H. Tsubaki, H. Tsuda. Constructing membership function based on fuzzy shannon entropy and human’s interval estimation. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, strony 1–6, 2012.
- [Hua06a] X. Huang. Credibility Based Fuzzy Portfolio Selection. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2006.
- [Hua06b] X. Huang. Fuzzy chance-constrained portfolio selection. *Applied Mathematics and Computation*, 177(2):500–507, 2006.
- [Hua07] X. Huang. Portfolio selection with fuzzy returns. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 18(4):383–390, 2007.
- [Hua08a] X. Huang. Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16:1096–1101, 2008.
- [Hua08b] X. Huang. Mean-semivariance models for fuzzy portfolio selection. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(1):1–8, 2008.
- [Hua08c] X. Huang. Risk curve and fuzzy portfolio selection. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(6):1102–1112, 2008.
- [Hua10a] X. Huang. Minimax mean-variance models for fuzzy portfolio selection. *Soft Computing*, 15(2):251–260, 2010.
- [Hua10b] X. Huang. *Portfolio Analysis: From Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2010.
- [IR00] M. Inuiguchi, J. Ramik. Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 111:3–28, 2000.
- [IS95] M. Inuiguchi, M. Sakawa. Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 86(3):526–536, 1995.
- [IT00] M. Inuiguchi, T. Tanino. Portfolio selection under independent possibilistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:83–92, 2000.
- [Jac12] P. Jaccard. The distribution of the flora in the alpine zone. *New Phytologist*, 11(2):37–50, 1912.
- [Jaj06] K. Jajuga. *Podstawy inwestowania na giełdzie papierów wartościowych*. Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie, 2006.
- [Jaj08] K. Jajuga. *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008.

- [Jaj09] K. Jajuga. *Zarządzanie ryzykiem*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.
- [Kap90] J.N. Kapur. *Maximum Entropy Models In Science And Engineering*. John Willey & Sons, 1990.
- [Kat63] S. Kataoka. A stochastic programming model. *Econometrica*, 31(1/2):181–196, 1963.
- [Kau75] A. Kaufmann. *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. Number 2 serii Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Academic Press, 1975.
- [KB91] D. Kopańska-Bródka. *Metody stochastycznego programowania liniowego i ich praktyczne zastosowanie w badaniach ekonomicznych*. Prace Naukowe - Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego. AE, 1991.
- [KH97] G.J. Klir, D. Harmanec. Types and measures of uncertainty. J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, redaktorzy, *Consensus Under Fuzziness*, wolumen 10 serii *International Series in Intelligent Technologies*, strony 29–51. Springer US, 1997.
- [Kli90] G.J. Klir. A principle of uncertainty and information invariance. *International Journal of General Systems*, 17:249–275, 1990.
- [Kni21] F. H. Knight. *Risk, Uncertainty, and Profit*. Library of Economics and Liberty, 1921.
- [Kot67] P. Kotler. *Marketing management: analysis, planning, and control*. Prentice-Hall, 1967.
- [KY91] H. Konno, H. Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Manage. Sci.*, 37(5):519–531, 1991.
- [KY95] G.J. Klir, B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [LI98] Baoding Liu, Kakuzo Iwamura. Chance constrained programming with fuzzy parameters. *Fuzzy sets and systems*, 94(2):227–237, 1998.
- [Liu02] B. Liu. *Theory and Practice of Uncertain Programming*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag, 2002.
- [Liu04] B. Liu. *Uncertainty Theory: An Introduction to Its Axiomatic Foundations*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2004.
- [Liu06a] B. Liu. A survey of credibility theory. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 5(4):387–408, 2006.
- [Liu06b] Y.-K. Liu. Convergent results about the use of fuzzy simulation in fuzzy optimization problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(2):295–304, 2006.
- [Liu07] B. Liu. *Uncertainty Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 154. Springer London, Limited, 2007.
- [LL02] B. Liu, Y.-K. Liu. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 10(4):445–450, 2002.
- [LL07a] X. Li, B. Liu. Fuzzy cross-entropy and its applications. *Technical Report*, 2007.
- [LL07b] X. Li, B. Liu. Maximum entropy principle for fuzzy variables. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(supp02):43–52, 2007.
