UNIWERSYTET EKONOMICZNY W POZNANIU
WYDZIAŁ INFORMATYKI I GOSPODARKI ELEKTRONICZNEJ

Karolina Koziorowska

Warunkowa wartość zagrożona jako narzędzie do zarządzania ryzykiem inwestycji finansowych

rozprawa doktorska
przygotowana pod kierunkiem
dr hab. Małgorzaty Doman, prof. nadzw. UEP

Poznań 2010

Spis treści

Wstęp

Inwestycję można zdefiniować jako bieżące zaangażowanie środków pieniężnych, które jest podejmowane w takim celu, aby w przyszłości osiągnąć zyski. W niektórych przypadkach, na przykład jeżeli inwestujemy oszczędności w obligacje, wiemy jaką kwotę pieniędzy otrzymamy w przyszłości. Jednakże w większości sytuacji nie znamy jej wartości[1]. Wynikiem niepewności z tym związanej jest ryzyko inwestycji.

Wydaje się, że intuicję pojęcia ryzyka posiada każdy człowiek. Jednak nie istnieje jednoznaczna, powszechnie uznawana definicja tego pojęcia. Nadal w różnych obszarach działalności człowieka definiuje się je różnie. Kiedy myśli się o ryzyku związanym z inwestowaniem na rynkach finansowych zwykle rozumie się je jako czynnik powodujący negatywne skutki finansowe, na które narażony jest inwestor w prowadzonej działalności inwestycyjnej. Przez długi okres czasu ocena ryzyka była kwestią wyczucia. Było to związane z tym, że ryzyka nie wyrażano za pomocą liczb. Inwestorzy agresywni pragnęli osiągać jak największe zyski, a osoby o słabych nerwach lokowały pieniądze na rachunkach oszczędnościowych bądź w renomowane obligacje długoterminowe.

Przełomem w dziedzinie zarządzania ryzykiem okazał się rok 1952, kiedy to Harry Markowitz opublikował artykuł *Portfolio Selection*[2]. Jednakże jego przełomowy wkład w teorię zarządzania portfelem nie od razu został doceniony. W tamtych czasach nie poświęcano tej pracy specjalnej uwagi. Akcje nadal oceniano tylko na podstawie zysku lub straty, a nie brano pod uwagę ryzyka. Musiało minąć 20 lat, aby inwestorzy zaczęli uwzględniać przy ocenie inwestycji również ten czynnik.

W zaproponowanym przez Markowitza podejściu, kluczowym etapem procesu inwestowania stała się dywersyfikacja mająca na celu redukcję ryzyka. Markowitz zauważył, że większość inwestorów woli wybierać niższą oczekiwaną stopę zwrotu, jaką może przynieść zdywersyfikowany portfel inwestycyjny, jeżeli powoduje to spadek ryzyka.

W teorii Markowitza jako narzędzia kontrolujące jakość portfela wykorzystuje się oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję. Jednakże opieranie swoich wyników tylko na tych dwóch liczbach jest słuszne jedynie, gdy stopy zwrotu podlegają rozkładowi normalnemu, którego pełny opis zapewnia znajomość momentów pierwszego i drugiego rzędu. Na współczesnych rynkach finansowych, gdy rozważa się notowania dzienne, taka sytuacja

[1] Luenberger D. G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003
[2] Markowitz H. M., *Portfolio selection*, Journal of Finance, Vol. 7, No 1, 1952

praktycznie się nie zdarza. Zawsze pojawiają się obserwacje nietypowe, a rozkład na ogół nie jest symetryczny. Dlatego słusznym wydaje się poszukiwanie innych, nowocześniejszych metod, które byłyby lepiej dopasowane do realiów rynków finansowych.

Wyraźną jakościową zmianą w praktyce ilościowego zarządzania ryzykiem było wprowadzenie nowego narzędzia – wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR). Koncepcja wartości zagrożonej pojawiła się pod koniec lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Jednakże popularność swoją zawdzięcza bankowi inwestycyjnemu J. P. Morgan, który w październiku 1994 r. wprowadził oparty na VaR model *RiskMetrics*[3] służący do zarządzania ryzykiem. W jeszcze większym stopniu na zakres stosowania VaR wpłynęły zalecenia Bazylejskiego Komitetu Nadzoru Bankowego zawarte w umowach Basel I i Basel II. Dzięki pozornej prostocie definicji wartość zagrożona jest miarą łatwą w interpretacji, dlatego może być stosowana nawet przez inwestorów bez większego przygotowania od strony metod ilościowych, pod warunkiem, że dysponują oni odpowiednim oprogramowaniem. Problem szacowania ryzyka sprowadza się tu bowiem do wyliczenia pojedynczej liczby reprezentującej wielkość straty, na którą z zadanym prawdopodobieństwem narażony jest portfel inwestycji. Zatem wartość zagrożona wskazuje jaka część inwestycji jest narażona na stratę z zadanym prawdopodobieństwem.

Idealna miara ryzyka nie istnieje, nie jest więc nią również VaR. Podstawowy minus tego podejścia wiąże się z tym, że metoda wyliczenia wartości zagrożonej nie jest jednoznacznie określona, gdyż w danym przedziale czasowym należy wyznaczyć kwantyl nieznanego na ogół rozkładu stopy zwrotu z instrumentu finansowego. Ponadto nie ma jednolitej metody wyznaczania tej miary ryzyka. Przy wyznaczaniu wartości zagrożonej różnymi metodami możemy uzyskać niejednakowe oszacowania wielkości przypuszczalnej straty. W związku z tym jeżeli niedoszacujemy tę miarę, to możemy narazić się na utratę płynności. Z drugiej strony przeszacowanie uniemożliwia nam wykorzystanie w optymalny sposób całkowitych środków przeznaczonych na inwestycje.

W przypadku, gdy rozważamy VaR nie dla jednego instrumentu, a dla portfela, pojawiają się nowe trudności. Jeżeli rozkłady stóp zwrotu ze składników portfela nie są eliptyczne, to wartość zagrożona portfela inwestycyjnego może być wyższa niż suma wartości zagrożonych jego składników. To oczywiście jest sprzeczne z intuicją związaną z ryzykiem i dywersyfikacją. Z praktycznego, jak i teoretycznego, punktu widzenia, sytuacja taka nie powinna mieć miejsca. Dywersyfikację stosuje się po to, aby zmniejszyć ryzyko

---

[3] RiskMetrics™ Technical Document, 1996, dostępne na http://www.riskmetrics.com/, 20.07.2009

portfela. W przypadku wyznaczenia łącznego ryzyka za pomocą wartości zagrożonej, może się zdarzyć, że zamiast zmniejszenia wartości ryzyka na skutek dywersyfikacji, nastąpi jego zwiększenie.

Dobra miara ryzyka powinna być funkcją portfela określoną w ten sposób, aby spełniać pewne intuicyjne własności. Miara ryzyka zdywersyfikowanego portfela powinna być nie większa od sumy ryzyka poszczególnych składników portfela. Zatem dywersyfikacja nie powinna zwiększać ryzyka portfela. Ponadto dołączenie do portfela instrumentów wolnych od ryzyka również powinno zmniejszać łączne ryzyko portfela. Co więcej, proporcjonalna zmiana wartości pozycji powinna powodować analogiczną zmianę miary ryzyka. Oprócz tego pozycja, dla której zmiana wartości jest zawsze nie mniej korzystna niż zmiana wartości drugiej pozycji, nie może być uznawana za obarczoną większym ryzykiem. Jak wspomniano wcześniej ze spełnieniem tych prawidłowości przez VaR mogą być, w niektórych sytuacjach, problemy. Próbę stworzenia miary ryzyka spełniającej wymienione postulaty podjęli w 2000 r. Rockafellar i Uryasev konstruując pojęcie warunkowej wartości zagrożonej[4] (*Conditional Value at Risk* – CVaR).

Warunkową wartością zagrożoną przy ustalonym poziomie ufności nazywa się wartość oczekiwaną straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną odpowiadającą temu poziomowi ufności. CVaR występuje w literaturze także pod nazwą „oczekiwany niedobór” (*expected shortfall*). CVaR stanowi przykład koherentnej miary ryzyka, czyli miary ryzyka spełniającej pewien zbiór aksjomatów naturalnych z punktu widzenia intuicji pojęcia ryzyka i zarządzania ryzykiem. Aksjomaty takie zostały sformułowane przez Artznera, Delbaena, Ebera i Heatha w ich pracy[5] z 1999 roku. Sprowadzają się one do spełnienia czterech następujących własności:

- subaddytywność – ryzyko sumy zmiany wartości dwóch pozycji jest niewiększe od sumy ryzyka zmiany każdej pozycji,
- monotoniczność – jeżeli zmiana wartości pozycji jest zawsze nie mniej korzystna aniżeli zmiana wartości drugiej pozycji, to nie może być ona obarczona większym ryzykiem,
- dodatnia jednorodność – proporcjonalna zmiana wartości pozycji powoduje identyczną zmianę wartości ryzyka,

[4] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 2000

[5] Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. , Heath D. , *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, Vol. 2, 1999

- niezmienniczość – jeżeli inwestujemy w instrument wolny od ryzyka, to nie zwiększa łącznej wartości ryzyka.

W przeciwieństwie do wartości zagrożonej, warunkowa wartość zagrożona jest, jak dotychczas, prawie nieznana w praktyce rynków finansowych, ale zdobywa coraz większe zaufanie w ubezpieczeniach oraz przy szacowaniu ryzyka kredytowego Andersson i in[6]. Twórcy oraz liczni entuzjaści tego pojęcia rekrutujący się przede wszystkim spośród matematyków pracujących w obszarze finansów z przekonaniem głoszą jednak tezę, że przyszłość ilościowego zarządzania ryzykiem jest związana ze stosowaniem CVaR w miejsce VaR. O ile jednak teoretyczne analizy związane z pojęciem CVaR i rozmaitymi opartymi na nim modelami są bardzo liczne, to w niezwykle obszernej literaturze światowej poświęconej ilościowemu zarządzaniu ryzykiem brak jest dokładniejszych analiz empirycznych poświęconych stosowaniu CVaR w praktyce zarządzania portfelami inwestycji. Niniejsza rozprawa podejmuje próbę wypełnienia tej luki poprzez badania dotyczące skuteczności stosowania CVaR przy zarządzaniu ryzykiem zróżnicowanych portfeli inwestycyjnych.

Celem pracy jest zatem ocena skuteczności CVaR jako narzędzia zarządzania ryzykiem. Cel ten zostanie zrealizowany przez porównanie zyskowności i ryzyka portfeli optymalizowanych za pomocą kryterium minimalizacji CVaR z portfelami uzyskanymi przez rozwiązywanie innego typu zadań optymalizacji portfela stosowanych w praktyce inwestowania lub opisanych w pracach teoretycznych.

Główna hipoteza badawcza pracy jest następująca: warunkowa wartość zagrożona jest skutecznym narzędziem do zarządzania ryzykiem portfela aktywów finansowych.

Weryfikacja hipotezy dokonana zostanie za pomocą analizy wartości portfeli aktywów finansowych, których składy uzyskano w wyniku rozwiązania odpowiednich zadań optymalizacyjnych. W związku z tym analizowany jest zysk inwestora z uwzględnieniem rentowności portfela oraz jego ryzyka.

W szczególności w pracy poszukujemy odpowiedzi na następujące pytania:

- czy warunkowa wartość zagrożona, jako miara ryzyka może być użyteczna na rynkach finansowych?
- czy metoda optymalizacji portfela oparta na warunkowej wartości zagrożonej daje lepsze wyniki niż klasyczna metoda Markowitza („lepsze” oznacza tu dające większą wartość portfela, na koniec okresu testowego)?

[6] Andersson F., Mausser H., Rosen D., Uryasev S., *Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion,* Springer-Verlag 2000 (dostępne http://www.gloriamundi.org)

- czy metoda warunkowej wartości zagrożonej daje lepsze wyniki niż metody średniego bezwzględnego odchylenia (MAD) i „minimax”?
- czy warunkowa wartość zagrożona jest skutecznym narzędziem do zarządzania ryzykiem portfela?
- jak stosowanie różnych metod optymalizacji portfela wpływa na zyski inwestora?

Praca ma charakter zarówno teoretyczny jak i empiryczny. Rozważania teoretyczne dotyczą podstawowych pojęć związanych z ryzykiem i zarządzaniem ryzykiem inwestycji oraz wykorzystaniem różnych metod optymalizacji do zarządzania ryzykiem portfela aktywów finansowych. W części empirycznej wykorzystując rzeczywiste dane rynkowe, dokonano porównań różnych metod optymalizacji portfela z uwzględnieniem ich rentowności oraz ryzykowności. Ponadto oszacowano ryzyko za pomocą wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej oraz wyznaczono odpowiadające tym miarom ryzyka zbiory portfeli efektywnych.

Jak wspomniano wcześniej, jest to pierwsze tego typu badanie empiryczne (obszerne i na rzeczywistych, zróżnicowanych danych) poświęcone stosowaniu warunkowej wartości zagrożonej jako narzędzia zarządzania ryzykiem portfela. Ponadto wkładem własnym autorki jest zebranie, uporządkowanie i przedstawienie teorii dotyczącej stosowania warunkowej wartości zagrożonej w optymalizacji portfela. Znaczenie podjętego tematu podnosi fakt, że w literaturze polskiej prace dotyczące pojęcia CVaR są bardzo nieliczne.

Badanie przeprowadzono na danych pochodzących z dwóch okresów, różniących się koniunkturą na giełdzie. Pierwszy okres próby, czyli rok 2006 przypada na okres hossy na giełdzie, natomiast drugi okres próby, czyli rok 2008 przypada na okres bessy na giełdzie. W ten sposób przeprowadzono porównanie skuteczności rozważanych metod optymalizacji portfela w różnych warunkach rynkowych. Badanie przeprowadzono na portfelach zawierających zróżnicowane instrumenty finansowe. W skład portfeli wchodzą akcje spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, waluty oraz surowce mineralne. Dane dotyczące notowań uzyskano za pośrednictwem serwisu internetowego stooq.pl. Natomiast obliczeń dokonano wykorzystując aplikację SOLVER Excela oraz programu napisanego przez Justynę Siwińską z Katedry Ekonomii Matematycznej na Uniwersytecie Ekonomicznym w Poznaniu. Program ten jest dostępny pod adresem: http://truesoft.dyndns.org/PortfolioSimulatorService/.

Podstawowym źródłem wiedzy o warunkowej wartości zagrożonej oraz o jej zastosowaniu w zarządzaniu ryzykiem finansowym jest dostępna literatura przedmiotu, w zasadzie wyłącznie literatura anglojęzyczna.

Układ pracy jest następujący. Rozdział pierwszy poświęcony jest ogólnym zagadnieniom związanym z zarządzaniem ryzykiem finansowym. Omówione jest tutaj pojęcie ryzyka i proces zarządzania ryzykiem. Odrębnie rozpatrzono zarządzanie ryzykiem w kontekście alokacji środków. Szczególną uwagę poświęcono wszelkim regulacjom prawnym (krajowym i zagranicznym) dotyczącym zarządzania ryzykiem.

Rozdział drugi dotyczy wartości zagrożonej. Wprowadzona w nim została definicja wartości zagrożonej oraz metody jej estymacji. Opisano szczegółowo metody wariancji – kowariancji, symulacji historycznej i symulacji Monte Carlo. Ponadto zaprezentowano metodologię *RiskMetrics*, wprowadzoną w 1994 r. przez J.P. Morgan. Na zakończenie rozdziału opisano zastosowanie wartości zagrożonej.

Rozdział trzeci opisuje kluczowe pojęcie rozprawy – warunkową wartość zagrożoną. Na wstępie zdefiniowano koherentną miarę ryzyka. Następnie wprowadzono definicję warunkowej wartości zagrożonej oraz przeanalizowano to pojęcie rozważając rożne rozkłady stóp zwrotu. Przedstawiono również zastosowania warunkowej wartości zagrożonej.

Rozdział czwarty przedstawia różne metody optymalizacji portfela aktywów. Wprowadzono podstawową terminologię związaną z optymalizacją i dywersyfikacją. Opisane zostały następujące zadania optymalizacji portfela:

- optymalizacja portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej
- metoda Markowitza oparta na minimalizacji wariancji
- metoda „minimax" optymalizacji portfela
- metoda średniego bezwzględnego odchylenia (*Mean Absolute Deviation* – MAD)
- metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danej warunkowej wartości zagrożonej
- metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danej wariancji
- metoda minimalizacji wariancji przy ograniczeniu na warunkową wartość zagrożoną oraz daną średnią stopę zwrotu z portfela

Na zakończenie niniejszego rozdziału omówiono wskaźniki rentowności portfela.

W rozdziale piątym opisano zasady konstrukcji portfela. Między innymi umieszczono charakterystyki analizowanych danych oraz statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu z rożnych aktywów finansowych.

Rozdziały szósty i siódmy poświęcone są przedstawieniu badań empirycznych. Celem tych badań jest porównanie różnych metod optymalizacji z uwzględnieniem wielkości ryzyka dla każdego portfela. Ponadto wyznaczono zbiory portfeli efektywnych dla każdej rozpatrywanej metody.

W rozdziale ósmym zestawiono wyniki badań, dokonano ich syntezy i przedstawiono wnioski.

Niniejsza rozprawa doktorska powstała w ramach projektu badawczego nr NN 111 1256 33, ze środków przeznaczonych na naukę w latach 2007-2010.

Szczególne podziękowania kieruję do mojego promotora prof. dr hab. Małgorzaty Doman za zainteresowanie mnie problematyką zarządzania ryzykiem finansowym, wprowadzenia mnie w tę interesującą tematykę, poświęcony czas i ogromną pomoc w ukierunkowaniu badań, jednakże przede wszystkim pragnę podziękować za cierpliwość i wyrozumiałość. Dziękuję również Justynie Siwińskiej z Katedry Ekonomii Matematycznej na Uniwersytecie Ekonomicznym w Poznaniu za opracowanie oprogramowania umożliwiającego sprawniejsze wykonanie obliczeń.

ROZDZIAŁ I

INWESTYCJE I ZARZĄDZANIE RYZYKIEM INWESTYCJI

Celem każdego inwestora jest oczywiście pomnażanie pieniędzy, czyli własnego bogactwa. Jeżeli bieżące przychody przewyższają znacznie bieżące wydatki, to pozostaje część zaoszczędzonych pieniędzy. Te nadwyżki można zagospodarować w sposób, który zwiększy posiadaną kwotę pieniędzy, przeznaczoną na przyszłą konsumpcję. Rezygnacja z bieżącej konsumpcji na rzecz przyszłej konsumpcji, jednak na wyższym poziomie, jest określana mianem oszczędzania, a proces zwiększania kwoty pieniędzy w przyszłości nosi nazwę inwestycji[7].

Inwestor, kiedy lokuje swoje pieniądze, za każdym razem musi sobie odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób chce pomnożyć swoje oszczędności, czyli kiedy, gdzie i ile wydać, co warto kupić oraz kiedy i jak sprzedać.

Inwestując swoje oszczędności na przykład na giełdzie nie jesteśmy pewni, czy ulokowane pieniądze przyniosą nam zyski, czy może poniesiemy stratę. Ryzyko inwestycji jest związane z niepewnością co do określenia stopy zwrotu z inwestycji[8]. Jeżeli uzyskamy dodatkowy zysk przewyższający stopę wolną od ryzyka, to mówimy, że uzyskaliśmy premię za ryzyko.

Inwestycja jest zatem zaangażowaniem określonej kwoty pieniędzy na pewien okres, tak aby w przyszłości otrzymać jej zwrot kompensujący:

- czas, w którym inwestowane były pieniądze,

[7] Reilly F. K., Brown K. C., *Analiza inwestycji i zarządzanie portfelem*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001
[8] Ibidem

- współczynnik inflacji,
- ryzyko inwestycji.

Wspominaliśmy powyżej o ryzyku, jednak co to jest ryzyko? Najprościej, ryzyko możemy zdefiniować jako stan niebezpieczeństwa bądź zagrożenia, które wynika z prawdopodobnych zdarzeń od nas niezależnych[9]. Ryzyko ma wiele źródeł. Jednym z nich może być sam człowiek, który powoduje takie zdarzenia jak inflacja, zmiany w polityce kraju, czy wojny. Ryzyko również może pochodzić od nieprzewidywalnych zdarzeń naturalnych, takich jak trzęsienia ziemi i gwałtowne zmiany pogody[10].

W każdym obszarze działalności człowieka mamy do czynienia z ciągłym zagrożeniem. Podejmując takie działania jak prowadzenie samochodu, czy przechodzenie przez jezdnię, narażeni jesteśmy na ryzyko. Jednakże istnieją obszary w działalności człowieka, w przypadku których identyfikujemy ryzyko i dokładamy wszelkich starań, aby minimalizować ewentualne straty, czy też uchronić się przed potencjalnymi konsekwencjami prawnymi. Do takich obszarów należy między innymi działalność inwestycyjna człowieka.

Pojęcie zarządzania ryzykiem nie jest w ekonomii pojęciem nowym. Przez zarządzanie ryzykiem rozumie się podejmowanie decyzji i realizację działań prowadzących do osiągnięcia przez instytucję akceptowalnego poziomu ryzyka[11].

W niniejszym rozdziale omówimy proces zarządzania ryzykiem i podamy definicję ryzyka. Ponadto opisujemy elementy skutecznego zarządzania ryzykiem oraz poświęcimy szczególną uwagę wszelkim regulacjom prawnym dotyczącym zarządzania ryzykiem.

1.1. Pojęcie ryzyka

Z pojęciem ryzyka spotyka się każdy człowiek, bez względu na rodzaj prowadzonej działalności. W szczególności jednak, rozważania na temat ryzyka mają największy wpływ na takie obszary jak ekonomia bądź finanse. Podanie jednoznacznej i pełnej definicji ryzyka jest trudne, ze względu na złożoność i wieloznaczność tego pojęcia. Samo słowo ryzyko, w różnych językach, ma różne znaczenia. W języku perskim *rozi(k)* oznacza los, dzienną zapłatę, ale również chleb. W języku łacińskim czasownik *risicare* oznacza omijanie czegoś. W języku arabskim słowo *risq* to dopust boży, los. Z drugiej strony w języku

---

[9] www.wikipedia.org

[10] Jorion P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York 1997

[11] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007

hiszpańskim *ar - risco* oznacza odwagę i niebezpieczeństwo, podobnie jak w języku francuskim. Ponadto w słownikach niemieckich z XVIII wieku słowo *risco, risico* określa niebezpieczeństwo związane z naruszeniem uczciwych zasad handlowych. W języku włoskim słowo *ris(i)co* lub *rischio* oznacza rafę, którą statek powinien ominąć, czyli określa niebezpieczeństwo, którego żeglarze muszą unikać[12]. Natomiast w języku angielskim wyróżnia się dwa słowa o zbliżonym znaczeniu: *risk* i *hazard*. Pierwsze z nich używane jest do opisania sytuacji powodującej niebezpieczeństwo lub potencjalne źródło niebezpieczeństwa. Tymczasem słowo *hazard* używane jest jedynie w drugim znaczeniu[13].

W języku naturalnym ryzyko zwykle związane jest ze stanem niebezpieczeństwa bądź zagrożenia, które wynika z prawdopodobnych zdarzeń od nas niezależnych, albo z możliwych konsekwencji podjęcia decyzji. W klasycznej matematycznej teorii decyzji ryzyko dotyczy sytuacji, gdy wybranie danego wariantu decyzyjnego pociąga za sobą możliwości wystąpienia różnych negatywnych i pozytywnych konsekwencji przy znanym prawdopodobieństwie wystąpienia każdej możliwości[14].

1.1.1. Definicja ryzyka

Pierwszą naukową definicję ryzyka próbował podać A. H. Willett w pracy *The Economic Theory of Risk and Insurance*[15] z 1901 r. Definiował on ryzyko jako coś obiektywnego, ściśle związanego z subiektywną niepewnością. Definicja ta była nieprecyzyjna, gdyż pojęcie niepewności ma wiele znaczeń. Willett uważał, że ryzyko jest stanem otoczenia i że należy je wiązać z pewnym stopniem niepewności.

W roku 1921 F. H. Knight w książce *Risk, Uncertainty and Profit*[16] zawarł ideę niepewności mierzalnej i niemierzalnej[17]. Pierwszą niepewność nazwał ryzykiem, natomiast drugą - niepewnością *sensu stricto.* Podczas rozmów o codziennym życiu, jak i w dyskusjach ekonomicznych, określenie ryzyko jest luźno używane, często w zastępstwie niepewności. Jednakże, w ujęciu kategorycznym są to różne pojęcia. Powszechnie uważa

[12] Bernstein P. L., *Przeciw Bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*, Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1997
[13] Kaczmarek T. T., *Ryzyko i zarządzanie ryzykiem. Ujęcie interdyscyplinarne,* Difin, Warszawa 2005
[14] www.wikipedia.org
[15] Willett A. H., *The Economic Theory of Risk and Insurance*, University Press of The Pacific, 2002
[16] Knight F. H., *Risk, Uncertainty, and Profit,* New York Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company
[17] Holton G. A., *Defining Risk*, Financial Analysts Journal, 2004

się, że niepewność dotyczy zmian, które są trudne do oszacowania lub wręcz nie ma możliwości oszacowania prawdopodobieństwa ich zajścia[18].

Słownik języka polskiego[19] definiuje ryzyko jako:

- niebezpieczeństwo, że coś zdarzy się w sposób inny od oczekiwanego,
- działanie związane z niebezpieczeństwem, którego wynik nie jest znany, ale także podejmowanie takich działań ryzykownie.

Pierwsza definicja odnosi się do negatywnej koncepcji ryzyka, natomiast druga do neutralnej[20]. Koncepcja negatywna rozpatruje ryzyko jako stan zagrożenia, czyli zgodnie z nią ryzyko oznacza, że jesteśmy narażeni na poniesienie pewnej straty lub szkody. Natomiast neutralna teoria związana jest z nieznanymi rezultatami podjętych działań. W związku z tym, skutek naszego działania może być albo pozytywny, albo negatywny.

Według Jajugi ryzyko w ujęciu negatywnym oznacza możliwość nieosiągnięcia oczekiwanego efektu. Natomiast w ujęciu koncepcji neutralnej oznacza możliwość efektu różniącego się od oczekiwanego[21].

W związku z tak różnymi koncepcjami i próbami zdefiniowania ryzyka, trudno jest podać jego jednoznaczną definicję. W poniższej pracy używane będzie pojęcie ryzyka finansowego, powodującego skutki finansowe dla inwestora, który jest na nie narażony[22].

Ryzyko finansowe dotyczy działalności finansowej firmy, jak i również prywatnych inwestorów. Narażone są na nie podmioty aktywnie funkcjonujące na rynkach finansowych. Instytucja może być narażona na następujące rodzaje ryzyka[23]: ryzyko rynkowe, kredytowe, ryzyko operacyjne, ryzyko płynności.

Poszczególne typy ryzyka finansowego zostały szczegółowo opisane w dalszej części niniejszego rozdziału.

Natomiast elementami ryzyka inwestycyjnego są[24]: ryzyko stopy procentowej, ryzyko siły nabywczej, ryzyko niekorzystnej tendencji rynkowej, ryzyko złego zarządzania, ryzyko niedotrzymania zobowiązań, ryzyko płynności, ryzyko polityczne, ryzyko branżowe, ryzyko podatkowe.

Wszystkie powyższe składniki oraz elementy ryzyka innego rodzaju stanowią ryzyko całkowite.

---

[18] Tarczyński W., Mojsiewicz M., *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa 2001
[19] *Uniwersalny słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN 2008
[20] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.
[21] Ibidem
[22] Jorion P., *Value at Risk …*
[23] Ibidem
[24] Francis J. C., *Inwestycje. Analiza i zarządzanie*, WIG-Press, Warszawa 2000

Ryzyko stopy procentowej wynika ze zmian rynkowych stóp procentowych. Silnie oddziałuje na poziomy cen akcji, obligacji, opcji, kontraktów *futures*, nieruchomości oraz innych aktywów finansowych.

Ryzyko siły nabywczej ściśle zależy od poziomu inflacji. Występuje w momentach zmiany siły nabywczej pieniądza związanej z inflacją.

Ryzyko niekorzystnej tendencji rynkowej powoduje zmienność stóp zwrotu aktywów finansowych wywołaną odmiennymi trendami rynkowymi. W okresach hossy obserwujemy zwyżkowy ruch cen akcji, natomiast w okresie bessy odnotowuje się spadki cen.

Ryzyko niedotrzymania zobowiązań związane jest ze zmiennością stóp zwrotu wynikającą z wypłacalności, bądź też nie, danego przedsiębiorstwa. Skutkiem spadku płynności finansowej jest spadek cen akcji spółki.

Ryzyko płynności występuje, jeżeli firma posiada aktywa finansowe trudno zbywalne, czyli często sprzedawane po cenie niższej od oczekiwanej.

Ryzyko polityczne wynika ze zmian cen akcji spowodowanych powiązaniami z władzą ustawodawczą, wykonawczą lub sądowniczą, bez względu na to czy mają podłoże polityczne bądź gospodarcze. Podejmując decyzję o inwestycji w innym państwie wystawiamy się na międzynarodowe ryzyko polityczne. Szczególnie dotyczy to dużych przedsiębiorstw, które pragną otworzyć filię swojej firmy w innym państwie. Natomiast krajowe ryzyko polityczne spowodowane jest zmianami w ustawodawstwie obejmującym opłaty, licencje, podatki. Szczególnie duży wpływ na taką sytuację mają podatki od nieruchomości, dochodowe oraz od wynagrodzeń.

Ryzyko branżowe wynika z wystąpienia niekorzystnych wydarzeń dotyczących określonego produktu lub wszystkich firm danej branży[25]. Wpływ na to ma na pewno dostępność surowca. Również podatki na dany wyrób, który jest kluczowym składnikiem branży, silnie oddziaływują na ceny aktywów przedsiębiorstw działających w danym sektorze.

[25] Ibidem

1.1.2. Podział ryzyka

W literaturze przedmiotu istnieje ogromna ilość rozmaitych podziałów ryzyka. Trudno jest je wszystkie przytoczyć, dlatego skupimy się tylko na wybranych.

Po pierwsze ryzyko dzieli się, ze względu na kształtujące je czynniki, na:

- ryzyko systematyczne,
- ryzyko niesystematyczne.

Ryzyko systematyczne, zwane również ryzykiem podstawowym, związane jest z siłami przyrody, warunkami rynku, czynnikami ekonomicznymi. Jest to rodzaj ryzyka niedywersyfikowalnego, co oznacza, że nie może ono zostać wyeliminowane. Do źródeł ryzyka systematycznego zaliczyć można zmiany stopy procentowej, przepisów podatkowych bądź transformacje sytuacji polityczno – ekonomicznej.

Ryzyko niesystematyczne, nazywane również ryzykiem specyficznym lub indywidualnym, związane jest z przyszłymi zdarzeniami. W związku z tym można je częściowo kontrolować albo przewidywać. Do przyczyn ryzyka niesystematycznego zaliczyć można konkurencję, dostępność surowców, płynność oraz bankructwo firmy.

Z punktu widzenia każdego inwestora, jako uczestnika na rynku kapitałowym, można wyróżnić następujące rodzaje ryzyka[26]:

- ryzyko rynkowe,
- ryzyko kredytowe,
- ryzyko operacyjne,
- ryzyko prawne,
- ryzyko biznesowe.

Ryzyko rynkowe wynika ze zmienności cen na rynkach finansowych, jak również na innych rynkach. Fluktuacja cen wywołuje pewne skutki, zarówno pozytywne jak i negatywne, dla podmiotów narażonych na ten typ ryzyka.

Standardowo wyróżniamy następujące rodzaje ryzyka rynkowego[27]: ryzyko kursu walutowego, ryzyko stopy procentowej, ryzyko cen akcji, ryzyko cen towarów.

Ryzyko kursu walutowego spowodowane jest zmianami kursu walutowego. Występuje w wypadku posiadania przez instytucję aktywów lub zobowiązań w obcej walucie.

---

[26] Por. Jajuga K. *Zarządzanie ryzykiem*.
Best P., *Wartość narażona na ryzyko,* Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2000
Kendall R., *Zarządzanie ryzykiem dla menedżerów,* K.E. Liber, Warszawa, 2000
[27] Jorion P., *Financial Risk Manager Handbook, Second Edition*, John Wiley & Sons, New York 2003

Wpływ wahań kursu walutowego może mieć efekt pozytywny bądź negatywny. Wzrost kursu walutowego wpływa na wzrost wartości aktywów w walucie krajowej i spadek wartości zobowiązań w walucie krajowej. Natomiast spadek kursu walutowego wpływa na spadek wartości aktywów w walucie krajowej i wzrost wartości zobowiązań w walucie krajowej[28].

Z ryzykiem stopy procentowej mamy do czynienia w dwóch przypadkach. Pierwszym z nich jest sytuacja, w której instytucja otrzymuje lub dokonuje płatności, które są zależne od przyszłych stóp procentowych. W drugim przypadku, instytucja posiada aktywa lub zobowiązania, których wartość zależy od kształtowania się stóp procentowych. Wzrost stopy procentowej zmniejsza wartość aktywów firmy, co jest sytuacją niekorzystną, ale za to zmniejsza wartość zobowiązań, co jest pożądane przez instytucję[29]. Z drugiej strony, spadek stopy procentowej zwiększa wartość aktywów, ale także powoduje wzrost wartości zobowiązań.

Natomiast ryzyko cen towarów wynika ze zmiany cen towarów na rynkach, szczególnie na giełdach towarowych. Z tym typem ryzyka można również mieć styczność, jeżeli inwestuje się w towarowe instrumenty pochodne.

Ostatnim typem ryzyka rynkowego jest ryzyko cen akcji. Jak sama nazwa wskazuje jest ono związane z wahaniami cen akcji na giełdzie.

Kolejnym rodzajem ryzyka jest ryzyko kredytowe. Wynika ono z możliwości niedotrzymania warunków przez drugą stronę kontraktu. Dotyczy to wszystkich sytuacji, w której jedna ze stron ma zobowiązania finansowe wobec drugiej strony. Ryzyko kredytowe można podzielić na[30]: ryzyko niedotrzymania warunków, ryzyko wiarygodności kredytowej, ryzyko kredytobiorcy lub ryzyko emitenta, ryzyko drugiej strony lub ryzyko kontrpartnera.

Ryzyko niedotrzymania warunków oznacza niedokonanie płatności wynikających z umowy kredytowej, zatem jest to niedotrzymanie warunków przez drugą stronę. Ryzyko wiarygodności kredytowej może mieć zarówno skutki pozytywne jak i negatywne. Pożądanym efektem jest podwyższenie wiarygodności kredytowej, natomiast niekorzystnym rezultatem jest obniżenie wiarygodności, co może doprowadzić do niedotrzymania warunków. Z ryzykiem kredytobiorcy lub emitenta mamy do czynienia w przypadku, gdy kontrakt ma postać dłużnego instrumentu finansowego, czyli jest to na przykład kredyt lub

---

[28] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.
[29] Ibidem
[30] Jorion P., *Value at Risk …*

obligacja. Natomiast z ryzykiem drugiej strony lub kontrpartnera stykamy się w sytuacji, w której kontrakt powoduje powstanie zobowiązania.

Następnym rodzajem ryzyka jest ryzyko operacyjne. Jest to ryzyko wynikające z niewłaściwych i nieprawidłowo działających procesów wewnętrznych, ludzi i systemów oraz ze zdarzeń zewnętrznych. Bezpośredni wpływ na rozwój metod zarządzania ryzykiem operacyjnym miał upadek Banku Baringsa[31] w 1995 r. Identyfikacja możliwości wystąpienia wydarzeń zaliczanych do ryzyka operacyjnego jest bardzo trudna. Niektórzy autorzy uważają, że do ryzyka operacyjnego zaliczyć można wszystko to, co nie wchodzi w skład ryzyka rynkowego, bądź ryzyka kredytowego. Do najczęstszych obszarów występowania ryzyka operacyjnego zaliczamy[32]:

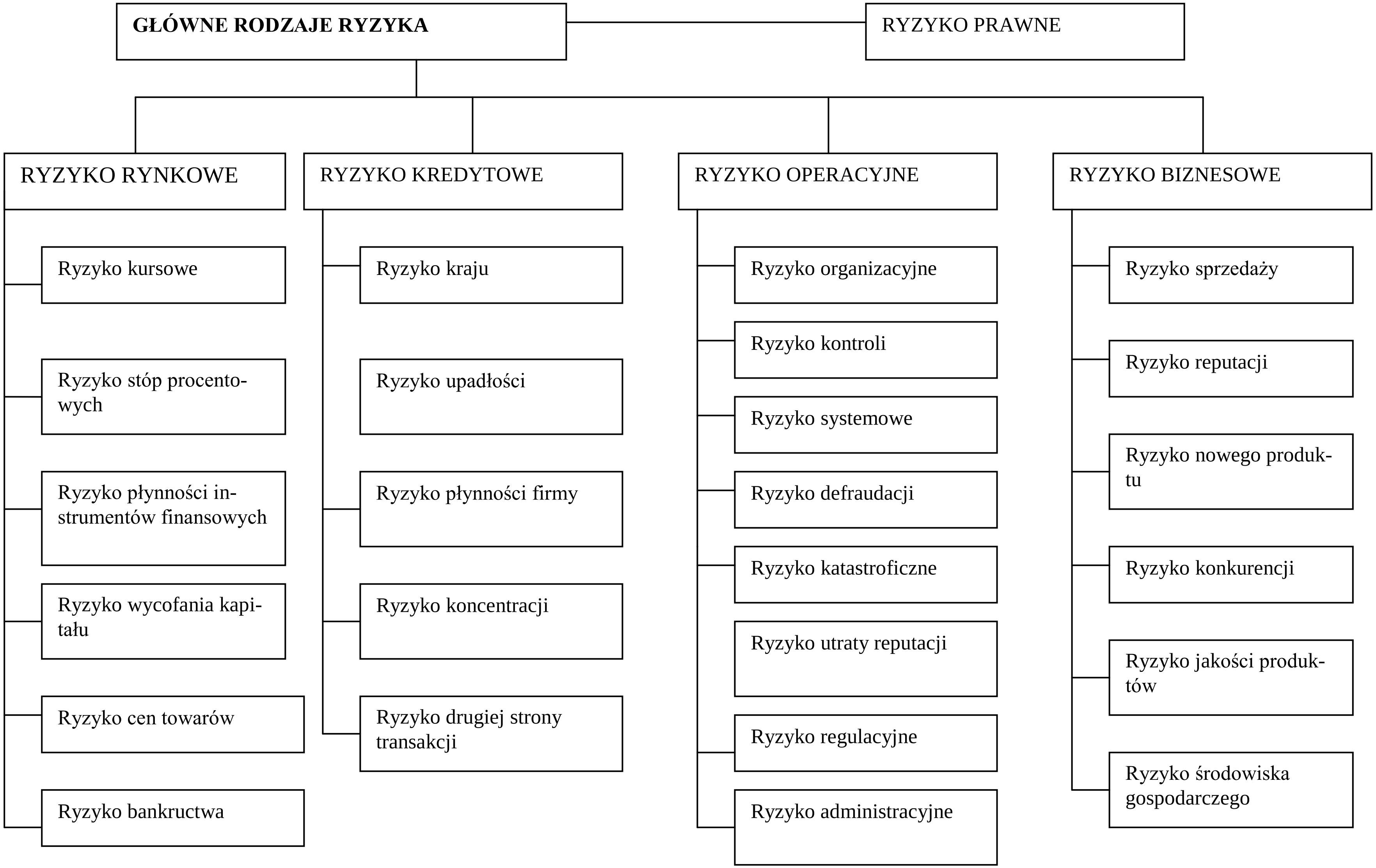
- oszustwo wewnętrzne,
- oszustwo zewnętrzne,
- bezpieczeństwo pracy i relacje z pracownikami,
- klientów, produkty i relacje biznesowe,
- zniszczenie fizycznych aktywów,
- wady systemów,
- zarządzanie procesami biznesowymi.

Kolejny rodzaj ryzyka, czyli ryzyko prawne występuje w wypadku wystąpienia niekorzystnych efektów prawnych, wynikających z zawartych przez firmę umów prawnych, bądź też w przypadku możliwości uchwalenia aktów prawnych mających wpływ na sytuację danej instytucji.

Ostatnim typem ryzyka jest ryzyko biznesu. Spowodowane jest ono zmianami warunków ekonomicznych prowadzenia działalności gospodarczej przez instytucję.

Na Rysunku 1.1 przedstawiono pewien schemat podziału ryzyka zaproponowany przez Tarczyńskiego i Mojsiewicz[33]. Nie jest to oczywiście jedyny możliwy podział ryzyka. Niezależnie od schematu, niektóre typy ryzyka trudno jest jednoznacznie przypisać do jednej kategorii. Na przykład ryzyko płynności w prezentowanym tu podziale przypisane jest do kategorii ryzyka kredytowego, natomiast Jajuga[34] rozpatruje je jako odrębny typ ryzyka finansowego.

[31] www.wikipedia.org
[32] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.
[33] Tarczyński W., Mojsiewicz M., *Zarządzanie ryzykiem*.
[34] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.



Rysunek 1.1. Podstawowe rodzaje grup ryzyka w przedsiębiorstwie
Źródło: Tarczyński W., Mojsiewicz M., *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa 2001

1.2. Proces zarządzania ryzykiem

Zarządzanie ryzykiem polega na podejmowaniu pewnych decyzji i realizacji takich działań, które prowadzą do osiągnięcia przez inwestora akceptowalnego poziomu ryzyka[35]. Poziom ten oznacza, że wartość inwestycji nie spadnie poniżej pewnej granicznej wartości. Zarządzanie ryzykiem stanowi zatem jeden z najważniejszych elementów w procesie inwestycyjnym. Do najważniejszych celów zarządzania ryzykiem finansowym należy ustalenie pewnej kwoty kapitału, która pozwoli zabezpieczyć przyszłe, nieoczekiwane straty.

Ocena procesu zarządzania portfelem jest dla każdego inwestora istotnym zadaniem. Kluczowe etapy zarządzania ryzykiem portfela są następujące[36]:

- określenie profilu inwestora,
- wyznaczenie celów inwestycyjnych,
- strategiczna alokacja aktywów,
- taktyczna alokacja aktywów, czyli szczegółowa budowa portfela,
- kontrola i ewentualne zmiany składu portfela.

Pierwszy krok polega na scharakteryzowaniu profilu inwestora. Najważniejszymi jego elementami są: poziom wiedzy o inwestowaniu oraz stosunek do ryzyka. Ponadto w charakterystyce uwzględnia się takie cechy jak: wiek, zawód, wykształcenie, sytuację materialną oraz status rodzinny. Najważniejszym elementem charakterystyki inwestora jest jednak poziom jego awersja do ryzyka. Im większa awersja, tym inwestycja powinna składać się w większym stopniu z aktywów wolnych od ryzyka.

Drugi krok w zarządzaniu portfelem pozwala na określenie celów inwestycyjnych, czyli uzyskanie odpowiedzi na pytanie o wielkość zysków z inwestycji i ich przeznaczenie. W literaturze przedmiotu spotkać można się z czterema powszechnie występującymi celami inwestycyjnymi[37]:

- otrzymania jak największych zysków z zainwestowanego kapitału,
- osiągnięcie stałych dochodów w różnych odstępach czasu,
- uzyskania najbezpieczniejszej formy inwestycji kapitału,
- zdobycie dużej płynności inwestycyjnej.

---

[35] Ibidem
[36] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa, 2007
[37] Ibidem

Kolejnym etapem zarządzania portfelem jest strategiczna alokacja aktywów. Stanowi ona jeden z kluczowych punktów w procesie zarządzania ryzykiem inwestycji finansowych. Decyzje w tym obszarze podejmowane są przede wszystkim na podstawie awersji inwestora do ryzyka. Określany jest udział procentowy akcji, obligacji czy bonów skarbowych w portfelu. Szczegółowy opis zarządzania ryzykiem w kontekście alokacji środków opisany jest w dalszej części niniejszego rozdziału.

Kolejnym etapem jest ustalenie szczegółowego składu portfela. Ostatecznie portfel powinien być aktualizowany i kontrolowany. Kontrola pomaga w określeniu stopnia realizacji celu inwestycyjnego. Jeżeli inwestor dostrzega, że powinien zmienić skład portfela, to najpierw musi sprawdzić zyskowność takiego przekształcenia.

Jednakże chcąc ocenić wyniki inwestycyjne, należy wziąć pod uwagę zarówno stopę zwrotu, jak i ryzyko[38].Ocena wyników zarządzania portfelem obejmuje następujące zadania[39]:

- pomiar wyników (*performance measurement*), czyli określenie w odpowiedni sposób wyniku zarządzania portfelem,
- przypisanie wyników (*performance attribution*), czyli ukazanie osób i czynności, które doprowadziły do osiągniętych wyników,
- prezentację wyników (*performance presentation*).

1.3. Zarządzanie ryzykiem w kontekście alokacji środków

Alokacja zasobów jest procesem polegającym na podejmowaniu decyzji, w jaki sposób rozdysponować środki pieniężne w różne aktywa. Decyzja o alokacji zasobów nie powinna być podejmowana oddzielnie, gdyż jest ona elementem procesu zarządzania portfelem[40].

Konstrukcja portfela optymalnego musi uwzględniać najważniejsze cechy charakterystyczne inwestora. Są to przede wszystkim:

- sytuacja społeczno – finansowa inwestora,
- cele inwestycyjne,
- poziom akceptacji ryzyka,
- ograniczenia inwestycyjne.

[38] Francis J. C., op. cit.
[39] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje…*
[40] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.

Jak już było wspomniane, najistotniejszą cechą inwestora jest, w tym kontekście tak zwana awersja do ryzyka, która określa jego poziom akceptacji ryzyka. Jest on ściśle powiązany z fazą życia, w której obecnie znajduje się inwestor. Teoretycznie, zdolność osób do podejmowania ryzyka powinna być najwyższa we wczesnych latach kariery zawodowej i konsekwentnie spadać z wiekiem. Jednakże obraz ten może być o wiele bardziej skomplikowany, gdyż na poziom akceptacji ryzyka wpływają również: doświadczenie życiowe, warunki życia, punkt startu w zakresie posiadanego majątku, osobowość oraz ambicje. Chociaż potrzeby i preferencje ludzi są odmienne, to istnieje kilka wspólnych cech inwestora. W życiu każdego inwestora wyróżnić możemy cztery fazy[41]:

- fazę rozwoju,
- fazę akumulacji,
- fazę konsolidacji,
- fazę dystrybucji.

W trakcie fazy rozwoju inwestor usiłuje zgromadzić majątek. Typowym zjawiskiem jest to, że wolne aktywa finansowe inwestora są bardzo małe albo wręcz nie istnieją. Jest to również moment w którym teoretycznie inwestor posiada ponadprzeciętny poziom akceptacji ryzyka, w praktyce jednak poziom ten jest ograniczony przez obsługę bieżących wydatków.

Podczas fazy akumulacji dochody zdecydowanie rosną. Na początku tej fazy inwestor jeszcze dużo wydaje, jednak w późniejszym okresie wydatki się obniżają, a to za sprawą osiągnięcia samodzielności przez dzieci lub spłaty kredytów. Również dochody osiągają swój szczytowy poziom, w związku z tym istnieje realna szansa zgromadzenia sporych oszczędności. Faza akumulacji charakteryzuje się zwiększonym poziomem akceptacji ryzyka wywołanym rosnącymi dochodami.

Podczas fazy utrzymania inwestor osiągnął wiek dojrzały i zakończył aktywność zawodową. Występuje teraz u niego ogromna potrzeba utrzymania standardu życia oraz bezpieczeństwa finansowego. Dlatego tolerancja wobec ryzyka spada. Wyzwaniem staje się utrzymanie realnej wartości kapitału przy minimalizacji ryzyka.

W ostatniej fazie, czyli fazie dystrybucji, inwestor charakteryzuje się niską skłonnością do ryzyka. Często przekazuje zgromadzone aktywa na cele charytatywne lub najbliższym krewnym.[42]

---

[41] Ibidem
[42] Ibidem

Poziom akceptacji ryzyka nie zależy tylko i wyłącznie od wieku inwestora. Wpływ na niego ma również sytuacja materialna oraz cele inwestycyjne. Ważność celów ogranicza poziom akceptowalnego ryzyka. Ponadto zestawienie celów inwestycyjnych oraz poziomu akceptacji ryzyka jest kluczem do stworzenia dobrej polityki inwestycyjnej, w której również niezbędne jest zdefiniowanie ograniczeń inwestycyjnych. Są one specyficzne dla konkretnego inwestora.

Należy również pamiętać o tym, że polityka inwestycyjna optymalna z perspektywy inwestora indywidualnego nie jest pojęciem stałym w czasie. Przyjmuje się, że aktualizacja polityki inwestycyjnej powinna następować corocznie lub niezwłocznie po wystąpieniu bardzo istotnych wydarzeń w życiu inwestora.

1.4. Regulacje prawne dotyczące zarządzania ryzykiem

Proces zarządzania ryzykiem jest bardzo skomplikowany. Należy uwzględnić w nim ogromną ilość czynników, aby przeprowadzić go we właściwy sposób. Na zakończenie niniejszego rozdziału zostaną opisane niektóre, z występujących na globalnym rynku finansowym, regulacji prawnych dotyczących zarządzania ryzykiem. Stosowanie chociażby części z metod zalecanych w regulacjach prawnych, w procesie zarządzania portfelem inwestora indywidualnego mogłoby zwiększyć efektywność tego zarządzania.

Wzrost zmienności na globalnym rynku finansowym spowodował rozwój nowych instrumentów finansowych i narzędzi analitycznych do zarządzania ryzykiem finansowym. Jednym z pierwszych istotnych osiągnięć w dziedzinie zarządzania ryzykiem finansowym była opublikowana w 1952 r. przez Harry'ego Markowitza koncepcja teorii portfelowej[43], gdzie zaproponowano pomiar ryzyka za pomocą odchylenia standardowego.

Ważnym etapem w rozwoju metod zarządzania ryzykiem finansowym było wprowadzenie w październiku 1994 roku systemu *RiskMetrics*[44], opracowanego przez bank inwestycyjny JP Morgan. Pełna wersja powyższego dokumentu ukazała się w 1996 r. *RiskMetrics* jest metodą wyznaczania wartości zagrożonej[45] (VaR) opartą na kowariancji.

W roku 1994 dokument ten składał się z pięćdziesięciu stron, a w 1998 poszerzono go aż do 300 stron. Jest on poszerzany nadal, ze względu na powstawanie nowych produktów finansowych, metod i źródeł danych. Standardy nie obejmują teoretycznych i za-

[43] Markowitz H. M., op. cit.
[44] *RiskMetrics*™ *Technical Document*.
[45] Definicja wartości zagrożonej znajduje się w rozdziale II

awansowanych technologicznie technik nieznanych lub niepraktykowanych we wcześniejszych czasach.

W roku 2006 powstała nowa metodologia *The RiskMetrics* 2006, zaproponowana przez Gillesa Zumbacha[46]. Jednym z powodów wprowadzenia zmian do metody *RiskMetrics* 1994, był rozwój technik komputerowych. Duża moc obliczeniowa komputerów w połączeniu z zaawansowanym oprogramowaniem pozwala obecnie na obliczanie ryzyka dla bardzo wyszukanych produktów finansowych, takich jak złożone instrumenty pochodne.

Ważnym dokumentem, dotyczącym zarządzania ryzykiem jest również *CreditMetrics*[47], opracowany przez bank JP Morgan. Dokument ten dotyczy pomiaru ryzyka kredytowego portfeli złożonych z tradycyjnych produktów kredytowych, instrumentów o stałym dochodzie oraz derywatów. Metodologia ta została opisana przez Guptona i in.[48] w 1997 r. Głównymi powodami, dla których stworzono tę metodologię były:

- promocja przejrzystości ryzyka kredytowego,
- ustalenie wzorcowego modelu pomiaru ryzyka kredytowego, który umożliwiałby porównanie ryzyka dla różnych podmiotów, gdyż nie można tego robić używając różnych metod,
- dostarczanie klientom odpowiednich narzędzi do zarządzania ryzykiem kredytowym, jak i również doradztwo w wykorzystaniu *CreditMetrics*.

Rozwój różnorodnych metod zarządzania ryzykiem był również stymulowany przez głośne katastrofy lat dziewięćdziesiątych XX wieku. Jedną z pierwszych takich katastrof był upadek przedsiębiorstwa Metallgesellschaft w 1993 r., w sytuacji gdy grupa amerykańskich traderów nie zabezpieczyła odpowiednio kontraktów terminowych na ropę naftową. Spadek cen tego surowca spowodował straty w wysokości 1,3 mld USD. Do podobnych niedopatrzeń doszło w hrabstwie Orange[49]. Kolejny wstrząs był związany z upadkiem Banku Baringsa w 1995 r., do którego doprowadził Nick Leeson. W kolejnych latach pojawiły się następne katastrofy finansowe, żeby wspomnieć tylko najważniejsze z nich, do których należą: afera Enronu, WorldComu oraz obecny kryzys finansowy.

Jedną z ważniejszych instytucji, która miała ogromny wpływ na rozwój różnych metod zarządzania ryzykiem, jest Bazylejski Komitet do spraw Nadzoru Bankowego[50].

[46] Zumbach G., *The RiskMetrics 2006 Methodology*, www.riskmetrics.com
[47] *CreditMetrics – Technical Document*, www.defaultrisk.com
[48] Gupton G., Firger Ch., Bhatia M., *CreditMetrics – Technical Document*, www.defaultrisk.com
[49] Jorion P., *Value at Risk ...,*
[50] Basel Committee on Banking Supervision

Powstał on w 1974 r. dzięki decyzji prezesów banków centralnych grupy G10. W obecnym składzie Komitetu Bazylejskiego zasiadają reprezentanci następujących państw: Belgii, Francji, Holandii, Japonii, Kanady, Niemiec, Stanów Zjednoczonych, Szwajcarii, Szwecji, Wielkiej Brytanii, Włoch oraz przedstawiciele Hiszpanii i Luksemburga.

Komitet stanowi forum współpracy państw członkowskich w zakresie nadzoru bankowego. Priorytetowym celem Komitetu jest utworzenie międzynarodowej współpracy pomiędzy krajowymi nadzorami bankowymi. Cel ten jest osiągany między innymi dzięki stałej wymianie informacji dotyczących przedsięwzięć nadzorów krajowych, ustaleniu jednakowych standardów w działalności bankowej oraz poprzez zwiększenie efektywności międzynarodowego nadzoru bankowego[51].

W 1988 r. Komitet Bazylejski opublikował tak zwaną Umowę Kapitałową (*Basel Capital Accord*)[52], która zawierała metodologię dotyczącą pomiarów ryzyka kredytowego. W roku 1996 opublikowano poprawkę do Umowy Kapitałowej, w której uwzględniono także pomiar ryzyka rynkowego.

W dniu 26 czerwca 2004 roku została opublikowana Nowa Umowa Kapitałowa[53] (*New Basel Capital Accord*, Basel II). Jest to międzynarodowy standard nadzoru bankowego, który kreuje regulacje dotyczące minimalnych wymogów kapitałowych, chroniących przed różnymi typami ryzyka finansowego i operacyjnego. Przedstawiciele Komitetu Bazylejskiego są przekonani, że taki typ międzynarodowych standardów może pomóc w ochronie międzynarodowego systemu finansowego przed ewentualnymi upadkami znaczących banków. W praktyce, twórcy Nowej Umowy Kapitałowej pragną to osiągnąć poprzez przyjęcie rygorystycznych wymogów kapitałowych dotyczących limitów ryzyka, dostosowanych do działalności prowadzonej przez bank. Prościej ujmując, jeżeli bank naraża się na większe ryzyko, to musi zgromadzić większą ilość kapitału, tak aby być wypłacalnym.

Jednym z główniejszych postanowień Nowej Umowy Kapitałowej było oddzielenie ryzyka operacyjnego od ryzyka kredytowego i przedstawienie obu w postaci ilościowej. W umowie tej po raz pierwszy zdefiniowano pojęcie ryzyka operacyjnego.

Wraz z rozwojem metod pomiaru ryzyka rynkowego w sektorze bankowym, wzrosło zainteresowanie rozwojem metod pomiaru ryzyka w sektorze ubezpieczeniowym. W 2002 r. wprowadzono dyrektywę Solvency I opisującą raczej proste wymogi w zakresie

---

[51] History of the Basel Committee and Its Membership, Basel Committee, dostępne na http://www.bis.org/bcbs/history.pdf, 10.07.2009

[52] Basel Committee on Banking Supervision *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basel, 1996.

[53] Basel Committee on Banking Supervision *The New Basel Capital Accord.* Consultative Document, 2003.

tak zwanego marginesu wypłacalności zakładów ubezpieczeń. Był to nieskomplikowany system, łatwy do interpretacji i tani do kontrolowania. Obecnie opracowywane są bardziej rozbudowane wymogi dla zakładów ubezpieczeń. Regulacje te, nazywane Solvency II w większym stopniu oparte są na umowie kapitałowej Basel II dla sektora bankowego.

Należy również wspomnieć, że w Polsce organem odpowiedzialnym za prawidłowe funkcjonowanie rynku finansowego jest Komisja Nadzoru Finansowego (KNF). Powstała ona w dniu 19 września 2006 r., przejmując tym samym kompetencje Komisji Papierów Wartościowych i Giełd, Komisji Nadzoru Ubezpieczeń i Funduszy Emerytalnych, a także uprawnienia Komisji Nadzoru Bankowego. Do głównych zadań komisji należy sprawowanie nadzoru nad sektorem bankowym, rynkiem kapitałowym, ubezpieczeniowym i emerytalnym oraz nad instytucjami pieniądza elektronicznego[54].

Ponadto do zadań KNF należą[55]:

- podejmowanie działań służących prawidłowemu funkcjonowaniu rynku finansowego;
- podejmowanie działań mających na celu rozwój rynku finansowego i jego konkurencyjności;
- podejmowanie działań edukacyjnych i informacyjnych w zakresie funkcjonowania rynku finansowego;
- udział w przygotowywaniu projektów aktów prawnych w zakresie nadzoru nad rynkiem finansowym;
- stwarzanie możliwości polubownego i pojednawczego rozstrzygania sporów między uczestnikami rynku finansowego, w szczególności sporów wynikających ze stosunków umownych między podmiotami podlegającymi nadzorowi Komisji, a odbiorcami usług świadczonych przez te podmioty;
- wykonywanie innych zadań określonych ustawami.

Celem nadzoru nad rynkiem finansowym jest zapewnienie prawidłowego funkcjonowania tego rynku, jego stabilności, bezpieczeństwa oraz przejrzystości, zaufania do rynku finansowego, a także zapewnienie ochrony interesów uczestników tego rynku.

Ponadto polski rynek finansowy regulowany jest wieloma ustawami, które są dostosowywane do prawa unijnego jak i również do dokumentów Komitetu Bazylejskiego.

[54] www.knf.gov.pl
[55] http://www.knf.gov.pl/komisja_i_urzad_komisji/komisja/zadania/index.html

Na amerykańskim rynku finansowym istotną rolę odgrywa uchwalona w lipcu 2002 r. przez Kongres Stanów Zjednoczonych ustawa Sarbanesa – Oxleya[56]. Bezpośredni wpływ na utworzenie tej ustawy miały afery Enronu i WorldComu. Były to największe skandale finansowe tamtych lat, które spowodowały ogromny spadek zaufania inwestorów do rynków finansowych. Powodem upadku, pod koniec 2001 r., przedsiębiorstwa Enron było fałszowanie dokumentacji finansowej. W związku z taką sytuacją, ustawa SOX najbardziej skupia swoją uwagę na czołowych uczestnikach rynku finansowego oraz podnosi na bardzo wysoki poziom wymagania w zakresie efektywnej kontroli wewnętrznej.

Kolejnym przykładem dyrektywy opisującej wymogi kapitałowe zarówno dla banków jak i firm maklerskich jest *Capital Adequacy Directive* (CAD). Po raz pierwszy została opublikowana w 1993 r. przez Unię Europejską oraz stała się prawomocna z dniem 1 stycznia 1996 r. W listopadzie 1999 r., Unia Europejska zasugerowała nowe wymogi kapitałowe.

Innymi standardami i normami dotyczącymi zarządzania ryzykiem, utworzonymi przez różnego rodzaje instytucji, są:

- australijski i nowozelandzki standard zarządzania ryzykiem[57] opublikowany w 2004 r.,
- kanadyjski standard CSA z 2002 r., uwzględniający również problemy codziennego życia, takie jak środowisko czy zdrowie[58],
- brytyjski standard uwzględniający zarządzanie ryzykiem[59], utworzony przez British Standards Institution Group w 2006 i 2007 roku,
- amerykański standard zarządzania ryzykiem[60] opracowany przez COSO[61] w 2004 r.,
- standard zarządzania ryzykiem[62] opracowany przez The Institute of Risk Management w 2002 r.

Zalecenia i formularze zawarte we wszystkich tych dokumentach można w pewnym zakresie wykorzystać również jako wskazówki co do zasad monitorowania ryzyka przy zarządzaniu portfelem inwestora indywidualnego.

---

[56] Zwana również SOX lub SarOX
[57] www.standards.com.au
[58] www.csa.ca
[59] www.bsi-global.com
[60] www.coso.org
[61] The Committee of Sponsoring Organisations of the Treadway Commission
[62] www.theirm.org

ROZDZIAŁ II

WARTOŚĆ ZAGROŻONA

Wzrost zainteresowania metodami ilościowymi szacowania ryzyka nastąpił w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Wpływ na to miało zwiększenie możliwości obliczeniowych komputerów, które bez problemów mogły wykonać najbardziej kompleksowe analizy. Jednocześnie rynek zaczął być bardziej zmienny i firmy poszukiwały nowych narzędzi do pomiaru ryzyka finansowego, które byłyby w stanie ocenić ryzyko inwestycji w różne instrumenty finansowe. Przez długi czas powszechnie używaną miarą ryzyka było odchylenie standardowe cen aktywów. Z praktycznego punktu widzenia, nie było to idealne rozwiązanie. Poszukiwano więc bardziej adekwatnej miary ryzyka Miarą taką okazała się wartość zagrożona. W przeciwieństwie do tradycyjnych miar ryzyka, wartość zagrożona dostarcza syntetycznej oceny ryzyka rozważanego portfela. Jest miarą ryzyka, którą łatwo prognozować[63].

Obecnie wartość zagrożona jest jedną z najpowszechniej stosowanych miar ryzyka. Została spopularyzowana przez amerykański bank inwestycyjny J.P. Morgan, który w październiku 1994 r. wprowadził do zarządzania ryzykiem model *RiskMetrics*. Najprościej, wartość zagrożoną portfela możemy określić jako maksymalną stratę, na którą może zostać narażony portfel, przy określonym poziomie ufności, podczas określonego okresu przetrzymywania, w ciągu którego skład pozostaje niezmieniony[64].

[63] Jorion P., *Value at Risk …*
[64] Ibidem

Wartość zagrożona ze względu na swoją prostą formę (pojedyncza liczba) jest zrozumiała nawet dla osób, które nie posiadają specjalnej wiedzy w takich dziedzinach jak statystyka i modelowanie ekonometryczne.

Dla przykładu, załóżmy że dla pewnego banku dzienna wartość zagrożona wynosi 35 mln złotych przy poziomie ufności 99%. Oznacza to, że w jednym na sto przypadków, przy założeniu niezmiennych warunków rynkowych, może pojawić się strata w wysokości większej niż 35 mln złotych. Ta pojedyncza liczba ukazuje wielkość potencjalnych strat banku oraz prawdopodobieństwo pojawienia się niekorzystnej sytuacji.

Wartość zagrożona charakteryzuje się trzema parametrami. Pierwszym z nich jest horyzont czasowy, albo przedział czasowy, podczas którego instytucja finansowa zobligowana jest do utrzymania swojego portfela, w niezmienionym składzie. Typowymi przedziałami używanymi do wyliczania wartości zagrożonej są: jeden dzień, dziesięć dni oraz jeden rok. Dziesięciodniowy przedział czasowy wymagany jest przez *Capital Adequacy Directive* (CAD) oraz przez Komitet Bazylejski w odniesieniu do ryzyka rynkowego. Jednoroczny przedział stosowany jest dla ryzyka kredytowego. Drugim parametrem jest poziom ufności, który określa prawdopodobieństwo, że VaR nie przekroczy założonej maksymalnej straty. Powszechnie używanymi poziomami ufności są 99% i 95%. Po trzecie VaR podawany jest w jednostkach pieniężnych albo jako procentowy udział straty w wartości portfela.

W rozdziale tym podana zostanie definicja wartości zagrożonej nazywanej również wartością narażoną na ryzyko, wartość ryzykowną, stratą wartości z tytułu ryzyka, a najczęściej z języka angielskiego *Value at Risk*. W drugiej części rozdziału opisane zostaną metody estymacji wartości zagrożonej. Na zakończenie przedstawiono zastosowania tej koncepcji miary ryzyka.

2.1. Definicja wartości zagrożonej

Wartość zagrożona jest prawdopodobnie jedną z najczęściej stosowanych, przez instytucje finansowe, miar ryzyka. Istnieje wiele definicji wartości zagrożonej. Jedna z nich opisuje wartość zagrożoną jako wartość straty, taką że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia, w zadanym okresie czasu, jest równe zadanemu poziomowi tolerancji[65].

---

[65] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.

Inne sformułowanie określa wartość zagrożoną jako maksymalną kwotę, jaką można stracić w wyniku inwestycji w portfel o określonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie ufności[66].

Wartość zagrożoną możemy również zdefiniować jako miarę, która mierzy największą oczekiwaną stratę, jaką dana instytucja może ponieść w danym okresie, przy założeniu normalnych warunków rynkowych i przy danym poziomie ufności. Wartość zagrożona ocenia ryzyko przy użyciu modeli statystycznych i symulacyjnych przeznaczonych do ustalenia zmienności aktywów w portfelu banku[67].

Z powyższych definicji wnioskujemy, że wartość zagrożona ukazuje wielkość straty jaka może być poniesiona, z określonym prawdopodobieństwem pojawienia się tej straty oraz w danym przedziale czasowym. Najogólniejsza definicja wartości zagrożonej jest następująca.

Traktujemy stopy zwrotu z instrumentów finansowych jako zmienne losowe. Wartość zagrożona portfela na poziomie ufności β, zdefiniowana jest jako najmniejsza liczba *l*, taka że prawdopodobieństwo, że strata *L* osiągnie *l*, jest nie większa niż $(1-\beta)$. Definicję tę można zapisać za pomocą wzoru:

(2.1) $$VaR_{\beta} = \inf\{\, l \in \mathbb{R} : P(L > l) \le 1-\beta\},$$

Można również wartość zagrożoną, w okresie od *t*-1 do *t* określić następująco[68]:

(2.2) $$P(P_t \le P_{t-1} - \mathrm{VaR}) = 1-\beta\,,$$

gdzie:

P_t - wartość instrumentu finansowego w momencie *t*,

β - poziom ufności (bliski 1),

$1-\beta$ - poziom istotności (bliski 0),

P - prawdopodobieństwo, że strata na danym instrumencie przekroczy wartość zagrożoną.

W modelowaniu czasami określa się wartość zagrożoną, jako procentową stratę wartości instrumentu i wyraża za pomocą logarytmicznej stopy zwrotu

[66] Best P., op. cit.
[67] Butler C., *Tajniki Value at Risk: Praktyczny podręcznik zastosowań metody VaR,* Liber, Warszawa 2001
[68] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.

$y_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1})$, P_t oznacza wartość instrumentu finansowego w momencie *t*. Wtedy wzór (2.2) można zapisać w postaci[69]:

(2.3) $$P(y_t \le -\mathrm{VaR}) = 1 - \beta$$

W związku z tym, wielkość $-\mathrm{VaR}$ ze wzoru (2.3) jest $(1-\beta)$ – kwantylem rozkładu procentowego zwrotu logarytmicznego y_t.

Wartość zagrożona, choć wydaje się prostym pojęciem, nie jest łatwa do wyliczenia. Problem leży w tym, iż należy obliczyć kwantyl na ogół nieznanego rozkładu stóp zwrotu. Jednak do oszacowania tego prawdopodobieństwa, potrzebna jest znajomość rozkładu. Prostota określenia VaR jest więc złudna. Oszacowanie VaR wymaga bowiem przyjęcia modelu opisującego stopy zwrotu.

W nowoczesnych finansach stosuje się jeszcze bardziej skomplikowane metody wyznaczania wartości zagrożonej, które opisują wartość zagrożoną jako kwantyl rozkładu warunkowego.

Niech Ω_t będzie zbiorem informacji dostępnych w dniu *t*, a y_t niech oznacza stopę zwrotu z rozważanego portfela. Dla strony zajmującej pozycję długą w danym instrumencie finansowym, jednodniową wartość zagrożoną, na poziomie istotności $1-\beta$ określamy wzorem[70]:

(2.4) $$\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(1-\beta) = \sup\{v : P(y_{t+1} \le -v \mid \Omega_t) \ge 1-\beta\}.$$

Dla strony zajmującej pozycję krótką, jednodniowa wartość zagrożona na poziomie istotności $1-\beta$ definiujemy jako:

(2.5) $$\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(1-\beta) = \sup\{v : P(y_{t+1} \ge v \mid \Omega_t) \ge 1-\beta\}.$$

Ta definicja uwzględnia fakt niejednoznaczności określenia kwantyla w sytuacji, gdy rozkład stop zwrotu zawiera atomy, czyli, jeżeli istnieją wartości, dla których prawdopodobieństwo przyjęcia jest dodatnie.

W przypadku, gdy rozkłady warunkowe $y_{t+1} \mid \Omega_t$ nie zawierają atomów, definicje (2.4) i (2.5) przyjmują postać:

(2.6) $$\mathrm{P}(y_{t+1} \le -\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(1-\beta) \mid \Omega_t) = 1-\beta.$$

(2.7) $$\mathrm{P}(y_{t+1} \ge \mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(1-\beta) \mid \Omega_t) = 1-\beta.$$

---

[69] Doman M. Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004

[70] Ibidem

W literaturze przedmiotu oszacowania empiryczne wartości zagrożonej dokonywane są oddzielnie dla pozycji długiej i krótkiej, gdyż często w rozkładach zwrotów występuje asymetria. Rozkłady zmiennych y_t i $-y_t$ nie są zatem jednakowe.

2.2. Metody estymacji wartości zagrożonej

Istnieje bardzo wiele modeli stosowanych do szacowania wartości zagrożonej. Każdy z modeli posiada swój zbiór założeń, jednak z oczywistych względów, wszystkie one opierają się na przekonaniu, że historyczne dane rynkowe są źródłem informacji pozwalających określić przyszłe zmiany cen instrumentów finansowych. Do powszechnie stosowanych metod wyznaczania VaR należą[71]:

- metoda wariancji – kowariancji,
- symulacja historyczna,
- symulacja Monte Carlo,
- metodologia *RiskMetrics*.

2.2.1. Metoda wariancji - kowariancji

Metoda wariancji – kowariancji lub inaczej mówiąc delta-normalna została rozpowszechniona przez J.P Morgan, we wspomnianym wcześniej dokumencie *RiskMetrics*[72]. Metoda ta opiera się na założeniu, że rozkład stóp zwrotu składników portfela jest rozkładem normalnym. Dzięki temu, że liniowa kombinacja zmiennych o rozkładzie normalnym, również ma rozkład normalny, rozkład stopy zwrotu z portfela również jest normalny.

W modelu tym wykorzystujemy równania[73]:

(2.8) $$\mu_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i ,$$

(2.9) $$\sigma_P = \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}} .$$

Równanie (2.8) opisuje wartość oczekiwaną stopy zwrotu z portfela, a (2.9) to odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela.

Ponadto:

[71] Jorion P., *Value at Risk …*
[72] *RiskMetrics* Technical Document.
[73] Ibidem

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu,

$x_i = \frac{V_i}{V_p}$,

V_i - wartość pozycji *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu, wyrażona w jednostkach pieniężnych,

V_P - wartość portfela,

y_i - stopa zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

$\bar{y}_i$ - wartość oczekiwana stopy zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ - wektor udziałów w portfelu,

Σ - macierz kowariancji pomiędzy wszystkimi stopami zwrotu *n*- instrumentów finansowych.

Wartość zagrożoną dla pojedynczego instrumentu finansowego można otrzymać korzystając z następującego równania[74]:

(2.10) $$VaR = -(\mu - c\sigma)W_0,$$

gdzie:

c - stała zależna od poziomu ufności,

σ - odchylenie standardowe stóp zwrotu,

μ - średnia rozkładu stóp zwrotu,

W_0 - wartość obecna instrumentu,

Wielkość stałej c jest zależna od poziomu ufności β. Dla $\beta = 99\%$, $c = 2{,}32$, natomiast dla $\beta = 95\%$, $c = 1{,}65$. Wielkości te odczytać można z tablic statystycznych dla wartości dystrybuanty rozkładu normalnego, gdyż c jest kwantylem rozkładu normalnego odpowiednio dla prawdopodobieństwa $\beta = 99\%$ i dla $\beta = 95\%$.

Często, dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się, że wartość oczekiwana μ wynosi zero. Wzór (2.10) przyjmuje wtedy postać:

(2.11) $$VaR = c \times \sigma \times W_0$$

Zaletą przedstawionej metody jest jej łatwość w implementacji oraz szybkość wyliczeń nawet przy portfelu złożonym z ogromnej ilości aktywów. Natomiast jej wadą jest to, że nie uwzględnia obserwowanej w badaniach empirycznej własności „grubych ogo-

[74] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.

nów" dla rozkładów stóp zwrotu[75]. Ponadto kolejnym problemem jest zastosowanie tej metody dla portfela, w którego składzie znajdują się niektóre instrumenty pochodne, jak na przykład opcje[76].

2.2.2. Metoda symulacji historycznej

Metoda symulacji historycznej jest jedną z najprostszych i najbardziej zrozumiałych metod obliczania wartości zagrożonej. Metoda ta polega na wykorzystaniu danych historycznych, którymi są historyczne stopy zwrotu analizowanego instrumentu finansowego. Historyczne stopy zwrotu umożliwiają określenie empirycznego rozkładu stóp zwrotu. To pozwala na określenie wartości zagrożonej poprzez wyznaczenie kwantyla tego rozkładu[77].

Symulacja historyczna oparta jest na pojęciu ruchomego okna. Chcąc wyliczyć wartość zagrożoną na dzień $T+1$ ustala się okno, o odpowiedniej długości, kończące się zwrotem y_T. Zazwyczaj jest to okres od sześciu miesięcy do dwóch lat. Na podstawie zwrotów zawartych w oknie, wylicza się $(1-\beta)$ - kwantyl empiryczny. Wartość zagrożona na dzień $T+1$, na poziomie istotności $1-\beta$, dla zajmującego pozycję długą jest liczbą przeciwną do tego kwantyla. W celu wyznaczenia wartości zagrożonej na następny dzień okno przesuwa się o jedną obserwację i cała procedura jest powtarzana[78].

Korzyścią płynącą z wykorzystywania tej metody, jest jej prostota w implementacji i fakt, że nie wymagana ona znajomości rozkładu stóp zwrotu akcji, w szczególności, nie musi to być rozkład normalny.

Mimo, że w metodzie tej nie ma wyraźnego założenia o rozkładzie stóp zwrotu, to założenie to występuje w sposób niejawny: przyjmuje się, że rozkład nie zmienia się w obszarze okna. Zatem istnieje logiczna sprzeczność metody symulacji historycznej. Jeżeli zakłada się, że wszystkie zwroty w obszarze okna mają taki sam rozkład, to z własności przechodniości relacji posiadania takiego samego rozkładu wynika, że wszystkie rozpatrywane zwroty mają taki sam rozkład. Nie ma zatem sensu ustalanie długości okna. Problem pojawia się również, gdy chcemy ustalić długość okna, gdyż prognozy wartości za-

[75] Grube ogony rozkładów stóp zwrotu oznaczają stosunkowo duże prawdopodobieństwo występowania obserwacji ekstremalnych.
[76] Jorion P., *Value at Risk …*
[77] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.
[78] Doman M. Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki…*

grożonej oparte na symulacji historycznej są sensowne tylko wtedy, gdy dane historyczne wykorzystywane do ich obliczenia mają w przybliżeniu ten sam rozkład.

Etapy wyliczania wartości zagrożonej za pomocą metody historycznej symulacji są następujące[79]:

- dla każdego składnika portfela tworzymy procentowe zmiany cen,
- wyznaczamy wartość portfela w celu utworzenia funkcji rozkładu zysków i strat ($P\&L$),
- porządkujemy rosnąco dany szereg zmian wartości portfela,
- wyliczamy wartość zagrożoną dla wymaganego poziomu ufności β.

Skuteczność tej metody zależy od tego, czy rozkład stopy zwrotu nie zmienia się w czasie. Jeżeli tak jest, to oszacowania na podstawie danych historycznych dają dobre oszacowania wartości zagrożonej[80].

Zaletami wykorzystania metody symulacji historycznej są między innymi prostota obliczeń, brak potrzeby liczenia zmienności i korelacji oraz to, że odpowiednie dobranie danych historycznych uwzględni wyjątkowe obserwacje. Metodę tę można stosować również do szacowania wartości zagrożonej portfela, który zawiera opcje.

Jednakże, nie jest to metoda idealna, gdyż, jak każda, posiada pewne wady. Po pierwsze potrzebna jest duża liczba danych rynkowych o cenach historycznych. W celu uzyskania 1000 niezależnych symulacji jednodniowych stóp zwrotu potrzebujemy aż 4 lat nieprzerwanych danych. Problemem jest uzyskanie ich dla nowych instrumentów, w związku z tym zastosowanie metody historycznej symulacji staje się niemożliwe. Ponadto metoda ta może szybko stać się trudna do zastosowania dla portfeli o dużych rozmiarach[81].

2.2.3. Metoda symulacji Monte Carlo

Ostatnią metodą, wykorzystywaną do estymacji wartości zagrożonej, jest symulacja Monte Carlo. Pojęciowo jest to metoda prosta, jednak obliczeniowo bardzo wymagająca. Podstawą w tej metodzie jest przyjęcie pewnego hipotetycznego modelu, opisującego kształtowanie się stóp zwrotu. Model ten jest oparty na doświadczeniach z przeszłości lub przyjmowany jest na podstawie wiedzy merytorycznej o rozpatrywanych stopach zwrotu.

[79] Jorion P., *Value at Risk …*
[80] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem.*
[81] Jorion P., *Value at Risk …*

Pewien rodzaj symulacji Monte Carlo obliczania wartości zagrożonej może wyglądać następująco. Na wstępie określamy liczbę N iteracji do wykonania. Jeżeli chcemy, aby oszacowanie wartości zagrożonej, uzyskane za pomocą tej metody było wiarygodne, należy wykonać przynajmniej 10 000 iteracji. Dla każdej iteracji generujemy hipotetyczny model zachowania się cen rynkowych. Liczby te generujemy za pomocą programu komputerowego i uzyskujemy zestaw liczb losowych z przedziału (0, 1). Następnie zestaw liczb losowych jest konwertowany w rozkład normalny poprzez zastosowanie funkcji odwrotnej dystrybuanty dla każdej realizacji[82]. Później porządkujemy rosnąco szereg zmian cen instrumentu finansowego. Wyniki wszystkich iteracji umożliwią nam określenie empirycznego rozkładu stóp zwrotu. Z rozkładu tego możemy określić kwantyl, a zatem wyliczyć wartość zagrożoną.

Przedstawione rozważania dotyczą wyłącznie symulacji Monte Carlo dla pojedynczego instrumentu. Obliczenie wartości zagrożonej dla portfela, wymaga uwzględnienia współczynników korelacji pomiędzy poszczególnymi aktywami, co jest procesem skomplikowanym, dlatego metoda ta nie jest prosta.

Symulacja Monte Carlo używana jest do wyliczania wartości zagrożonej portfeli zawierających papiery wartościowe o nieliniowym rozkładzie stóp zwrotu np. opcje, jak i również dla instrumentów, których historia rzeczywistych cen jest niewystarczająca do oszacowania wartości zagrożonej. Ponadto dla portfeli złożonych z akcji, lepszym modelem jest metoda wariancji - kowariancji[83].

Zaletą korzystania z metody symulacji Monte Carlo jest to, że jest ona bardzo precyzyjna. Z drugiej strony jest to metoda dosyć czasochłonna oraz istnieje duże ryzyko modelu.

2.2.4. Metodologia RiskMetrics

Najpowszechniej stosowanym narzędziem do szacowania VaR jest metodologia *RiskMetrics*. Została ona zaproponowana przez amerykański bank inwestycyjny JP Morgan. Przy założeniu, że warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela jest równa zero, w metodologii tej VaR wylicza się na podstawie równania (2.10) przekształconego do postaci: $VaR = c\sigma_t W_0$.

[82] Best P., op. cit.
[83] Duffie D., Pan J., *An Overview of Value at Risk*, Options Markets, London: Edward Elgar, 2001.

Wielkość σ_t może być interpretowana jako warunkowe odchylenie standardowe stopy zwrotu. Pod warunkiem informacji znanej na koniec okresu *t*-1 jest opisana równaniem:

(2.14) $$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)y_t^2,$$

gdzie:

$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$,

ε_t ~ iid(0, 1).

Dla dziennych danych, współczynnik opóźnienia $\lambda = 0.94$.

Pomimo tego, że jest to mało wyrafinowana metoda, daje zadawalające rezultaty. Warto zauważyć, że równanie (2.14) może być traktowane jako szczególny przypadek równania modelu IGARCH[84]. Kolejnym istotnym spostrzeżeniem jest to, że dla tego modelu wpływ wcześniejszych obserwacji oraz wcześniejszych oszacowań VaR na bieżące oszacowania VaR maleje w sposób wykładniczy.

2.3. Test Kupca

Oceny jakości wyliczeń wartości zagrożonej można dokonać za pomocą testu Kupca[85]. Jest to test ilorazu wiarygodności, który został rozwinięty przez Kupca. Oznaczmy przez *N* liczbę przekroczeń, czyli sytuacji, gdy strata wartości portfela jest większa od prognozowanej wartości zagrożonej. Przez *T* oznaczamy wielkość próby. Wtedy liczba przekroczeń wartości zagrożonej ma rozkład Bernoullego ($N \sim \mathrm{B}(T, 1-\beta)$). Idealnie, udział przekroczeń N/T powinien być równy prawdopodobieństwu $1-\beta$. Hipoteza zerowa i alternatywna testu Kupca są postaci:

$H_0 : N/T = 1-\beta$,

$H_\beta : N/T \neq 1-\beta$.

Statystyka testowa jest następująca:

(2.15) $$LR = 2\left(\ln\left(\left(\frac{N}{T}\right)^N \left(1-\frac{N}{t}\right)^{T-N}\right) - \ln(\beta^{T-N}(1-\beta)^N)\right).$$

[84] Doman M. Doman R., *Ekonometryczne modelowanie ...*

[85] Kupiec D., *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,* Journal of Derivatives, 2, 1995

Przy prawdziwej hipotezie zerowej, statystyka *LR* ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$.. Przedziały ufności dla rozważanych poziomów istotności zostały przedstawione w Tabeli 2.1. Zauważyć można, że im mniejsze lewostronne prawdopodobieństwo, tym trudniej jest potwierdzić słuszność stosowania wybranego modelu estymacji wartości zagrożonej.

Tabela 2.1. Przedziały nieodrzucenia modelu, w oparciu o test Kupca.

Lewostronne prawdopodobieństwo	Wielkość próby			
	250	500	750	1000
5.00%	$7 \leq N \leq 19$	$17 \leq N \leq 35$	$27 \leq N \leq 49$	$38 \leq N \leq 64$
1.00%	$1 \leq N \leq 6$	$2 \leq N \leq 9$	$3 \leq N \leq 13$	$5 \leq N \leq 16$
0.50%	$0 \leq N \leq 4$	$1 \leq N \leq 6$	$1 \leq N \leq 8$	$2 \leq N \leq 9$
0.10%	$0 \leq N \leq 1$	$0 \leq N \leq 2$	$0 \leq N \leq 3$	$0 \leq N \leq 3$
0.01%	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 1$	$0 \leq N \leq 1$

Źródło: Van den Goorbergh R., Vlaar P., *Value-at-risk analysis of stock returns historical simulation, variance techniques or tail index estimation?*, (dostępne www.dnb.nl)

Należy zwrócić uwagę na fakt, że hipoteza zerowa testu Kupca jest odrzucana zarówno w wypadku modelu wyliczającego VaR w sposób nadmiernie niefrasobliwy (niedoszacowanie potencjalnej straty), jak i dla modelu nadmiernie konserwatywnego (przeszacowanie VaR)[86].

2.4. Zastosowanie wartości zagrożonej

Wartość zagrożona może odgrywać niebagatelną rolę w funkcjonowaniu instytucji finansowych. Do zalet płynących z wykorzystania tej koncepcji należy między innymi fakt, że jest to miara ryzyka łatwa do interpretacji. Ułatwia to menedżerom podejmowanie decyzji. Zastosowanie wartości zagrożonej prowadzi do uzyskania pojedynczej liczby, która sumarycznie określa ekspozycję firmy na ryzyko[87].

Wartość zagrożona jest podejściem, które umożliwia określenie wielkości straty przy jednoczesnym określeniu prawdopodobieństwa jej wystąpienia. Stanowi to o zasadniczej przewadze wartości zagrożonej nad tradycyjnymi metodami pomiaru ryzyka, które nie mówią nic na temat prawdopodobieństwa poniesienia straty[88].

Ponadto wartość zagrożona może być odniesiona zarówno do pojedynczego instrumentu finansowego, jak również portfela. Po odpowiednich modyfikacjach, może być

[86] Doman M., Doman R., *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolters Kluwers, Kraków 2009
[87] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje…*
[88] Best P., op. cit.

także stosowana do wyliczania ryzyka nawet bardziej skomplikowanych instrumentów finansowych, jak na przykład opcji. Wartość zagrożona pomaga także w ocenie wyników instytucji finansowych. Pierwotnie ocena tych wyników oparta była tylko na osiąganych stopach zwrotu z portfela. Obecnie często w takiej sytuacji wykorzystuje się wartość zagrożoną, występuje ona na przykład w koncepcji RAPM (*Risk Adjusted Performance Measurement*).

Metoda wartości narażonej na ryzyko pozwala na bezpośrednie porównywanie ryzyka występującego w różnych obszarach działalności na przykład ryzyka rynkowego czy kredytowego. Również umożliwia zaplanowanie redukcji ryzyka, poprzez dywersyfikację. Wykorzystując tę metodę przy konstrukcji portfela, można tak sterować zmianami udziałów, aby ryzyko naszej inwestycji było jak najniższe. Instytucje finansowe są ponadto zobligowane do korzystania z tej metody w ocenie ryzyka, poprzez wymagania kapitałowe i sprawozdawczość wobec organów nadzoru.