- [LLV02] T. León, V. Liern, E. Vercher. Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach. *European Journal of Operational Research*, 139:178–189, 2002.
- [LQK10] X. Li, Z. Qin, S. Kar. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research*, 202(1):239–247, 2010.
- [LQY10] X. Li, Z. Qin, L. Yang. A chance-constrained portfolio selection model with risk constraints. *Applied Mathematics and Computation*, 217(2):949–951, 2010.
- [LS82] G. Loomes, R. Sugden. Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty. *The Economic Journal*, 92(368):805–824, 1982.
- [LSQ12] X. Li, B. Shou, Z. Qin. An expected regret minimization portfolio selection model. *European Journal of Operational Research*, 218(2):484–492, 2012.
- [LWX<sup>+</sup>02] K. K. Lai, S. Y. Wang, J. P. Xu, S. S. Zhu, Y. Fang. A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10:698–704, 2002.
- [Ła01] A. Łachwa. *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*. Problemy Współczesnej Nauki: Informatyka. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2001.
- [Mar52] H. Markowitz. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.

- [MBM07] D.D. Majumder, R. Bhattacharyya, S. Mukherjee. Methods of evaluation and extraction of membership functions—review with a new approach. *Computing: Theory and Applications, 2007. ICCTA '07. International Conference on*, strony 277–281, 2007.
- [MFNW02] A. L. Medaglia, Sh-Ch. Fang, H. L.W. Nuttle, J. R. Wilson. An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions. *European Journal of Operational Research*, 139(1):84–95, 2002.
- [MHS92] M.G. Morgan, M. Henrion, M. Small. *Uncertainty*. Cambridge University Press, 1992.
- [MKK98] Swarup Medasani, Jaeseok Kim, Raghu Krishnapuram. An overview of membership function generation techniques for pattern recognition. *International Journal of Approximate Reasoning*, 19(3–4):391–417, 1998.
- [MS89] T. Murofushi, M. Sugeno. An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 29:201–227, 1989.
- [MS13] Jean-Louis Merrien, Paul Sablonniere. Rational splines for hermite interpolation with shape constraints. *Computer Aided Geometric Design*, 30(3):296–309, 2013.
- [Nah78] S. Nahmias. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(2):97–110, 1978.
- [NB07] G. Nieradka, B. Butkiewicz. A method for automatic membership function estimation based on fuzzy measures. Patricia Melin, Oscar Castillo, LuisT. Aguilar, Janusz Kacprzyk, Witold Pedrycz, redaktorzy, *Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing*, wolumen 4529 serii *Lecture Notes in Computer Science*, strony 451–460. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Noc06] D. Nocetti. Markowitz meets Kahneman: Portfolio selection under divided attention. *Finance Research Letters*, 3:106–113, 2006.
- [Nos06] J.R. Nosfinger. *Psychologia inwestowania*. Helion, 2006.
- [NS72] A. Newell, H.A. Simon. *Human problem solving*. Prentice-Hall, 1972.
- [Ost02] A. Ostrowski. *Niepewność i nieprecyzyjność w sytuacjach decyzyjnych na przykładzie procesów inwestycyjnych*. Studia i Monografie - Uniwersytet Opolski. Wydaw. UO, 2002.
- [Ost03] E. Ostrowska. *Inwestycje finansowe*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 2003.
- [Ped08] W. Pedrycz. Semantics and perception of fuzzy sets and fuzzy mappings. J. Fulcher, L.C. Jain, redaktorzy, *Computational Intelligence: A Compendium*, wolumen 115 serii *Studies in Computational Intelligence*, strony 597–639. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [Pen08] J. Peng. Measuring Fuzzy Risk by Credibilistic Value at Risk. *International Conference on Innovative Computing, Information and Control*, 2008.
- [Pen09] J. Peng. Average value at risk in fuzzy risk analysis. B. Cao, T.-F. Li, C.-Y. Zhang, redaktorzy, *Fuzzy Information and Engineering Volume 2*, wolumen 62 serii *Advances in Intelligent and Soft Computing*, strony 1303–1313. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [PEP11] W. Pedrycz, P. Ekel, R. Parreiras. *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Pia11] K. Piasecki. *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, 2011.