Jednakże VaR jako miara ryzyka posiada także liczne wady. Metoda wartości zagrożonej nie uwzględnia sytuacji ekstremalnych, np. krachów giełdowych[89]. Wiadomo, że są to bardzo mało prawdopodobne sytuacje, rzadko występujące, ale jednak możliwe i bardzo niebezpieczne, jeżeli chodzi o obszar zarządzania ryzykiem. Ponadto nie ma jednolitej metody wyliczania tej miary ryzyka. Różne metody obliczania wartości zagrożonej dają różne wartości potencjalnej straty. Niedoszacowanie wartości narażonej na ryzyko może spowodować brak płynności, a znowu przeszacowanie, uniemożliwia nam wykorzystanie całkowitych środków na inwestycje. Może to doprowadzić do gromadzenia nadmiernych rezerw kapitału w sytuacji, gdy w rzeczywistości nie jest to potrzebne. Niektóre metody wyliczania wartości zagrożonej stosują skomplikowany aparat matematyczny, co może stanowić barierę podczas implementacji tych modeli. Ponadto konieczne jest stworzenie odpowiedniej bazy danych, które pozwolą na właściwe oszacowanie wartości zagrożonej. Stosowanie takich metod w praktyce wymaga odpowiedniego oprogramowania i sprzętu komputerowego o wysokiej mocy obliczeniowej. Na zakończenie warto dodać, że w pewnych sytuacjach problemem jest określenie wartości zagrożonej dla portfela złożonego z kilku instrumentów finansowych. Może się bowiem zdarzyć, że wartość zagrożona portfela

[89] Yamai Y., Yoshiba T., *Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk under market stress,* Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002

złożonego z dwóch instrumentów jest większa od sumy poszczególnych wartości zagrożonych tych instrumentów, co jest sprzeczne z intuicją[90].

Dlatego istotnym zadaniem teoretyków, jak i praktyków, stało się poszukiwanie alternatywnej miary ryzyka. Wydaje się, że warunkowa wartość zagrożona (CVaR) przedstawiona w kolejnym rozdziale może z czasem zająć miejsce wartości zagrożonej jako miary ryzyka, gdyż posiada lepsze, bardziej zgodne z intuicją, własności.

[90] Yamai Y., Yoshiba T., *Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition and optimization*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002
Yamai Y., Yoshiba T., *On the validity of value-at-risk: Comparative analyses with expected shortfall*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002

ROZDZIAŁ III

WARUNKOWA WARTOŚĆ ZAGROŻONA

Powszechnie używaną przez instytucje finansowe miarą ryzyka jest opisana w poprzednim rozdziale wartość zagrożona. Jej wykorzystanie jest zalecane przez organy nadzoru, między innymi Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego, który w umowach Basel I i Basel II, wymaga wykorzystywania wartości zagrożonej do wyliczania ryzyka.

Dobra miara ryzyka powinna być funkcją określoną w taki sposób, aby spełniać pewne intuicyjne własności. Najistotniejszym w tym kontekście wydaje się to, żeby miara ryzyka zdywersyfikowanego portfela była nie większa od sumy ryzyka poszczególnych składników portfela. W przypadku wartości zagrożonej, jeżeli rozkłady stóp zwrotu ze składników portfela nie są eliptyczne, ta własność nie zawsze zachodzi. Może się wtedy zdarzyć, że wartość zagrożona portfela inwestycyjnego może być wyższa aniżeli suma wartości zagrożonych poszczególnych składników.

Ponadto dobra miara ryzyka powinna mieć taką własność, że dołączenie instrumentu wolnego od ryzyka zmniejsza łączne ryzyko portfela. Również proporcjonalna zmiana wartości pozycji powinna powodować identyczną zmianę miary ryzyka. Co więcej, jeżeli dla pewnej pozycji, zmiana wartości jest zawsze nie mniej korzystna niż dla zmiany wartości drugiej pozycji, to ta pierwsza nie może być obarczona większym ryzykiem.

Przykładem miary ryzyka, która spełnia powyższe intuicyjne własności jest warunkowa wartość zagrożona (*Conditional Value at Risk – CVaR).* Została ona zaproponowana przez Rockafellara i Uryaseva[91] w 2000 r. Jest to zatem stosunkowo nowa metoda.

[91] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk,* The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 2000

W 2000 roku Pflug[92] udowodnił, że warunkowa wartość zagrożona spełnia wspomniane wyżej postulaty.

W rozdziale tym przedstawione zostały definicje koherentnej miary ryzyka i warunkowej wartości zagrożonej oraz sposoby obliczania CVaR dla różnych rozkładów stóp zwrotu.

3.1. Koherentne miary ryzyka

Warunkowa wartość zagrożona stanowi przykład koherentnej miary ryzyka, czyli miary ryzyka spełniającej pewien zbiór aksjomatów, wynikających w naturalny sposób z intuicyjnego pojęcia ryzyka i zarządzania ryzykiem. Aksjomaty takie zostały wprowadzone przez Artznera i in. w pracy z 1999 r. poświęconej matematycznym własnościom miary ryzyka[93].

Zgodnie z ich rozważaniami dobra miara ryzyka powinna spełniać następujące własności:

- subaddytywność – ryzyko sumy zmiany wartości dwóch pozycji jest nie większe od sumy ryzyka zmiany każdej pozycji,
- monotoniczność – jeżeli zmiana wartości pozycji jest zawsze nie mniej korzystna aniżeli zmiana wartości drugiej pozycji, to nie może być ona obarczona większym ryzykiem,
- dodatnia jednorodność – proporcjonalna zmiana wartości pozycji powoduje identyczną zmianę wartości ryzyka,
- niezmienniczość – jeżeli inwestujemy w instrument wolny od ryzyka, to nie zwiększa to łącznej wartości ryzyka.

Zwykle kiedy mówi się o pomiarze ryzyka, rozważa sie przyszłe zmiany wartości portfela. W pracy Artznera i in. ryzyko jest związane z niepewną przyszłą wartością netto portfela inwestycyjnego. Modeluje się zatem wartość, a nie stopę zwrotu. W związku z tym omawiając pojęcie koherentnej miary ryzyka rozważamy zmienne losowe, które możemy interpretować jako możliwe przyszłe wartości obecnej inwestycji[94].

---

[92] Pflug G., *Some remarks on the Value-at-Risk and the conditional Value-at-Risk.* Kluwer Academic Publishers, 2000

[93] Artzner P., i in., *Coherent Measures of Risk.*

[94] Artzner, P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Thinking Coherently.* RISK, 10, 1997.

Niech Ω oznacza zbiór stanów natury (przestrzeń zdarzeń elementarnych), o którym zakładamy że jest skończony. Z kolei $\mathcal{G}$ niech będzie zbiorem wszystkich możliwych ryzyk, tzn. zbiorem wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na Ω. Stożek elementów nieujemnych w $\mathcal{G}$ oznaczamy przez L_+ natomiast stożek elementów ujemnych przez L_-. Przez $\mathcal{A}$ oznaczamy podzbiór zbioru $\mathcal{G}$ zawierający wszystkie stany akceptowalne po uwzględnieniu ograniczeń narzuconych przez instytucje nadzoru. Tak określony zbiór stanów akceptowalnych $\mathcal{A}$ spełnia następujące założenia[95]:

- każda suma akceptowalnych inwestycji będzie inwestycją akceptowalną,
- każda inwestycja z prawie pewnym nieujemnym rezultatem będzie akceptowalna, a każda inwestycja z prawie pewnym negatywnym wynikiem nie jest akceptowalna,
- zbiór stanów akceptowalnych jest wypukły,
- iloczyn stanu akceptowalnego jest akceptowalny.

Powyższe własności mogą być sformułowane w ścisłym języku matematycznym, jednak ponieważ własności miar koherentnych nie są głównym tematem tej pracy, zostawiamy je w niniejszej, intuicyjnej formie.

Obecnie przechodzimy do zdefiniowania pojęcia koherentnej miary ryzyka.

Przez miarę ryzyka określoną na zbiorze $\mathcal{G}$ rozumiemy funkcję $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$.

Definicja 3.1

Zbiór stanów akceptowalnych powiązany z miarą ryzyka ρ definiujemy jako:

$$A_\rho = \{x \in \mathcal{G} : \rho(X) \leq 0\}.$$

Definicja 3.2

Załóżmy, że dany zbiór $\mathcal{G}$ oraz miara ryzyka określona i interpretowana jak powyżej Miarę $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ nazywamy koherentną miarą ryzyka, jeżeli spełnia ona przedstawione poniżej aksjomaty: subaddytywności, dodatniej jednorodności, monotoniczności oraz niezmienniczości[96].

---

[95] Ibidem

[96] Ibidem

Aksjomat subaddytywności

Dla każdej pary $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ mamy:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Subaddytywność odzwierciedla efekt dywersyfikacji ryzyka. Oznacza to, że suma ryzyk pojedynczych inwestycji nie przekracza całkowitego ryzyka zdywersyfikowanego portfela. Dodatnia jednorodność oznacza, że proporcjonalna zmiana wartości pozycji daje analogiczną zmianę miary ryzyka.

Aksjomat monotoniczności

Dla każdych $X, Y \in \mathcal{G}$ takich, że prawie na pewno zachodzi:

$$\rho(Y) \leq \rho(X)$$

Monotoniczność można interpretować w następujący sposób. Jeżeli dla pewnej pozycji zmiana wartości jest zawsze nie mniej korzystna niż dla zmiany wartości drugiej pozycji, to nie jest ona obarczona większym ryzykiem.

Aksjomat dodatniej jednorodności

Dla każdego $\lambda > 0$ i dla każdego $X \in \mathcal{G}$ zachodzi:

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$$

Zwielokrotnienie inwestycji powoduje proporcjonalną zmianę ryzyka.

Aksjomat niezmienniczości

Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ i $X \in \mathcal{G}$ mamy:

$$\rho(X + ar) \leq \rho(X) - a$$

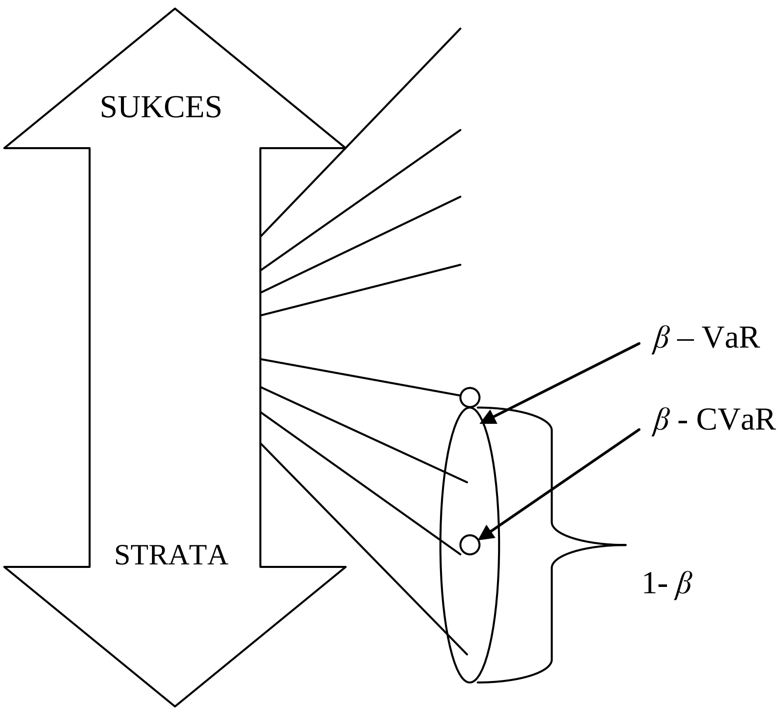
gdzie *r* jest stopą zwrotu z inwestycji w instrument pozbawiony ryzyka, natomiast *a* jest liczbą jednostek tego instrumentu.

Niezmienniczość natomiast mówi o tym, że jeżeli do początkowej inwestycji dodamy pozycję w jednostkach ilość *a* instrumentu wolnego od ryzyka, to zmniejsza to miarę ryzyka o *a*. Zatem inwestowanie w instrument wolny od ryzyka zmniejsza ryzyko całego portfela. Jeżeli większa część inwestycji składa się z instrumentów wolnych od ryzyka, to ryzyko całego portfela jest niewielkie. Jednakże, gdy portfel zawiera bardzo ryzykowny instrument, to poprzez inwestycję w instrumenty wolne od ryzyka nie można zmniejszyć ryzyka aż do zera. Zawsze niewielka część naszego portfela będzie ryzykowna, ale istotność tego składnika będzie coraz niższa.

Ważną cechą koherentnych miar ryzyka wynikającą bezpośrednio z aksjomatów subaddytywności i dodatniej jednorodności jest wypukłość. Jak wiadomo wypukłość funkcji ma szczególne znaczenie w teorii optymalizacji portfela inwestycyjnego i jest własnością, która decyduje o istnieniu ekstremów globalnych.

3.2. Warunkowa wartość zagrożona dla dowolnego rozkładu strat

Przy danym poziomie ufności warunkową wartość zagrożoną możemy najprościej zdefiniować jako wartość oczekiwaną straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną odpowiadającą temu poziomowi ufności. Warunkowa wartość zagrożona jest przykładem koherentnej miary ryzyka[97], spełnia bowiem cztery wymienione w poprzednim punkcie aksjomaty: subaddytywność, monotoniczność, dodatnią jednorodność oraz niezmienniczość.



Rysunek 3.1. Warunkowa wartość zagrożona dla poziomu ufności β.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie Uryasev S., *Introduction to the theory of probabilistic functions and percentiles (Value-at-Risk),* Kluwer Academic Publishers, 2000

[97] Acerbi C., Tasche D., *On the coherence of expected Shortfall,* (dostępne http://www.gloriamundi.org)
Acerbi C., Tasche D., *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to value at risk,* (dostępne http://www.gloriamundi.org)

Obliczenie wartości zagrożonej dla poziomu $\beta = 95\%$ daje odpowiedź na pytanie: jaka jest najmniejsza strata, wśród największych strat, które stanowią 5% wszystkich najgorszych przypadków. Natomiast warunkowa wartość zagrożona, dla takiego samego poziomu ufności ukazuje nam jaka jest średnia strata wśród wszystkich największych strat, które stanowią 5% wszystkich najgorszych przypadków.

Zaprezentujemy teraz podejście oparte na pracach Rockafellara i Uryaseva, które będzie później zastosowane w badaniach empirycznych omawianych w pracy. Podejście to pozwala na stosunkowo łatwe szacowanie warunkowej wartości zagrożonej portfela oraz wykorzystanie jej jako miary ryzyka w optymalizacji portfela.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ będzie funkcją straty, zależną od wektora decyzji $\mathbf{x}$, wybranego z pewnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ i wektora losowego $\mathbf{y} \subset \mathbb{R}^m$ Przez $\mathbf{y}$ rozumiemy tu wektor zmiennych losowych, których dystrybuanta określa rozkład funkcji straty. Wektor $\mathbf{x}$ można interpretować jako reprezentację portfela, a *X* jako zbiór dostępnych portfeli. Wektor $\mathbf{y}$ opisuje niepewność, czyli zmienność rynku, która ma wpływ na stratę[98].

W rozpatrywanych modelach przez x_j oznaczamy procentowy udział *j*-tego instrumentu w portfelu. Zatem $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$, gdzie *n* jest liczbą spółek w portfelu. Udziały $x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n,$ więc nie jest dopuszczalna krótka sprzedaż oraz $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ Przez $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ oznaczamy wektor stóp zwrotu, gdzie y_j jest szeregiem stóp zwrotu dla *j*-tego instrumentu.

Dla każdego **x,** funkcja straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ jest zmienną losową. Dla uproszczenia rozważań zakładamy w tym miejscu, że rozkład prawdopodobieństwa wektora **y** posiada gęstość, którą oznaczamy $p(\mathbf{y})$ Jednakże w dalszych rozważaniach analityczna reprezentacja $p(\mathbf{y})$ nie jest wymagana.[99]

Prawdopodobieństwo, że funkcja straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ nie osiągnie progu (wielkości) α określone jest wzorem:

(3.1) $$\Psi(\mathbf{x},\alpha) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \alpha} p(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

[98] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.*
[99] Acerbi, C., Nordio C., Sirtori C. *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.* Derivatives Desk, Abaxbank, Milano Italy, 2001.

gdzie $p(\mathbf{y})$ jest funkcją gęstości wektora $\mathbf{y}$.

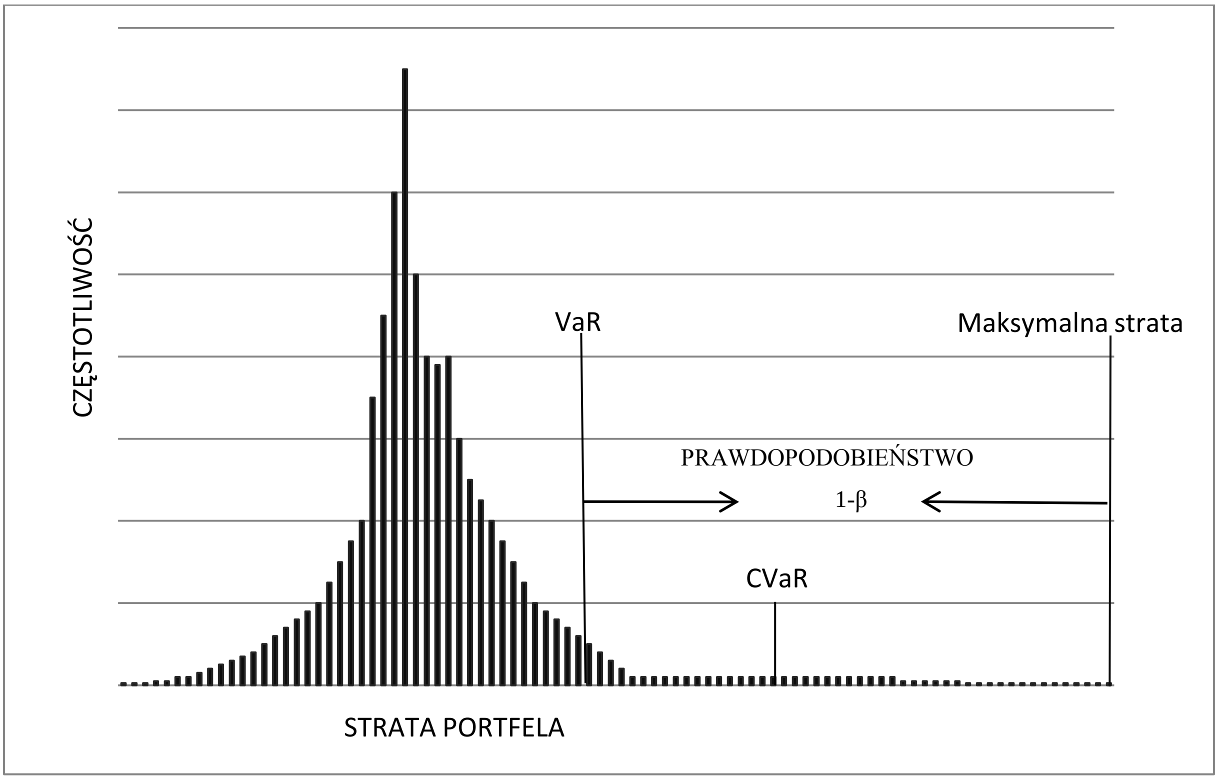
Zatem Ψ jako funkcja argumentu α (przy ustalonym **x)** jest dystrybuantą funkcji straty i można ją wykorzystać do zdefiniowania wartości zagrożonej oraz warunkowej wartości zagrożonej.

Ogólnie mówiąc, funkcja $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ jest niemalejąca ze względu na α i jest prawostronnie ciągła ze względu na $\mathbf{x}$, ale niekoniecznie lewostronnie ciągła, gdyż mogą wystąpić skoki. Jednak zakłada się, że $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ jest ciągłą funkcją α.

Definicja 3.2

Wartość zagrożoną VaR dla losowej funkcji straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ i danego poziomu ufności β z przedziału (0, 1) zdefiniowano w następujący sposób[100]:

(3.2) $$\alpha_\beta(\mathbf{x}) = \min\{\alpha \in R : \Psi(\mathbf{x},\alpha) \ge \beta\}.$$



Rysunek 3.2. Warunkowa wartość zagrożona dla funkcji straty, przy poziomie ufności β.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications*, (dostępne http://www.gloriamundi.org)

[100] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.*

Warunkowa wartość zagrożona jest warunkową wartością oczekiwaną funkcji straty powiązanej z wektorem **x**, pod warunkiem, że funkcja straty będzie równa bądź większa niż wartość zagrożona.

Definicja 3.3

Warunkową wartość zagrożoną CVaR dla funkcji straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ i danego poziomu ufności β z przedziału (0, 1) określamy następującym wzorem[101]:

(3.3) $$\Phi_{\beta}(\mathbf{x}) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \alpha_{\beta}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,p(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

Wzór (3.3) odpowiada wzorowi na warunkową wartość oczekiwaną[102] dla rozkładów ciągłych, przy danym warunku – zdarzeniu zachodzącym z prawdopodobieństwem $(1-\beta)$. W przypadku CVaR warunkiem tym jest to, aby funkcja straty była większa lub równa VaR. Łatwo zauważyć, że dopóki nie obliczy się wartości zagrożonej, nie można wyznaczyć warunkowej wartości zagrożonej.

W dotychczasowych rozważaniach zajmowaliśmy się tylko wielkościami teoretycznymi nie biorąc pod uwagę trudności w zastosowaniu praktycznym powyższych wzorów. Jednak w celu uniknięcia komplikacji obliczeniowych trzeba podać rozwiązanie, które umożliwiłoby wyznaczenie empirycznej wartości CVaR.

Rockafellar i Uryasev[103] zaproponowali podejście pozwalające na uniknięcie tych komplikacji. Jest ono oparte na funkcji:

(3.4) $$F_{\beta}(\mathbf{x},\alpha_{\beta}(\mathbf{x})) = \alpha_{\beta}(\mathbf{x}) + (1-\beta)^{-1} \int_{y \in R^m} [f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \alpha_{\beta}(\mathbf{x})]^{+}\,p(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\,,$$

We wzorze (3.4) $[t]^{+} = \begin{cases} t & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$.

Wartość tej funkcji przy danym **x** i poziomie ufności β jest równa sumie wartości VaR i wartości oczekiwanej przekroczenia VaR, czyli jest to po prostu równe CVaR.

Funkcja $F_{\beta}(\mathbf{x},\alpha_{\beta}(\mathbf{x}))$ jest wypukłą funkcją zmiennej **x** oraz α, co będzie miało znaczenie w dalszych rozważaniach. Często jest to również funkcja różniczkowalna względem obu zmiennych[104], od których zależy.

---

[101] Ibidem
[102] Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2000
[103] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.*
[104] Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications*.

Kolejne zaproponowane przez Rockafellara i Uryaseva uproszczenie polega na aproksymacji wartości funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ otrzymanej za pomocą losowania z rozkładu zmiennej $\mathbf{y}$, zgodnie z jego gęstością $p(\mathbf{y})$.

Jeżeli próbkowanie wygenerowało zbiór wektorów, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_q$, to odpowiadająca mu aproksymacja funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jest równa:

(3.5) $$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) = \alpha_\beta(\mathbf{x}) + \frac{1}{q(1-\beta)}\sum_{k=1}^{q}[f(\mathbf{x},\mathbf{y_k}) - \alpha_\beta(\mathbf{x})]^+$$

Funkcja aproksymująca $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jest wypukła i przedziałami liniowa ze względu na zmienną α.

Stopa zwrotu z portfela jest sumą stóp zwrotu indywidualnych instrumentów w portfelu, pomnożonych przez procentowy udział x_j. Funkcja straty dana jest wzorem:

(3.6) $$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -[x_1y_1 + \ldots + x_ny_n] = -\mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

Liniowe przybliżenie funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$, dla funkcji straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, jest postaci[105]:

(3.7) $$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) = \alpha_\beta(\mathbf{x}) + \frac{1}{(1-\beta)}\left(\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}[-\mathbf{x}^T\mathbf{y}_k - \alpha_\beta(\mathbf{x})]^+\right),$$

gdzie q – wielkość próby.

Wzór (3.7) opisuje warunkową wartość zagrożoną portfela. Wyrażenie po prawej stronie równości jest sumą VaR oraz średnią warunkową wielkości przekroczeń VaR pod warunkiem, że przekroczenie rzeczywiście nastąpiło. Czynnik $\frac{1}{1-\beta}$ wynika z definicji warunkowej wartości zagrożonej. Związane z nim jest ukryte założenie, że VaR jest oszacowany poprawnie i udział przekroczeń rzeczywiście jest równy założonemu poziomowi istotności.

Twierdzenie 3.1

Jeżeli funkcja $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jako funkcja α jest wypukła i posiada ciągłe pochodne wszystkich rzędów, to wtedy warunkowa wartość zagrożona dla ustalonego $\mathbf{x} \in X$, może być obliczona jako minimum po $\alpha \in \mathbb{R}$ z funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$, zatem:

(3.8) $$\Phi_\beta(x) = F_\beta(x,\alpha_\beta(\mathbf{x})) = \min_{\alpha \in R} F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$$

[105] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk,*

W powyższym wyrażeniu, zbiór wartości minimalnych zawiera te wartości α dla których osiągane jest minimum funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$. Zatem:

(3.9) $$A_\beta = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$$

jest niepustym domkniętym zbiorem (czasami zredukowanym do jednego punktu). Wtedy wartość zagrożoną definiujemy jako lewy punkt przedziału A_β.W szczególności:

(3.10) $$\alpha_\beta(\mathbf{x}) = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) \quad \Phi_\beta(\mathbf{x}) = F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy Rockafellara i Uryaseva[106].

Twierdzenie 3.1 pozwala na obliczanie warunkowej wartości zagrożonej, która jest równa minimalnej wartości funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$.

Głównym celem niniejszej pracy jest ocena skuteczności warunkowej wartości zagrożonej jako narzędzia służącego do zarządzania ryzykiem finansowym. W związku z tym w dalszej części wprowadzone zostaną twierdzenia, które umożliwiają wykonywanie zadań optymalizacyjnych. Dla optymalizacji portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej bardziej istotne jest Twierdzenie 3.2.

Twierdzenie 3.2

Minimalizacja warunkowej wartości zagrożonej $\Phi_\beta(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x}\in X$, jest równoważna minimalizacji funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ dla każdej pary $(\mathbf{x},\alpha)\in \mathrm{X}\times\mathbb{R}$ w tym sensie, że:

(3.11) $$\min_{x\in X} \Phi_\beta(\mathbf{x}) = \min_{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})).$$

Ponadto minimalizacja $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ ze względu na $(\mathbf{x},\alpha)\in \mathrm{X}\times\mathbb{R}$ daje jednoznaczną parę $(\mathbf{x}^*,\alpha^*)$, taką że $\mathbf{x}^*$ minimalizuje warunkową wartość zagrożoną, a α^* jest odpowiadającą wartością zagrożoną.

Ponadto $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jest wypukłą funkcją $(\mathbf{x},\alpha)$ i $\Phi_\beta(\mathbf{x})$ jest wypukła ze względu na **x**, jeżeli $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ jest wypukła ze względu na **x**.

[106] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk,*

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w artykule Rockafellar i Uryasev[107].

Z twierdzenia 3.2 wynika, że zadanie minimalizacji funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jest równoważne zadaniu optymalizacji portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej. Twierdzenie to pozwala więc na łatwe rozwiązanie problemu optymalizacji portfela. Minimalizacja funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$ jest zadaniem o wiele łatwiejszym niż minimalizacja funkcji $\Phi_\beta(\mathbf{x})$ warunkowej wartości zagrożonej.

3.3 Warunkowa wartość zagrożona dla rozkładów dyskretnych

Przedstawimy teraz rozważania na temat CVaR w sytuacji, gdy rozkład funkcji straty jest dyskretny. Sytuacja taka rzadko występuje na rynkach finansowych, ale jest powszechna w ubezpieczeniach. Ponadto analiza CVaR w przypadku rozkładu dyskretnego pozwala na lepsze zrozumienie subtelności tego pojęcia[108].

Niech $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ będzie funkcją straty, zależną od wektora decyzji $\mathbf{x}$, wybranego z pewnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ i wektora losowego $\mathbf{y} \subset \mathbb{R}^m$. Przez $\mathbf{y}$ rozumiemy tu wektor zmiennych losowych, których dystrybuanta określa rozkład funkcji straty. Wektor $\mathbf{x}$ można interpretować jako reprezentację portfela, a X jako zbiór dostępnych portfeli. Wektor $\mathbf{y}$ opisuje niepewność, czyli zmienność rynku, która ma wpływ na stratę.

Dla ciągłej funkcji straty warunkową wartością zagrożoną, przy ustalonym poziomie ufności nazywamy wartość oczekiwaną straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną odpowiadającą temu poziomowi ufności. Dla rozkładu, w którym mogą wystąpić nieciągłości funkcji straty rozpatrujemy górny CVaR (CVaR$^+$) oraz dolną warunkową wartość zagrożoną (CVaR$^-$). CVaR$^+$ nazywamy również oczekiwanym niedoborem[109] (*mean shortfall*), natomiast CVaR$^-$ nazywany jest ogonowym VaR (*tail VaR*).

[107] Ibidem

[108] Delbaen F., *Coherent risk measures on general probability spaces,* European Journal of Operational Research *116*, 2002

[109] Mausser H., Rosen D., *Beyound Var: From Measuring Risk to managing Risk,* Algo Research Quarterly, 1999

Definicja 3.4

Górną warunkową wartość zagrożoną, dla funkcji straty $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ definiujemy jako:

(3.12) $$\phi_\beta^+ = E\{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) : f(\mathbf{x},\mathbf{y}) > \alpha_\beta(\mathbf{x})\}$$

Natomiast dolny CVaR opisany jest wzorem:

(3.13) $$\phi_\beta^- = E\{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) : f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \alpha_\beta(\mathbf{x})\}$$

Warunkową wartość zagrożoną CVaR, możemy zdefiniować jako średnią ważoną górnego i dolnego CVaR[110].

Niech $\lambda_\beta(x)$ będzie prawdopodobieństwem wyznaczonym dla funkcji straty osiągającej VaR, czyli $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha_\beta(\mathbf{x})$ Zatem:

(3.14) $$\lambda_\beta(x) = \frac{\Psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) - \beta}{1-\beta}$$

Jeżeli $\Psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) < 1$ czyli istnieje szansa straty większej niż $\alpha_\beta(\mathbf{x})$, więc:

(3.15) $$\phi_\beta(\mathbf{x}) = \lambda_\beta(x)\alpha_\beta(\mathbf{x}) + [1-\lambda_\beta(x)]\phi_\beta^+$$

W przypadku jeżeli $\lambda_\beta(x) < 1$, podczas gdy $\Psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) = 1$, zatem $\alpha_\beta(\mathbf{x})$, jest największą możliwą stratą, więc $\phi_\beta(\mathbf{x}) = \alpha_\beta(\mathbf{x})$.

Dla uproszczenia zapisu CVaR jako średniej ważonej VaR i CVaR$^+$ mamy[111]:

(3.16) $$\text{CVaR} = \lambda\text{VaR} + (1-\lambda)\text{CVaR}^+,$$

gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$.

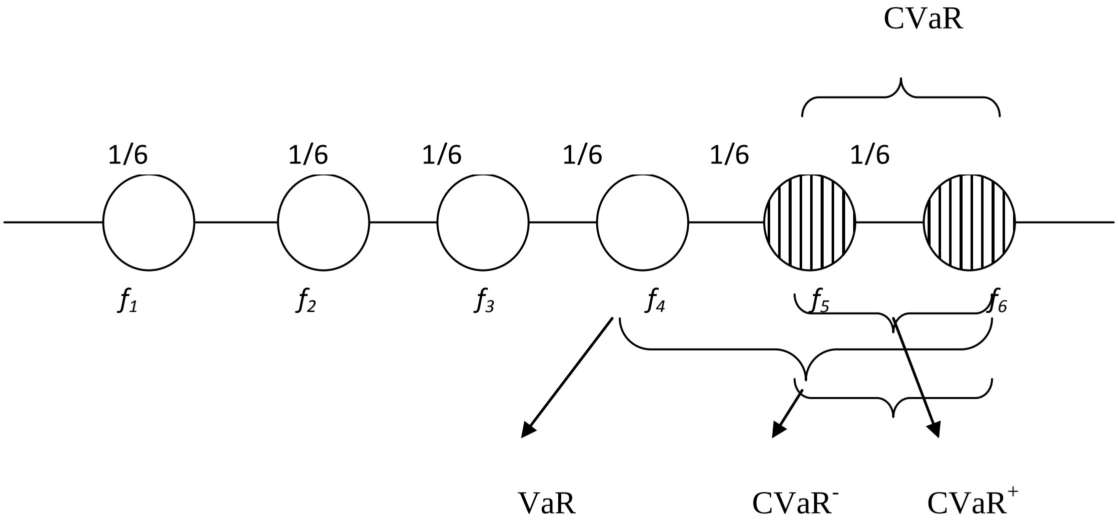
Przedstawimy teraz przykład funkcjonowania CVaR w przypadku rozkładów dyskretnych.

Rozpatrzmy sześć scenariuszy, które ukazują możliwości zainwestowania w instrumenty finansowe, danego portfela. Każdy z tych scenariuszy możemy uzyskać z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$. Zatem: $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$.

W pierwszym przypadku określamy poziom ufności $\beta = \frac{2}{3}$. Kwantyl rzędu $\frac{2}{3}$. wynosi f_5.

[110] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions,* Journal of Banking and Finance, 26/7, 2002

[111] Ibidem



Rysunek 3.3. Warunkowa wartość zagrożona dla rozkładów dyskretnych, w przypadku gdy poziom ufności „nie rozdziela” atomu.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications,*

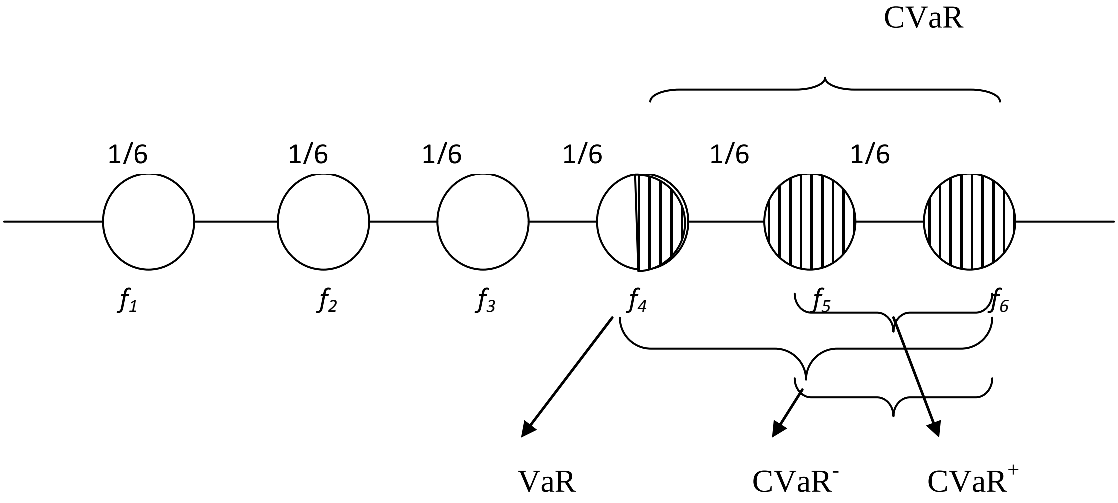
Zatem β „nie rozdziela” atomu (kwantyla). W związku z tym VaR<CVaR$^-$ <CVaR=CVaR$^+$.

$$\lambda = \frac{\Psi - \alpha}{1-\alpha} = 0 \ .$$

Podstawiając dane do wzoru (3.16) mamy:

$$\text{CVaR} = \text{CVaR}^+ = \frac{1}{2} f_5 + \frac{1}{2} f_6$$

W drugim przykładzie przyjmijmy poziom ufności $\beta = \frac{7}{12}$.



Rysunek 3.4. Warunkowa wartość zagrożona dla rozkładów dyskretnych, w przypadku gdy poziom ufności „rozdziela" atom.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications,*

Zatem α „rozdziela" kwantyl. Zatem VaR < CVaR$^-$ <CVaR < CVaR$^+$.

W związku z tym:

$$\lambda = \frac{\Psi - \alpha}{1 - \alpha} = \frac{1}{5} > 0 \ .$$

Podstawiając dane do wzoru (3.16) mamy:

$$\mathrm{CVaR} = \frac{1}{5}\mathrm{VaR} + \frac{4}{5}\mathrm{CVaR}^{+} = \frac{1}{5} f_4 + \frac{2}{5} f_5 + \frac{2}{5} f_6$$

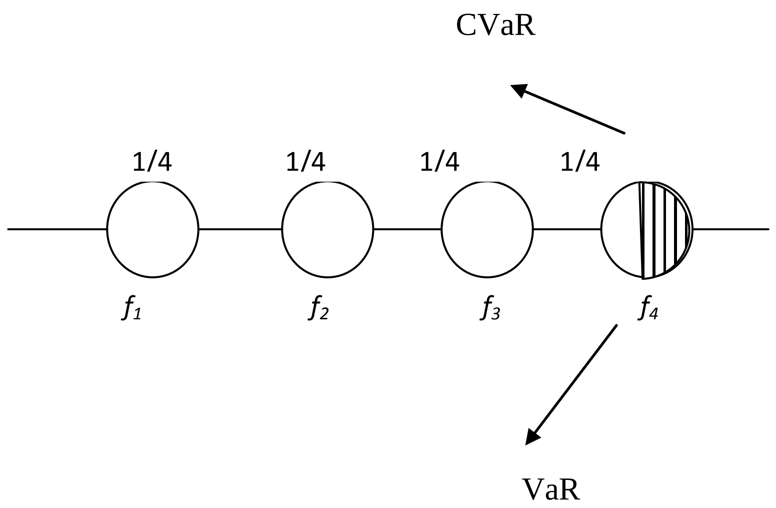
Teraz rozpatrzmy cztery scenariusze, które ukazują możliwości zainwestowania w instrumenty finansowe, danego portfela. Każdy z tych scenariuszy możemy uzyskać z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Zatem: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$.

Jeżeli przyjmiemy poziom ufności $\beta = \frac{7}{8}$., to β „rozdziela" kwantyl. W związku z tym VaR = CVaR^{--} = CVaR. Skąd CVaR$^+$ nie jest określony. Dlatego:

$$\lambda = \frac{\Psi - \alpha}{1 - \alpha} = 1$$

Zatem:

$$\mathrm{CVaR} = \mathrm{VaR} = f_4$$



Rysunek 3.5. Warunkowa wartość zagrożona dla rozkładów dyskretnych, w przypadku gdy poziom ufności „rozdziela" atom.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications,*

Należy wspomnieć również o tym, że istnieją prace, w których zaproponowane są sposoby wyliczania CVaR dla różnych rozkładów, jak np.. dla rozkładu *t*_Studenta[112].

[112] Andreev A., Kanto A., *A note on calculation of CVaR for Student's distribution*, Helsinki School of Economics, 2004
Andreev A., Kanto A., Malo P., *On closed form calculation of CVaR,* Helsinki School of Economics, 2005
Hürlimann W., *Conditional value-at*-risk bounds for compound Poisson *risks and a normal approximation*, Journal of Applied Mathematics 2003

ROZDZIAŁ IV

METODY OPTYMALIZACJI PORTFELA AKTYWÓW

Proces zarządzania portfelem inwestycji jest bardzo złożony. Wyodrębniamy w nim następujące etapy[113]:

- konstruowanie założeń polityki inwestycyjnej,
- analiza bieżących i przyszłych uwarunkowań,
- wdrożenie polityki inwestycyjnej poprzez utworzenie portfela,
- monitorowanie i aktualizacja potrzeb inwestora.

Tworzenie polityki inwestycyjnej pomaga w zrozumieniu inwestorowi jego własnych potrzeb, zadań oraz ograniczeń inwestycyjnych. Powinno to zabezpieczyć go przed podejmowaniem niewłaściwych decyzji inwestycyjnych oraz pozwolić określić realne cele[114]. Dla konstruowania polityki inwestycyjnej kluczowe znaczenie ma określenie profilu inwestora.

W niniejszej pracy badamy i porównujemy różne strategie inwestycyjne. Żeby takie porównanie było możliwe musimy opisać cechy, preferencje oraz opinie, teoretycznego inwestora, który jest potencjalnym odbiorcą prezentowanej analizy. Szczególne znaczenie w charakterystyce inwestora ma element awersji do ryzyka. W tej sytuacji decyduje ona o jego postawie w procesie inwestowania i zarządzania ryzykiem.

Jak pokazuje badanie przeprowadzone na zlecenie Stowarzyszenia Inwestorów Indywidualnych, przeciętny polski inwestor jest młodym mężczyzną w wieku 26 do 35 lat,

[113] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.
[114] Ibidem

posiadającym wyższe wykształcenie[115]. Horyzont inwestycyjny przeciętnego polskiego inwestora wynosi maksymalnie 2 lata i dla ponad 90% respondentów gra na giełdzie nie jest głównym źródłem dochodu. Większość inwestorów posiadających akcje w swoim portfelu zdywersyfikuje go, umieszczając od 4 do 7 spółek (ponad 40% badanych). Natomiast powyżej 7 spółek w portfelu posiada tylko 17 ankietowanych[116].

Na potrzeby niniejszego badania przyjmujemy następujący profil inwestora:

- jest to mężczyzna w wieku od 25 do 35 lat,
- dysponuje wolnymi środkami pieniężnymi w wysokości 100 tysięcy złotych,
- do portfela wybiera 10 aktywów, ze względu na ograniczenia czasowe, gdyż nie byłby w stanie zapanować nad większym portfelem inwestycyjnym,
- horyzont jego inwestycji wynosi 3 miesiące, a po tym okresie skład portfela jest zmieniany, jednakże w międzyczasie nie są dokonywane żadne zmiany składu portfela,
- swoją inwestycję opiera na strategii całkowitego zwrotu, opisanej w dalszej części niniejszego rozdziału,
- inwestowanie jest dla niego kwestią prestiżu, dlatego chce inwestować ale nie chce ponosić strat.

Przedstawiona w dalszej pracy analiza empiryczna dotycząca zysków i ryzyka będzie przeprowadzona z punktu widzenia takiego właśniego inwestora.

Jak już wspomnieliśmy skłonność do ponoszenia ryzyka jest jedną z najważniejszych cech, wpływających na decyzje inwestycyjne. W związku z różnymi postawami inwestora wobec ponoszonego ryzyka wyróżniamy następujące strategie[117]:

- zachowania kapitału,
- wzrostu wartości kapitału,
- bieżącego dochodu,
- całkowitego zwrotu.

Pierwsza ze strategii, czyli strategia zachowanie kapitału, wybierana jest przez inwestora pragnącego zminimalizować straty oraz niechętnego do podejmowania wysokiego ryzyka. Strategia wzrostu kapitału pozwala na zaspokojenie przyszłych potrzeb inwe-

[115] http://www.egospodarka.pl/46420,Inwestorzy-indywidualni-profil-2009,1,39,1.html, 10.08.2009
[116] Ibidem
[117] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.

storów grających agresywnie, podejmujących ryzyko, aby osiągnąć założone cele. Strategia bieżącego dochodu ma relatywnie niski poziom ryzyka i jest wybierana przez inwestorów chcących zwiększyć swoje bieżące dochody, w celu zaspokojenia bieżących potrzeb. Natomiast ostatnia strategia, czyli strategia całkowitego zwrotu polega na zwiększeniu zysków poprzez inwestowanie zysków kapitałowych i reinwestowanie bieżących dochodów. Poziom ryzyka strategii całkowitego zwrotu znajduje się pomiędzy ryzykiem odpowiadającym strategii bieżącego dochodu, a strategii wzrostu wartości kapitału[118].

Wyróżniamy trzy główne grupy metod podejmowania decyzji inwestycyjnych: analizę fundamentalną, analizę techniczną i analizę portfelową. Analiza fundamentalna bierze pod uwagę kondycję finansowo-ekonomiczną przedsiębiorstwa i wycenia wewnętrzną wartość akcji. Analiza techniczna polega na prognozie przyszłych kursów aktywów na podstawie cen historycznych oraz na wyznaczaniu momentów, w których warto kupić bądź sprzedać dany papier wartościowy.

Analiza portfelowa pozwala na dokonanie wyboru akcji do portfela inwestycyjnego. Kryteriami doboru aktywów do portfela mogą być maksymalizacja stopy zwrotu z inwestycji przy założonym poziomie ryzyka inwestycyjnego lub minimalizacja ryzyka przy danym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji.

Klasyczna analiza portfelowa została rozpowszechniona w 1952 r. przez H. Markowitza[119] i jest ona przykładem metody optymalizacji portfela. Markowitz zauważył, że przy odpowiednim doborze składników portfela oraz poprzez sterowanie wielkością udziałów można uzyskać portfele, które przy założonym zysku dają różne poziomy ryzyka, mierzonego za pomocą wariancji stóp zwrotu. Niwelowanie ryzyka jest możliwe poprzez dywersyfikację, czyli zróżnicowanie składników portfela.

Z teorii Markowitza wynika, że przy pewnych założeniach istnieje duża liczba portfeli aktywów o założonej stopie zwrotu, ale zwykle tylko jeden daje minimalne ryzyko. Podobnie, istnieje duża liczba portfeli o założonym poziomie ryzyka, ale na ogół tylko jeden z nich charakteryzuje się maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu. Na podstawie tych rozważań można wyznaczyć portfel efektywny, czyli taki pojedynczy instrument finansowy, bądź kombinację aktywów, które charakteryzują się:

- maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu wśród portfeli o tym samym ryzyku,

[118] Ibidem
[119] W dalszej części niniejszej pracy metoda Markowitza zostanie opisana dokładniej.

- minimalnym poziomem ryzyka wśród portfeli o takiej samej oczekiwanej stopie zwrotu.

Zbiór wszystkich portfeli efektywnych wyznacza tak zwaną granicę efektywną, która jest zbiorem punktów w układzie współrzędnych $(\overline{R}, \sigma^2)$, gdzie $\overline{R}$ jest oczekiwaną stopą zwrotu, a σ^2 jest wariancją stóp zwrotu.

Do innych metod optymalizacyjnych stosowanych w analizie portfela należą między innymi:

- metoda optymalizacji warunkowej wartości zagrożonej (*Conditional Value at Risk*) zaproponowana przez Rockafellara i Uryaseva[120] w 2000 r.,
- metoda średniego bezwzględnego odchylenia *(Mean Absolute Deviation* - MAD) zaproponowana w 1988 r. przez Konno[121],
- metoda „minimax" Younga[122] z 1998 r.

Powyżej wspomniane metody różnią się sposobem pomiaru ryzyka. Szczegółowy ich opis znajduje się w dalszej części pracy.

Podejście oparte na minimalizacji CVaR, jest stosunkowo nowym sposobem wyznaczania portfela optymalnego. Metoda ta wykorzystuje warunkową wartość zagrożoną jako miarę ryzyka portfela instrumentów finansowych. Metoda MAD używa w tym kontekście absolutnego odchylenia stopy zwrotu portfela od średniej stopy zwrotu. W metodzie „minimax" Younga portfel optymalny jest zdefiniowany jako ten, który minimalizuje maksymalną stratę.

W tym rozdziale opisane są różne metody optymalizacji portfela, między innymi podejście Markowitza oraz metoda oparta na minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej. Na zakończenie przedstawiono wskaźniki rentowności portfeli.

[120] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.*
[121] Konno H., *Portfolio Optimization using L_1 Risk Function*, IHSS Report 88-9, Inst. Of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1988
[122] Young M.R., *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution,* Management Science, Vol. 44, No. 5, 1998

4.1. Dywersyfikacja

Pojęcie dywersyfikacji portfela zostało rozpowszechnione przez H. Markowitza w jego pracy zatytułowanej *Portfolio Selection*[123] z roku 1952. Według Markowitza dywersyfikację można scharakteryzować jako próbę połączenia w portfelu aktywów, które nie są ze sobą doskonale dodatnio skorelowane. Powoduje to obniżenie ryzyka portfela bez wpływu na wysokość stopy zwrotu[124]. Metoda ta pozwala niekiedy na zmniejszenie ryzyka nawet poniżej poziomu ryzyka niedywersyfikowalnego. W swojej pracy Markowitz zaproponował podejście uwzględniające korelację pomiędzy poszczególnymi walorami. Zatem, im niższa jest korelacja pomiędzy notowaniami na przykład akcji, tym efektywniejsza staje się metoda Markowitza, a przez to niższe ryzyko portfela.

Dywersyfikacja jest niezbędnym warunkiem stworzenia efektywnej pozycji inwestycyjnej. W praktyce jest jedynym sposobem zmniejszenia zmienności stopy zwrotu z inwestycji względem jej wartości oczekiwanej[125]. Można wyróżnić dywersyfikację prostą i branżową. Pierwsza z nich polega na inwestowaniu w aktywa tego samego rodzaju. Wyodrębnić da się szeroką dywersyfikację, czyli inwestycję w różne spółki notowane np. na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Dywersyfikacja branżowa polega na dobraniu papierów wartościowych z różnych branż. Bez wątpienia jest to lepsza metoda, niż budowa portfela opierającego się wyłącznie na akcjach spółek należących do tej samej branży.

Należy również pamiętać o tym, że niepożądana jest nadmierna dywersyfikacja. Sytuacji takiej należy unikać, gdyż może ona prowadzić do powstania niekorzystnych problemów w zarządzaniu portfelem[126]. Pierwszym z nich jest brak możliwości skutecznego zarządzania portfelem. Inwestor posiadający portfel o nadmiernej liczbie papierów wartościowych, musi równocześnie analizować wszystkie jego składniki, co jest bardzo trudnym zadaniem. Po drugie, jeżeli zakupi dużą ilość aktywów, może być prawie pewny, że w jego portfelu znajdą się walory, które nie zapewniają odpowiedniej stopy zwrotu w stosunku do ryzyka, którym są obarczone. Ponadto wraz ze zwiększeniem poziomu liczby aktywów, wzrastają koszty analiz niezbędnych do dokonania rozważnego wyboru. Na zakończenie należy dodać, że częste zmienianie nawet niewielkiej liczby akcji może spowodować drastyczny wzrost opłat ponoszonych z tytułu prowizji maklerskich.

[123] Markowitz H. M., op. cit.
[124] Francis J. C., op. cit.
[125] Ibidem
[126] Ibidem

Skuteczną metodą wydaje się również dywersyfikacja międzynarodowa. Polega ona na inwestycjach w zagraniczne aktywa. Pierwszym badaczem, który posłużył się teorią portfelową w kontekście rynku międzynarodowego, był Herb Grubel[127]. W swojej pracy zajął się on analizą dwóch ekonomicznie izolowanych krajów. Z opracowania tego wynikało, że jeżeli wielkość korelacji pomiędzy rynkami kapitałowymi poszczególnych krajów jest mniejsza od jedynki to umożliwia to redukcję ryzyka inwestycyjnego poprzez strategię dywersyfikacji międzynarodowej. Państwa mogą różnic się systemami politycznymi, walutami, regulacjami dotyczącymi kursu walutowego oraz ograniczeniami w handlu zagranicznym.

Istotnym problemem, dla inwestorów działających na rynkach zagranicznych, jest ryzyko walutowe. W celu eliminacji tego rodzaju ryzyka, należałoby zabezpieczyć portfel przed ewentualnymi stratami. Jednakże, dywersyfikacja w skali międzynarodowej może przynosić korzyści niezależne od tego, czy towarzyszy jej zabezpieczenie przed zmianami kursu walutowego, czy też nie[128]. Ponadto korzyści wynikające z inwestowania na rynku międzynarodowym często przewyższają ewentualne uciążliwości.

W procesie inwestycyjnym inwestor przyjmuje dwie postawy: aktywną i bierną. Postawa aktywna polega na dość częstej zmianie aktywów w portfelu inwestycyjnym, codziennym śledzeniu informacji o giełdzie i wyszukiwaniu produktów finansowych, które w krótkim okresie czasu mogłyby przynieść ponadprzeciętne zyski. Natomiast postawa bierna inwestora polega na zainwestowaniu środków pieniężnych w portfel aktywów o niezmiennym składzie, przez dłuższy okres czasu. Przeważnie inwestor przyjmujący postawę bierną nie ma czasu na aktywne zarządzanie, a pragnie zainwestować swoje wolne środki. Inwestor charakteryzujący się postawą bierną, na przykład raz na pół roku, przeprowadza dogłębną analizę posiadanych aktywów i dokonuje zmiany składu portfela inwestycyjnego. W poniższej pracy opisujemy inwestora charakteryzującego się pasywną postawą inwestycyjną. Przyjmujemy, że zmienia on skład swojego portfela raz na kwartał, czyli dokonuje zakupu określonych aktywów, a po okresie trzech miesięcy zmienia skład swojego portfela.

[127] Grubel H., *International Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows,* American Economic Review, 1968
[128] Francis J. C., op. cit.

Z postawą inwestora związany jest sposób zarządzania portfelem inwestycyjnym: pasywny lub aktywny. U podstaw strategii aktywnych leży przekonanie inwestora, że można skonstruować portfel, który przyniesie rezultaty lepsze niż rynek[129].

Strategie aktywne należą do metod spekulacyjnych, gdyż inwestor ma pewne oczekiwania co do przyszłości. W przypadku pozytywnych realizacji założeń, inwestor uzyska wynik lepszy od przeciętnej stopy zwrotu z rynku. Natomiast, gdy wystąpią niepomyślne ruchy cen instrumentów, to inwestor osiągnie wynik gorszy niż przeciętnie na rynku.

Aktywna obsługa portfela nie jest zadaniem łatwym. Należy monitorować cały czas koszty transakcyjne, tak aby nie były one większe od zysków ponad przeciętną stopę zwrotu z rynku. Ponadto portfel zarządzany aktywnie obarczony jest większym ryzykiem.

Jednakże inwestorzy korzystający ze strategii aktywnych używają trzech głównych argumentów za pozytywnym ich działaniem zwiększającym wartość dodaną z inwestycji[130]. Po pierwsze, inwestycja dokonywana jest na różnych instrumentach finansowych. Po drugie można wybierać pomiędzy różnymi branżami oraz sektorami przemysłowymi. Po trzecie mogą kreować akcje na rynku, które mogą być niedowartościowane i przewartościowane, tak aby taniej kupować, a potem drożej sprzedawać.

W aktywnym zarządzaniu portfelem można wyróżnić trzy rodzaje strategii[131]:

- strategia rotacji sektorowej,
- strategia osiągania maksimum zysków,
- strategia maksymalnych cen akcji.

Strategia rotacji sektorowej polega na takim doborze aktywów finansowych z różnych branż, które umożliwiają osiągnąć przewagę przy kolejnych zmianach na rynku finansowym. Często są to akcje spółek lub branż, które wchodzą w fazę rozwoju cyklu gospodarczego.

Pozostałe dwie strategie są wykorzystywane, gdyż na rynku kapitałowym w danym okresie osiąga się wzrost wartości akcji tych spółek, które generują stały zysk, albo można osiągnąć korzyści w wyniku wzrostu zysków danej spółki[132].

Ponadto wyróżnić można również aktywną strategię inwestycyjną, która wykorzystuje instrumenty pochodne w celu stworzenia optymalnego i bezpiecznego portfela

[129] Jurek W., *Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.
[130] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.
[131] Ibidem
[132] Ibidem

inwestycyjnego. Instrumenty pochodne, takie jak kontrakty *futures*, przydatne są w ograniczaniu systematycznego i specyficznego ryzyka. Można zabezpieczać przepływy gotówkowe z portfela poprzez odpowiednie strategie doboru i inwestycję w pochodne papiery wartościowe.

Strategie pasywne są dość popularne wśród inwestorów indywidualnych, gdyż stosując strategię aktywną ponosi się większe koszty transakcyjne. Wyróżniamy dwa typy strategii pasywnych[133]:

- strategia kup i trzymaj,
- wzorowanie portfela na indeksie.

Pierwsza metoda polega na zakupie aktywów finansowych i trzymaniu ich aż do momentu sprzedaży. Jest to dość skuteczny sposób na udaną inwestycję, pod warunkiem, że horyzont inwestycyjny jest raczej odległy i inwestor nie musi kończyć inwestycji w konkretnym momencie. W przypadku konieczności sprzedaży w określonym terminie, może się bowiem okazać, że akurat w tym momencie notowania aktywów są niskie i to nie jest najlepsza pora na zakończenie inwestycji. Natomiast wzorowanie portfela na indeksie nie gwarantuje osiągnięcia założonej stopy zwrotu[134].

Można wyróżnić trzy podstawowe metody wzorowania portfela na indeksie. Należą do nich:

- pełne odwzorowanie,
- portfel próbny,
- metoda optymalizacji kwadratowe.

Pełne odwzorowanie polega na tym, że poszczególne papiery wartościowe wchodzące w skład portfela nabywane są w równych proporcjach i w konstrukcji indeksu mają jednakową wagę. Metoda ta gwarantuje stałość papierów w portfelu, jednakże nabycie dużej liczby aktywów znacząco podnosi koszty zawarcia transakcji. Ponadto w portfelu mogą znajdować się akcje spółek płacące różne co do wartości dywidendy, co z kolei wpływa na wartość akcji[135].

Druga metoda, tak zwany portfel próbny polega na konstrukcji portfela tylko z wyselekcjonowanych akcji. Selekcja odbywa się na podstawie metod statystycznych, a ściślej ujmując, wybierane są akcje najlepiej skorelowane z wartością indeksu giełdowego. W tego typu metodzie wpływ dywidendy nie ma znaczenia, gdyż nie ma potrzeby utrzy-

[133] Jurek W., op. cit.
[134] Ibidem
[135] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.

mywania jednakowych wartościowo udziałów. Wadą jest to, że zmiana dochodowości z portfela nie jest zbliżona do zmian indeksów giełdowych[136].

Natomiast trzecia metoda, czyli optymalizacja kwadratowa wykorzystuje historyczne informacje i dane na temat zmian cen akcji oraz ich korelacji z indeksem giełdowym. Podstawową wadą jest to, że jeżeli przy konstrukcji portfela opieramy się na danych historycznych, to zmiany, które wystąpią w przyszłości mogą spowodować niedopasowanie wartości portfela do wartości indeksu[137].

Często w praktyce spotyka się strategię, która wykorzystuje w pewnym stopniu metodę aktywną i pasywną. Taka sytuacja ma miejsce, gdy część portfela jest zarządzana aktywnie, a druga pasywnie. Celem stosowania takiego sposobu inwestycyjnego jest uzyskanie efektów lepszych od przeciętnych na rynku kapitałowym. Część portfela zarządzana aktywnie ma dostarczyć większy zysk niż część zarządzana pasywnie, która powinna przynieść średni zwrot dla rynku. Taka konstrukcja jest charakterystyczna na przykład dla oferowanych przez niektóre banki produktów strukturyzowanych.

4.2.Optymalizacja portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej

Metoda optymalizacji portfela według kryterium minimalizacji jego warunkowej wartości zagrożonej została przedstawiona w 2000 r. przez Rockafellara i Uryaseva[138]. W dalszej części tego rozdziału stosujemy oznaczenia wprowadzone w punkcie 3.2, które przypominamy teraz czytelnikowi dla ułatwienia śledzenia rozważań.

Wektor decyzji $\mathbf{x}$ utożsamiamy z portfelem instrumentów finansowych, w tym sensie, że $\mathbf{x} = (x_1,...., x_n)^T$, gdzie x_j jest udziałem *j*-tego instrumentu w portfelu:

(4.1) $$x_j \geq 0 \quad \text{dla } j = 1,..., n \text{ oraz } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

Warunek $x_j \geq 0$ oznacza, że nie dopuszczamy krótkiej sprzedaży. Oznaczając przez y_j stopę zwrotu z *j*-tego instrumentu, otrzymujemy wektor losowy $\mathbf{y} = (y_1,...., y_n)^T$. Rozkład wektora $\mathbf{y}$ jest opisany za pomocą gęstości $p(\mathbf{y})$.

Stopa zwrotu z portfela $\mathbf{x}$ jest sumą indywidualnych stóp zwrotu poszczególnych instrumentów pomnożonych przez x_j (udział instrumentów w portfelu).

---

[136] Ibidem
[137] Ibidem
[138] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk,*

Funkcję straty oznaczamy przez:

(4.2) $$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -(x_1 y_1 + ... + x_n y_n) = -\mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

Stratę wyliczamy w wielkościach względnych (procentowych), a nie tak jak zazwyczaj w wartościach pieniężnych.

Przez $\mu(\mathbf{x})$ i $\sigma(\mathbf{x})$ oznaczamy wartość oczekiwaną i wariancję funkcji straty powiązanej z portfelem $\mathbf{x}$, przy założeniu, że $\mathbf{m}$ jest wartością oczekiwaną, a $\mathbf{V}$ macierzą kowariancji wektora $\mathbf{y}$. Zatem:

(4.3) $$\mu(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{m} \quad \text{i} \quad \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}.$$

Następnie rozważamy aproksymację wartości funkcji $F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$, otrzymanej za pomocą losowania z rozkładu zmiennej $\mathbf{y}$, zgodnie z jego gęstością $p(\mathbf{y})$, to jest $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))$. Opis aproksymacji tej funkcji został szczegółowo przedstawiony w punkcie 3.2.

(4.4) $$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) = \alpha_\beta(\mathbf{x}) + \frac{1}{q(1-\beta)}\sum_{k=1}^{q}[-\mathbf{x}^T\mathbf{y}_k - \alpha_\beta(\mathbf{x})]^+ .$$

Minimalizując tak określoną funkcję, otrzymujemy rozwiązanie następującego zadania optymalizacyjnego polegającego na minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej przy zdanym ograniczeniu na stopę zwrotu z portfela:

(4.5) $$\min \quad \Phi_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in X,$$

przy ograniczeniach:

(4.6) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$$

(4.7) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \geq G,$$

gdzie:

$\bar{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu.

Ponadto równanie (4.7) gwarantuje nam, że średnia stopa zwrotu z portfela, będzie większa, bądź równa wartości *G*.

Wykorzystując to samo podejście rozważmy również zadanie znalezienia portfela, o minimalnej wartości zagrożonej[139], to jest stanowiącego rozwiązanie następującego problemu:

(4.8) $\min \quad \alpha_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in X$.

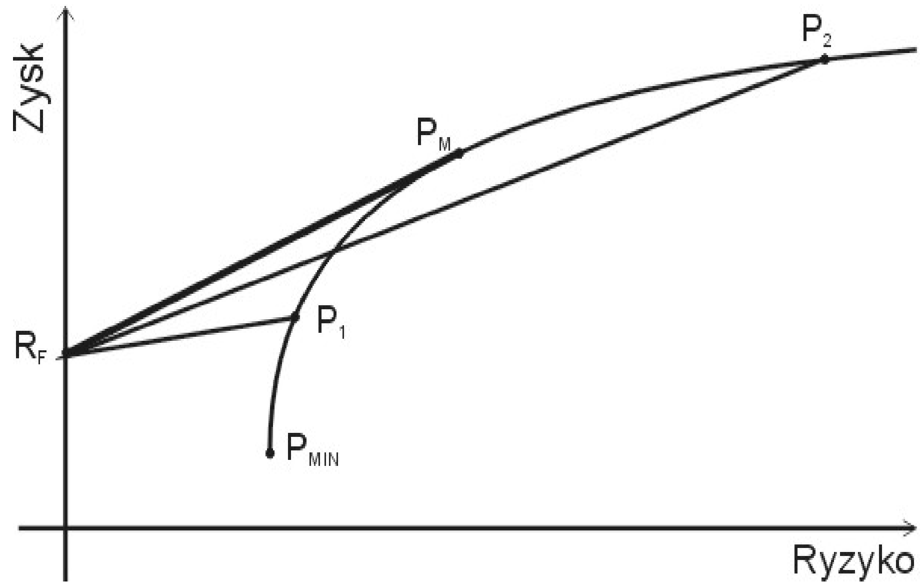
W odniesieniu do równości (3.8), metoda minimalizacji funkcji $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha_\beta(\mathbf{x}))$ pozwala otrzymać wartość zagrożoną portfela optymalnego $\mathbf{x}^*$, który minimalizuje warunkową wartość zagrożoną.

4.3. Metoda Markowitza oparta na minimalizacji wariancji

Metoda Markowitza[140] jest jedną z najczęściej używanych metod optymalizacji portfela aktywów finansowych. Zadaniem zarządzającego portfelem jest takie dobranie wag aktywów, aby utworzyć portfel efektywny. Portfel efektywny charakteryzuje się maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu wśród portfeli o tym samym ryzyku lub minimalnym poziomem ryzyka wśród portfeli o takiej samej oczekiwanej stopie zwrotu. Portfel aktywów uznawany jest zatem za efektywny, jeżeli w ramach tego samego zestawu instrumentów, żadna inna inwestycja nie przyniesie wyższego oczekiwanego zwrotu przy tym samym (lub niższym) ryzyku albo niższego ryzyka przy tym samym (lub wyższym) oczekiwanym zwrocie[141].

Rozważając wszelkie możliwe układy wag poszczególnych aktywów w portfelu, otrzymujemy wszystkie możliwe do uzyskania z danego zestawu instrumentów. Zbiór wszystkich portfeli efektywnych nazywany jest granicą efektywności. Granica efektywności obrazuje taki zbiór portfeli, który daje maksymalną stopę zwrotu przy każdym ustalonym poziomie ryzyka[142]. Graficzna ilustracja granicy efektywności została przedstawiona na Rysunku 4.1.

[139] Mausser H., Rosen D., op. cit.
[140] Markowitz H. M., op. cit.
[141] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.
[142] Jurek W., op. cit.



Rysunek 4.1. Zbiór portfeli efektywnych.
Źródło: Wierzbicki M., *Portfel efektywny,* dostępne na: http://www.motte.pl/gng_10.php

Celem zarządzania portfelowego jest analiza poszczególnych walorów oraz wyznaczenie zbioru portfeli efektywnych. Inwestorzy, chcąc skuteczniej zarządzać portfelem, powinni swoją pracę rozpocząć od analizy ryzyka i określenia stopy zwrotu[143].

Istnieje kilka zasad, którymi powinien kierować się inwestor, który chce zwiększyć swoje zyski. Markowitz zauważył, że przy odpowiednim doborze składników portfela oraz poprzez sterowanie wielkością udziałów można uzyskać portfele, które przy założonym zysku dają różne poziomy ryzyka. Niwelowanie ryzyka jest możliwe przez dywersyfikację. W modelu Markowitza zakłada się, że stopy zwrotu ze składników portfela są zmiennymi losowymi charakteryzującymi się rozkładem normalnym. Markowitz w swojej pracy proponuje pomiar ryzyka za pomocą wariancji stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Wariancja jest określona w następujący sposób:

(4.9) $$\sigma^2(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{k} p_i[y_i - E(y_i)]^2 ,$$

gdzie:

y_i - to wartość stopy *i*-tego instrumentu finansowego,

p_i - to prawdopodobieństwo wystąpienia danej stopy zwrotu,

k - liczba możliwych scenariuszy.

Zastosowanie metody minimalizacji wariancji w praktyce polega na rozwiązaniu następującego zadania optymalizacyjnego[144]:

---

[143] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*.

(4.10) $\min \sigma^2$,

przy ograniczeniach:

(4.11) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0$,

(4.12) $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \geq G$

gdzie:

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego,

$\bar{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$$

σ_i - odchylenie standardowe *i*-tego instrumentu finansowego,

ρ_{ij} - współczynnik korelacji stóp zwrotu y_i oraz y_j, czyli *i*-tego z *j*-tym instrumentem finansowym,

G - średnia stopa zwrotu z portfela.

Dodatkowo:

(4.13) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$,

Ponadto oczekiwana stopa zwrotu z portfela złożonego z *n* aktywów opisana jest za pomocą następującego wzoru:

(4.14) $R = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(y_i)$,

gdzie y_i jest określone jak powyżej, czyli jest to wartość stopy zwrotu akcji *i*-tej spółki.

Ryzyko portfela zależy, po pierwsze, od ryzyka składników tego portfela, mierzonego odchyleniami standardowymi poszczególnych zmiennych ryzyka. Po drugie ryzyko zależy od stopnia powiązania składników portfela, które mierzone jest za pomocą współczynników korelacji tych zmiennych[145]. Współczynnik korelacji zwrotów z aktywów jest kluczowym czynnikiem, który należy brać pod uwagę, dokonując inwestycji. Spowodowane jest to tym, że można otrzymać tę samą stopę zwrotu, redukując ryzyko przez stworzenie kombinacji aktywów lub portfeli o słabej dodatniej lub ujemnej korelacji[146].

[144] Markowitz H. M., op. cit.
[145] Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem.*
[146] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.

Model wyboru portfela zaproponowany przez Markowitza pomimo swej atrakcyjności, związanej z możliwością minimalizowania ryzyka przy niezmienionym poziomie stopy zwrotu, posiadał kilka wad. Metoda ta jest bardzo wrażliwa nawet na niewielkie zmiany warunków początkowych, czyli na wybór okresu, z którego pochodzą dane historyczne do analiz. Wystarczy przesunąć okres analizowanych danych historycznych o kilka dni i można uzyskać diametralnie inny skład portfela.

W teorii jak i w praktyce, wariancja wykorzystywana jest do obliczania ryzyka, ze względu na prostotę wyliczania. Jednakże, chcąc obliczać wariancję, należy przyjąć założenie o istnieniu drugiego momentu. Ponadto jest to dobra miara ryzyka, jeżeli używamy rozkładów normalnych lub *t* Studenta. W rzeczywistości, w wielu obszarach zarządzania ryzykiem, między innymi w zarządzaniu ryzykiem kredytowym lub operacyjnym, mamy do czynienia z rozkładami asymetrycznymi.

4.4. Metoda „minimax" optymalizacji portfela

Kolejną metodę optymalizacji portfela, opartą na minimalizacji ryzyka opisał Young w 1998 r. w swojej pracy „*A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*"[147]. Young zaproponował takie rozwiązanie problemu optymalizacji, które zostało oparte na programowaniu liniowym. Wcześniejsze metody, między innymi minimalizacja wariancji, wymagają użycia nieliniowych algorytmów w celu rozwiązania problemu optymalizacji portfela. Praktyczne zastosowanie tych modeli było ograniczone, aż do momentu, w którym komputery zyskały wystarczającą moc obliczeniową. Metoda „minimax" uprościła obliczenia na komputerze i miała potencjał stania się akceptowalnym narzędziem, dla każdego menedżera, do tworzenia portfela optymalnego.

W metodzie tej portfel optymalny zdefiniowany jest jako ten, dla którego maksymalna strata przyjmuje minimalną wartość we wszystkich przeszłych okresach, pod warunkiem minimalnej akceptowalnej średniej stopy zwrotu w całym obserwowalnym okresie. Te zasady prowadzą do podobnego wyboru portfela optymalnego, który można uzyskać w skutek minimalizacji wariancji Markowitza.

Załóżmy, że mamy *n* papierów wartościowych i *T* przedziałów czasowych. Oznaczmy przez:

y_{it} - stopę zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego na przedziale czasowym *t*,

[147] Young M.R., op. cit.

$\bar{y}_i$ - średnią stopę zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego, $\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$,

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu,

$R_t = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{it}$ - stopę zwrotu z portfela na przedziale czasowym *t*,

$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ - średnią wartość stopy zwrotu z portfela,

$M = \min_t R_t$ - minimalną stopę zwrotu z portfela.

„Minimaksowy" portfel maksymalizuje wartość *M*, pod warunkiem, że wartość $\bar{R}$ osiąga co najmniej pewien minimalny poziom, załóżmy *G*. Jest to portfel, który minimalizuje maksymalną stratę, zdefiniowaną jako ujemny zysk. Alternatywnie również można mówić o maksymalizacji minimalnego zysku[148].

Można łatwo zauważyć, że metoda „minimax" poszukiwania portfela jest rozwiązaniem następującego zadania programowania liniowego[149]:

(4.15) $\max M$,

przy ograniczeniach:

(4.16) $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{it} - M \geq 0, \quad \text{dla } t = 1,\ldots,T$,

(4.17) $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \geq G$,

(4.18) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$

Równanie (4.16) gwarantuje, że *M* będzie ograniczone przez minimalną stopę zwrotu z portfela. Mówiąc dokładniej, w każdym przedziale czasowym stopa zwrotu z portfela będzie ograniczona przez *M*. W związku z tym, że stopa zwrotu z portfela jest ograniczona przez wartość *M* oraz że maksymalizujemy wartość *M*, rozwiązanie zadania optymalizacyjnego będzie brało pod uwagę tylko te wartości, które maksymalizują minimalną stopę zwrotu, czyli minimalizują maksymalną stratę[150]. W równoważny sposób można sformułować metodę maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu, pod warunkiem

[148] Może to opisywać zasadę „maxmin" wyboru portfela.
[149] Young M.R., op. cit.
[150] Ibidem

ograniczenia, że stopa zwrotu z portfela osiągnie pewien próg H, w każdym przedziale czasowym:

(4.19) $$\max_x \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i ,$$

przy ograniczeniach:

(4.20) $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{it} \geq H, \quad \text{dla} \quad t = 1,\dots,T$$

(4.21) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0,$$

gdzie:

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu,

$\overline{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

$$\overline{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$$

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ - średnia wartość stopy zwrotu z portfela,

G - średnia stopa zwrotu z portfela.

Minimaksowy portfel zdefiniowany jest jako optymalny w odniesieniu do zbioru $\{y_{it}\}$. Zbiór ten może być zbiorem historycznych obserwacji lub zbiorem symulowanych, z pewnym prawdopodobieństwem, przyszłych stóp zwrotu.

Interesujące jest porównanie metody „minimax” z metodą Markowitza. Poniżej ukazane są różnice pomiędzy tymi modelami.

Zasada „minimax” jako miarę zmienności portfela, wykorzystuje minimalną stopę zwrotu. Mówiąc dokładniej, zasada „minimax” traktuje wartość oczekiwaną jako przyszłą stopę zwrotu z portfela. W przypadku danych o rozkładzie normalnym, dwie miary ryzyka, czyli minimalna stopa zwrotu i wariancja stóp zwrotu, będą dawały podobne wyniki. Natomiast, gdy stopy zwrotu instrumentów finansowych nie posiadają rozkładu normalnego, wtedy portfel stworzony z tych papierów wartościowych również może nie mieć rozkładu normalnego. W ogólności rozkład portfela utworzonego z instrumentów finansowych nie posiadającego rozkładu normalnego nie może być scharakteryzowany tylko przez wartość oczekiwaną i wariancję. Analiza średniej i wariancji, czyli klasyczna metoda ilościowej analizy portfela, może mieć przeciwne zachowanie do intuicyjnego, jeżeli stopy zwrotu portfela nie mają rozkładu normalnego[151]. W przypadku, gdy nie mamy do czynienia z rozkładem normalnym, statystyka niższego stopnia, jaką jest miara ryzyka używana w metodzie minimaksowej, może lepiej estymować ryzykowność portfela.

4.5. Metoda średniego bezwzględnego odchylenia

Kolejnym możliwym podejściem do problemu optymalizacji portfela jest metoda bezwzględnego średniego odchylenia (*Mean Absolute Deviation* – MAD). Została on zaproponowana przez Konno[152] oraz Konno i Yamazaki,[153]. Model MAD może być bardzo przydatny przy rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych portfeli o dużej liczbie aktywów. W modelu tym użyto bezwzględnego odchylenia stopy zwrotu jako miary ryzyka.

Jak wspomniano wcześniej stosowanie wariancji, jako miary ryzyka wymaga użycia metody rozwiązania zagadnienia programowania kwadratowego. Model MAD jest prostszy, gdyż sprowadza się do rozwiązania problemu programowania liniowego. Ponadto wspomniani Autorzy twierdzą, iż model MAD może stać się dobrą alternatywą dla analizy średniej i wariancji (MV).

W klasycznej metodzie Markowitza, aby wykonać optymalizację portfela musimy przeliczyć macierz kowariancji stóp zwrotu. Zgodnie ze wzorem (4.10) musimy najpierw wyliczyć następujące iloczyny $\mathrm{cov}_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, czyli kowariancje stóp zwrotu. Dzięki takiemu uproszczeniu obliczenia stają się szybsze i efektywniejsze. Konno i Yamazaki zauważyli ponadto, że portfele optymalne wyznaczone metodą średniego bezwzględnego odchylenia zwykle mają mniej składników. Jest to szczególnie ważne przy portfelach złożonych z dużej liczby aktywów, gdyż zmniejsza koszty transakcyjne. Ponadto, jeżeli stopy zwrotu mają rozkład normalny, to teoretycznie oba modele dają takie samo rozwiązanie. Inwestorzy opierają jednak swoje decyzje na cząstkowych informacjach o skończonych zbiorach stóp zwrotu. Przy tych bardziej realnych założeniach, modele średniego bezwzględnego odchylenia oraz średniej i wariancji prowadzą do różnych zbiorów rozwiązań. Różnica ta wynika z tego, że wnioskowanie oparte jest na różnych statystykach, które w szczególności różnie reagują na występowanie w zbiorze danych obserwacji nietypowych.

[151] Ibidem
[152] Konno H., *Portfolio Optimization* ...
[153] Konno H., Yamazaki H., *Mean absolute deviation port folio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market,* Management Science, Vol. 37, No. 5, 1991

Model zaproponowany przez Konno[154] został opisany za pomocą następującej funkcji (bezwzględnego odchylenia):

(4.22) $$w(x) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]\right|\right]$$

Średnie bezwzględne odchylenie opisane jest następująco:

(4.23) $$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i y_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\right|$$

gdzie:

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu,

y_i - stopa zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

n – liczba aktywów w portfelu,

Można udowodnić[155], że jeżeli $(x_1,..., x_n)$ mają wielowymiarowy rozkład normalny, to:

(4.24) $$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(x),$$

gdzie $\sigma(x)$ jest odchyleniem standardowym.

Zatem problem optymalizacji funkcji $w(x)$ opisującej bezwzględne odchylenie, sprowadza się do minimalizacji odchylenia standardowego $\sigma(x)$, jeżeli $(x_1,..., x_n)$ mają wielowymiarowy rozkład normalny.

Natomiast problem optymalizacji portfela według kryterium średniego bezwzględnego odchylenia sprowadza się do rozwiązania następującego problemu:

(4.25) $$\min \quad MAD$$

przy ograniczeniach:

(4.18) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \geq G,$$

(4.19) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0,$$

gdzie:

y_i - stopa zwrotu *i*-tej spółki

$\bar{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tej spółki,

---

[154] Konno H., *Portfolio Optimization ...,*

[155] Dowód powyższej równości można znaleźć w H. Konno, *Portfolio Optimization ...*

x_i - alokacja i-tej spółki w portfelu,

G - średnia stopa zwrotu z portfela.

Związane ze złożonością obliczeniową, przewagi podejścia opartego na MAD nad metodą Markowitza są dobrze opisane w pracach Konno i Yamazaki[156], Konno i Wijayanayake[157] oraz Simaana[158]. Jednakże, zalety te nie są doceniane w finansach ilościowych. Powodem tego może być słaba znajomość metody opisywanej w mało popularnych czasopismach, w środowisku finansowym. Należy podkreślić, że model MAD należy do klasy modeli, które są lepiej dostosowane dla niesymetrycznych rozkładów stóp zwrotu. Spowodowane jest to tym, że model średniego bezwzględnego odchylenia oparty jest na dolnych wartościach odchylenia od wartości oczekiwanej[159]. W związku z tym model średniego bezwzględnego odchylenia reprezentuje faktycznie pomiar ryzyka symetrycznego względem wartości oczekiwanej[160]. Warto dodać, że model MAD może być odpowiednim narzędziem do rozwiązania następujących problemów:

- optymalizacji wieloskładnikowych portfeli ze skomplikowanymi warunkami rynkowymi,
- optymalizacji wieloskładnikowych portfeli uwzględniających międzynarodową dywersyfikację,
- zarządzania aktywami przez dłuższy okres,
- optymalizacji portfela złożonego z różnych instrumentów finansowych, jak akcje lub obligacje.

4.6. Metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danej warunkowej wartości zagrożonej

W tym punkcie rozważymy podejście do optymalizacji portfela wyraźnie różne od poprzednich. W dotychczasowych rozważaniach skupiono się na metodach, które minimalizują ryzyko, określone za pomocą różnych miar. Jednakże dla inwestora pragnącego uzy-

[156] Konno H., Yamazaki H., *Mean absolute deviation port folio …*
[157] Konno H., Wijayanayake A., *Mean-Absolute Deviation portfolio optimization model under transaction costs,* Journal of the Operations Research, Vol. 42, No. 4, 1999
[158] Simaan Y., *Estimation Risk in Portfolio Selection: The mean variance model versus the mean absolute deviation model,* Management Science, Vol. 43, No. 10, 1997
[159] Michałowski W., Ogryczak W, *Extending the MAD Portfolio Optimization Model to Incorporate Downside Risk Aversion*, Naval Research Logistics, 48, 2001
[160] Ogryczak W., *Modele programowania liniowego w optymalizacji portfela inwestycji*, dostępne na Modelowanie Preferencji a Ryzyko'03, T. Trzaskalik (red.), Wyd. AE w Katowicach, Katowice 2003

skiwać jak największe wyniki, przy założonym poziomie ryzyka, rozpatrywane metody, nie są idealne.

Naturalnym z punktu widzenia każdego inwestora jest podejście w którym maksymalizowana jest oczekiwana stopa zwrotu z portfela, przy zadanym poziomie ryzyka. Wyniki optymalizacji mogą być różne w zależności od przyjętej miary ryzyka. Jedną z możliwych do zastosowania miar jest warunkowa wartość zagrożona.

Obecnie portfelem optymalnym jest ten, który maksymalizuje stopę zwrotu, w całym obserwowanym okresie, pod warunkiem danego minimalnego ryzyka, wyrażanego za pomocą warunkowej wartości zagrożonej. Prezentowana metoda poszukiwania portfela optymalnego polega na rozwiązaniu następującego zadania[161]:

(4.20) $\max \ \overline{R}$

przy ograniczeniach:

(4.21) $\Phi_{\beta}(\mathbf{x}) \leq K,$

(4.22) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0 .$

Równanie (4.21) opisuje ograniczenie warunkowej wartości zagrożonej przez procentową stratę z portfela, zadaną przez inwestora.

Ponadto:

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ - średnią wartość stopy zwrotu z portfela

y_{it} - stopę zwrotu *i*-tej spółki na przedziale czasowym *t*,

$\overline{y}_i$ - średnią stopę zawrotu *i*-tej spółki, $\overline{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$,

x_i - udział *i*-tej spółki w portfelu

K - ograniczenie warunkowej wartości zagrożonej przez procentową stratę z portfela, zadaną przez inwestora

Czasami warto skorzystać z tego modelu, jeżeli chcemy zwiększać zyski przy zadanym poziomie ryzyka. Model ten jest porównywalny do modelu Markowitza, w którym maksymalizujemy oczekiwaną stopę zwrotu z portfela przy danym poziomie ryzyka, opisanego za pomocą wariancji.

[161]Krokhmal P., Palmquista J., Uryasev S., *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints,* Journal of Risk, 2002

4.7. Metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danej wariancji

W powyższym punkcie rozpatrywaliśmy model, który maksymalizował oczekiwaną stopę zwrotu z portfela przy danym poziomie ryzyka, obliczanym za pomocą warunkowej wartości zagrożonej. W tym miejscu omówimy podobną metodę, ale ryzyko będzie mierzone za pomocą wariancji.

Metoda ta, podobnie jak poprzednia, różni się od pozostałych metod opisanych w niniejszej pracy tym, że maksymalizuje oczekiwaną stopę zwrotu. Pozostałe omawiane metody minimalizują ryzyko, wyliczane za pomocą różnych miar.

W takiej sytuacji portfelem optymalnym jest ten, który maksymalizuje stopę zwrotu z portfela, w całym obserwowanym okresie, pod warunkiem danego minimalnego ryzyka, obliczanego za pomocą wariancji.

Metoda poszukiwania portfela optymalnego polega na rozwiązaniu następującego zadania[162]:

(4.23) $\max \ \overline{R}$

przy ograniczeniach:

(4.24) $\sigma^2 \leq I$

(4.25) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0 .$

Równanie (4.24) opisuje ograniczenie wariancji przez wielkość zadaną przez inwestora.

Ponadto:

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ - średnią wartość stopy zwrotu z portfela

y_{it} - stopę zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego na przedziale czasowym *t*,

$\overline{y}_i$ - średnią stopę zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego, $\overline{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$,

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu

I - ograniczenie wariancji przez wielkość zadaną przez inwestora.

Dodatkowo:

[162] Krokhmal P., Palmquista J., Uryasev S., op. cit.

(4.26) $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} ,$$

gdzie:

σ_i - odchylenie standardowe *i*-tego instrumentu finansowego,

ρ_{ij} - współczynnik korelacji stóp zwrotu y_i oraz y_j, czyli *i*-tego z *j*-tym instrumentem finansowym.

4.8. Metoda minimalizacji wariancji przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej oraz danej średniej stopie zwrotu z portfela

Kolejnym przykładem zadania optymalizacji portfela aktywów jest metoda oparta na minimalizacji wariancji przy danym poziomie ryzyka, opisanego za pomocą warunkowej wartości zagrożonej. Jest to podejście łączące klasyczną metodę minimalizującą wariancję, czyli tzw. model Markowitza, z bardziej nowoczesną, wykorzystującą warunkową wartość zagrożoną. Jednocześnie kontrolowane są dwie miary ryzyka i oczekiwana stopa zwrotu.

Model minimalizacji wariancji przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej i stopy zwrotu z portfela polega na rozwiązaniu następującego problemu optymalizacyjnego[163]:

(4.27) $$\min \ \sigma^2$$

przy ograniczeniach:

(4.28) $$\Phi_\beta(\mathbf{x}) \le K,$$

(4.29) $$\bar{R} \ge G$$

(4.30) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \ge 0 .$$

W podanym modelu $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j s_{ij}$, gdzie $s_{ij} = \frac{1}{T-n} \sum_{t=1}^{T} (y_{it} - \bar{y}_t)(y_{jt} - \bar{y}_j)$ jest estymatorem kowariancji pomiędzy stopami zwrotu spółek *i* oraz *j* oraz $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ jest średnią wartością stopy zwrotu z portfela. Ponadto *K* jest procentową stratą z portfela, daną przez inwestora, a *G* jest minimalną oczekiwaną stopą zwrotu z portfela.

---

[163] Cox S.H., Lin Y., Tian R., Zuluaga L.F., *Portfolio Risk Management with CVaR-Like Constraints,* 2007

Poza tym:

y_{it} - stopa zwrotu *i*-tej spółki na przedziale czasowym *t*,

$\bar{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tej spółki, $\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$,

x_i - udział *i*-tej spółki w portfelu.