- [PL04] J. Peng, B. Liu. Some properties of optimistic and pessimistic values of fuzzy variables. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, wolumen 2, 2004.
- [PLLY98] J. S. Park, B. H. Lim, Y. Lee, M. R. Young. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Manage. Sci.*, 44(5):673–683, 1998.
- [PMT05] J. Peng, H.M.K. Mok, W.-M. Tse. Credibility programming approach to fuzzy portfolio selection problems. *Machine Learning and Cybernetics, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on*, wolumen 4, strony 2523–2528 Vol. 4, Aug 2005.
- [QLJ09] Z. Qin, X. Li, X. Ji. Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1):139–149, 2009.
- [Ra195] Dan Ralescu. Fuzzy probabilities and their applications to statistical inference. Bernadette Bouchon-Meunier, RonaldR. Yager, LotfiA. Zadeh, redaktorzy, *Advances in Intelligent Computing — IPMU '94*, wolumen 945 serii *Lecture Notes in Computer Science*, strony 217–222. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [Ram98] S. Ramaswamy. Portfolio selection using fuzzy decision theory. Working Paper BIS No. 59, Bank for International Settlements, Monetary and Economic Department Basle, Switzerland, 1998.
- [Roy52] A. D. Roy. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20(3):431–449, 1952.

- [Rut13] A. Rutkowska. Krzywa akceptowalności strat – krzywa ryzyka, jako alternatywne podejście do modelowania ograniczania ryzyka w problemie optymalizacji portfela akcji. *Zastosowanie metod ilościowych w zarządzaniu ryzykiem w działalności inwestycyjnej*, 2013.
- [Sha64] W. F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442, 1964.
- [SLML10] Z. Shang, H. Liu, X. Ma, Y. Liu. Fuzzy Value-at-Risk and Fuzzy Conditional Value-at-Risk: Two risk measures under fuzzy uncertainty. *IEEE Symposium on Web Society*, 2010.
- [Smi89] M. Smithson. *Ignorance and uncertainty: emerging paradigms*. Cognitive science. Springer-Verlag, 1989.
- [Tes55] L.G. Tesler. Safety first and hedging. *Review of Economic Studies*, 23(1):1–16, 1955.
- [TG99] H. Tanaka, P. Guo. Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *European Journal of Operational Research*, 114:115–126, 1999.
- [TK79] A. Tversky, D. Kahneman. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–292, 1979.
- [Tve77] A. Tversky. Features of similarity. *Psychological Review*, 84:327–352, 1977.
- [UR00] S. Uryasev, R. T. Rockafellar. Optimization of Conditional Value-At-Risk. *Journal of Risk*, 2000.
- [Wat97] J. Watada. Fuzzy portfolio selection and its application to decision making. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 13(4):219–248, 1997.
- [Wie10] M. J. Wierman. *An Introduction to the Mathematics of Uncertainty including: Set Theory, Logic, Probability, Fuzzy Sets, Rough Sets, and Evidence Theory*. Creighton University, 2010.
- [WWJ11] B. Wang, Sh. Wang, Watada J. Fuzzy-portfolio-selection models with value-at-risk. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19:758–769, 2011.
- [WWP09] S. Wang, J. Watada, W. Pedrycz. Value-at-Risk-Based Two-Stage Fuzzy Facility Location Problems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 5:465–482, 2009.
- [XS10] Zhang. X., W. Sun. Mean-cvar models for fuzzy portfolio selection. *Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA), 2010 International Conference on*, wolumen 1, strony 928–930, 2010.
- [Zad65] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [Zad75] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - ii. *Inf. Sci.*, 8(4):301–357, 1975.
- [Zad78] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1):3–28, 1978.
- [Zad02] L.A. Zadeh. Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 105:233–264, 2002.
- [ZS10] X. Zhang, W. Sun. Mean-CVaR Models for Fuzzy Portfolio Selection. *International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application*, 2010.