Jest to przykład modelu, w którym stosowana jest większa liczba parametrów, w celu podniesienia efektywności portfela. Oprócz minimalizacji wariancji, w modelu tym stosowane jest również ograniczenie na warunkową wartość zagrożoną. Należy zwrócić szczególną uwagę na to, że wariancja jest symetryczną miarą ryzyka i nie rozróżnia osobno miary dolnego oraz górnego ryzyka[164]. W szczególności Krokhmal[165] i in. zasugerowali, że w przeciwieństwie do wariancji, warunkowa wartość zagrożona nie wymaga założenia o symetrycznych rozkładach stóp zwrotu, więc może być używana w celu poprawy skośności portfeli. Ponadto w porównaniu z wartością zagrożoną, warunkowa wartość zagrożona przy obliczaniu bierze nie tylko prawdopodobieństwo ale również wielkość zwrotu (lub straty)[166].

4.9. Wskaźniki rentowności portfeli

Do lat sześćdziesiątych XX wieku inwestorzy oceniali rentowność portfela inwestycji prawie wyłącznie na podstawie stopy zwrotu. Byli świadomi istnienia ryzyka, jednakże nie znali metod jego pomiaru. Rozwój teorii portfelowej spowodował pojawienie się metod kwantyfikowania ryzyka. W kilku badaniach[167] zwrot i ryzyko były rozważane oddzielnie. Jedną z metod zarządzania ryzykiem było dzielenie portfeli na kategorie w zależności od poziomu ryzyka, obliczanego za pomocą wariancji i porównywano stopy zwrotu wewnątrz danej kategorii[168].

Samo porównanie średnich stóp zwrotu z portfeli nie pozwala nam na uwzględnienie ryzyka. Poniżej opisano szczegółowo trzy najważniejsze złożone wskaźniki rentowności portfela, za pomocą których oblicza się jednocześnie ryzyko oraz zwrot i otrzymuje

---

[164] Wu J., Yue. W., Wang S., Risk analysis in communication networks with Conditional Value at Risk, www.apnoms.org
[165] Krokhmal P., Palmquista J., Uryasev S., op. cit.
[166] Cox S.H., Lin Y., Tian R., Zuluaga L.F., op. cit.
[167] Friend I, Blume M., Crockett J., *Mutual Funds and Other Institutional Investors,* McGraw – Hill, New York 1970
[168] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.

się jedną wartość. Należą do nich wskaźnik Sharpe'a, Jensena i Treynora, które uwzględniają zarówno ryzyko jak i stopy zwrotu z portfela.

Wskaźnik Sharpe'a definiuje się w następujący sposób[169]:

$$S = \frac{\overline{R} - \overline{R_f}}{\sigma}, \tag{4.31}$$

gdzie:

S – wartość wskaźnika Sharpe'a,

$\overline{R}$ - średnia wartość stopy zwrotu z portfela,

$\overline{R_f}$ - średnia wartość stopy wolnej od ryzyka.

Wyrażenie, które znajduje się w liczniku powyższego równania określa się mianem premii za ryzyko, która jest dodatkowym dochodem powyżej stopy zwrotu wolnej od ryzyka. Zatem po obliczeniu tego wskaźnika wiemy, jaki jest zwrot z premii za ryzyko, na jednostkę całkowitego ryzyka. Im wyższa wartość tego wskaźnika, tym wyższa jakość zarządzania portfelem.

Należy zwrócić uwagę na to, że współczynnik Sharpe'a mierzy premię za ryzyko, która przypada na jednostkę ryzyka związanego z danym portfelem. Wskaźnik ten uwzględnia zarówno ryzyko, jak i stopę zwrotu oraz przyporządkowuje jedną wartość liczbową każdemu analizowanemu portfelowi. Otrzymane w ten sposób wartości mogą posłużyć uszeregowaniu portfeli pod względem osiąganych wyników. Za pomocą wskaźnika Sharpe'a ocenia się rentowność portfela na podstawie zarówno stopy zwrotu, jak i dywersyfikacji.

Wskaźnik Treynora określić można w poniższy sposób[170],[171]:

$$T = \frac{\overline{R} - \overline{R_f}}{\beta}, \tag{4.32}$$

gdzie:

T – wartość wskaźnika Treynora,

$\overline{R}$ - średnia wartość stopy zwrotu z portfela,

$\overline{R_f}$ - średnia wartość stopy wolnej od ryzyka,

β - współczynnik beta portfela w rozpatrywanym okresie.

[169] Sharpe W. F., *Mutual Fund Performance,* Journal of Business, 1966
[170] Fama E. F., *Components of Investment Performance,* Journal of Finance, 1972
[171] Treynor J. L., *How to Rate Management of Investment Funds,* Harvard Business Review, 1965

Współczynnik beta jest standardową miarą ryzyka systematycznego, ponieważ wiąże kowariancję z wariancją portfela rynku[172]:

(4.33) $$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Interpretacja bety, jest taka, że jest ona po prostu miarą wrażliwości danego waloru na zmiany występujące na rynku[173].

Współczynnik beta portfela definiuje się jako średnią ważoną β_i poszczególnych walorów tworzących portfel, gdzie wagami są udziały tych walorów w portfelu. W związku z tym:

(4.34) $$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i ,$$

gdzie:

(4.35) $$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{N} (y_{it} - \overline{R_i})(y_{Mt} - \overline{R_M})}{\sum_{t=1}^{N} (y_{Mt} - \overline{R_M})^2} .$$

W powyższych wzorach zastosowano oznaczenia:

x_i - udział *i*-tej spółki w portfelu,

β_i - współczynnik beta *i*-tej spółki,

y_{it} - stopę zwrotu *i*-tej spółki na przedziale czasowym *t*,

$\overline{R_i}$ - średnią stopę zawrotu *i*-tej spółki, $\overline{R_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$,

y_{Mt} - stopa zwrotu z indeksu rynku w okresie *t*,

$\overline{R_M}$ - średnia stopa zwrotu z indeksu rynku,

n - liczba spółek w portfelu,

N - liczba okresów, czyli dni, z których pochodzą dane.

Wskaźnik Treynora jest ilorazem premii za ryzyko i ryzyka systematycznego, które mierzone jest za pomocą współczynnika beta, z tego portfela, zatem jest to premia za podjęte ryzyko. Naturalnie, im wyższa wartość tego wskaźnika, tym wyższa jakość zarządzania portfelem.

[172] Reilly F. K., Brown K. C., op. cit.
[173] Elton E. J., Gruber M. J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1998

Niektórzy analitycy preferują współczynnik Treynora, ze względu na to, że uwzględnia on znaczenie ryzyka systematycznego[174]. Wskaźnik Treynora opiera się na współczynniku beta ryzyka systematycznego i średniej stopy zwrotu. Jednakże wskaźnik ten posiada pewną wadę. Polega ona na tym, że konieczny jest wybór indeksu odgrywającego rolę portfela rynkowego, a trudno jest stwierdzić, który z nich jest najodpowiedniejszy.

Dla w pełni zdywersyfikowanego portfela, czyli pozbawionego ryzyka niesystematycznego te dwa wskaźniki dają identyczne rankingi ze względu na wariancję. Wadą tych wskaźników jest to, że dzięki nim otrzymujemy względne, a nie absolutne wartości rentowności portfela.

Ostatnim rozważanym w tej pracy wskaźnikiem mogącym służyć do oceny rentowności portfela inwestycji jest wskaźnik Jensena. Dany jest on następującym wzorem[175]:

(4.36) $$J = \overline{R} - [\overline{R_f} + \beta(\overline{R_M} - \overline{R_f})],$$

gdzie:

$\overline{R}$ - średnia wartość stopy zwrotu z portfela,

$\overline{R_f}$ - średnia wartość stopy wolnej od ryzyka,

$\overline{R}_M$ - średnia stopa zwrotu z indeksu rynku,

β - współczynnik beta portfela w rozpatrywanym okresie.

Wskaźnik Jensena jest różnicą pomiędzy stopą zwrotu portfela a stopą zwrotu ze średniej stopy zwrotu z indeksu rynku. Niewątpliwie, im wyższa wartość tego wskaźnika, tym lepsza jakość zarządzania portfelem. Ponadto wartości dodatnie tego wskaźnika wyróżniają portfel, który jest lepszy od przeciętnego. Natomiast ujemne wartości wskazują portfel zarządzany gorzej niż przeciętny. Podobnie, jak w przypadku wskaźnika Treynora, za pomocą wskaźnika Jensena oblicza się premię za ryzyko w kategoriach ryzyka systematycznego.

Podsumowując, w powszechnym użyciu znajdują się trzy niezależne od różnic w poziomie ryzyka miary efektywności zarządzania portfelem[176]. Efektywność z jaką inwestor zarządza portfelem inwestycyjnym, można pojmować w dwojaki sposób, poprzez „głębokość" i „szerokość". Głębokość dotyczy rozmiaru dodatkowej stopy zwrotu, jaka została osiągnięta przez danego inwestora, natomiast szerokość odnosi się do liczby róż-

[174] Francis J. C., op. cit.
[175] Jensen M.C., *The Performance of Mutual Funds In the Period 1945 – 64,* Journal of Finance, 1968
[176] Haugen R. A., *Teoria nowoczesnego inwestowania,* Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1996

nych papierów wartościowych, z których inwestorowi udało się uzyskać dodatkowe stopy zwrotu[177].

Wskaźniki Jensena i Treynora koncentrują się na określeniu, czy osoby zarządzające portfelami są w stanie realizować dodatkowe zwroty, czyli tak zwaną głębokość zwrotów, lecz ignorują tak zwaną szerokość tych zwrotów, czyli liczbę różnych papierów wartościowych, z których osiągane są dodatkowe zwroty. Wskaźnik Sharpe'a, w przeciwieństwie do dwóch poprzednich, stanowi miarę wrażliwą zarówno na głębokość, jak i szerokość realizowanych dodatkowych zwrotów[178].

Należy pamiętać o tym, że wartości wskaźników Jensena i Treynora mogą być dodatkowo wypaczone poprzez wybór nieodpowiedniego indeksu rynkowego.

[177] Ibidem
[178] Ibidem

ROZDZIAŁ V

ZASADY KONSTRUKCJI PORTFELA

W niniejszej pracy badaniem objęte zostały portfele złożone z różnych instrumentów finansowych. Porównywane są one zarówno pod względem zyskowności jak i ryzyka. Zastosowanie różnych metod konstrukcji portfela optymalnego, prowadzi do różnych składów portfeli. Zatem podstawowym pytaniem na jakie musi odpowiedzieć sobie inwestor jest to, za pomocą jakiej metody ma określić skład portfela, który uzna za optymalny. Wybierając najlepszą metodę optymalizacji portfela powinniśmy się kierować regułą: maksymalizacji zysku przy minimalizacji ryzyka. Zatem najbardziej pożądanym portfelem byłby ten, który maksymalizuje zysk, mierzony za pomocą stopy zwrotu, przy jednoczesnym jak najmniejszym ryzyku.

W rozdziale tym przedstawiono własności szeregów stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Ponadto zaprezentowano dane, które są wykorzystywane do zastosowań opisanych metod. Na wstępie niniejszego rozdziału opisano zasady konstruowania portfeli, tzn. w jaki sposób dokonywano wyboru spółek do portfela. W kolejnych podrozdziałach opisano szczegółowo zasady budowy portfeli akcji, akcji i walut, akcji i towarów, walut i towarów oraz akcji, walut i towarów. W każdej z tych części umieszczone są średnie stopy zwrotów dla aktywów zawartych w danym portfelu oraz statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych instrumentów finansowych. W rozdziale tym również omówiono możliwość inwestycji w takie aktywa jak: ropa, złoto, gaz ziemny, srebro, cukier, kukurydza, kawa, bawełna.

5.1. Charakterystyka dynamiki rynku w okresach objętych badaniem

Badanie przeprowadzono dla dwóch okresów. Pierwszy okres zaczyna się 02 stycznia 2006 r., a kończy 29 grudnia 2006 r. Natomiast drugi okres rozpoczyna się 02 stycznia 2008 r., a kończy 31 grudnia 2008 r. Optymalizacji portfela dokonano na podstawie 251 notowań. Natomiast okresy testowe odpowiednio rozpoczynają się 02 stycznia 2007 r. i kończą 31 marca 2007 r. oraz 05 stycznia 2009 r. i 31 marca 2009 r. W okresach testowych badane jest zachowanie się wartości portfeli otrzymanych za pomocą wybranych metod optymalizacyjnych. Również w okresach testowych mierzone jest ryzyko za pomocą wartości zagrożonej (metoda kowariancji) oraz warunkowej wartości zagrożonej.

Powodem wyboru tych dwóch okresów jest to, że pierwszy przypada na okres hossy na giełdzie, a drugi bessy. W ten sposób chcemy również porównać skuteczność metod optymalizacyjnych dla okresów różniących się koniunkturą na giełdzie.

Na Rysunku 5.1 przedstawiono wartość indeksu WIG20 w okresie od 02.01.2006 r. do 31.03.2007 r. Czarną linią zaznaczony jest wykres odpowiadający obserwacjom od 02.01.2006 r. do 29.12.2006 r., natomiast czerwoną od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r. Widzimy zatem, że w badanym okresie w zasadzie obserwowano trend wzrostowy indeksu. Zaobserwować jednak można wyraźny spadek indeksu WIG20 z ok. 3300 pkt. aż do ok. 2500, w okresie od 11.05.2006 r. do 13.06.2006 r.

Rysunek 5.1. Wykres WIG20 w okresie od 02.01.2006 r. do 31.03.2007 r.

Na Rysunku 5.2 zaobserwować można obniżenie wartości indeksu WIG20, w okresie od 02.01.2008 r. do 31.03.2009 r. Powodem spadku cen akcji oraz głównych indeksów w tym okresie był kryzys na rynku nieruchomości amerykańskich. Czarną linią zaznaczony jest wykres odpowiadający obserwacjom od 02.01.2008 r. do 31.12.2008 r., natomiast czerwoną od 05.01.2009 r. do 31.03. 2009 r. Widzimy zatem, że w badanym okresie zanotowano ogromne spadki związane z wycofywaniem kapitału z giełdy. Zadanie znalezienia takich instrumentów, które przynosiłyby zyski, w rozpatrywanym okresie stanowi wyzwanie.

Porównując Rysunek 5.1 oraz Rysunek 5.2 widzimy, że w rozpatrywanych okresach, mamy zupełnie różne trendy na giełdzie. W pierwszym przypadku jest to trend wzrostowy, natomiast w drugim trend spadkowy. Rozważanie dwóch tak różniących innych okresów, pozwoli nam na sprawdzenie skuteczności metod optymalizacyjnych.

Rysunek 5.2. Wykres WIG20 w okresie od 02.01.2008 r. do 31.03.2009 r.

Doboru akcji do portfela był dokonywano na podstawie rekomendacji zawartych na portalach internetowych i w dziennikach prasowych, oraz na podstawie informacji o kondycji finansowej spółek. Mając na uwadze profil inwestora, opisany w rozdziale IV, staraliśmy się również dokonywać wstępnej dywersyfikacji sektorowej. Wybieraliśmy spółki z różnych branży. Pamiętaliśmy o tym, że inwestorem jest osoba, która nie posiada dużo wolnego czasu, aby zagłębiać się szczegółowo w analizy spółek, jednak posiada pewną wiedzę na temat inwestowania.

Ponadto chcieliśmy porównać prezentowane metody optymalizacji na portfelach złożonych z różnych instrumentów finansowych, dlatego konstruując końcowe portfele, staraliśmy się wybierać aktywa, które wcześniej nie były rozważane.

Kolejnym naszym celem, było porównanie metod dla dwóch różnych okresów, hossy i bessy, na giełdzie. Zatem optymalizacji portfela o identycznym zbiorze aktywów dokonujemy na danych za 2006 r. oraz na danych pochodzących z 2008 r.

Istotne, z punktu oceny inwestycji, jest również zachowanie się cen w okresach testowych, czyli w dniach od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r. oraz dla drugiego okresu badania w dniach od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r.

5.2. Założenia badania

Wielkość zysku jest jednym ze sposobów oceny inwestycji dokonanej w dany portfel. W naszym przypadku proces oceny wygląda następująco. Na danych za rok 2006 lub 2008 przeprowadzamy zadanie optymalizacyjne i w okresie testowym (3 - miesięcznym) obserwujemy zachowanie się wartości portfela. Na początku okresu testowego, czyli 02.01.2007 r. lub 05.01.2009 r. inwestujemy 100 000 zł w te spółki, które weszły w skład portfela w wyniku optymalizacji. Zatem zakupujemy aktywa za łączną kwotę 100 000 zł. Zakładamy pełną podzielność akcji, tak aby nie zaokrąglać ilości zakupionych aktywów. W związku z tym inwestujemy taki procent ze 100 000 zł w daną spółkę, jaki otrzymaliśmy z optymalizacji. Na koniec rozważanego okresu testowego, czyli na dzień 31.03.2007 r. lub 31.03.2009 r. sprzedajemy aktywa i mierzymy zysk lub ewentualną stratę. W całym okresie testowym nie zmieniamy składu portfela, w związku z tym ewentualne koszty związane z inwestowaniem w dany portfel, uwzględniamy dopiero na koniec okresu testowego. Również w trakcie okresu testowego, obserwując zachowanie się wartości portfela, szczególną uwagę zwracamy na dzień, w którym można było uzyskać największy i najmniejszy zysk, w przypadku podjęcia decyzji o wcześniejszym terminie zakończenia inwestycji.

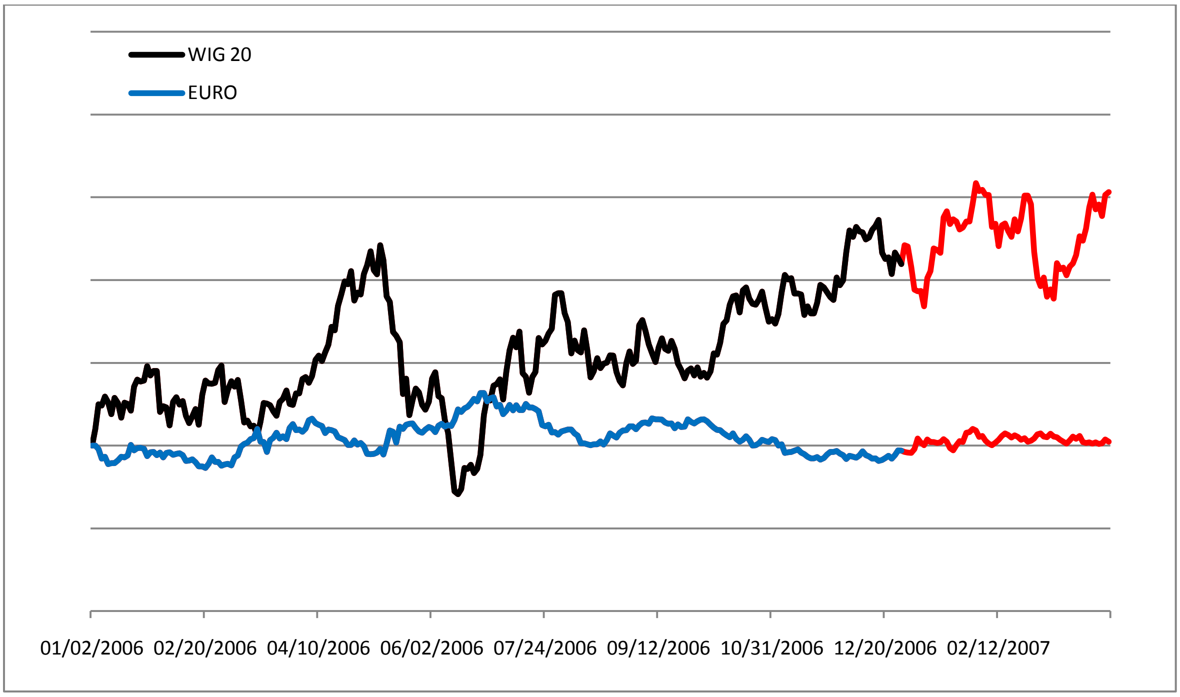
Rozważane stopy zwrotu obliczone są za pomocą wzoru:

(5.1) $$y_t = 100\,(\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})),$$

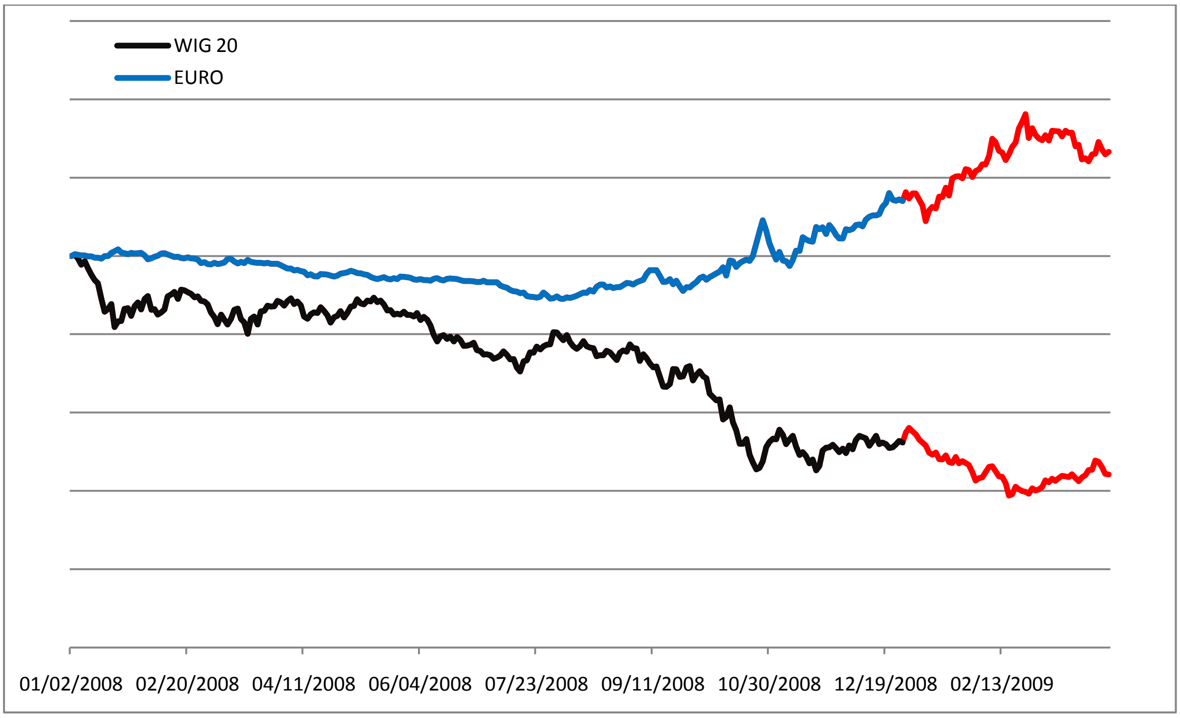
gdzie P_t jest ceną zamknięcia akcji w chwili *t*.

W przypadku braku notowania spółki w danym dniu, uzupełniono brak ostatnim notowaniem. Jest to bardzo istotne, gdyż musimy mieć taką samą liczbę stóp zwrotu, aby rozwiązać zadanie optymalizacyjne.

Biorąc pod uwagę koniunkturę na giełdzie w roku 2008, widzimy że inwestowanie w akcje wiąże się z ponoszeniem ogromnych strat. Naturalnym wydaje się skonstruowanie takiego portfela, w którego składzie obok akcji znajdują się również waluty. Obserwując zachowanie się tych dwóch różnych rynków, zauważyć można, że w okresie spadków na giełdzie można zaobserwować wzrost cen walut, natomiast w okresie wzrostów na giełdzie można zaobserwować spadek cen walut. Dlatego utworzenie portfela, w którego składzie są aktywa z rynku akcji oraz rynku walut, powinno powodować wzrost zysków inwestora, zarówno w okresie hossy jak i bessy na giełdzie. Zależność tą można zaobserwować na Rysunku 5.3, gdzie czerwoną linią zaznaczony jest okres testowy, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r. Ponadto wielkości wartości WIG20 i EUR/PLN są przeskalowane do jednego poziomu, tak aby miały wspólny punkt wyjściowy. Wpływ na rozpatrywanie takiego zestawu aktywów, miały również bardzo małe zyski uzyskane w okresie testowym od 05.01.2009 r. do 31.03. 2009 r. dla zestawu instrumentów 1_2008, złożonego wyłącznie z akcji. W takiej sytuacji inwestor powinien poszukiwać alternatywnych sposobów inwestowania pieniędzy.



Rysunek 5.3. Przeskalowane wartości WIG20 i EUR/PLN w okresie od 02.01.2006 r. do 31.03.2007 r.



Rysunek 5.4. Przeskalowane wartości WIG20 i EUR/PLN w okresie od 02.01.2008 r. do 31.03.2009 r.

Na danych za 2008 r. inwestycje w waluty stanowią większą część zoptymalizowanego portfela. Spowodowane jest to sytuacją na rynku giełdowym. W czasach spadków cen akcji notowane są wzrosty cen walut, które stają się alternatywnym sposobem na inwestycję. Warto zwrócić uwagę na to, jakim wahaniom ceny podlegało euro. Zilustrowane jest to na Rysunku 5.4, gdzie czerwoną linią zaznaczony jest okres testowy, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03. 2009 r.

Kurs walutowy interpretowany jest jako cena jednej jednostki obcej waluty w walucie krajowej, notowanej w Narodowym Banku Polskim. Analizowane są kursy wymiany złotego względem euro (EUR/PLN), dolara australijskiego (AUD/PLN), franka szwajcarskiego (CHF/PLN), funta brytyjskiego (GBP/PLN), jena japońskiego (JPY/PLN), dolara Hongkongu (HGK/PLN) oraz dolara amerykańskiego (USD/PLN). Wymienione waluty wchodzą w skład rozważanych portfeli.

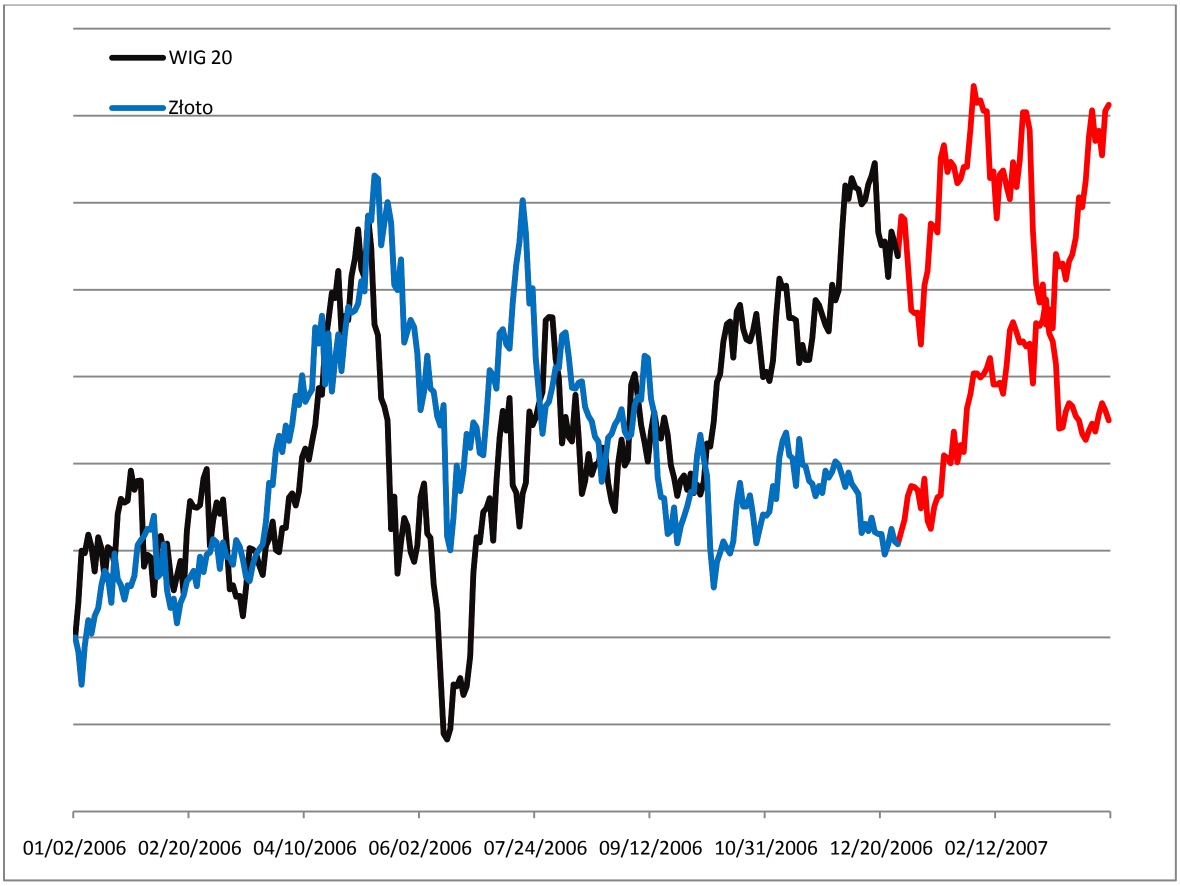
Kolejnym przykładem zróżnicowania inwestycji jest utworzenie portfela, w którego składzie znajdują się akcje i towary. Taka różnorodność aktywów w portfelu nie powinna powodować problemów z praktycznym inwestowaniem w takie aktywa. Jedną z możliwości jest inwestowanie poprzez portal internetowy http://www.plus500.pl/. Towary zakupuje się w formie elektronicznej, dlatego nie trzeba zastanawiać się nad kosztami związanymi z magazynowaniem tych towarów. Kolejną korzyścią wynikającą z inwestowania na tym portalu, jest fakt, że nie są pobierane żadne opłaty związane z prowadzeniem rachunku, co ma miejsce w Domach Maklerskich. Jedyną formą, dzięki której portal się finansuje są spready cen bid/ask. Dlatego na potrzeby niniejszego badania można pominąć koszty, które znacząco nie wpłyną na wielkość zysków inwestorów. Dane umieszczone na tym portalu pochodzą z różnych giełd.

Dokonując inwestycji poprzez wspomniany portal można zainwestować w takie aktywa jak:

- ropa,
- złoto,
- gaz ziemny,
- srebro,
- cukier,
- kukurydza,
- kawa,
- bawełna.

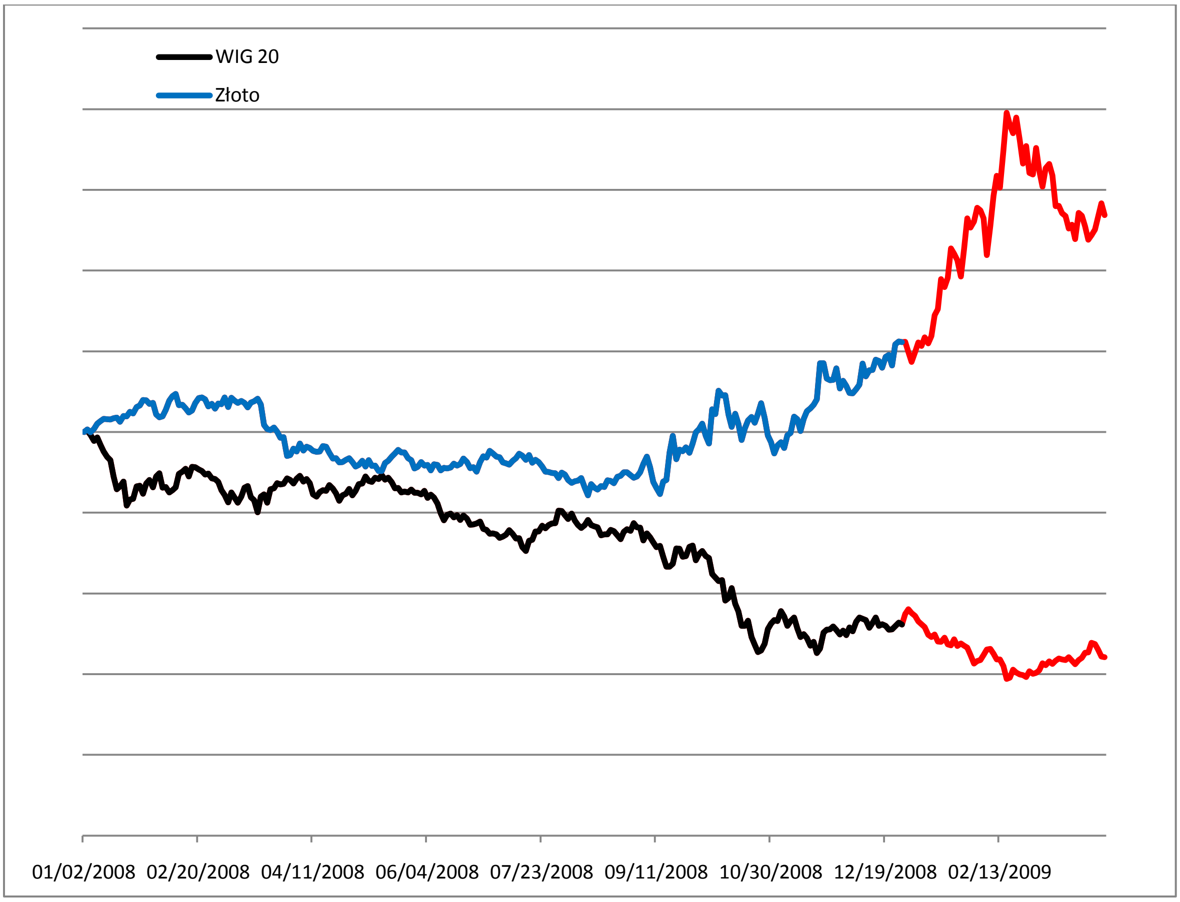
Dane są pobierane z portalu http://stooq.pl/. Rozważane towary są notowane w polskiej walucie, co pozwala na uniknięcie ryzyka walutowego i nie ma potrzeby wyliczania cen w złotych.

Na Rysunku 5.5 umieszczono wykres WIG20 i złota w okresie od 02.01.2006 r. do 31.03.2007 r., gdzie czerwoną linią zaznaczony jest okres testowy. Wielkości te są przeskalowane, w celu łatwiejszego porównania tych wartości.



Rysunek 5.5. Przeskalowane wartości WIG20 i złota w okresie od 02.01.2006 r. do 31.03.2007 r.

Natomiast na Rysunku 5.6 zilustrowano wykres WIG20 i złota w okresie od 02.01.2008 r. do 31.03.2009 r., gdzie czerwoną linią zaznaczono okres testowy. Na Rysunku 5.6 widzimy znaczny wzrost wartości złota w całym rozpatrywanym okresie. Ponadto widzimy przeciwne zachowanie się rynku giełdowego w porównaniu ze złotem. W związku z tym, alternatywnym sposobem inwestycji, w okresie bessy na giełdzie okazuje się inwestycja w np. złoto.



Rysunek 5.6. Przeskalowane wartości WIG20 i złota w okresie od 02.01.2008 r. do 31.03.2009 r.

Kolejnym przykładem zróżnicowanego sposobu inwestowania jest połączenie w portfelu walut i towarów. Pragnęliśmy sprawdzić jak inwestowanie na takich rynkach wpływa na zyskowność inwestycji oraz czy otrzymuje się w ten sposób portfel odporny na wahania cen na giełdzie i czy portfel ten zachowa się podobnie na danych za rok 2006 i 2008. Na uwagę również zasługuje fakt, że jest to jedyny portfel dla którego zadania optymalizacji portfela były rozwiązywane przy oczekiwanej stopie zwrotu nie mniejszej niż 5%, zarówno dla danych z 2006 r. jak i 2008 r.

Kolejnym przykładem zróżnicowanego sposobu inwestowania jest połączenie w portfelu wszystkich rozważanych aktywów finansowych. Jeżeli inwestycji dokonywalibyśmy za pomocą portalu inwestycyjnego http://www.plus500.pl/, nie byłoby większych problemów z połączeniem w jednym portfelu tak różnych aktywów. Należy również pamiętać o tym, że inwestor opisywany w poniższej pracy woli podejmować decyzje samowolnie, dlatego nie korzysta z usług firm specjalizujących się w doradztwie finansowym. W związku z tym koszty inwestycji są niższe.

Tworząc taki portfel pragnęliśmy porównać zyskowność oraz ryzyko dla inwestycji w tak zróżnicowane aktywa.

Różnice w koniunkturze na rozważanych rynkach, w okresach, z których dane zostały wykorzystane przy konstrukcji portfeli optymalnych, spowodowały, że przy rozwiązywaniu zadań minimalizacji ryzyka przyjęto zróżnicowane ograniczenia dotyczące stopy zwrotu. Ich wartości prezentuje Tabela 5.1.

Tabela 5.1. Założone oczekiwane stopy zwrotu dla poszczególnych zestawów instrumentów.

Nr zestawu instrumentów	$\overline{R}$
1_2006	10%
1_2008	2%
2_2006	10%
2_2008	5%
3_2006	15%
3_2008	5%
4_2006	5%
4_2008	5%
5_2006	10%
5_2008	5%

Natomiast Tabela 5.2 zawiera ograniczenia dotyczące warunkowej wartości zagrożonej oraz wariancji.

Tabela 5.2. Założona warunkowa wartość zagrożona oraz wariancja dla poszczególnych zestawów instrumentów.

Nr zestawu instrumentów	CVaR	Wariancja
1_2006	2.12	1.00
1_2008	8.82	12.00
2_2006	1.18	0.50
2_2008	2.22	1.20
3_2006	2.58	1.30
3_2008	3.80	2.50
4_2006	2.70	1.50
4_2008	1.82	0.60
5_2006	1.70	0.55
5_2008	1.72	0.60

5.3. Opis rozważanych instrumentów

W Tabeli 5.3 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 1_2006. Stopy zwrotu spółek Agora, BZWBK, Mol, Netia oraz Żywiec charakteryzują się lewostronną skośnością. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi. Rozważane rozkłady nie są rozkładami eliptycznymi, dlatego nie można stosować jako miary ryzyka wartości zagrożonej. W związku z tym przeprowadzając badania warto korzystać z miary ryzyka, która może być stosowana dla różnych rozkładów stóp zwrotu. O ograniczeniach co do typów rozkładów stóp zwrotu, w przypadku stosowania metod wyliczania warunkowej wartości zagrożonej, pisaliśmy w Rozdziale II.

Tabela 5.3. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2006.

Nazwa spółki	Min	Max	Średnia	Odchylenie standardowe	Skośność	Kurtoza
1. Agora	-11.9545	8.072314	-0.25444	2.679804	-0.15702	4.969602
2. BZWBK	-7.2245	6.678049	0.206371	2.459164	-0.24591	3.648019
3. CCC	-5.01495	7.822499	0.184639	1.925735	0.797582	5.396762
4. GTC	-6.15292	16.30396	0.333898	2.805026	0.874181	7.169102
5. Kofola	-9.39035	10.53606	0.257461	2.710413	0.32932	4.723876
6. Mennica	-5.19922	7.122678	0.093469	1.731272	0.386239	4.679472
7. Mol	-8.42933	6.751006	0.031584	2.202348	-0.47601	4.462428
8. Netia	-9.65109	8.443832	-0.03487	2.017669	-0.46658	6.891949
9. PGNiG	-5.56432	5.284211	0.0378	1.640352	0.237064	4.221432
10. Żywiec	-4.25597	3.770186	0.027918	1.144573	-0.32333	4.482821

W Tabeli 5.4 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 1_2008. Jedynie spółki Agora, Mennica oraz Mol charakteryzują się lewostronną skośnością. Uwagę należy zwrócić na spółkę Kofola, która charakteryzuje się silną prawostronną skośnością oraz wysoką wartością kurtozy. Rozkłady są skośne, zatem są eliptyczne, co utrudnia szacowanie ryzyka. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.4. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2008.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Agora	-17.4477	10.85057	-0.49124	3.463861	**-0.92066**	7.642614
2. BZWBK	-12.1433	11.00009	-0.32806	3.180483	0.063669	4.524269
3. CCC	-9.10729	9.858083	-0.07806	2.688674	0.122624	4.774431
4. GTC	-18.4185	17.27998	-0.44802	4.25391	0.113703	5.644236
5. Kofola	-15.209	35.70176	**0.03789**	4.174196	2.342914	**25.38394**
6. Mennica	-5.04597	5.271422	-0.06112	1.612794	**-0.12099**	4.949022
7. Mol	-18.2322	15.41507	-0.30437	3.723849	**-0.15378**	7.673787
8. Netia	-10.1096	9.531018	-0.20598	2.038515	0.025346	9.375408
9. PGNiG	-8.04724	8.299692	-0.12528	2.604674	0.103257	3.780555
10. Żywiec	-6.51307	10.31471	-0.09518	2.30115	1.125386	7.464278

W Tabeli 5.5 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 2_2006. Stopy zwrotu spółek Agora, BZWBK i Synthos oraz waluty dolar australijski i dolar Hongkongu charakteryzują się lewostronną skośnością. Dla niektórych aktywów występuje silna skośność, zatem rozkłady nie są eliptyczne. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, w związku z tym rozkłady nie są rozkładami normalnymi. Spółka Simple charakteryzuje się wysoką wartością kurtozy.

Tabela 5.5. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2006.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Agora	-11.9545	8.072314	-0.25444	2.679804	**-0.15702**	4.969602
2. Alma	-9.40289	11.75113	0.557743	3.087639	0.345932	4.925054
3. Dolar australijski	-2.69946	2.110736	-0.01691	0.581593	**-0.23973**	5.302284
4. BZWBK	-7.2245	6.678049	0.206371	2.459164	**-0.24591**	3.648019
5. Frank szwajcarski	-1.77894	1.989445	-0.01492	0.577325	0.324458	4.239137
6. GTC	-6.15292	16.30396	0.333898	2.805026	0.874181	7.169102
7. Dolar Hongkongu	-2.49585	2.802017	-0.04557	0.725757	**-0.19094**	4.900111
8. Śnieżka	-6.08188	6.787731	0.143871	1.766028	0.361007	6.01822
9. Simple	-25.1314	43.77534	0.09954	5.81271	1.921231	**20.67741**
10. Synthos	-7.95004	7.840159	0.31334	2.007908	**-0.00485**	5.67626

W Tabeli 5.6 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 2_2008. Połowa aktywów, czyli BZWBK, frank szwajcarski, GTC, dolar Hongkongu oraz Synthos charakteryzują się prawostronną skośnością. Pozostałe aktywa posiadają lewostronną skośność. Najwyższa jest ona dla spółki Simple. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi. Spółka Simple charakteryzuje się wysoką wartością kurtozy, podobna sytuacja była dla danych za 2006 r.

Tabela 5.6. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2008.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Agora	-17.4477	10.85057	-0.49124	3.463861	-0.92066	7.642614
2. Alma	-8.89686	7.767304	-0.71974	2.968682	-0.27556	4.108897
3. Dolar australijski	-5.42462	3.813743	-0.02474	1.063263	-0.299	7.541135
4. BZWBK	-12.1433	11.00009	-0.32806	3.180483	**0.063669**	4.524269
5. Frank szwajcar-ski	-3.58317	5.680038	0.09997	1.288281	**0.982785**	7.050834
6. GTC	-18.4185	17.27998	-0.44802	4.25391	**0.113703**	5.644236
7. Dolar Hongkon-gu	-4.3682	5.87076	0.074755	1.417761	**0.870755**	6.816773
8. Śnieżka	-13.7265	9.482042	-0.24167	2.646368	-0.97154	9.774672
9. Simple	-33.6472	17.32717	-0.21155	4.584592	-1.62915	**16.48813**
10. Synthos	-9.53102	8.61777	-0.43413	3.48625	**0.041261**	3.179497

W Tabeli 5.7 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 3_2006. Jedynie cztery spółki: Asseco Poland, BRE Bank, CEZ oraz Cersanit charakteryzują się prawostronną skośnością. Pozostałe aktywa posiadają lewostronną skośność. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.7. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2006.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Asseco Poland	-12.1568	13.38392	0.10656	2.338336	**0.208992**	9.269600
2. BRE Bank	-5.8372	7.490131	0.277123	1.934232	**0.098015**	3.808321
3. CEZ	-6.00866	12.22155	0.110701	1.811001	**0.732261**	11.42021
4. Ropa	-7.33558	4.548781	-0.0548	1.729003	-0.22751	3.778188
5. Cersanit	-7.54584	13.26219	0.393237	2.423135	**0.926377**	8.021735
6. Duda	-12.2147	11.87004	0.323202	3.040211	-0.04333	5.699221
7. Lotos	-9.45263	8.786138	0.038595	2.343827	-0.33034	4.928258
8. TP SA	-8.35865	5.380261	0.036127	1.947835	-0.23268	3.992681
9. Srebro	-15.5343	7.095923	0.10166	2.751999	-1.62814	10.26939
10. Złoto	-6.88074	4.549976	0.031507	1.426862	-0.66197	5.293461

W Tabeli 5.8 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 3_2008. Spółki Cersanit i TP SA oraz złoto charakteryzują się prawostronną skośnością, natomiast pozostałe rozważane aktywa posiadają lewostronną skośność. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.8. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2008.

Nazwa spółki	Min	Max	Średnia	Odchylenie standardowe	Skośność	Kurtoza
1. Asseco Poland	-12.3323	9.255161	-0.18126	2.64892	-0.46887	5.765835
2. Bre Bank	-12.4053	12.61946	-0.37906	3.507671	-0.28257	5.235265
3. CEZ	-17.3953	9.831469	-0.16371	3.553444	-0.73979	6.222494
4. Ropa	-9.37213	7.539018	-0.31937	2.618456	-0.29627	4.040314
5. Cersanit	-13.4531	10.82726	-0.35852	3.374386	**0.013637**	4.325011
6. Duda	-17.185	10.31842	-0.73353	3.416575	-0.65317	5.950845
7. Lotos	-10.4856	6.532935	-0.53004	2.598613	-0.41445	4.154327
8. TP SA	-6.5336	8.07976	-0.03299	2.162305	**0.109996**	4.050352
9. Srebro	-10.6301	9.608061	-0.06342	2.819313	-0.38448	4.816379
10. Złoto	-5.99005	8.384036	0.079236	1.93353	**0.563763**	6.069858

W Tabeli 5.9 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 4_2006. Zaobserwować można dosyć niskie wartości odchylenia standardowego, w porównaniu z rozważanymi wcześniej stopami zwrotu. Ponadto cztery aktywa: ropa, cukier, dolar amerykański i złoto charakteryzują się lewostronną skośnością. Pozostałe instrumenty charakteryzują się prawostronną skośnością. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.9. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2006.

Nazwa spółki	Min	Max	Średnia	Odchylenie standardowe	Skośność	Kurtoza
1. Frank szwajcarski	-1.77894	1.989445	-0.01492	0.577325	0.324458	4.239137
2. Ropa	-7.33558	4.548781	-0.0548	1.729003	**-0.22751**	3.778188
3. Bawełna	-6.30196	8.486622	0.008237	1.499418	0.576572	7.837333
4. Euro	-1.59691	1.884075	-0.00238	0.516744	0.205983	4.329599
5. Funt brytyjski	-1.58575	2.170924	0.00706	0.571965	0.20752	4.178742
6. Jen japoński	-1.89085	1.78004	-0.04734	0.620988	0.246524	3.369108
7. Kawa	-5.03335	5.964064	0.069099	1.728072	0.129218	3.672337
8. Cukier	-9.99924	7.166507	-0.07443	2.432454	**-0.2149**	4.659306
9. Dolar amerykański	-2.49824	2.745026	-0.04442	0.723701	**-0.20003**	4.789471
10. Złoto	-6.88074	4.549976	0.031507	1.426862	**-0.66197**	5.293461

W Tabeli 5.10 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 4_2008. Jedynie dwa aktywa: ropa i kawa charakteryzują się lewostronną skośnością. Pozostałe aktywa charakteryzują się skośnością prawostronną, która przyjmuje duże wartości. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.10. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2008.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Frank szwajcarski	-3.58317	5.680038	0.09997	1.288281	0.982785	7.050834
2. Ropa	-9.37213	7.539018	-0.31937	2.618456	**-0.29627**	4.040314
3. Bawełna	-6.99172	10.34558	-0.16017	2.480642	0.228596	4.502022
4. Euro	-3.04255	3.979925	0.060976	0.911782	0.840385	7.022025
5. Funt brytyjski	-4.31797	4.321578	-0.04978	1.056104	0.252762	5.587599
6. Jen japoński	-6.98004	9.794538	0.156137	1.940435	0.98805	8.62978
7. Kawa	-8.79301	5.549143	-0.09262	2.04112	**-0.62931**	4.628761
8. Cukier	-9.31272	16.84645	0.019187	3.037517	0.668551	7.497592
9. Dolar amerykański	-4.33296	5.93698	0.071224	1.42345	0.816776	6.677647
10. Złoto	-5.99005	8.384036	0.079236	1.93353	0.563763	6.069858

W Tabeli 5.11 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 5_2006. Cztery aktywa: ropa, dolar amerykański, srebro oraz złoto charakteryzują się lewostronną skośnością. Pozostałe aktywa posiadają prawostronną skośność. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi.

Tabela 5.11. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2006.

Nazwa spółki	**Min**	**Max**	**Średnia**	**Odchylenie standardowe**	**Skośność**	**Kurtoza**
1. Bioton	-11.5833	13.35314	0.322097	3.806001	0.323316	5.125623
2. Frank szwajcarski	-1.77894	1.989445	-0.01492	0.577325	0.324458	4.239137
3. Ropa	-7.33558	4.548781	-0.0548	1.729003	**-0.22751**	3.778188
4. Euro	-1.59691	1.884075	-0.00238	0.516744	0.205983	4.329599
5. Kofola	-9.39035	10.53606	0.257461	2.710413	0.32932	4.723876
6. PKO BP	-4.54005	7.86927	0.214744	2.087479	0.505538	3.950161
7. TVN	-6.79671	7.622723	0.169588	2.223607	0.244157	4.060158
8. Dolar amerykański	-2.49824	2.745026	-0.04442	0.723701	**-0.20003**	4.789471
9. Srebro	-15.5343	7.095923	0.10166	2.751999	**-1.62814**	10.26939
10. Złoto	-6.88074	4.549976	0.031507	1.426862	**-0.66197**	5.293461

W Tabeli 5.12 umieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu rozważanych aktywów z zestawu instrumentów 5_2008. Trzy aktywa: spółka Bioton oraz ropa i srebro charakteryzują się lewostronną skośnością. Pozostałe rozpatrywane aktywa posiadają prawostronną skośność. Kurtoza dla badanych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem rozkłady nie są rozkładami normalnymi. Na uwagę zasługuje wielkość kurtozy spółki Kofola.

Tabela 5.12. Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2008.

Nazwa spółki	Min	Max	Średnia	Odchylenie standardowe	Skośność	Kurtoza
1. Bioton	-16.7054	11.7783	-0.62717	4.158253	**-0.44208**	4.9632
2. Frank szwajcarski	-3.58317	5.680038	0.09997	1.288281	0.982785	7.050834
3. Ropa	-9.37213	7.539018	-0.31937	2.618456	**-0.29627**	4.040314
4. Euro	-3.04255	3.979925	0.060976	0.911782	0.840385	7.022025
5. Kofola	-15.209	35.70176	0.03789	4.174196	2.342914	**25.38394**
6. PKO BP	-10.1461	9.97267	-0.14218	3.11431	0.074451	3.987216
7. TVN	-11.135	12.85864	-0.25093	3.202311	0.10554	5.091232
8. Dolar amerykański	-4.33296	5.93698	0.071224	1.42345	0.816776	6.677647
9. Srebro	-10.6301	9.608061	-0.06342	2.819313	**-0.38448**	4.816379
10. Złoto	-5.99005	8.384036	0.079236	1.93353	0.563763	6.069858

5.4. Portfel akcji

Zasady konstrukcji portfela zostały opisane w 2 punkcie tego rozdziału. W tym miejscu przedstawimy średnie stopy zwrotu z portfela oraz wartości korelacji występujących pomiędzy stopami zwrotu składników portfela.

Najważniejszym czynnikiem, który powinien uwzględniać inwestor przy doborze aktywów do portfela jest oczekiwana stopa zwrotu. W zadaniu optymalizacji portfela niezależnie od wybranej metody mamy warunek dotyczący średniej stopy zwrotu z portfela. W związku z tym, w portfelu znajdą się takie aktywa, których kombinacja udziałów i średniej stopy zwrotu może dać pożądaną oczekiwaną stopę zwrotu z portfela. Przy tym maksymalną stopę zwrotu możemy na ogół uzyskać tylko wtedy, gdy całą sumę pieniędzy przeznaczonych na inwestycję, zainwestujemy w instrument finansowy o największej średniej stopie zwrotu. Jednakże w tym przypadku narażalibyśmy się na większe ryzyko i portfel byłby niezdywersyfikowany, a w inwestowaniu raczej należy minimalizować ryzyko ewentualnej straty poprzez dywersyfikację w różnego rodzaju aktywa finansowe.

W Tabeli 5.13 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów z zestawu instrumentów 1_2006. Zauważyć można, że prawie wszystkie rozpatrywane spółki cechuje dodatnia średnia stopa zwrotu. Jedynie dla spółek Agora oraz Netia obserwujemy ujemną średnią stopę zwrotu. Można się spodziewać, że w zoptymalizowanym portfelu nie znajdą się spółki: Agora oraz Netia, natomiast największy udział powinny mieć GTC i Kofola.

Tabela 5.13. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 1_2006.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Agora	**-0.25444**
2. BZWBK	0.206371
3. CCC	0.184639
4. GTC	0.333898
5. Kofola	0.257461
6. Mennica	0.093469
7. Mol	0.031584
8. Netia	**-0.03487**
9. PGNiG	0.037800
10. Żywiec	0.027918

Tabela 5.14. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2006.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.297333	0.17892	0.292838	0.090629	0.033998	0.256446	0.134177	0.187443	0.090185
2	0.297333	1	0.238694	0.435033	0.168959	0.107369	0.408398	0.36876	0.412354	0.128005
3	0.17892	0.238694	1	0.112946	0.144087	0.156728	0.176646	0.132631	0.115043	0.053747
4	0.292838	0.435033	0.112946	1	0.131195	0.06627	0.302719	0.176452	0.269512	0.040297
5	0.090629	0.168959	0.144087	0.131195	1	0.158309	0.109912	0.122855	0.187631	0.081165
6	0.033998	0.107369	0.156728	0.06627	0.158309	1	0.081478	0.056992	0.12576	0.059807
7	0.256446	0.408398	0.176646	0.302719	0.109912	0.081478	1	0.185901	0.309642	0.002233
8	0.134177	0.36876	0.132631	0.176452	0.122855	0.056992	0.185901	1	0.170299	0.098174
9	0.187443	0.412354	0.115043	0.269512	0.187631	0.12576	0.309642	0.170299	1	0.024697
10	0.090185	0.128005	0.053747	0.040297	0.081165	0.059807	0.002233	0.098174	0.024697	1

Chcąc uświadomić czytelnikowi powiązania występujące pomiędzy rozważanymi składnikami, przedstawiamy korelacje stóp zwrotu. W Tabeli 5.14 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2006. Widzimy, że wszystkie rozważane korelacje są dodatnie, zatem można się spodziewać, że nie wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanym portfelu.

W Tabeli 5.15 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów z zestawu instrumentów 1_2008. Zauważyć można, że jedynie spółka Kofola charakteryzuje się dodatnią średnią stopą zwrotu. Jak zauważymy później zadania optymalizacji portfela miały rozwiązania. Natomiast maksymalną stopą zwrotu jaką można było otrzymać w wyniku inwestycji w taki portfel byłoby 3.7%, ale pod warunkiem, że cała suma zainwestowana byłaby w spółkę Kofola.

Tabela 5.15. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 1_2008.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Agora	-0.49124
2. BZWBK	-0.32806
3. CCC	-0.07806
4. GTC	-0.44802
5. Kofola	**0.03789**
6. Mennica	-0.06112
7. Mol	-0.30437
8. Netia	-0.20598
9. PGNiG	-0.12528
10. Żywiec	-0.09518

W Tabeli 5.16 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2008. Widzimy, że prawie wszystkie rozważane korelacje są dodatnie, zatem można się spodziewać, że nie wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanym portfelu. Jedynie korelacja pomiędzy spółką Mennica, a Żywiec jest ujemna, ale przyjmuje wartość bliską zeru.

Tabela 5.16. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 1_2008.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.413213	0.095077	0.424527	0.184176	0.150402	0.323455	0.16639	0.429847	0.1511
2	0.413213	1	0.330035	0.59265	0.173983	0.12895	0.423688	0.218397	0.476621	0.154318
3	0.095077	0.330035	1	0.223256	0.105146	0.13897	0.195095	0.146874	0.1533	0.080522
4	0.424527	0.59265	0.223256	1	0.206477	0.122202	0.248774	0.151598	0.476275	0.105353
5	0.184176	0.173983	0.105146	0.206477	1	0.053303	0.11198	0.072803	0.180209	0.033369
6	0.150402	0.12895	0.13897	0.122202	0.053303	1	0.134276	0.090526	0.046355	-0.01277
7	0.323455	0.423688	0.195095	0.248774	0.11198	0.134276	1	0.304246	0.298575	0.245581
8	0.16639	0.218397	0.146874	0.151598	0.072803	0.090526	0.304246	1	0.117108	0.093948
9	0.429847	0.476621	0.1533	0.476275	0.180209	0.046355	0.298575	0.117108	1	0.059832
10	0.1511	0.154318	0.080522	0.105353	0.033369	-0.01277	0.245581	0.093948	0.059832	1

Zestaw instrumentów 1_2008 jest rozpatrywany jedynie dlatego, aby była możliwość porównania jego wyników z wynikami odpowiadającego mu portfela dla danych za 2006 r. (zestaw instrumentów 1_2006). Dla inwestora, poszukującego inwestycji przynoszącej zyski w 2008 roku, jest to przykład portfela ukazującego w co nie należy inwestować podczas okresu bessy na giełdzie. W tym czasie należy poszukiwać alternatywnych sposobów uzyskania zysku, gdyż inwestowanie w akcje wiąże się z ponoszeniem ogromnych strat.

5.5. Portfel akcji i walut

W Tabeli 5.17 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 2_2006. Jedynie spółka Agora oraz waluty dolar australijski, frank szwajcarski oraz dolar Hongkongu charakteryzują się ujemną średnią stopą zwrotu. Dla spółki jest to dość wysoka wartość, natomiast dla walut te wartości są znacznie niższe. Spodziewać się można, że wspomniane aktywa nie znajdą się w zoptymalizowanych portfelach. Natomiast największy udział w zoptymalizowanym portfelu powinien należeć do spółki Alma.

Tabela 5.17. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 2_2006.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Agora	**-0.25444**
2. Alma	0.557743
3. Dolar australijski	**-0.01691**
4. BZWBK	0.206371
5. Frank szwajcarski	**-0.01492**
6. GTC	0.333898
7. Dolar Hongkongu	**-0.04557**
8. Śnieżka	0.143871
9. Simple	0.09954
10. Synthos	0.31334

W Tabeli 5.18 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2006. Widzimy, że korelacje są zarówno dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanym portfelu. Ponadto w zoptymalizowanych portfelach powinny się znaleźć te aktywa, pomiędzy którymi korelacje przyjmują największe ujemne wartości, tak jak ma to miejsce dla spółki Agora i waluty dolar Hongkongu.

Tabela 5.18. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2006.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.125801	-0.14394	0.297333	-0.17178	0.292838	-0.19452	0.116164	0.132248	0.084408
2	0.125801	1	-0.02377	0.206206	-0.12452	0.168016	-0.09023	0.094914	0.150903	0.093671
3	-0.14394	-0.02377	1	-0.07503	0.640993	-0.0763	0.670141	-0.15404	-0.05074	-0.15756
4	0.297333	0.206206	-0.07503	1	-0.16563	0.435033	-0.17675	0.183931	0.173913	0.241613
5	-0.17178	-0.12452	0.640993	-0.16563	1	-0.13027	0.67758	-0.16374	-0.05958	-0.11323
6	0.292838	0.168016	-0.0763	0.435033	-0.13027	1	-0.12268	0.130008	0.141927	0.140933
7	**-0.19452**	-0.09023	0.670141	-0.17675	0.67758	-0.12268	1	-0.14628	-0.09787	-0.11347
8	0.116164	0.094914	-0.15404	0.183931	-0.16374	0.130008	-0.14628	1	0.092673	0.178632
9	0.132248	0.150903	-0.05074	0.173913	-0.05958	0.141927	-0.09787	0.092673	1	0.062718
10	0.084408	0.093671	-0.15756	0.241613	-0.11323	0.140933	-0.11347	0.178632	0.062718	1

Dla zestawu instrumentów 2_2008 jedynie tylko dwa rozważane aktywa mają dodatnią średnią stopę zwrotu, co można zaobserwować w Tabeli 5.19. W związku z tym, powinny one posiadać największy udział w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.19. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 2_2008.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Agora	-0.49124
2. Alma	-0.71974
3. Dolar australijski	-0.02474
4. BZWBK	-0.32806
5. Frank szwajcarski	**0.09997**
6. GTC	-0.44802
7. Dolar Hongkongu	**0.074755**
8. Śnieżka	-0.24167
9. Simple	-0.21155
10. Synthos	-0.43413

W Tabeli 5.19 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2008. Widzimy, że korelacje są zarówno dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanym portfelu. Ponadto w zoptymalizowanych portfelach powinny się znaleźć te aktywa, pomiędzy którymi korelacje przyjmują największe ujemne wartości, tak jak ma to miejsce dla spółki BZ WBK i waluty frank szwajcarski. Ponadto możemy zaobserwować silną dodatnią korelację pomiędzy walutami frank szwajcarski i dolar Hongkongu, które nie powinny znaleźć się w zoptymalizowanych portfelach. Jeżeli jednak pod uwagę weźmiemy średnie stopy zwrotu, to zachodzi tutaj pewna sprzeczność.

Tabela 5.20. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 2_2008.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.198413	0.172407	0.413213	-0.13365	0.424527	-0.10631	0.121134	0.1887	0.326904
2	0.198413	1	0.170248	0.357113	-0.22314	0.252629	-0.15276	0.284212	0.142381	0.327391
3	0.172407	0.170248	1	0.066881	0.203282	0.074043	0.267929	0.045194	-0.02362	0.061339
4	0.413213	0.357113	0.066881	1	-0.34256	0.59265	-0.23393	0.204084	0.091633	0.528489
5	-0.13365	-0.22314	0.203282	-0.34256	1	-0.31864	0.730281	-0.15948	-0.11535	-0.23639
6	0.424527	0.252629	0.074043	0.59265	-0.31864	1	-0.2419	0.149967	0.064772	0.419203
7	-0.10631	-0.15276	0.267929	-0.23393	0.730281	-0.2419	1	-0.14892	-0.12264	-0.1324
8	0.121134	0.284212	0.045194	0.204084	-0.15948	0.149967	-0.14892	1	0.079358	0.249754
9	0.1887	0.142381	-0.02362	0.091633	-0.11535	0.064772	-0.12264	0.079358	1	0.098467
10	0.326904	0.327391	0.061339	0.528489	-0.23639	0.419203	-0.1324	0.249754	0.098467	1

5.6. Portfel akcji i towarów

W Tabeli 5.21 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 3_2006. Jedynie ropa charakteryzuje się ujemną średnią stopą zwrotu. W związku z tym, inwestując w taki portfel można było uzyskać o wiele większą oczekiwaną stopę zwrotu, która wynosiła aż 26.32%, dla zadania maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danej wielkości warunkowej wartości zagrożonej. Ponadto jest to jedyny portfel, dla którego zadania optymalizacyjne rozwiązywano dla oczekiwanej stopy zwrotu z portfela wynoszącej 15%. Przypuszczać można, że dla takiego zestawu instrumentów wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.21. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 3_2006.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Asseco Poland	0.10656
2. Bre Bank	0.277123
3. CEZ	0.110701
4. Ropa	**-0.0548**
5. Cersanit	0.393237
6. Duda	0.323202
7. Lotos	0.038595
8. TP SA	0.036127
9. Srebro	0.10166
10. Złoto	0.031507

Tabela 5.22. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2006.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.220174	0.156299	0.019555	0.196815	0.178875	0.291645	0.336921	0.030453	0.011029
2	0.220174	1	0.337247	0.006128	0.254196	0.167156	0.351358	0.337246	0.049207	0.058517
3	0.156299	0.337247	1	0.102203	0.096944	0.245805	0.326403	0.314263	0.164377	0.198022
4	0.019555	0.006128	0.102203	1	0.030938	-0.03161	0.016721	-0.0254	0.339739	0.402616
5	0.196815	0.254196	0.096944	0.030938	1	0.141356	0.226872	0.093711	0.14952	0.112533
6	0.178875	0.167156	0.245805	-0.03161	0.141356	1	0.276535	0.267443	0.083619	0.061175
7	0.291645	0.351358	0.326403	0.016721	0.226872	0.276535	1	0.39136	0.110433	0.093303
8	0.336921	0.337246	0.314263	-0.0254	0.093711	0.267443	0.39136	1	0.008344	0.005532
9	0.030453	0.049207	0.164377	0.339739	0.14952	0.083619	0.110433	0.008344	1	0.813397
10	0.011029	0.058517	0.198022	0.402616	0.112533	0.061175	0.093303	0.005532	0.813397	1

W Tabeli 5.22 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2006. Widzimy, że większość korelacji jest dodatnia, zatem można się spodziewać, że nie wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach. Do portfeli tych powinny należeć spółki o jak najniższej korelacji. Jedynie dla takich par aktywów jak: ropa i spółka Duda oraz dla ropy i TP SA zaobserwować można minimalne ujemne korelacje.

W Tabeli 5.23 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 3_2008. Jedynie, dla danych za 2008 r., złoto charakteryzuje się dodatnią średnią stopą zwrotu. Również w związku z tym, maksymalna stopa, jaką uzyskaliśmy z metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, wynosi 7.03%. W związku z tym możemy przypuszczać, że największy udział w portfelach zoptymalizowanych będzie należał do złota.

Tabela 5.23. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 3_2008.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Asseco Poland	-0.18126
2. Bre Bank	-0.37906
3. CEZ	-0.16371
4. Ropa	-0.31937
5. Cersanit	-0.35852
6. Duda	-0.73353
7. Lotos	-0.53004
8. TP SA	-0.03299
9. Srebro	-0.06342
10. Złoto	**0.079236**

W Tabeli 5.24 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2008. Widzimy, że większość korelacji jest dodatnia, zatem można się spodziewać, że nie wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach. Jedynie stopy zwrotu złota są ujemnie skorelowane z większością rozważanych aktywów.

Tabela 5.24. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 3_2008.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.48662	0.440853	0.043198	0.462805	0.326466	0.432509	0.283326	0.110526	-0.02748
2	0.48662	1	0.524939	0.200424	0.478769	0.508777	0.484928	0.511638	0.14753	-0.18163
3	0.440853	0.524939	1	0.251868	0.296791	0.295335	0.390469	0.471563	0.236376	-0.11549
4	0.043198	0.200424	0.251868	1	0.098354	0.030701	0.080329	0.235767	0.376035	0.205672
5	0.462805	0.478769	0.296791	0.098354	1	0.20913	0.401261	0.265376	0.069955	-0.05791
6	0.326466	0.508777	0.295335	0.030701	0.20913	1	0.389353	0.384981	0.015614	-0.16838
7	0.432509	0.484928	0.390469	0.080329	0.401261	0.389353	1	0.356359	0.216319	0.015003
8	0.283326	0.511638	0.471563	0.235767	0.265376	0.384981	0.356359	1	0.169637	-0.11558
9	0.110526	0.14753	0.236376	0.376035	0.069955	0.015614	0.216319	0.169637	1	0.690385
10	-0.02748	-0.18163	-0.11549	0.205672	-0.05791	-0.16838	0.015003	-0.11558	0.690385	1

5.7. Portfel walut i towarów

W Tabeli 5.25 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 4_2006. Jedynie takie aktywa jak bawełna, funt brytyjski, kawa oraz złoto posiadają dodatnią średnią stopę zwrotu. Zatem aktywa te powinny znaleźć się w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.25. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 4_2006.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Frank szwajcarski	-0.01492
2. Ropa	-0.0548
3. Bawełna	**0.008237**
4. Euro	-0.00238
5. Funt brytyjski	**0.00706**
6. Jen japoński	-0.04734
7. Kawa	**0.069099**
8. Cukier	-0.07443
9. Dolar amerykański	-0.04442
10. Złoto	**0.031507**

W Tabeli 5.26 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2006. Widzimy, że występują zarówno korelacje dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.26. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2006.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0.122218	-0.05817	0.951019	0.891645	0.751289	0.00659	-0.01491	0.669357	0.003898
2	0.122218	1	0.066538	0.129636	0.100101	0.034784	0.133417	0.220011	0.164746	0.402616
3	-0.05817	0.066538	1	-0.09124	-0.06885	-0.04004	0.206893	0.157011	-0.10371	0.147339
4	0.951019	0.129636	-0.09124	1	0.895789	0.75799	-0.04017	-0.01024	0.754212	0.0054
5	0.891645	0.100101	-0.06885	0.895789	1	0.754622	-0.0513	-0.01967	0.735861	0.001868
6	0.751289	0.034784	-0.04004	0.75799	0.754622	1	-0.11238	-0.12903	0.634012	-0.00196
7	0.00659	0.133417	0.206893	-0.04017	-0.0513	-0.11238	1	0.154974	-0.15898	0.090846
8	-0.01491	0.220011	0.157011	-0.01024	-0.01967	-0.12903	0.154974	1	-0.03993	0.154138
9	0.669357	0.164746	-0.10371	0.754212	0.735861	0.634012	-0.15898	-0.03993	1	-0.00057
10	0.003898	0.402616	0.147339	0.0054	0.001868	-0.00196	0.090846	0.154138	-0.00057	1

W Tabeli 5.27 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 4_2008. Jedynie takie aktywa jak ropa, bawełna, funt brytyjski oraz kawa posiadają ujemną średnią stopę zwrotu. Pozostałe rozpatrywane aktywa posiadają dodatnią średnią stopę zwrotu. W związku z tym, możemy przypuszczać, że wystąpi dość spora dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.27. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 4_2008.

Nazwa spółki	Średnia stopa zwrotu
1. Frank szwajcarski	**0.09997**
2. Ropa	-0.31937
3. Bawełna	-0.16017
4. Euro	**0.060976**
5. Funt brytyjski	-0.04978
6. Jen japoński	**0.156137**
7. Kawa	-0.09262
8. Cukier	**0.019187**
9. Dolar amerykański	**0.071224**
10. Złoto	**0.09997**

W Tabeli 5.28 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2008. Widzimy, że występują zarówno korelacje dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.28. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 4_2008.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	-0.14612	-0.23296	0.927127	0.62975	0.852065	-0.20974	-0.23616	0.719993	0.093567
2	-0.14612	1	0.311034	-0.09299	-0.03547	-0.18596	0.340885	0.346885	-0.10485	0.205672
3	-0.23296	0.311034	1	-0.21819	-0.16261	-0.23399	0.453443	0.409521	-0.1929	-0.02809
4	0.927127	-0.09299	-0.21819	1	0.743301	0.800383	-0.16906	-0.23455	0.77237	0.107906
5	0.62975	-0.03547	-0.16261	0.743301	1	0.656405	-0.13046	-0.15554	0.758883	0.046914
6	0.852065	-0.18596	-0.23399	0.800383	0.656405	1	-0.23378	-0.26497	0.865777	0.135099
7	-0.20974	0.340885	0.453443	-0.16906	-0.13046	-0.23378	1	0.525554	-0.19452	-0.10079
8	-0.23616	0.346885	0.409521	-0.23455	-0.15554	-0.26497	0.525554	1	-0.23026	-0.01311
9	0.719993	-0.10485	-0.1929	0.77237	0.758883	0.865777	-0.19452	-0.23026	1	0.046386
10	0.093567	0.205672	-0.02809	0.107906	0.046914	0.135099	-0.10079	-0.01311	0.046386	1

5.8. Portfel akcji, walut i towarów

W Tabeli 5.29 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 5_2006. Jedynie takie aktywa jak frank szwajcarski, ropa, euro oraz dolar amerykański posiadają ujemną średnią stopę zwrotu. Zadania optymalizacyjne rozwiązywano przy oczekiwanej stopie zwrotu z portfela równej 10%, jednakże patrząc na Tabelę 5.29 widzimy, że optymalizacji można było dokonywać przy wyższej średniej stopie zwrotu. Możemy przypuszczać, że wystąpi pełna dywersyfikacja oraz wspomniane powyżej aktywa nie powinny należeć do zoptymalizowanych portfeli.

Tabela 5.29. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 5_2006.

Nazwa spółki	Średnia stopa zwrotu
1. Bioton	0.322097
2. Frank szwajcarski	**-0.01492**
3. Ropa	**-0.0548**
4. Euro	**-0.00238**
5. Kofola	0.257461
6. PKO BP	0.214744
7. TVN	0.169588
8. Dolar amerykański	**-0.04442**
9. Srebro	0.10166
10. Złoto	0.031507

W Tabeli 5.30 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2006. Widzimy, że występują zarówno korelacje dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.30. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2006.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	-0.15064	-0.01488	-0.15228	0.214694	0.27345	0.155094	-0.11086	0.110602	0.119259
2	-0.15064	1	0.122218	0.951019	-0.08853	-0.29557	-0.20766	0.669357	-0.06319	0.003898
3	-0.01488	0.122218	1	0.129636	-0.01115	-0.04053	0.017844	0.164746	0.339739	0.402616
4	-0.15228	0.951019	0.129636	1	-0.08088	-0.25035	-0.19219	0.754212	-0.05568	0.0054
5	0.214694	-0.08853	-0.01115	-0.08088	1	0.135509	0.074249	-0.06694	0.15971	0.135473
6	0.27345	-0.29557	-0.04053	-0.25035	0.135509	1	0.388695	-0.22909	0.064293	0.056813
7	0.155094	-0.20766	0.017844	-0.19219	0.074249	0.388695	1	-0.1515	0.129928	0.098897
8	-0.11086	0.669357	0.164746	0.754212	-0.06694	-0.22909	-0.1515	1	-0.08058	-0.00057
9	0.110602	-0.06319	0.339739	-0.05568	0.15971	0.064293	0.129928	-0.08058	1	0.813397
10	0.119259	0.003898	0.402616	0.0054	0.135473	0.056813	0.098897	-0.00057	0.813397	1

W Tabeli 5.31 umieszczono średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 5_2008. Zaobserwować można, że takie aktywa jak frank szwajcarski, euro, spółka Kofola, dolar amerykański oraz złoto posiadają dodatnią średnią stopę zwrotu. Ponadto wartości te nie są zbyt wysokie, dlatego zadanie optymalizacyjne rozwiązywano przy średniej stopie równej 5%. Zatem możemy się spodziewać zdywersyfikowania portfeli zoptymalizowanych.

Tabela 5.31. Średnie stopy zwrotu dla aktywów w zestawie instrumentów 5_2008.

Nazwa spółki	**Średnia stopa zwrotu**
1. Bioton	-0.62717
2. Frank szwajcarski	**0.09997**
3. Ropa	-0.31937
4. Euro	**0.060976**
5. Kofola	**0.03789**
6. PKO BP	-0.14218
7. TVN	-0.25093
8. Dolar amerykański	**0.071224**
9. Srebro	-0.06342
10. Złoto	**0.079236**

W Tabeli 5.32 umieszczono korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2008. Widzimy, że występują zarówno korelacje dodatnie jak i ujemne, zatem można się spodziewać, że wystąpi pełna dywersyfikacja w zoptymalizowanych portfelach.

Tabela 5.32. Korelacje pomiędzy stopami zwrotu aktywów w zestawie instrumentów 5_2008.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	-0.17384	0.168217	-0.12811	0.360088	0.461169	0.346843	-0.08202	0.112046	-0.05979
2	-0.17384	1	-0.14612	0.927127	0.012867	-0.41043	-0.15457	0.719993	-0.14632	0.093567
3	0.168217	-0.14612	1	-0.09299	0.052715	0.23465	0.182523	-0.10485	0.376035	0.205672
4	-0.12811	0.927127	-0.09299	1	0.005195	-0.3044	-0.10221	0.77237	-0.07609	0.107906
5	0.360088	0.012867	0.052715	0.005195	1	0.225914	0.211624	-0.02808	-0.01994	0.008477
6	0.461169	-0.41043	0.23465	-0.3044	0.225914	1	0.517788	-0.27783	0.121569	-0.15977
7	0.346843	-0.15457	0.182523	-0.10221	0.211624	0.517788	1	-0.12773	0.169597	-0.04711
8	-0.08202	0.719993	-0.10485	0.77237	-0.02808	-0.27783	-0.12773	1	-0.22071	0.046386
9	0.112046	-0.14632	0.376035	-0.07609	-0.01994	0.121569	0.169597	-0.22071	1	0.690385
10	-0.05979	0.093567	0.205672	0.107906	0.008477	-0.15977	-0.04711	0.046386	0.690385	1

ROZDZIAŁ VI

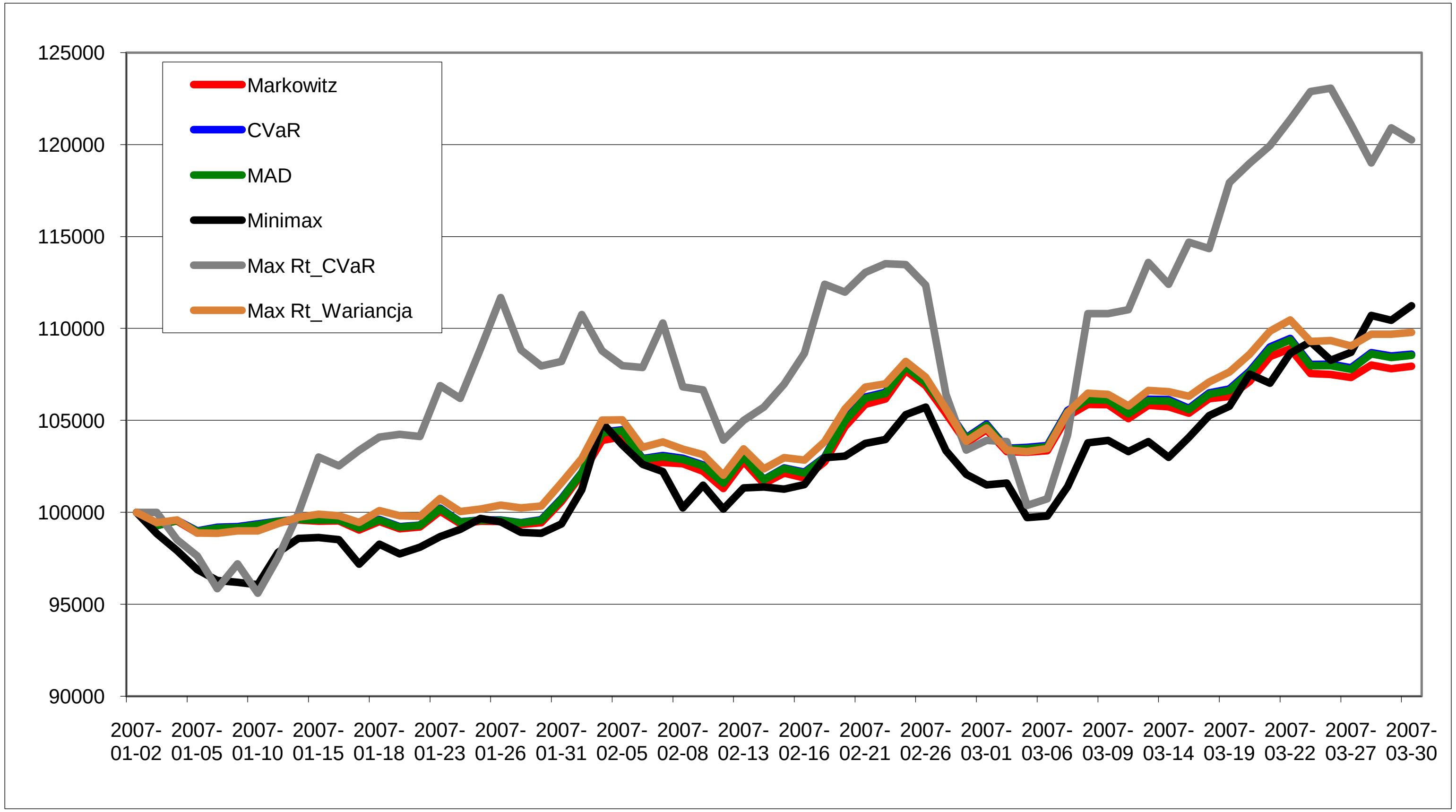
PORÓWNANIE METOD OPTYMALIZACJI PORTFELA WEDŁUG KRYTERIUM ZYSKOWNOŚCI

Optymalizacja portfela aktywów jest jednym z najistotniejszych zadań w procesie zarządzania portfelem inwestycji. Pozwala na osiąganie lepszych wyników i zmniejszenie ryzyka inwestycji. Dywersyfikacja, czyli zróżnicowanie, polega na takim doborze składników do portfela, które minimalizują ryzyko przy danej oczekiwanej stopie zwrotu.

Głównym celem niniejszego rozdziału pracy jest porównanie różnych metod optymalizacji portfela pod względem zyskowności. Elementem oceny są również wskaźniki rentowności portfela. Próbujemy także odpowiedzieć na pytanie, jaki był najlepszy i najgorszy moment zakończenia inwestycji.

W rozdziale tym szczególną uwagę poświęcamy metodzie optymalizacji portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej (CVaR), zaproponowanej przez Rockafellara i Uryaseva[179] w 2000 r. Porównano wyniki uzyskane dzięki tej metodzie z rozwiązaniami otrzymanymi z zastosowania innych metod przedstawionych w rozdziale IV. Rozważamy więc podejście Markowitza oraz metodę zaproponowaną przez Konno[180] opartą na zastosowaniu średniego bezwzględnego odchylenia i metodę „minimax" Younga[181]. Rozważamy dwa główne alternatywne podejścia do optymalizacji portfela. Pierwsze polegające na minimalizacji ryzyka przy zadanej stopie zwrotu (5 możliwości) oraz drugie sprowadzające się do maksymalizacji stopy zwrotu przy jednoczesnym kontrolowaniu ryzyka.

[179] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.*
[180] Konno H., *Portfolio Optimization using L_1 Risk Function*.
[181] Young M.R., op. cit.



Rysunek 6.1. Wartość Portfela 1_2006 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax”, maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

6.1. Portfel akcji

Rysunek 6.1 przedstawia porównanie wartości Portfela 1_2006 zoptymalizowanego za pomocą rozważanych metod w okresie testowym, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r. Wartość początkowa inwestycji w każdym przypadku wynosiła 100 000 złotych. Porównując wykresy można zaobserwować, że najlepsze wyniki, rozumiane jako największy zysk, uzyskujemy dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Natomiast najmniejszy zysk otrzymujemy stosując metodę Markowitza oraz metodę minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Na Rysunku 6.1 nie umieszczono wartości portfela otrzymanego za pomocą metody minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Powodem takiej sytuacji jest fakt, że model ten daje prawie identyczne wyniki, co do składu portfela, jak metoda Markowitza. Sposób rozwiązania zadania optymalizacji portfela za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej wygląda następująco.

Chcąc zbudować zadanie optymalizacyjne polegające na maksymalizacji stopy zwrotu, na początku należy określić dopuszczalny poziom warunkowej wartości oczekiwanej. Przy wyborze tego poziomu wykorzystywano wyniki metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej. Na wstępie program[182] dokonywał optymalizacji wspomnianą metodą, w wyniku czego otrzymywaliśmy poziom warunkowej wartości zagrożonej. Następnie poziom ten był rozpatrywany jako jedno z ograniczeń zadania optymalizacyjnego polegającego na maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu z portfela przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. W wyniku rozwiązania tego zadania otrzymywaliśmy maksymalny poziom stopy zwrotu.

Na Rysunku 6.1 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 10.01.2007 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 26.03 to otrzymano by większe zyski (metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie CVaR).

W Tabeli 6.1 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 1_2006. W poszczególnych kolumnach umieszczony jest procentowy skład Portfela 1_2006 otrzymanego następującymi metodami: metodą Markowitza, czyli minimalizacji wariancji przy danym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu z portfela (**Markowitz**), metoda minimax, która

[182] Program napisany przez Justynę Siwińską z Katedry Ekonomii Matematycznej na Uniwersytecie Ekonomicznym w Poznaniu. Dostępny na stronie http://truesoft.dyndns.org/PortfolioSimulatorService/

minimalizuje maksymalną stratę (**Minimax**), metoda średniego bezwzględnego odchylenia (**MAD**), metoda minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej przy danym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu z portfela (**CVaR**), metoda minimalizacji wariancji przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej oraz przy danym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu z portfela (**Min War_CVaR_Rt**), metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej (**Max Rt_CVaR**) oraz metoda maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy danym poziomie wariancji (**Max Rt_War**). Wszystkie wspomniane metody szczegółowo opisano w rozdziale IV.

Tabela 6.1. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 1_2006 w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Agora	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. BZWBK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.18
3. CCC	15.15	24.80	16.44	16.60	15.15	27.89	21.37
4. GTC	8.15	22.84	7.86	7.62	8.15	47.36	16.49
5. Kofola	5.98	0.00	5.31	5.59	5.98	24.75	11.73
6. Mennica	15.19	27.19	17.85	17.91	15.19	0.00	15.37
7. Mol	2.18	15.13	0.59	0.16	2.18	0.00	0.00
8. Netia	2.30	0.00	4.05	4.36	2.30	0.00	0.00
9. PGNiG	11.02	0.00	9.24	9.22	11.02	0.00	2.21
10. Żywiec	40.04	10.03	38.66	38.54	40.04	0.00	30.66

Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy, w zależności od przyjętej metody optymalizacji, od 3 do 8 aktywów finansowych. Takie zróżnicowanie w składzie procentowym portfela wynika między innymi z tego, że metoda „minimax” minimalizuje maksymalną stratę. Poza dwoma wyjątkami („minimax”, Max Rt_CVaR), widzimy, że największy procent udziałów należy do spółki Żywiec i wynosi on od 30 % do 40%. Należy również zwrócić uwagę na to, że w portfelu otrzymanym metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, znajdują się trzy spółki, które posiadają największe średnie stopy zwrotu (Tabela 5.13).

W Tabeli 6.2 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2007 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć i nie jest to wynik zaskakujący, że największy zysk, aż 20% uzyskujemy dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 6.2. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 1_2006, dla okresu testowego.