## Spis rysunków

1.1	Klasyfikacja niepewności według Smithsona . . . . .	12
1.2	Klasyfikacja niepewności według Klira . . . . .	13
1.3	Klasyfikacja niepewności — synteza podejść . . . . .	14
1.4	Zależności pomiędzy miarami rozmytymi . . . . .	20
2.1	Miary możliwości, konieczności i wiarygodności . . . . .	26
2.2	Różne kształty funkcji przynależności . . . . .	30
2.3	Miary wiarygodności zmiennej rozmytej . . . . .	31
2.4	Funkcje przynależności i wiarygodności zmiennej rozmytej z przykładu 1. . . . .	34
2.5	Metody generowania funkcji przynależności. . . . .	43
2.6	Tryb pionowy (a) oraz poziomy (b) szacowania zbioru rozmytego . . . . .	45
2.7	Histogram i wyznaczone funkcje przynależności. . . . .	52



2.8	Różne metody interpolacji . . . . .	54
3.1	Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wariancja. . . . .	58
3.2	Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-semiwariancja. . . . .	60
3.3	Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wariancja-skośność. . . . .	61
3.4	Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-entropia. . . . .	63
3.5	Obszar dopuszczalny rozwiązań zadania średnia-wartość zagrożona (kolor czerwony) oraz średnia-warunkowa wartość zagrożona (kolor zielony). . . . .	67
3.6	Krzywa ryzyka zmiennej trójkątnej $\xi = (-6; -0, 5; 3)$ , $r_f = 1$ . . . . .	69
3.7	Przykładowa krzywa akceptowalności straty . . . . .	70
3.8	Funkcje oczekiwań inwestora . . . . .	77
3.9	Funkcje wiarygodności portfela i oczekiwań inwestora (kolumna $a$ ) oraz odpowiadające im poziomy satysfakcji w zależności od parametru $\alpha$ (kolumna $b$ ) . . . . .	78
3.10	Funkcje wiarygodności aktywów oraz funkcja oczekiwań inwestora. . . . .	79
3.11	Zależność wariancji i wartości oczekiwanej od satysfakcji inwestora. . . . .	80
4.1	Schemat badania . . . . .	83
4.2	Badane kształty na przykładzie symetrycznych zmiennych rozmytych . . . . .	87
4.3	Notowania WIG20 w okresie 01.07.2008-01.07.2013 . . . . .	91
4.4	Miesięczne okresy badania . . . . .	94
4.5	Kwartalne okresy badania . . . . .	95
4.6	Półroczne okresy badania . . . . .	95
4.7	Roczne okresy badania . . . . .	96
5.1	Struktura wykształcenia respondentów . . . . .	103
5.2	Struktura wieku respondentów . . . . .	104
5.3	Doświadczenie inwestorów . . . . .	104
5.4	Częstotliwość wykorzystania intuicji przy wyborze portfela . . . . .	105
5.5	Częstotliwość wykorzystania opinii ekspertów przy wyborze portfela . . . . .	105
5.6	Częstotliwość wykorzystania analizy fundamentalnej przy wyborze portfela . . . . .	106
5.7	Częstotliwość wykorzystania analizy technicznej przy wyborze portfela . . . . .	106
5.8	Częstotliwość wykorzystania analizy portfelowej przy wyborze portfela . . . . .	107
5.9	Wykorzystanie analizy portfelowej względem wykształcenia. . . . .	107
5.10	Wykorzystanie analizy portfelowej skategoryzowane liczbą lat funkcjonowania na rynku w roli inwestora . . . . .	108
5.11	Rozkład dwuwymiarowy: częstotliwość obliczania oczekiwanej stopy zwrotu $\times$ sposoby szacowania ryzyka. . . . .	109
5.12	Ocena przydatności informacji: <i>Średnia stopa zwrotu wynosi 10%, a</i> . . . . .	109
5.13	Wyniki z inwestycji porównuję z: . . . . .	111
5.14	Ocena skłonności do ryzyka . . . . .	112
5.15	Rozkład dwuwymiarowy: skłonność do ryzyka a liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor . . . . .	112