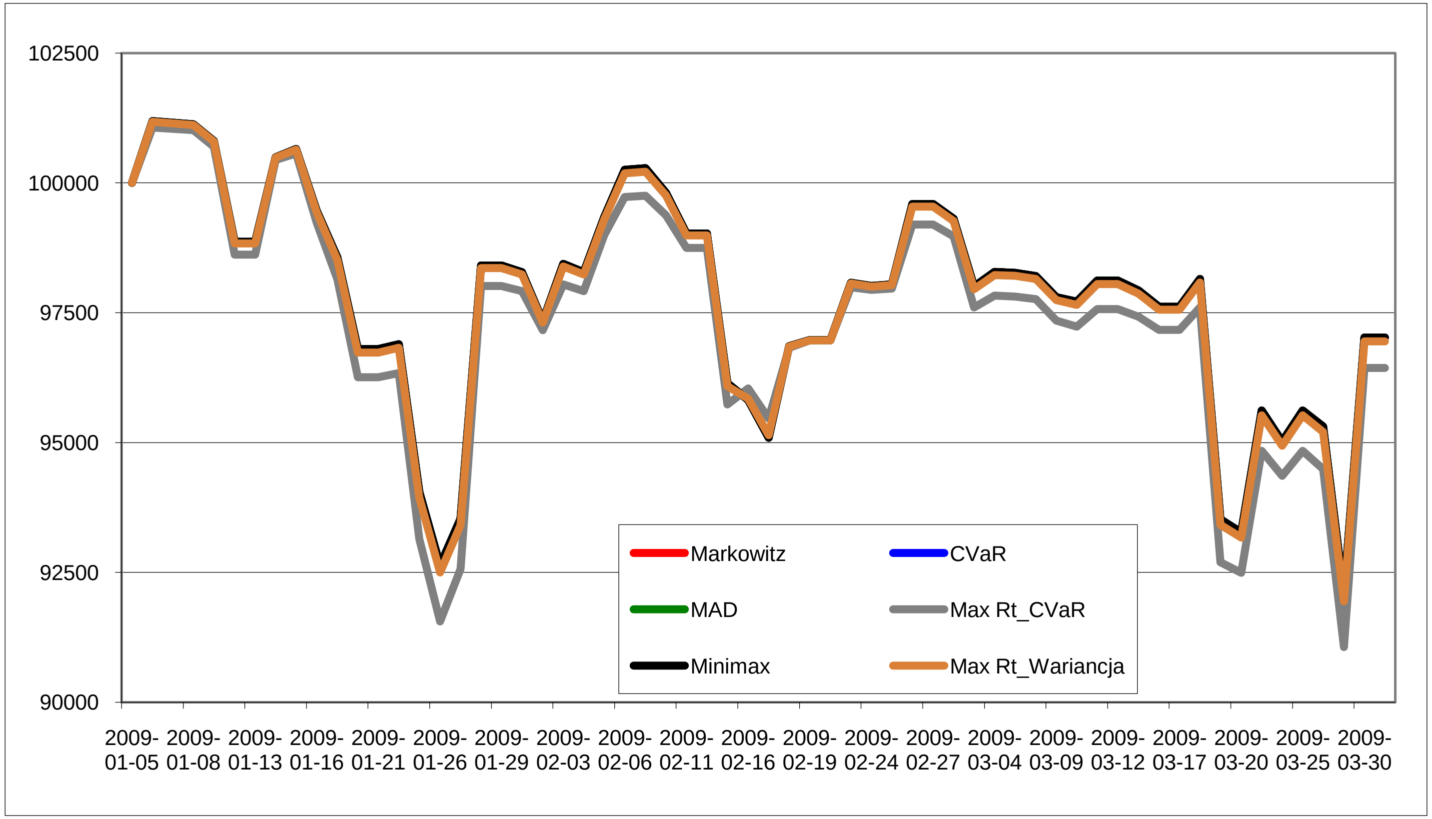
Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	107 948.5	7 948.5
Minimax	100 000	111 235.8	**11 235.8**
MAD	100 000	108 527.9	8 527.9
CVaR	100 000	108 598.2	8 598.2
Min War_ CVaR_Rt	100 000	107 948.5	7 948.5
Max Rt_CVaR	100 000	120 256.2	**20 256.2**
Max Rt_War	100 000	109 787.0	9 787.0

Natomiast w Tabeli 6.3 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 1_2006. Wskaźniki te, oprócz średnich stóp zwrotu uwzględniają również ryzyko. Wartości umieszczone w Tabeli 6.3 obliczono ze wzorów (4.31), (4.32) oraz (4.36). Dla każdego z tych mierników obowiązuje zasada, że im wyższa wartość, tym lepsza jakość portfela. W związku z tym dla każdego wskaźnika wyróżniono portfel (pogrubiona wartość) o najwyższej wartości miernika. Portfel 1_2006 uzyskany metodą „minimax” ma największe wszystkie współczynniki rentowności. Na zielono zaznaczone są wartości, które świadczą o tym, że dany portfel zachowywał się lepiej, niż portfel rynkowy, za który przyjęliśmy indeks giełdowy WIG.

Uwzględniając wielkość zysku, drugą co do wielkości, oraz wartość współczynników jakości, możemy stwierdzić, że najlepszy jest Portfel 1_2006 uzyskany za pomocą metody „minimax”.

Tabela 6.3. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 1_2006, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.1357	0.3077	0.0856
Minimax	**0.1497**	**0.3410**	**0.1564**
MAD	0.1336	0.3256	0.0913
CVaR	0.1357	0.3278	0.0915
Min War_ CVaR_Rt	0.1357	0.3077	0.0856
Max Rt_CVaR	0.1387	0.2704	0.1511
Max Rt_War	0.1692	0.3640	0.1328
WIG	0.0815	0.1099	0



Rysunek 6.2. Wartość Portfela 1_2008 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

Rysunek 6.2 przedstawia wartości Portfela 1_2008, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.2 widzimy tylko wartości Portfela 1_2008 uzyskane za pomocą metody „minimax" i maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Spowodowane jest to tym, iż w skład rozważanego portfela wchodzą tylko dwie spółki, a skład procentowy rozważanego portfela jest identyczny dla pięciu metod. Jedynie dla metody maksymalizacji stopy zwrotu, przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej oraz dla metody maksymalizacji stopy zwrotu, przy danym poziomie wariancji, wartości udziałów poszczególnych składowych są inne.

Na Rysunku 6.2 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 27.03.2009 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 06.01 to otrzymano by większe zyski.

Tabela 6.4. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 1_2008, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Agora	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. BZWBK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. CCC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. GTC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5. Kofola	81.93	81.93	81.93	81.93	81.93	86.40	82.52
6. Mennica	18.07	18.07	18.07	18.07	18.07	13.60	17.48
7. Mol	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. Netia	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9. PGNiG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Żywiec	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

W Tabeli 6.4 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 1_2008. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należą tylko dwie spółki. Największy procent udziałów należy do spółki Kofola i wynosi on od 82% do 86%. Spółka Kofola jako jedyna posiada dodatnią średnią stopę zwrotu, dlatego stanowi ona aż tak dużą część zoptymalizowanego portfela. Oczywistym jest, że w realnym świecie, inwestowanie w taki portfel jest mało prawdopodobne. Jednakże rozważamy ten portfel dlatego, iż chcemy go porównać z identycznym co do zestawu aktywów, jednak na danych za 2006 rok (Portfel 1_2006).

W Tabeli 6.5 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2009 r. oraz zyski lub ewentualne straty.

Można zauważyć, że bez względu na to jaką metodę zastosujemy, zawsze poniesiemy straty.

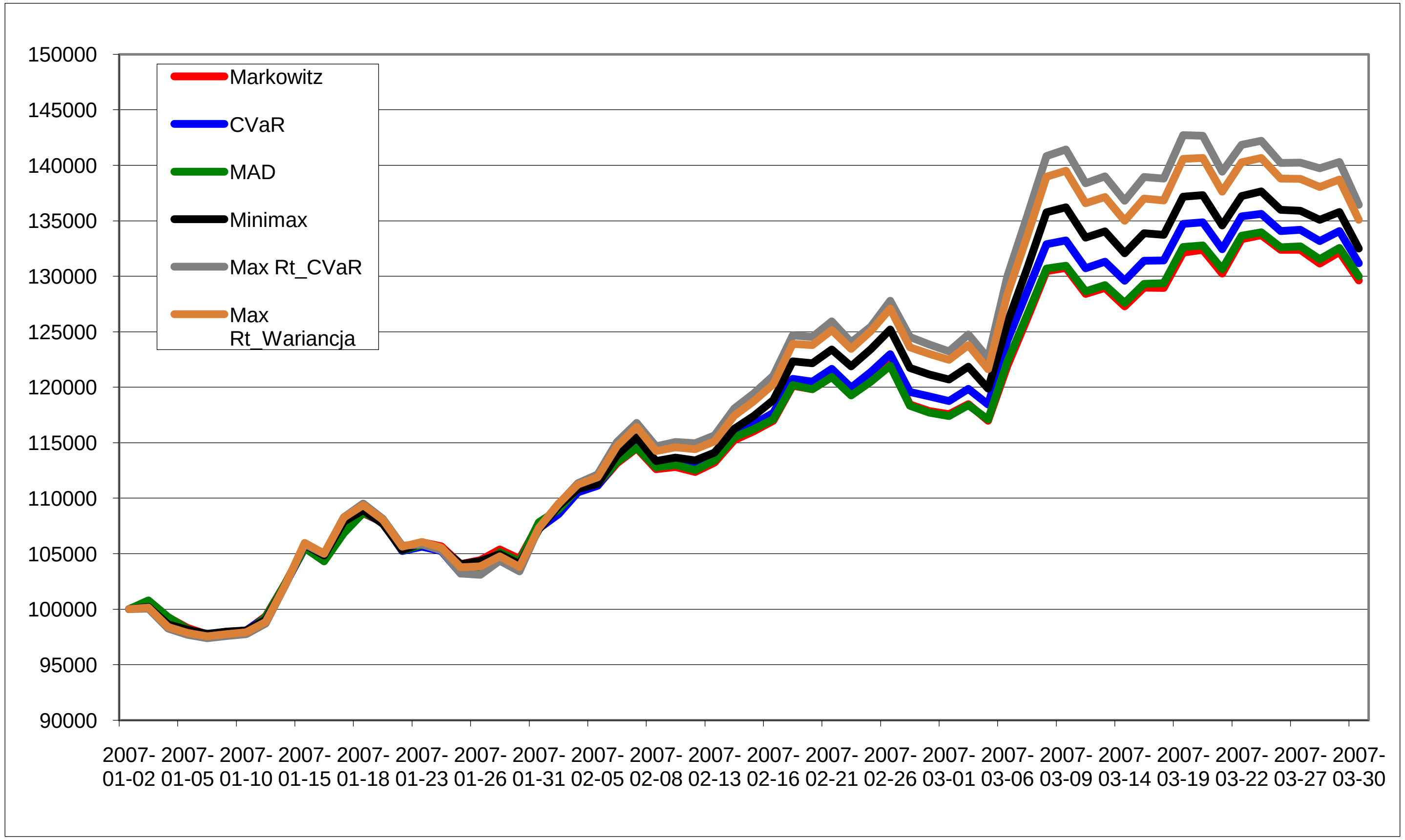
Tabela 6.5. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 1_2008, dla okresu testowego.

Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	97 021.45	-2 978.55
Minimax	100 000	97 021.45	-2 978.55
MAD	100 000	97 021.45	-2 978.55
CVaR	100 000	97 021.45	-2 978.55
Min War_ CVaR_Rt	100 000	97 021.45	-2 978.55
Max Rt_CVaR	100 000	96 435.85	-3 564.15
Max Rt_War	100 000	96 947.70	-3 052.30

Natomiast w Tabeli 6.6 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 1_2008. Portfel 1_2008 uzyskany pięcioma wyróżnionymi (pogrubionymi) metodami ma największy współczynnik Sharpe'a, Treynora i Jensena. Ponadto w Tabeli 6.6 na zielono zaznaczono te portfele, których rentowność jest lepsza aniżeli dla portfela rynkowego, natomiast na czerwono zaznaczono wartości współczynników rentowności dla portfeli gorszych od rynkowego. Współczynnik Sharpe'a i Treynora wskazują jednakową rentowność portfeli, natomiast dla wskaźnika Jensena, zachowują się inaczej.

Tabela 6.6. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 1_2008, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	**-0.0652**	**2.3408**	**-0.1373**
Minimax	**-0.0652**	**2.3408**	**-0.1373**
MAD	**-0.0652**	**2.3408**	**-0.1373**
CVaR	**-0.0652**	**2.3408**	**-0.1373**
Min War_ CVaR_Rt	**-0.0652**	**2.3408**	**-0.1373**
Max Rt_CVaR	-0.0656	1.8868	-0.1480
Max Rt_War	-0.0653	2.2655	-0.1387
WIG	-0.1520	-0.3149	0



Rysunek 6.3. Wartość Portfela 2_2006 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

6.2. Portfel akcji i walut

Biorąc pod uwagę ostatnio rozpatrywany zestaw instrumentów 1_2008, widzimy, że przyniósł on straty. W związku z tym, w okresie bessy na giełdzie, należy poszukiwać alternatywnych możliwości inwestowania. Naturalnym wydaje się skonstruowanie takiej inwestycji, w której składzie oprócz akcji, znajdą się inne instrumenty finansowe. Jednym ze sposobów jest połączenie akcji z walutami.

Rysunek 6.3 przedstawia wykresy wartości Portfela 2_2006, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.3 widzimy, że największą wartość zysku otrzymujemy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Natomiast najmniejsze zyski otrzymujemy dla metody Markowitza.

Na Rysunku 6.3 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 06.01.2007 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 19.03 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.7. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 2_2006, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Agora	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Alma	7.61	8.98	8.48	8.62	7.61	16.44	13.41
3. Dolar australijski	25.82	0.00	26.63	27.71	25.82	23.89	13.83
4. BZWBK	0.66	0.00	1.04	0.67	0.66	0.19	0.00
5. Frank szwajcarski	40.17	65.26	39.71	39.08	40.17	27.23	37.05
6. GTC	4.91	6.10	4.13	3.37	4.91	7.49	7.72
7. Dolar Hongkongu	0.00	2.46	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. Śnieżka	8.93	7.29	9.15	8.60	8.93	9.56	9.67
9. Simple	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Synthos	11.90	9.70	10.86	11.94	11.90	15.20	18.32

W Tabeli 6.7 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 2_2006. Do zoptymalizowanego portfela należy od 7-8 spółek. Największy procent udziałów należy do waluty frank szwajcarski i waha się on, w zależności od metody optymalizacji, od 27% do 65%. Skład portfela zoptymalizowanego dzięki zastosowaniu metody „minimax", wyraźnie różni się od pozostałych. Wynika to z faktu, że jest to metoda minimalizująca maksymalną stratę.

Tabela 6.8. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 2_2006, dla okresu testowego.

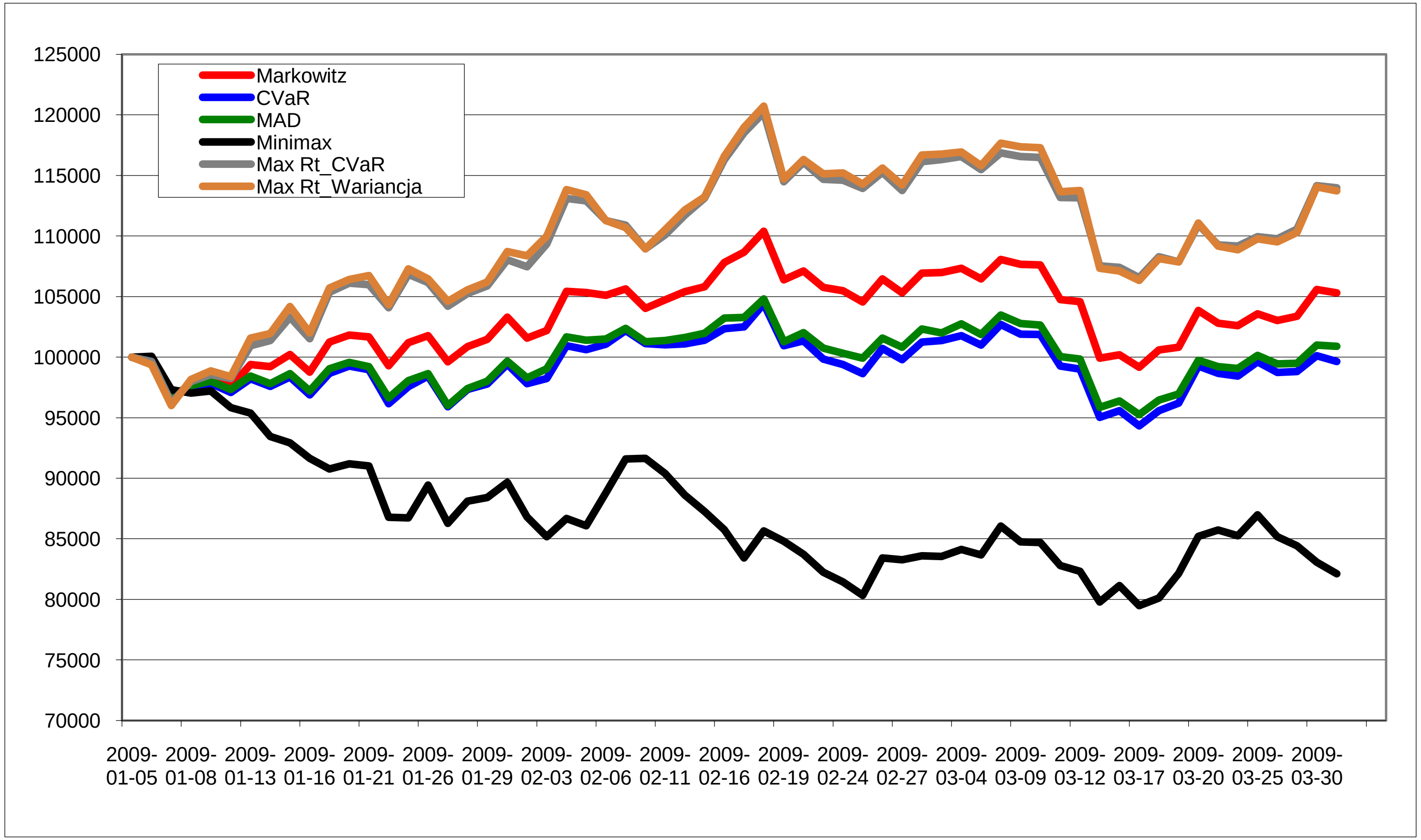
Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	129 619.80	29 619.80
Minimax	100 000	132 502.20	32 502.20
MAD	100 000	129 994.70	29 994.70
CVaR	100 000	131 182.40	31 182.40
Min War_ CVaR_Rt	100 000	129 619.80	29 619.80
Max Rt_CVaR	100 000	136 445.00	**36 445.00**
Max Rt_War	100 000	135 094.00	**35 094.00**

W Tabeli 6.8 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2007 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej w tym wypadku, uzyskujemy największy zysk.

Natomiast w Tabeli 6.9 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 2_2006. Portfel 2_2006 uzyskany metodą „minimax" ma największy współczynnik Treynora. Współczynnik Sharpe'a i Jensena przyjmuje największą wartość dla Portfela 2_2006 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Widzimy również z Tabeli 6.9, że Portfel 2_2006 uzyskany rozpatrywanymi metodami charakteryzuje się lepszą rentownością, aniżeli portfel rynkowy.

Tabela 6.9. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 2_2006, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0912	0.3130	0.0350
Minimax	0.1039	**0.4402**	0.0442
MAD	0.1029	0.3549	0.0409
CVaR	0.0977	0.3626	0.0397
Min War_ CVaR_Rt	0.0912	0.3130	0.0350
Max Rt_CVaR	**0.1501**	0.3832	**0.0863**
Max Rt_War	0.1184	0.3241	0.0645
WIG	0.0815	0.1099	0



Rysunek 6.4. Wartość Portfela 2_2008 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax”, maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

Rysunek 6.4 przedstawia wartości Portfela 2_2008, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.4 widzimy, że największy zysk otrzymujemy dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Natomiast straty, dość spore, ponosimy dla Portfela 2_2008 uzyskanego za pomocą metody „minimax".

Na Rysunku 6.4 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 13.03.2009 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 17.02 to otrzymano by największe zyski (metody maksymalizujące stopę zwrotu z portfela).

Tabela 6.10. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 2_2008, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Agora	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Alma	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. Dolar australijski	34.97	28.36	33.20	33.81	34.97	29.43	18.38
4. BZWBK	0.35	2.86	0.53	0.61	0.35	0.00	0.00
5. Frank szwajcarski	58.22	68.02	49.87	45.02	58.22	49.00	76.40
6. GTC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7. Dolar Hongkongu	5.33	0.00	15.72	20.56	5.33	21.57	5.22
8. Śnieżka	0.00	0.00	0.68	0.00	0.00	0.00	0.00
9. Simple	1.14	0.76	0.00	0.00	1.14	0.00	0.00
10. Synthos	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

W Tabeli 6.10 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 2_2008. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy od 3 do 5 spółek. Największy procent udziałów należy do waluty frank szwajcarski i wynosi on od 49% do 76%. Należy również zwrócić uwagę na to, że w portfelu otrzymanym za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej oraz za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji, w skład portfela wchodzą tylko trzy aktywa, które posiadają największe średnie stopy zwrotu (Tabela 5.19).

Tabela 6.11. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 2_2008, dla okresu testowego.

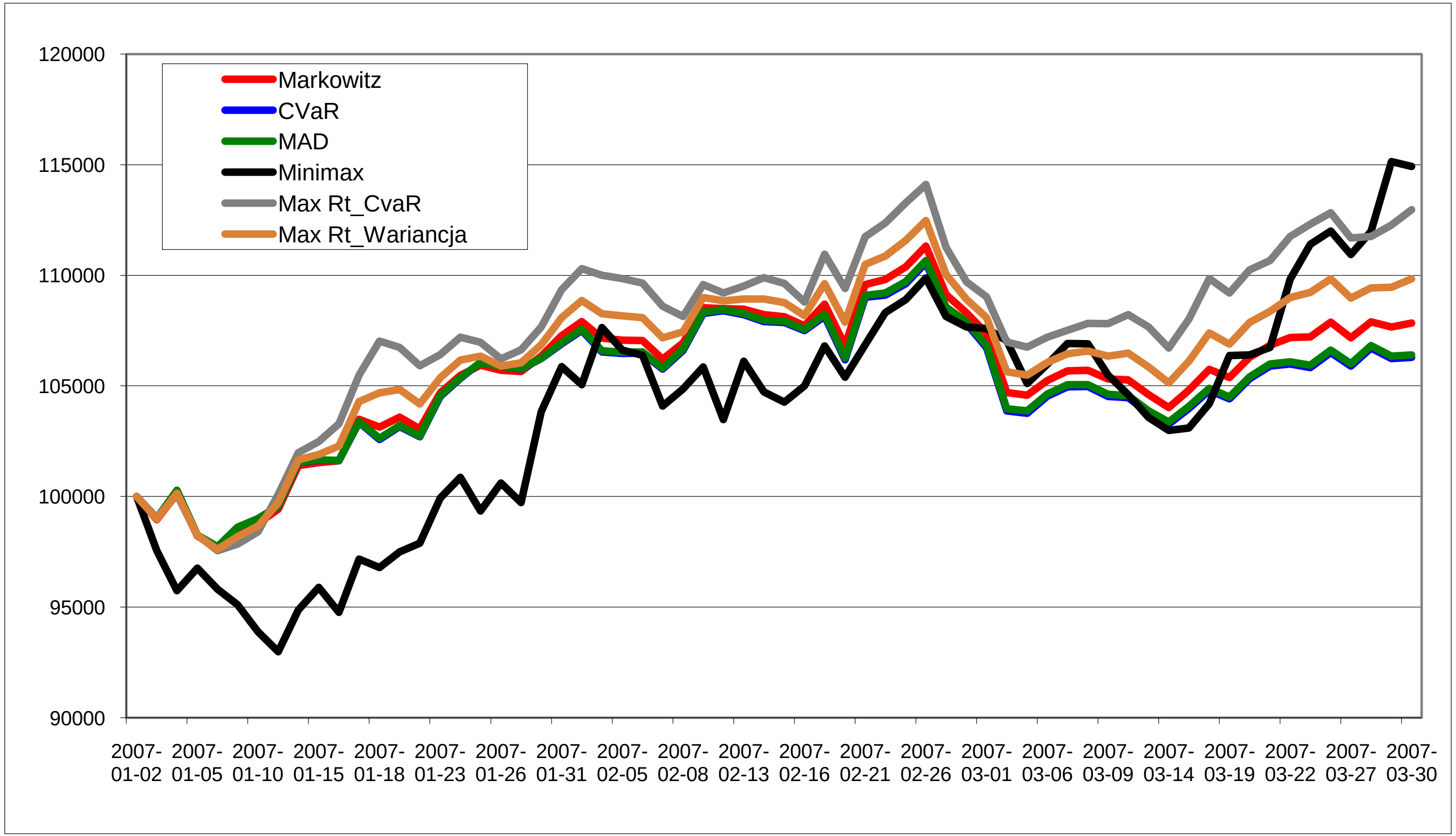
Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	105 291.80	5 291.80
Minimax	100 000	82 121.12	-17 879.88
MAD	100 000	100 885.40	885.40
CVaR	100 000	99 644.76	-355.24
Min War_ CVaR_Rt	100 000	105 291.80	5 291.80
Max Rt_CVaR	100 000	113 982.20	**13 982.20**
Max Rt_War	100 000	113 726.50	**13 726.50**

W Tabeli 6.11 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2009 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że stosując metodę „minimax" oraz warunkowej wartości zagrożonej ponosimy straty. Zaobserwować można dość spore zróżnicowanie w wielkościach zysku, które wahają się tylko od 885 zł, aż do 13 982 zł.

Natomiast w Tabeli 6.12 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 2_2008. Portfel 2_2008 uzyskany metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej ma największy współczynnik Sharpe'a i Jensena. Współczynnik Treynora przyjmuje największą wartość dla Portfela 2_2008 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji. Ponadto, teoretycznie, jeżeli ma się do czynienia z grupą dobrze zdywersyfikowanych portfeli, to za pomocą wskaźników Treynora i Sharpe'a uzyskujemy podobne rankingi. Natomiast w naszym przypadku, wskaźniki te dają różne oceny rentowności. Wskaźnik Sharpe'a informuje, że są to portfele o lepszej rentowności, niż portfel rynkowy, natomiast wskaźnik Treynora ocenia, że ich rentowność jest gorsza, aniżeli portfela rynkowego.

Tabela 6.12. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 2_2008, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0952	-0.6618	0.0853
Minimax	0.0778	-0.6305	0.0665
MAD	0.0974	-0.6426	0.0858
CVaR	0.0996	-0.6500	0.0891
Min War_ CVaR_Rt	0.0952	-0.6618	0.0853
Max Rt_CVaR	**0.1054**	-0.6692	**0.1067**
Max Rt_War	0.0893	**-0.5658**	0.0747
WIG	-0.1520	-0.3149	0



Rysunek 6.5. Wartość Portfela 3_2006 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

6.3. Portfel akcji i towarów

Rysunek 6.5 przedstawia wykresy wartości Portfela 3_2006, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.5 widzimy, że największą wartość zysku otrzymujemy przy zastosowaniu metody „minimax”. Natomiast najmniejsze zyski otrzymujemy dla portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej.

Na Rysunku 6.5 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 11.01.2007 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 29.03 to otrzymano by największe zyski (metoda „minimax”).

Tabela 6.13. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 3_2006, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Asseco Poland	6.12	0.00	8.08	8.38	6.12	5.28	4.79
2. Bre Bank	18.29	7.79	12.03	11.04	18.29	28.75	26.00
3. CEZ	8.92	0.00	12.04	12.75	8.92	7.11	8.25
4. Ropa	12.55	51.31	6.97	6.67	12.55	0.00	5.52
5. Cersanit	14.71	34.78	16.28	16.98	14.71	31.93	22.07
6. Duda	6.60	6.12	6.87	6.47	6.60	12.33	10.39
7. Lotos	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. TPSA	6.26	0.00	9.08	10.35	6.26	0.00	0.00
9. Srebro	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Złoto	26.55	0.00	28.65	27.37	26.55	14.59	22.99

W Tabeli 6.13 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 3_2006. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy od 4 do 8 spółek. Zupełnie inny skład portfela zoptymalizowanego otrzymujemy dzięki zastosowaniu metody „minimax”, gdyż należy pamiętać o tym, że jest to metoda minimalizująca maksymalną stratę. Zaobserwować można, że największy udział w portfelu, otrzymanym za pomocą tej metody, należy do ropy i wynosi aż 51%. Ponadto dla tej metody, w skład zoptymalizowanego portfela wchodzą tylko 4 aktywa.

Tabela 6.14. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 3_2006, dla okresu testowego.

Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	107 839.30	7 839.30
Minimax	100 000	114 916.90	**14 916.90**
MAD	100 000	106 400.10	6 400.10
CVaR	100 000	106 289.60	6 289.60
Min War_ CVaR_Rt	100 000	107 839.30	7 839.30
Max Rt_CVaR	100 000	112 970.30	12 970.30
Max Rt_War	100 000	109 839.00	9 839.00

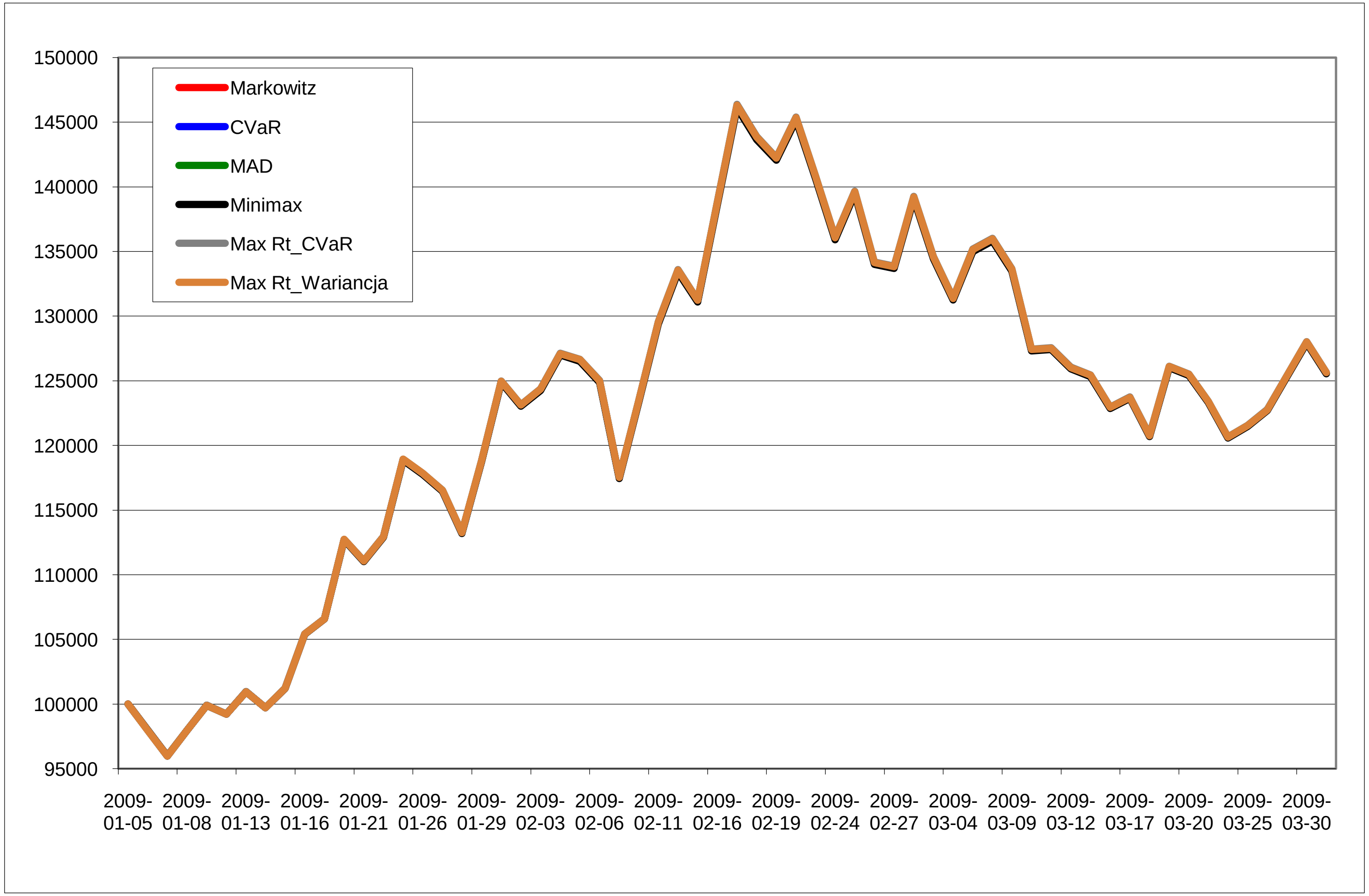
W Tabeli 6.14 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2007 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że dla metody „minimax” uzyskujemy największy zysk. W pozostałych przypadkach jest to zysk rzędu 6-7%.

W Tabeli 6.15 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 3_2006. Portfel 3_2006 uzyskany metodą MAD ma wszystkie największe współczynniki rentowności (pogrubiona wartość). Portfel 3_2006 uzyskany metodą minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, posiada współczynniki rentowności, wskazujące na to, że jest on gorszy od portfela rynkowego. Ponadto, jeżeli pod uwagę weźmiemy współczynnik Sharpe’a, to widzimy, że tylko portfele z zestawu instrumentów 3_2006 otrzymane metodą MAD i maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, charakteryzują się lepszą rentownością, aniżeli portfel rynkowy.

Uwzględniając wartość zysku oraz wartości współczynników rentowności portfela bardzo trudno jest wyodrębnić jedną najlepszą metodę.

Tabela 6.15. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 3_2006, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE’A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0677	0.1138	0.0024
Minimax	0.0665	0.1766	0.0343
MAD	**0.1142**	**0.2387**	**0.1601**
CVaR	0.0308	0.0511	-0.0382
Min War_ CVaR_Rt	0.0677	0.1138	0.0024
Max Rt_CVaR	0.0836	0.1493	0.0351
Max Rt_War	0.0853	0.1499	0.0294
WIG	0.0815	0.1099	0



Rysunek 6.6. Wartość Portfela 3_2008 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax”, maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

Rysunek 6.6 przedstawia wykres wartości Portfela 3_2008, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.6 widzimy tylko wartość portfela uzyskanego dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji, gdyż pozostałe wartości się ze sobą pokrywają.

Na Rysunku 6.6 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 07.01.2009 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 17.02 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.16. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 3_2008, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Asseco Poland	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Bre Bank	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. CEZ	0.00	6.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. Ropa	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5. Cersanit	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6. Duda	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7. Lotos	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. TPSA	26.05	12.38	26.05	26.05	26.05	7.99	18.25
9. Srebro	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Złoto	73.95	81.34	73.95	73.95	73.95	92.01	81.75

W Tabeli 6.16 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 3_2008. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należą tylko 2 spółki. Największy procent udziałów należy do złota i wynosi on od 74% do 92%. Skład portfela zoptymalizowanego jest identyczny dla metod Markowitza, MAD, warunkowej wartości zagrożonej oraz dla metody minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Pomimo tego, że składy dla metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej oraz metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej wariancji, różnią się od pozostałych metod, to wartości portfeli są identyczne (Rysunek 6.6).

Tabela 6.17. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 3_2008, dla okresu testowego.

Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	125 596.40	25 596.40
Minimax	100 000	125 555.80	25 555.80
MAD	100 000	125 596.40	25 596.40
CVaR	100 000	125 596.40	25 596.40
Min War_ CVaR_Rt	100 000	125 596.40	25 596.40
Max Rt_CVaR	100 000	125 661.80	**25 661.80**
Max Rt_War	100 000	125 628.00	25 628.00

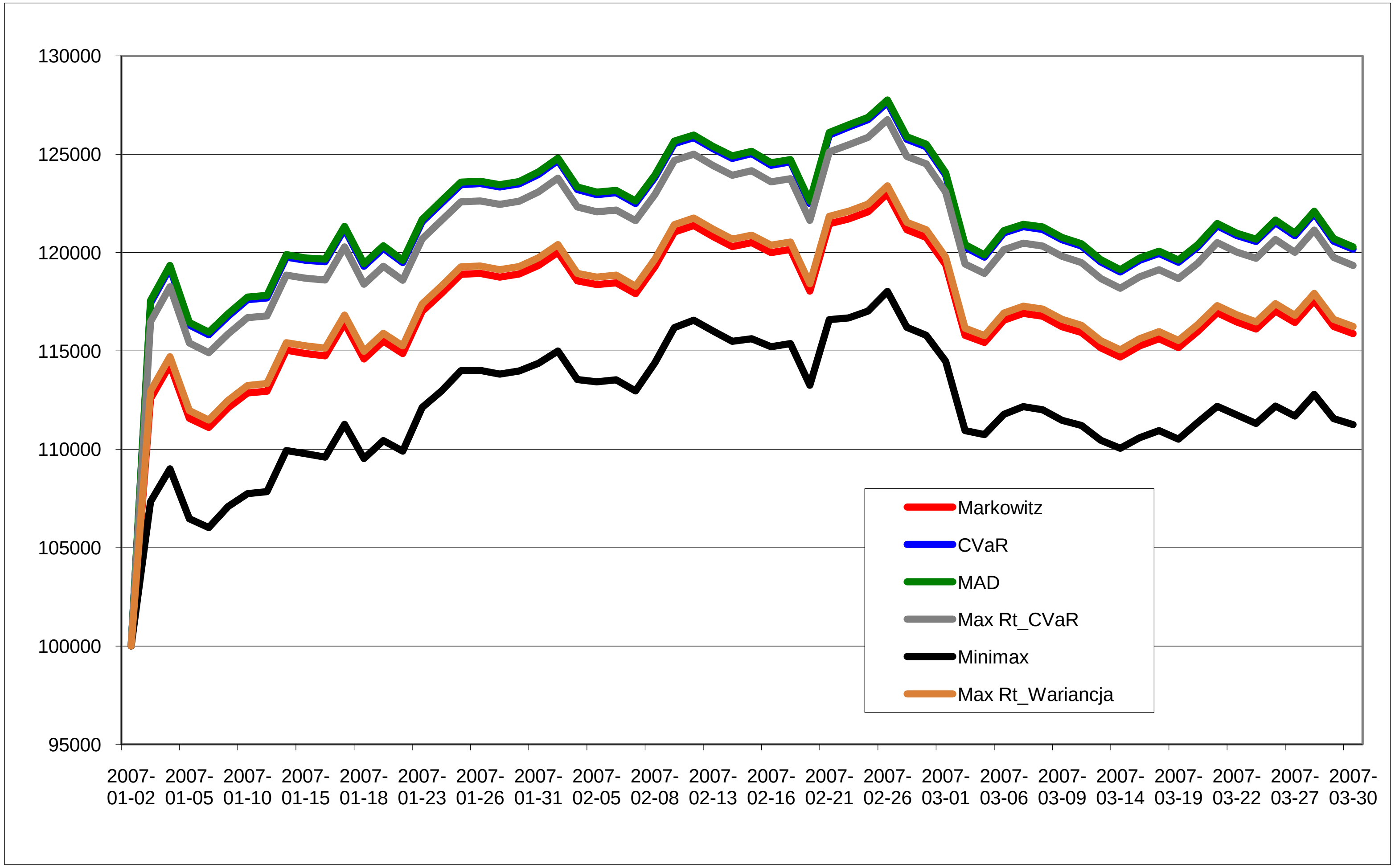
W Tabeli 6.17 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2009 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że wielkość zysku jest porównywalna, różnice pomiędzy wartościami są niewielkie i wynoszą maksymalnie 100 zł.

Natomiast w Tabeli 6.18 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 3_2008. Portfel 3_2008 uzyskany czterema wyróżnionymi metodami (pogrubione wartości) ma największy współczynnik Treynora i Jensena. Współczynnik Sharpe'a przyjmuje największą wartość dla Portfela 6 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Biorąc pod uwagę wskaźnik Jensena Portfel 3_2008 wypada gorzej, pod względem rentowności, aniżeli portfel rynkowy.

Uwzględniając wartość zysku oraz wskaźniki rentowności, najlepiej wypada Portfel 3_2008 uzyskany za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 6.18. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 3_2008, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	-0.0383	**0.2786**	**-0.1744**
Minimax	-0.0271	0.1714	-0.1747
MAD	-0.0383	**0.2786**	**-0.1744**
CVaR	-0.0383	**0.2786**	**-0.1744**
Min War_ CVaR_Rt	-0.0383	**0.2786**	**-0.1744**
Max Rt_CVaR	**-0.0216**	0.1190	-0.2061
Max Rt_War	-0.0303	0.1906	-0.1881
Markowitz	-0.1520	-0.3149	0



Rysunek 6.7. Wartość Portfela 4_2006 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

6.4. Portfel walut i towarów

Rysunek 6.7 przedstawia wykresy wartości Portfela 4_2006, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.7 widzimy, że porównywalnie największą wartość zysku otrzymujemy dla metody MAD i warunkowej wartości zagrożonej. Natomiast najmniejsze zyski otrzymujemy dla metody „minimax".

Na Rysunku 6.7 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 08.01.2007 r., w którym uzyskano by mniejsze zyski, natomiast gdyby inwestycję zakończono 26.02 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.19. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 4_2006, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Frank szwajcarski	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Ropa	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. Bawełna	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. Euro	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5. Funt brytyjski	13.42	5.11	17.53	17.44	13.42	6.29	5.09
6. Jen japoński	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7. Kawa	57.92	52.52	60.59	60.54	57.92	67.71	64.09
8. Cukier	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9. Dolar amerykański	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Złoto	28.65	42.37	21.88	22.02	28.65	25.99	30.82

W Tabeli 6.19 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 4_2006. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należą tylko 3 aktywa i są nimi: funt brytyjski, kawa oraz złoto. Największy procent udziałów należy do kawy i waha się on od 52% do 60%. Widzimy, że różnice w składzie procentowym, dla poszczególnych metod, są niewielkie stąd na Rysunku 6.7 zaobserwować można tak jakby „przeskalowanie" wartości Portfela 4_2006, uzyskanego za pomocą rozważanych metod.

W Tabeli 6.20 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2007 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że dla metody MAD i warunkowej wartości zagrożonej uzyskujemy największy zysk wielkości 20%. W pozostałych przypadkach jest to zysk rzędu 11-19%.

Tabela 6.20. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 4_2006, dla okresu testowego.