5.16	Liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor, kategorie względem skłonności do ryzyka . . . . .	113
5.17	Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów zadań EV oraz VE przy założeniu symetryczności stóp zwrotu. . . . .	127
5.18	Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów zadań EH oraz HE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns) . . . . .	127
5.19	Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach EVaR oraz VaRE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns) . . . . .	128
5.20	Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach ECVaR oraz CVaRE w przypadku symetrycznym (s) i niesymetrycznym (ns) . . . . .	129
5.21	Odległość cosinusowa pomiędzy wektorami rozwiązań dla różnych kształtów w zadaniach maksymalizacji satysfakcji . . . . .	129
5.22	Histogramy wyznaczone dla ACP w różnych okresach. . . . .	131
5.23	Dyskretne funkcje przynależności wyznaczone dla ACP. . . . .	131
5.24	Ciągłe funkcje przynależności wyznaczone dla ACP. . . . .	132
5.25	Kurs indeksu WIG20 od 2008-11-03 do 2008-12-16 (okres testowy A1) . . . . .	135
5.26	Wyniki portfeli od 2008-11-03 do 2008-12-16 (okres testowy A1) . . . . .	135
5.27	Kurs indeksu WIG20 od 2009-07-27 do 2009-09-07 (okres testowy A2) . . . . .	136
5.28	Stopy zwrotu portfeli od 2009-07-27 do 2009-09-07 (okres testowy A2) . . . . .	137
5.29	Kurs indeksu WIG20 od 2010-04-13 do 2010-05-26, (okres testowy A3) . . . . .	138
5.30	Stopy zwrotu portfeli od 2010-04-13 do 2010-05-26, (okres testowy A3) . . . . .	138
5.31	Kurs indeksu WIG20 od 2010-12-28 do 2011-02-09 (okres testowy A4) . . . . .	139
5.32	Stopy zwrotu portfeli od 2010-12-28 do 2011-02-09 (okres testowy A4) . . . . .	139
5.33	Kurs indeksu WIG20 od 2011-09-14 do 2011-10-26 (okres testowy A5) . . . . .	140
5.34	Stopy zwrotu portfeli od 2011-09-14 do 2011-10-26 (okres testowy A5) . . . . .	141
5.35	Kurs indeksu WIG20 od 2012-06-04 do 2012-07-17 (okres testowy A6) . . . . .	142
5.36	Stopy zwrotu portfeli od 2012-06-04 do 2012-07-17 (okres testowy A6) . . . . .	142
5.37	Kurs indeksu WIG20 od 2013-02-21 do 2013-04-08 (okres testowy A7) . . . . .	143
5.38	Stopy zwrotu portfeli od 2013-02-21 do 2013-04-08 (okres testowy A7) . . . . .	143
5.39	Kurs indeksu WIG20 od 2009-03-17 do 2009-07-27 (okres testowy B1) . . . . .	145
5.40	Stopy zwrotu portfeli od 2009-03-17 do 2009-07-27 (okres testowy B1) . . . . .	145
5.41	Kurs indeksu WIG20 od 2010-02-26 do 2010-07-08 (okres testowy B2) . . . . .	146
5.42	Stopy zwrotu portfeli od 2010-02-26 do 2010-07-08 (okres testowy B2) . . . . .	146
5.43	Kurs indeksu WIG20 od 2011-02-09 do 2011-06-20 (okres testowy B3) . . . . .	147
5.44	Stopy zwrotu portfeli od 2011-02-09 do 2011-06-20 (okres testowy B3) . . . . .	147
5.45	Kurs indeksu WIG20 od 2012-01-24 do 2012-06-04 (okres testowy B4) . . . . .	148

5.46	Stopy zwrotu portfeli od 2012-01-24 do 2012-06-04 (okres testowy B4)	149
5.47	Kurs indeksu WIG20 od 2013-01-10 do 2013-05-23 (okres testowy B5)	149
5.48	Stopy zwrotu od 2013-01-10 do 2013-05-23 (okres testowy B5)	150
5.49	Kurs indeksu WIG20 od 2009-12-01 do 2010-08-19 (okres testowy C1)	151
5.50	Stopy zwrotu portfeli od 2009-12-01 do 2010-08-19 (okres testowy C1)	152
5.51	Kurs indeksu WIG20 od 2010-08-19 do 2011-05-09 (okres testowy C2)	153
5.52	Stopy zwrotu portfeli od 2010-08-19 do 2011-05-09 (okres testowy C2)	153
5.53	Kurs indeksu WIG20 od 2011-05-09 do 2012-01-24 (okres testowy C3)	154
5.55	Kurs indeksu WIG20 od 2012-01-24 do 2012-10-10 (okres testowy C4)	154
5.54	Stopy zwrotu portfeli od 2011-05-09 do 2012-01-24 (okres testowy C3)	155
5.56	Stopy zwrotu portfeli od 2012-01-24 do 2012-10-10 (okres testowy C4)	155
5.57	Kurs indeksu WIG20 od 2012-10-10 do 2013-06-28 (okres testowy C5)	156
5.58	Stopy zwrotu portfeli od 2012-10-10 do 2013-06-28 (okres testowy C5)	157
5.59	Kurs indeksu WIG20 od 2010-08-19 do 2012-01-24 (okres testowy D1)	159
5.60	Stopy zwrotu portfeli od 2010-08-19 do 2012-01-24 (okres testowy D1)	159
5.61	Kurs indeksu WIG20 od 2010-12-28 do 2012-06-04 (okres testowy D2)	160
5.62	Stopy zwrotu portfeli od 2010-12-28 do 2012-06-04 (okres testowy D2)	160
5.63	Kurs indeksu WIG20 od 2011-05-09 do 2012-10-10 (okres testowy D3)	161
5.64	Stopy zwrotu portfeli od 2011-05-09 do 2012-10-10 (okres testowy D3)	161
5.65	Kurs indeksu WIG20 od 2011-09-14 do 2013-02-21 (okres testowy D4)	162
5.66	Stopy zwrotu portfeli od 2011-09-14 do 2013-02-21 (okres testowy D4)	162
5.67	Kurs indeksu WIG20 od 2011-10-26 do 2013-06-28 (okres testowy D5)	163
5.68	Stopy zwrotu portfeli od 2011-10-26 do 2013-06-28 (okres testowy D5)	163

## Spis tablic

1.1	Porównanie różnych podejść do niepewności stopy zwrotu	21
2.1	Wartości miar ryzyka dla trójkątej zmiennej rozmytej $\xi$	40
2.2	Funkcje przynależności	52
3.1	Zestawienie modeli i wykorzystywanych w nich miar niepewności	56
3.2	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i wariancja	58
3.3	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i semiwariancja	59
3.4	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, wariancja i skośność	61
3.5	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana i entropia	63
3.6	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, zagrożona oraz warunkowa wartość zagrożona.	67
3.7	Rozmyte stopy zwrotów.	79
3.8	Rozwiązanie	80
3.9	Rozmyte stopy zwrotu, ich wartość oczekiwana, wariancja, poziomy satysfakcji.	80
4.1	Podstawowe miary dla różnych kształtów	87
4.2	Historyczne wskaźniki w latach 2008-2012	92
4.5	Okresy badania	93
4.3	Spółki należące do indeksu WIG20 na przestrzeni 07.2008-07.2013	100
4.4	Skład WIG20 dla różnych podokresów okresu badania	101
5.1	Wyniki analizy dla symetrycznych stóp zwrotu	125
5.2	Wartość semiwariancji dla różnych kształtów zmiennej rozmytej	126
5.3	Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu A	134
5.4	Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu B	144
5.5	Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu C	150
5.6	Stopy zwrotu z okresów testowych portfeli wyznaczonych w badaniu D	158
5.8	Ocena skuteczności poszczególnych zadań optymalizacji	165
5.7	Wyniki zadań poszczególnych kryteriów oceny	165
C.1	[Pyt.1] Kryteria wyboru portfela akcji	175
C.2	[Pyt.2] Czy przed inwestycją oblicza lub szacuje Pan/Pani oczekiwaną stopę zwrotu?	177
C.3	[Pyt.3] do szacowania/oceny ryzyka portfela wykorzystuje Pan/Pani	177
C.4	[Pyt.4] Oczekiwana przez inwestora stopa zwrotu jest	178
C.5	[Pyt.5] Ocena przydatności informacji	178
C.6	[Pyt.6] Sposób określania oczekiwanej stopy zwrotu	179
C.7	[Pyt.7] Zmiana poziomu zadowolenia w zależności od zmiany stopy zwrotu	180
C.8	[Pyt.8] Porównywanie wyników inwestycji	182
C.9	[Pyt.9] Podejście do ryzyka	182

C.10	[Pyt.10] Poziom zadowolenia, w przypadku następujących stóp zwrotu po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji. . . . .	182
C.11	[Pyt.11] Poziom akceptacji następujących spadków zainwestowanego kapitału po upływie 0,5 roku od rozpoczęcia inwestycji. . . . .	184
C.12	[Pyt.12] Skłonność do ryzyka . . . . .	186
C.13	[Pyt.13] Wybór portfela przy założeniu, że jego początkowa wartość wynosi 10 tys. zł, a wartość po roku mieści się w przedziale: . . . . .	187
C.14	[Pyt.14] Wiek . . . . .	187
C.15	[Pyt.15] Wykształcenie . . . . .	188
C.16	[Pyt.16] Liczba lat funkcjonowania na rynku jako inwestor . . . . .	189
C.17	[Pyt.17] Płeć . . . . .	189
C.18	Tabela krzyżowa: wiek $\times$ wykształcenie . . . . .	190
C.19	Tabela krzyżowa: częstotliwość wykorzystania analizy portfelowej $\times$ doświadczenie na rynku . . . . .	191
C.20	Tabela krzyżowa: częstotliwość szacowania stopy zwrotu $\times$ sposoby szacowania ryzyka . . . . .	192
C.21	Testy $\chi^2$ dla zależności częstotliwości szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, a sposoby szacowania ryzyka . . . . .	193
C.22	Tabela krzyżowa skłonność do ryzyka $\times$ doświadczenie na rynku w roli inwestora . . . . .	194
C.23	Tabela krzyżowa skłonność do ryzyka $\times$ wykształcenie . . . . .	195
C.24	Statystyki $\chi^2$ dla skłonności do ryzyka i wykształcenia . . . . .	196
C.25	Tabela krzyżowa: skłonność do ryzyka $\times$ wybrany portfel w pyt.13 . . . . .	197
C.26	Tabela krzyżowa: wiek $\times$ doświadczenie inwestycyjne na rynku . . . . .	198
C.27	Tabela krzyżowa: sposoby oceny wyników $\times$ sposób wyznaczania oczekiwań . . . . .	199
D.1	Statystyki odległości euklidesowej ( $d$ ) oraz cosinusowej ( $d \cos$ ) pomiędzy wektorami rozwiązań dla kształtu trójkątnego i innych kształtów . . . . .	200
E.1	Różnice dyskretnej funkcji przynależności . . . . .	202
E.2	Rozmyte stopy zwrotu wyznaczone metodami $BP$ , $K$ i $ME$ . . . . .	211
E.3	Odległości pomiędzy wektorami parametrów ciągłych funkcji przynależności . . . . .	220
F.1	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A1 . . . . .	230
F.2	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A2 . . . . .	231
F.3	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A3 . . . . .	232
F.4	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A4 . . . . .	233
F.5	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A5 . . . . .	234
F.6	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A6 . . . . .	235
F.7	Skład portfeli wyznaczonych w okresie A7 . . . . .	236
F.8	Skład portfeli wyznaczonych w okresie B1 . . . . .	237
F.9	Skład portfeli wyznaczonych w okresie B2 . . . . .	238
F.10	Skład portfeli wyznaczonych w okresie B3 . . . . .	239
F.11	Skład portfeli wyznaczonych w okresie B4 . . . . .	240
F.12	Skład portfeli wyznaczonych w okresie B5 . . . . .	241
F.13	Skład portfeli wyznaczonych w okresie C1 . . . . .	242
F.14	Skład portfeli wyznaczonych w okresie C2 . . . . .	243
F.15	Skład portfeli wyznaczonych w okresie C3 . . . . .	244
F.16	Skład portfeli wyznaczonych w okresie C4 . . . . .	245
F.17	Skład portfeli wyznaczonych w okresie C5 . . . . .	246
F.18	Skład portfeli wyznaczonych w okresie D1 . . . . .	247
F.19	Skład portfeli wyznaczonych w okresie D2 . . . . .	248
F.20	Skład portfeli wyznaczonych w okresie D3 . . . . .	249
F.21	Skład portfeli wyznaczonych w okresie D4 . . . . .	250
F.22	Skład portfeli wyznaczonych w okresie D5 . . . . .	251