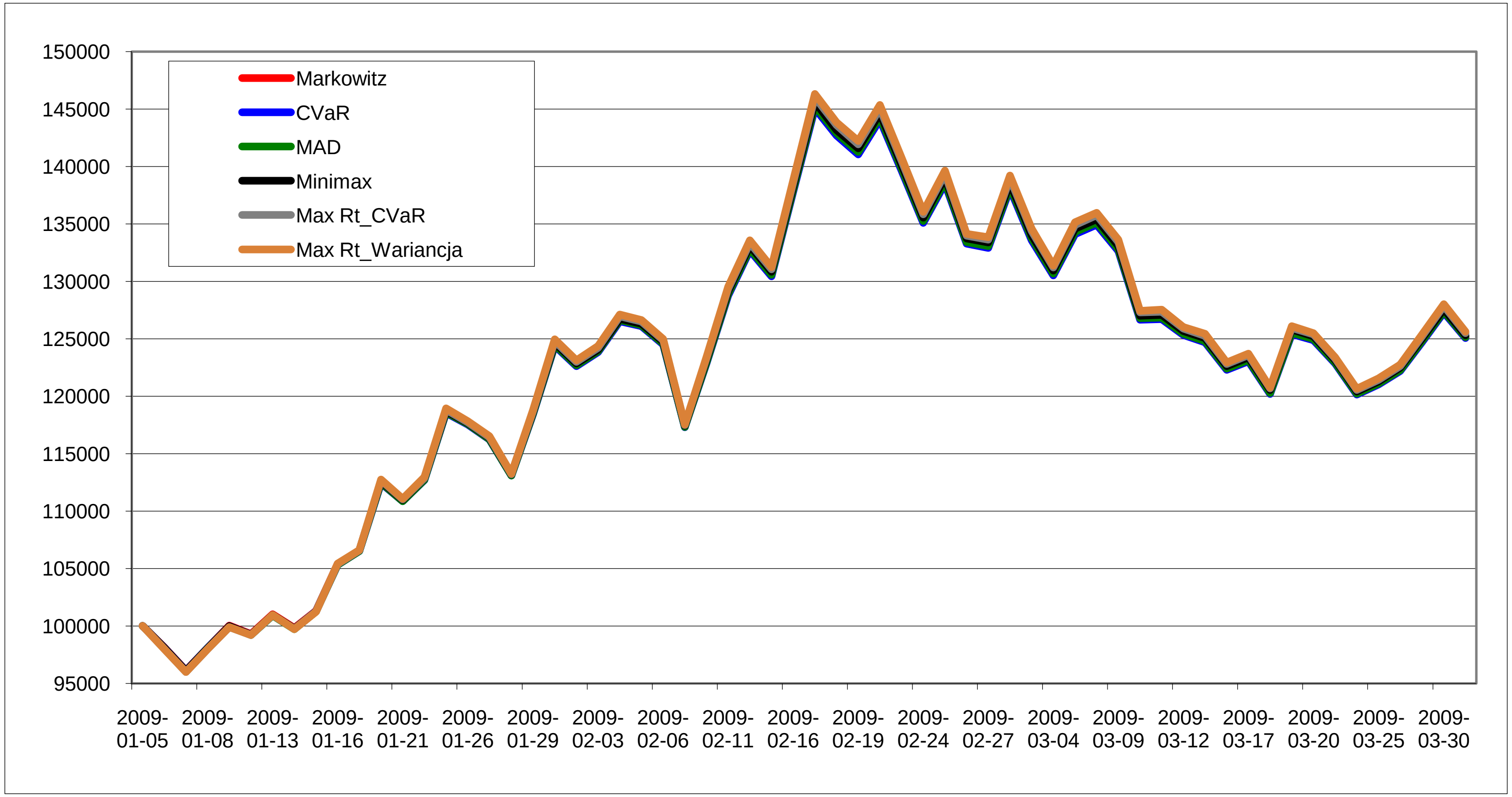
Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	115 876.40	15 876.40
Minimax	100 000	111 256.50	11 256.50
MAD	100 000	120 283.00	**20 283.00**
CVaR	100 000	120 166.00	**20 166.00**
Min War_ CVaR_Rt	100 000	115 876.40	15 876.40
Max Rt_CVaR	100 000	119 346.20	19 346.20
Max Rt_War	100 000	116 235.00	16 235.00

W Tabeli 6.21 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 4_2006. Portfel 4_2006 uzyskany metodą „minimax", ma największą wartość współczynnika Sharpe'a i Jensena. Współczynnik Treynora przyjmuje największą wartość dla Portfela 4_2006 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Na uwagę zasługuje również fakt, że wszystkie rozpatrywane portfele charakteryzują się rentownością gorszą od portfela rynkowego (czerwone wartości).

Uwzględniając wartość zysku oraz wartości współczynników rentowności portfela bardzo trudno jest wyodrębnić jedną najlepszą metodę. Ewentualnie jeżeli spojrzymy na trzecią co do wielkości wartość zysku oraz współczynnik Treynora, to najlepszą wydaje się metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 6.21. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 4_2006, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	-0.1517	-0.8082	-0.1494
Minimax	**-0.1384**	-0.7835	**-0.1417**
MAD	-0.1570	-0.8199	-0.1532
CVaR	-0.1569	-0.8197	-0.1531
Min War_ CVaR_Rt	-0.1517	-0.8082	-0.1494
Max Rt_CVaR	-0.1525	**-0.7673**	-0.1682
Max Rt_War	-0.1492	**-0.7674**	-0.1620
WIG	0.0815	0.1099	0



Rysunek 6.8. Wartość Portfela 4_2008 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

Rysunek 6.8 przedstawia wykres wartości Portfela 4_2008, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.8 widzimy tylko wartość portfela dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, gdyż pozostałe wartości się ze sobą pokrywają.

Na Rysunku 6.8 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 07.01.2009 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 17.02 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.22. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 4_2008, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Frank szwajcarski	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Ropa	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. Bawełna	1.20	0.00	4.08	3.54	1.20	0.00	0.00
4. Euro	72.89	50.99	80.83	81.99	72.89	71.15	73.40
5. Funt brytyjski	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6. Jen japoński	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9.13	2.02
7. Kawa	4.73	2.54	1.04	1.82	4.73	0.00	0.00
8. Cukier	8.18	24.90	4.88	4.40	8.18	7.77	10.09
9. Dolar amerykański	0.00	7.66	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Złoto	13.00	13.91	9.18	8.24	13.00	11.96	14.49

W Tabeli 6.22 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 4_2008. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy od 4 do 5 aktywów. Największy procent udziałów należy do waluty euro i wynosi on od 51% do 82%. Skład procentowy portfela otrzymanego za pomocą metody „minimax", bardzo różni się od pozostałych. Należy pamiętać o tym, że metoda ta minimalizuje maksymalną stratę. Pomimo tego, że składy dla rozważanych metod różnią się od siebie, to wartości portfeli są identyczne (Rysunek 6.8)

W Tabeli 6.23 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2009 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że wielkość zysku jest porównywalna, różnice pomiędzy wartościami są niewielkie i wynoszą maksymalnie 500 zł. Zysk jest wielkości 25%.

Tabela 6.23. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 4_2008, dla okresu testowego.

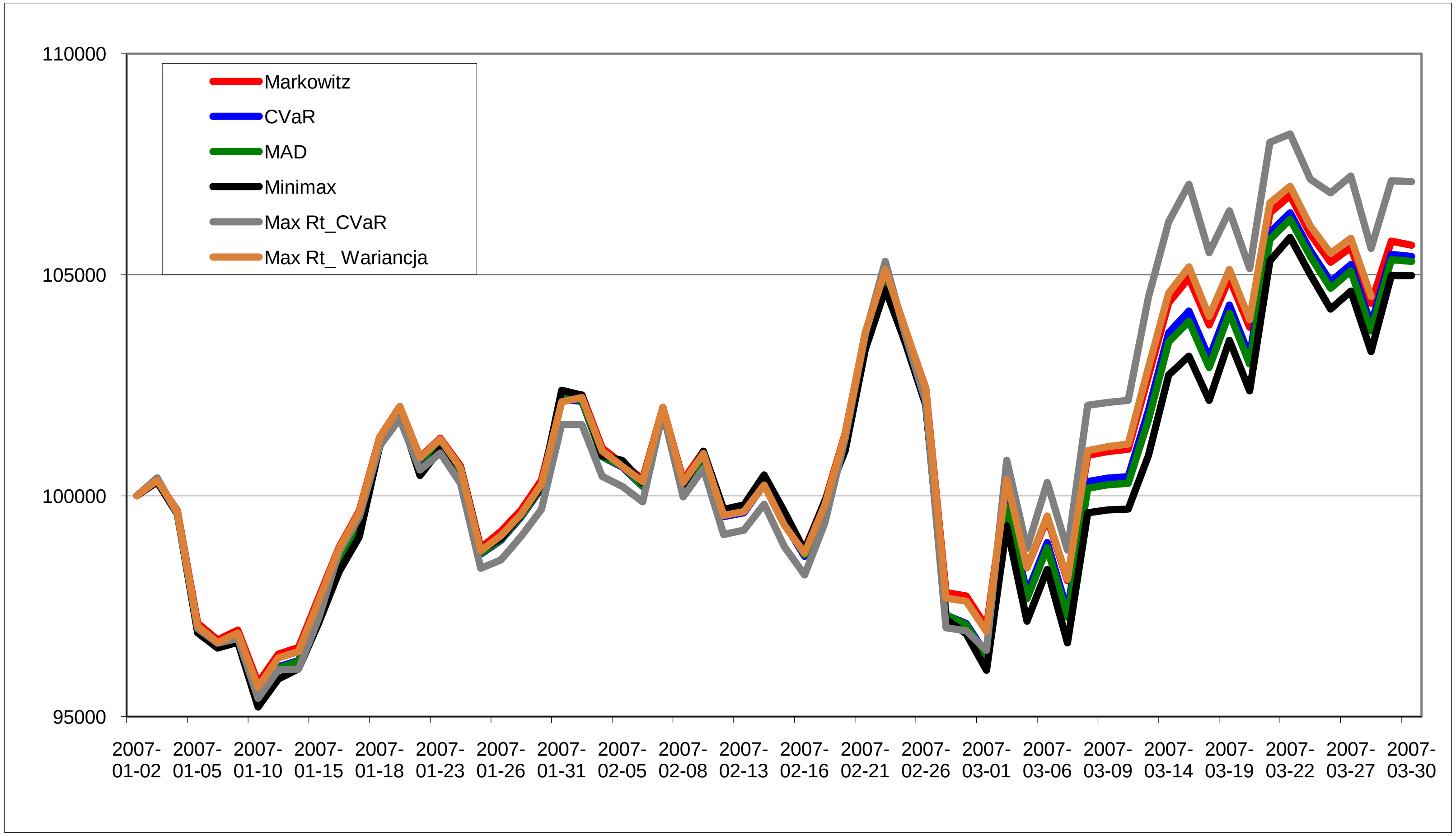
Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	125 198.20	25 198.20
Minimax	100 000	125 304.20	25 304.20
MAD	100 000	125 147.50	25 147.50
CVaR	100 000	125 057.40	25 057.40
Min War_ CVaR_Rt	100 000	125 198.20	25 198.20
Max Rt_CVaR	100 000	125 500.60	25 500.60
Max Rt_War	100 000	125 523.00	**25 523.00**

Natomiast w Tabeli 6.24 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 4_2008. Portfel 4_2008 uzyskany metodą minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej ma największy współczynnik Sharpe'a i Jensena. Współczynnik Treynora przyjmuje największą wartość dla Portfela 4_2008 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Biorąc pod uwagę wskaźnik Treynora, widzimy, że rozważane portfele charakteryzują się gorszą rentownością, aniżeli portfel rynkowy.

Uwzględniając wartość zysku oraz wskaźniki rentowności, dochodzimy do pewnej sprzeczności, gdyż najlepszą metodą, jeżeli bierzemy pod uwagę wskaźniki rentowności, okazuje się metoda minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla której uzyskujemy najmniejszy zysk. Jednakże nie jest to aż tak bardzo niepokojące, gdyż zysk ten jest niższy, od najwyższego, tylko o 500 zł.

Tabela 6.24. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 4_2008, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0923	-0.5249	0.0502
Minimax	0.0868	-0.6203	0.0541
MAD	0.0924	-0.5333	0.0548
CVaR	**0.0947**	-0.5500	**0.0587**
Min War_ CVaR_Rt	0.0923	-0.5249	0.0502
Max Rt_CVaR	0.0857	**-0.4602**	0.0420
Max Rt_War	0.0873	-0.4723	0.0424
WIG	-0.1520	-0.3149	0



Rysunek 6.9. Wartość Portfela 5_2006 zoptymalizowanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

6.5. Portfel akcji, walut i towarów

Rysunek 6.9 przedstawia wykres wartości Portfela 5_2006, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.9 widzimy, że największą wartość zysku otrzymujemy dla metody „minimax”. Natomiast najmniejszą wartość, na koniec okresu testowego przyjmuje portfel uzyskany za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.

Na Rysunku 6.9 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 10.01.2007 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 22.03 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.25. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 5_2006, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Bioton	5.47	0.00	3.46	3.46	5.47	5.97	6.02
2. Frank szwajcarski	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. Ropa	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. Euro	54.74	52.17	54.17	54.23	54.74	38.36	51.06
5. Kofola	11.88	12.67	12.08	12.30	11.88	20.60	13.11
6. PKO BP	16.48	24.17	20.11	19.76	16.48	23.32	17.74
7. TVN	8.95	8.14	8.11	8.29	8.95	10.12	9.54
8. Dolar amerykański	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9. Srebro	2.48	2.85	2.07	1.95	2.48	1.63	2.53
10. Złoto	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

W Tabeli 6.25 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 5_2006. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy od 5 do 6 aktywów. Największy procent udziałów należy do euro i waha się on od 38% do 55%. Widzimy, że różnice w składzie procentowym dla poszczególnych metod są niewielkie. Stąd na Rysunku 6.7 zaobserwować można porównywalne wartości Portfela 5_2006, uzyskanego za pomocą rozważanych metod. Jedynie większe różnice w wartości Portfela 5_2006 dostrzec można pod koniec okresu testowego.

Tabela 6.26. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 5_2006, dla okresu testowego.

Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	105 669.50	5 669.50
Minimax	100 000	104 983.90	4 983.90
MAD	100 000	105 304.00	5 304.00
CVaR	100 000	105 418.40	5 418.40
Min War_ CVaR_Rt	100 000	105 669.50	5 669.50
Max Rt_CVaR	100 000	107 111.30	**7 111.30**
Max Rt_War	100 000	105 860.70	5 860.70

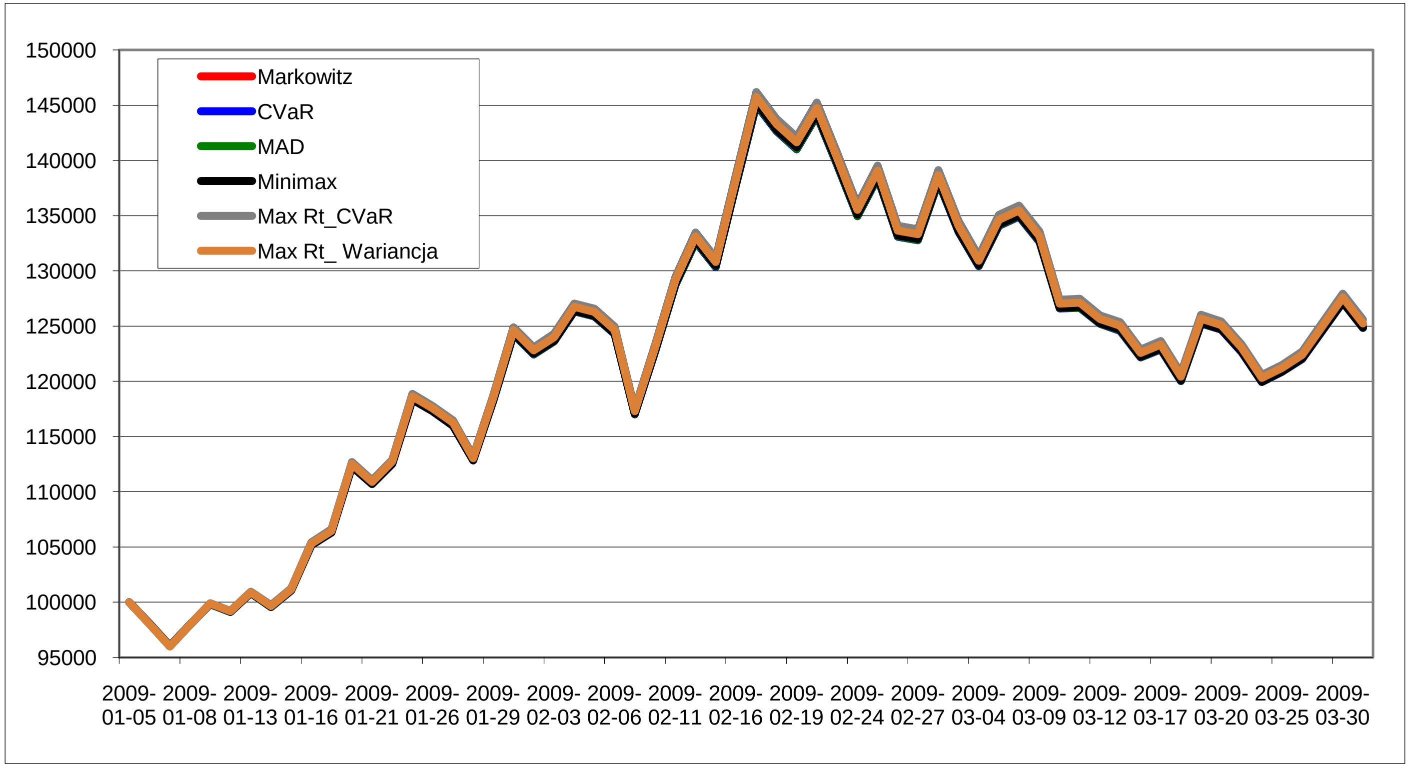
W Tabeli 6.26 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2007 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że dla metody minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej uzyskujemy największy zysk wielkości 7%. W pozostałych przypadkach jest to zysk rzędu 4.9-5.7%.

W Tabeli 6.27 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 5_2006. Portfel 5_2006 uzyskany metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej, ma najlepsze wskaźniki rentowności. Jednakże obserwujemy, że wszystkie portfele posiadają gorszą rentowność, aniżeli portfel rynkowy (czerwone wartości).

Uwzględniając wartość zysku oraz wskaźniki rentowności, za najlepszy możemy uznać Portfel 5_2006 uzyskany za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 6.27. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 5_2006, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0088	0.0201	-0.0264
Minimax	0.0144	0.0312	-0.0263
MAD	0.0091	0.0202	-0.0279
CVaR	0.0107	0.0238	-0.0266
Min War_ CVaR_Rt	0.0088	0.0201	-0.0264
Max Rt_CVaR	**0.0310**	**0.0702**	**-0.0172**
Max Rt_War	0.0199	0.0265	-0.0274
WIG	0.0815	0.1099	0



Rysunek 6.10. Wartość Portfela 5_2008 zoptymalizowanego za pomocą z metody Markowitza, minimalizacji CVaR, metody MAD, metody „minimax", maksymalizacji stopy zwrotu z portfela (okres testowy).

Rysunek 6.10 przedstawia wykres wartości Portfela 5_2008, zoptymalizowanego za pomocą różnych metod, w okresie testowym, czyli od 05.01.2009 r. do 31.03.2009 r., gdy na początku zainwestowano 100 000 złotych. Na Rysunku 6.10 widzimy tylko wartość portfela dzięki zastosowaniu metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji, gdyż pozostałe wartości się ze sobą pokrywają.

Na Rysunku 6.10 widzimy, że najgorszym momentem na wyjście z inwestycji był dzień 07.01.2009 r., w którym poniesiono by straty, natomiast gdyby inwestycję zakończono 17.02 to otrzymano by największe zyski.

Tabela 6.28. Procentowy udział aktywów, z zestawu instrumentów 5_2008, w zoptymalizowanych portfelach.

Nazwa spółki	Markowitz	Minimax	MAD	CVaR	Min War_ CVaR_Rt	Max Rt_CVaR	Max Rt_War
1. Bioton	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2. Frank szwajcarski	0.00	41.82	0.00	0.00	0.00	46.91	3.90
3. Ropa	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. Euro	75.94	13.20	84.19	83.96	75.94	29.84	72.45
5. Kofola	1.74	9.11	0.52	1.06	1.74	2.13	1.99
6. PKO BP	6.62	12.96	6.16	6.08	6.62	0.00	5.18
7. TVN	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. Dolar amerykański	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.77	0.00
9. Srebro	0.00	2.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10. Złoto	15.70	20.78	9.13	8.90	15.70	20.34	16.48

W Tabeli 6.28 ukazany jest procentowy udział aktywów w Portfelu 5_2008. Widzimy, że do zoptymalizowanego portfela należy od 4 do 6 aktywów. Największy procent udziałów, jeżeli nie uwzględnimy metody „minimax" i metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej, należy do waluty euro i wynosi on od 72% do 84%. Ponadto zupełnie inny skład procentowy portfela otrzymujemy dla metody „minimax" i maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Po pierwsze waluta euro stanowi tylko 13.2% lub 29.8% portfela, gdy dla innych metod jest to rząd wielkości 70-80%. Ponadto w składzie portfela znajduje się frank szwajcarski. Należy pamiętać o tym, że metoda „minimax" minimalizuje maksymalną stratę. Pomimo tego, że składy dla rozważanych metod różnią się od siebie, to wartości portfeli są identyczne (Rysunek 6.10)

Tabela 6.29. Wielkość zysku zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 1_2006, dla okresu testowego.

Metoda	Wielkość inwestycji	Wielkość portfela	Zysk/Strata
Markowitz	100 000	125 143.00	25 143.00
Minimax	100 000	124 852.70	24 852.70
MAD	100 000	124 861.90	24 861.90
CVaR	100 000	124 819.90	24 819.90
Min War_ CVaR_Rt	100 000	125 143.00	25 143.00
Max Rt_CVaR	100 000	125 572.50	**25 572.50**
Max Rt_War	100 000	125 242.60	25 242.60

W Tabeli 6.29 umieszczone są wartości otrzymanych portfeli optymalnych na koniec okresu testowego, czyli na dzień 31 marca 2009 r. oraz zyski lub ewentualne straty. Można zauważyć, że wielkość zysku jest porównywalna, różnice pomiędzy wartościami są niewielkie i wynoszą maksymalnie 700 zł. Zysk jest wielkości rzędu 25%.

Natomiast w Tabeli 6.30 umieszczone zostały wskaźniki rentowności Portfela 5_2008. Portfel 5_2008 uzyskany metodą „minimax" ma największy współczynnik Treynora. Współczynnik Sharpe'a przyjmuje największą wartość dla Portfela 5_2008 uzyskanego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danej wielkości warunkowej wartości zagrożonej. Natomiast wskaźnik Jensena przyjmuje największą wartość dla Portfela 5_2008 uzyskanego za pomocą metody MAD. Zaobserwować można, zupełnie przeciwne zachowanie się współczynników rentowności dla Portfela 5_2008 uzyskanego metodą „minimax". Dla wskaźnika Treynora jest to jedyny portfel o rentowności większej, niż dla portfela rynkowego, natomiast dla wskaźnika Jensena jest to również jedyny portfel o rentowności gorszej, aniżeli portfel rynkowy.

Uwzględniając wartość zysku oraz wskaźniki rentowności, za najlepszą możemy uznać metodę maksymalizacji stopy zwrotu przy danej wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 6.30. Wskaźniki rentowności zoptymalizowanych portfeli otrzymanych z zestawu instrumentów 5_2008, dla okresu testowego.

Metoda	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	TREYNORA	JENSENA
Markowitz	0.0451	-0.3313	0.0030
Minimax	-0.0332	**0.5048**	-0.0665
MAD	0.0601	-0.4746	**0.0284**
CVaR	0.0601	-0.4724	0.0281
Min War_ CVaR_Rt	0.0451	-0.3313	0.0030
Max Rt_CVaR	**0.0676**	-0.3313	0.0058
Max Rt_War	0.0526	-0.3400	0.0055
WIG	-0.1520	-0.3149	0

Porównanie metod przeprowadzono dla dziesięciu przypadków. Pięć jest rozpatrywanych na danych z 2006 roku i pięć na danych z 2008 r. W Tabeli 6.31, dla wygody czytelnika, przypominamy założone oczekiwane stopy zwrotu, przy których rozwiązywano zadania optymalizacyjne. Poziom stóp zwrotu był wymuszony przez konieczność istnienia rozwiązania. Zestawy instrumentów 1_2006, 2_2006, 3_2006, 4_2006, 5_2006 optymalizowane są na danych za 2006 rok, stąd większe wartości oczekiwane przyjęte w zadaniach optymalizacyjnych. Natomiast optymalizacji zestawu instrumentów 1_2008, 2_2008, 3_2008, 4_2008 i 5_2008 dokonywano na danych za 2008 r. Powodem dla którego zestaw instrumentów 1_2008 jest optymalizowany przy tak niskiej oczekiwanej stopie zwrotu jest struktura portfela, w którego skład wchodzą tylko akcje. Natomiast na danych za 2006 r. zestaw instrumentów o identycznym składzie aktywów, możemy rozwiązać zadanie optymalizacyjne przy oczekiwanej stopie zwrotu równej 10% (zestaw instrumentów 1_2006). Na uwagę zasługują również zestawy instrumentów 4_2006 i 4_2008, w składzie których są waluty i towary. Widzimy, że bez względu na okres próby, optymalizacji dokonywaliśmy przy stopie równej 5%.

W obu rozpatrywanych okresach stopa wolna od ryzyka (referencyjna) wynosiła 4.53%. Należy również pamiętać o tym, że jest to poziom stóp zwrotu wymuszony przez konieczność istnienia rozwiązania. W wielu przypadkach, jeżeli założono by większy poziom minimalnej oczekiwanej stopy zwrotu, to nie uzyskałoby się rozwiązania zadania optymalizacyjnego. Trzeba jednak wyraźnie podkreślić, że pomimo przyjęcia tak niskich oczekiwanych stóp zwrotu w warunkach ograniczających, w wielu przypadkach rozwiązanie doprowadziło do uzyskania o wiele większych zysków na koniec okresu testowego.

Tabela 6.31. Założone oczekiwane stopy zwrotu dla poszczególnych zestawów instrumentów.

Nr zestawu instrumentów	$\overline{R}$
1_2006	10%
1_2008	2%
2_2006	10%
2_2008	5%
3_2006	15%
3_2008	5%
4_2006	5%
4_2008	5%
5_2006	10%
5_2008	5%

Tabela 6.32. Maksymalna oczekiwana stopa zwrotu dla poszczególnych zestawów instrumentów.

Nr zestawu instrumentów	$\overline{R}$
1_2006	27.33%
1_2008	2.44%
2_2006	17.04%
2_2008	5.78%
3_2006	26.32%
3_2008	7.03%
4_2006	5.54%
4_2008	6.86%
5_2006	14.02%
5_2008	8.26%

W Tabeli 6.32 umieszczone zostały maksymalne stopy zwrotu otrzymane z metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Należy zauważyć, że w każdym przypadku uzyskana w okresie testowym stopa zwrotu jest wyższa od ograniczenia przyjętego w zadaniu.

ROZDZIAŁ VII

PORÓWNANIE METOD OPTYMALIZACJI PORTFELA WEDŁUG KRYTERIUM RYZYKA

W poprzednim rozdziale porównywaliśmy metody pod względem wielkości uzyskiwanego zysku, bądź w nielicznych przypadkach, jak najniższej straty. Dla każdego inwestora jest to bardzo ważne, gdyż istotnym aspektem każdej inwestycji jest wielkość zysku jaką można uzyskać. Z drugiej jednak strony istotne wydaje się również porównanie metod uwzględniające wielkość ryzyka. Podstawowym zadaniem prezentowanego w pracy badania była bowiem ocena, jak optymalizacja portfela wpływa na wielkość przyszłego ryzyka.

Głównym celem tego rozdziału jest ocena skuteczności warunkowej wartości zagrożonej jako narzędzia do zarządzania ryzykiem poprzez porównanie ryzyka portfeli optymalizowanych za pomocą kryterium minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej z ryzykiem portfeli otrzymanych za pomocą innych metod. Ponadto dla każdego rozpatrywanego przypadku porównano granice efektywności w przypadku stosowania jako kryterium optymalizacji warunkowej wartości zagrożonej[183]. Dodatkowo porównaliśmy również wielkość wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej otrzymanej w próbie, z tą otrzymaną poza próbą dla każdego portfela otrzymanego za pomocą omówionych metod optymalizacji portfela.

W związku z tym w niniejszym rozdziale obliczaliśmy wartość zagrożoną za pomocą metody kowariancji, natomiast warunkową wartość zagrożoną liczyliśmy wprost z

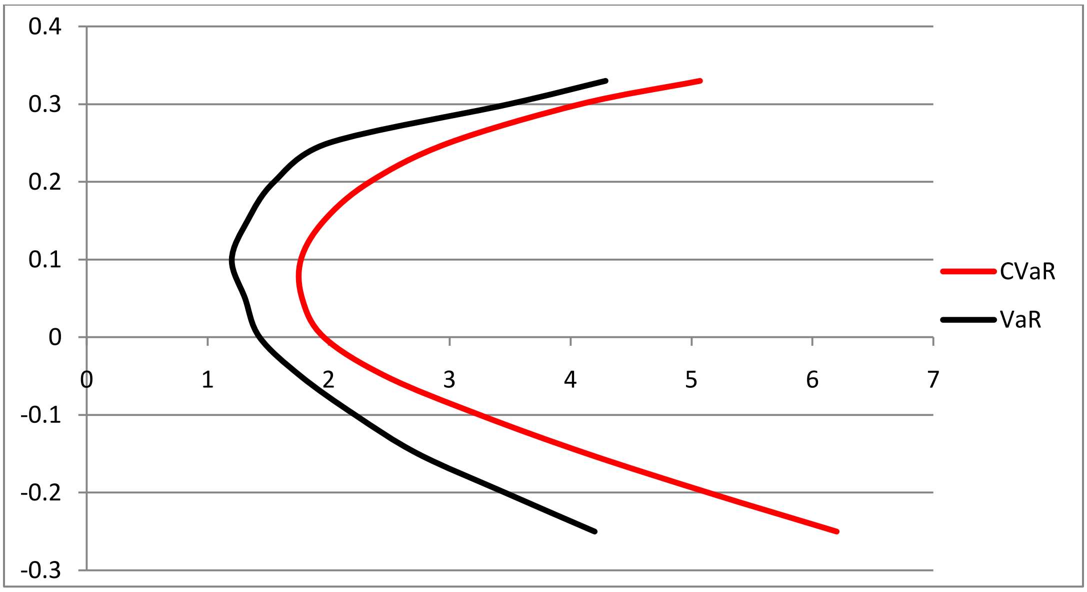
[183] Podobne badanie zostało przeprowadzone w pracy Koziorowska K., Ogrodnik K., *Minimalizacja warunkowej wartości zagrożonej*, Inwestowanie na rynku kapitałowym, red. W. Tarczyński, Szczecin 2008

definicji, stosując dla uproszenia obliczeń wzór (3.5). Na zakończenie porównaliśmy wielkości ryzyka dla wszystkich dziesięciu przypadków, przedstawionych w poprzednim rozdziale. Do oceny jakości oszacowań wartości zagrożonej zastosowany został Test Kupca, opisany w rozdziale II.

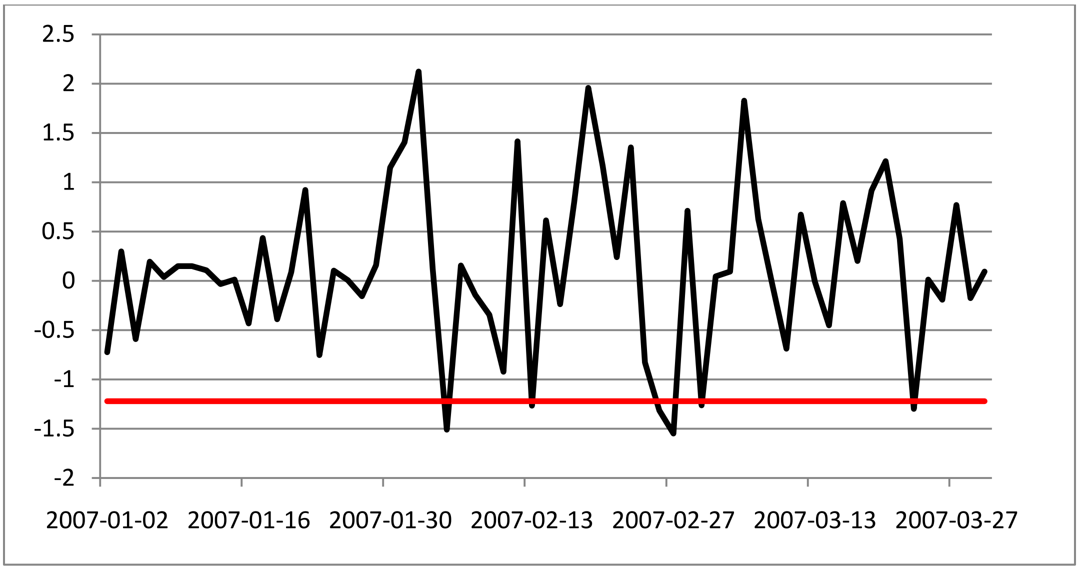
7.1. Portfel akcji

Na Rysunku 7.1 przedstawiono granice efektywności przy zastosowaniu jako miary ryzyka kolejno warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Na Rysunku 7.1 nie rzuca się to tak bardzo w oczy, ale jest bardziej widoczne w dalszych rozpatrywanych przypadkach.



Rysunek 7.1. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 1_2006.



Rysunek 7.2. Zwroty i VaR dla Portfela 1_2006 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.2 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody optymalizacji warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można przekroczenia wartości zagrożonej przez stopy zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.1. Umieszczono również w niej liczbę przekroczeń oraz procentowy udział przekroczeń do całkowitej liczby stóp zwrotu, których w okresie testowym odnotowujemy 63. Ponadto umieszczono statystykę Kupca.

Zaobserwować można, że udział przekroczeń jest większy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Zatem obserwujemy niedoszacowanie wartości zagrożonej. Największą ilość przekroczeń odnotowujemy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 7.1. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 1_2006.

Metoda	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Statystyka Kupca**	***p*- wartość**
Markowitz	4	6.45%	0.252961	0.615
Minimax	6	9.68%	2.269476	0.1319
MAD	6	9.68%	2.269476	0.1319
CVaR	6	9.68%	2.269476	0.1319
Min War_ CVaR_Rt	4	6.45%	0.252961	0.615
Max Rt_CVaR	12	19.35%	16.1023	<0.0001
Max Rt_War	3	4.84%	0.00343	0.9533

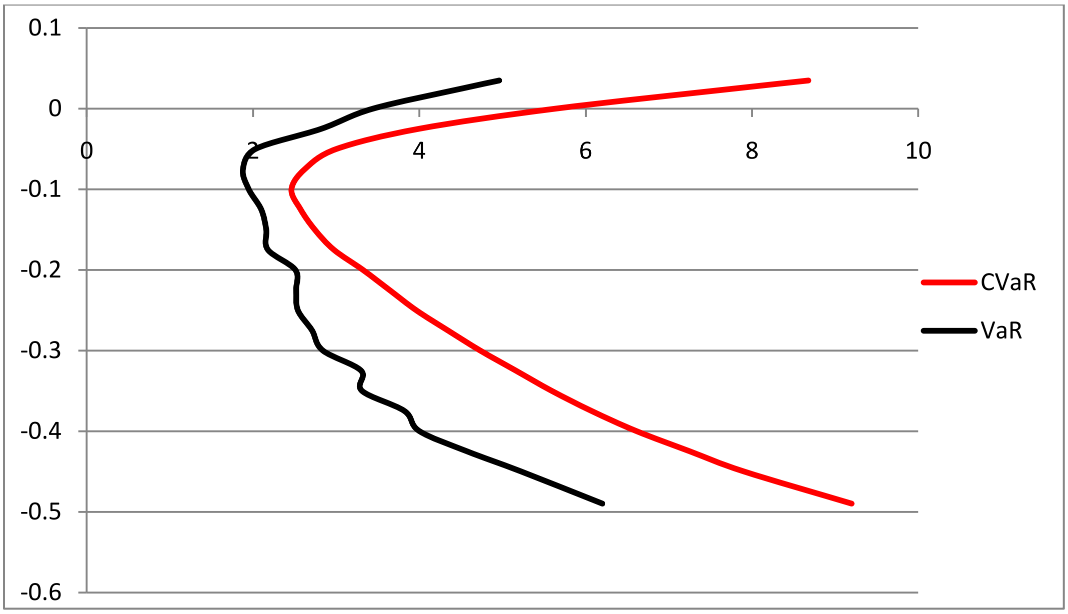
Dla każdego portfela zoptymalizowanego, otrzymanego rozważanymi metodami obliczono te wartości i porównano je z wartościami uzyskanymi w próbie. Zatem rozważano wielkości VaR i CVaR na danych testowych (od 02.01.2007 r. do 31.03. 2007r. lub od 05.01.2009 do 31.03.2009 r.) i zestawiono je z wielkościami VaR i CVaR otrzymanymi z metody optymalizacji portfela za pomocą warunkowej wartości zagrożonej, w próbie, czyli albo od 02.01.2006 r. do 29.12.2006 r., albo od 02.01.2008 r. do 31.12.2009 r.

W Tabeli 7.2 umieszczono wielkości wartości zagrożonej, obliczonej za pomocą metody kowariancji (opisanej szczegółowo w Rozdziale II) oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej obliczonej wprost z definicji, stosując dla uproszczenia obliczeń wzór (3.5).

Z Tabeli 7.2 zaobserwować można, że dla metod „minimax" i maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, następuje gwałtowny wzrost VaR i CVaR i to aż dwukrotnie. Zatem wybór inwestycji w Portfel 1_2006 otrzymany za pomocą tych metod powoduje zwiększenie ryzyka, na jakie narażony jest inwestor. Najmniejszy wzrost VaR i CVaR odnotowujemy dla Portfela 1_2006 uzyskanego za pomocą metody Markowitza i minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. W Tabeli 7.2 na czerwono zaznaczono wielkości wartości zagrożonej oraz warunkowej wartości zagrożonej otrzymane z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej w okresie próby.

Tabela 7.2. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 1_2006.

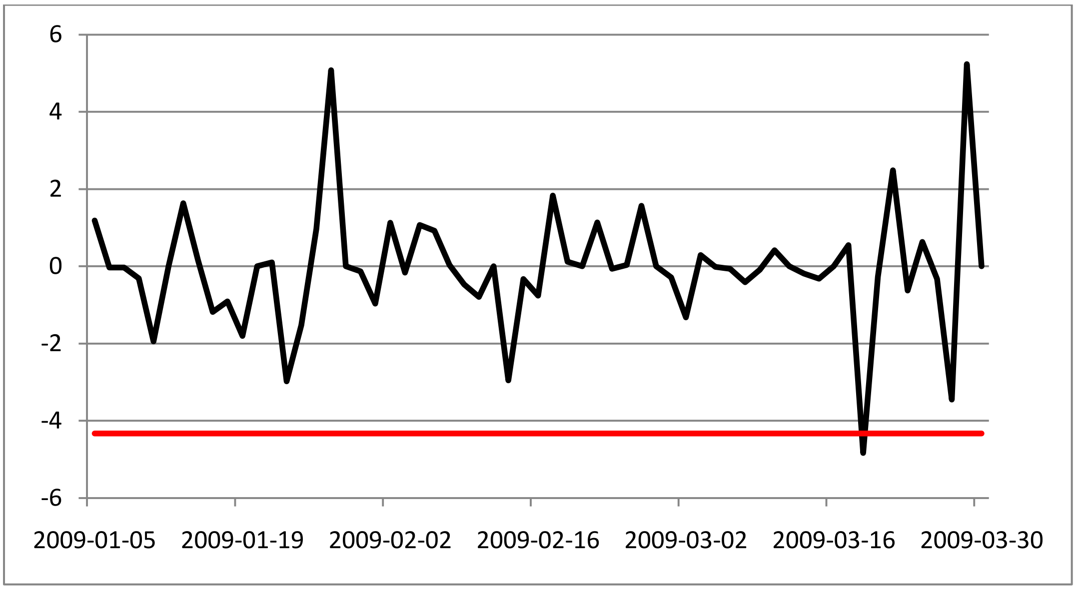
Metoda	**VaR**	**CVaR**
Markowitz	1.64	1.96
Minimax	2.61	2.94
MAD	1.74	1.99
CVaR	1.74	1.99
Min War_ CVaR_Rt	1.64	1.96
Max Rt_CVaR	3.04	3.84
Max Rt_War	1.86	2.31
W próbie	**1.22**	**1.77**



Rysunek 7.3. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 1_2008.

Na Rysunku 7.3 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 1_2008. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna i obrazowana przez krzywą gładką.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze spadkiem stopy zwrotu nie następuje liniowy spadek wartości zagrożonej. Spowodowane może to być tym, że wartość zagrożona nie posiada tak pożądanej własności dobrej miary ryzyka, jaką jest wypukłość.



Rysunek 7.4. Zwroty i VaR dla Portfela 1_2008 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.4 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można tylko jedno przekroczenie wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.3.

Udział przekroczeń jest mniejszy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest jednakowa dla wszystkich metod optymalizacji dla Portfela 1_2008.

Tabela 7.3. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 1_2008.

Metoda	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*- wartość
Markowitz	1	1.61%	2.011194	0.1561
Minimax	1	1.61%	2.011194	0.1561
MAD	1	1.61%	2.011194	0.1561
CVaR	1	1.61%	2.011194	0.1561
Min War_ CVaR_Rt	1	1.61%	2.011194	0.1561
Max Rt_CVaR	1	1.61%	2.011194	0.1561
Max Rt_War	1	1.61%	2.011194	0.1561

Tabela 7.4. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 1_2008.

Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	3.09	4.67
Minimax	3.09	4.67
MAD	3.09	4.67
CVaR	3.09	4.67
Min War_ CVaR_Rt	3.09	4.67
Max Rt_CVaR	3.21	4.84
Max Rt_War	3.10	4.70
W próbie	**4.33**	**7.35**

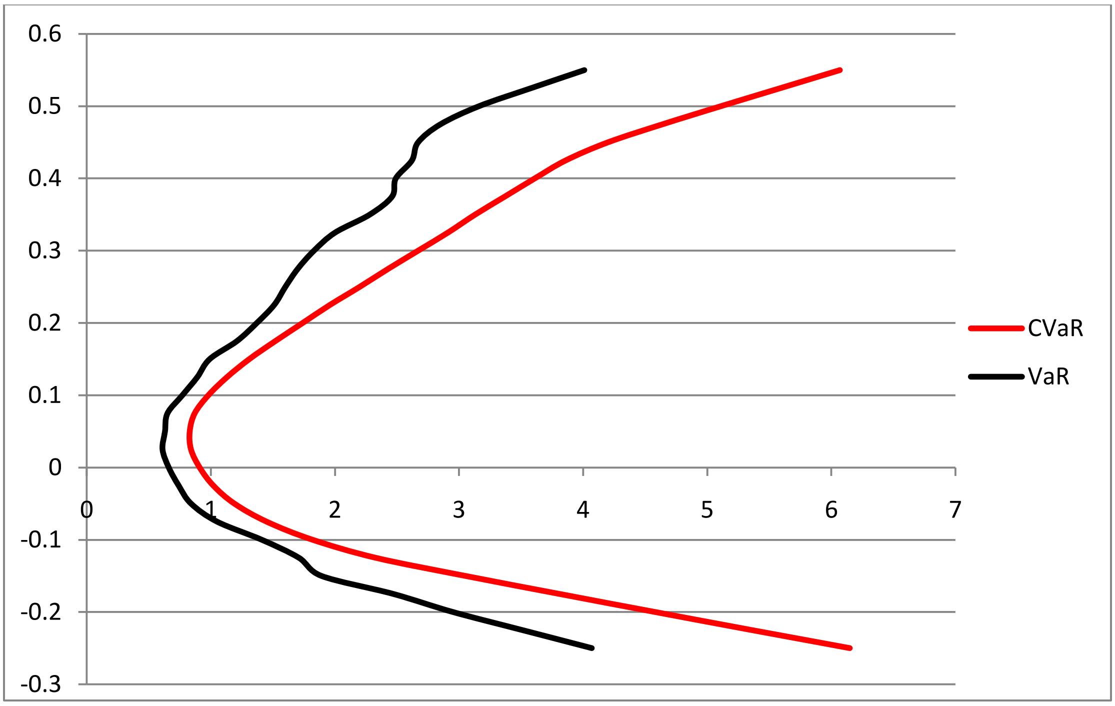
W Tabeli 7.4 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Z Tabeli 7.4 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje spadek VaR i CVaR. Zatem wybór inwestycji w Portfel 1_2008 otrzymany za pomocą tych metod powoduje zmniejszenie ryzyka, na jakie narażony jest inwestor. Jednakże jest to bardzo mylące, gdyż jeżeli dodatkowo uwzględnimy zysk, a w tym przypadku stratę portfela, to inwestora nie satysfakcjonuje taki portfel dla którego faktycznie narażony jest na o wiele niższe ryzyko, ale ponosi przy tym stratę wielkości 3%. Najmniejszy spadek VaR i CVaR odnotowujemy dla Portfela 1_2008 uzyskanego za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wartości zagrożonej.

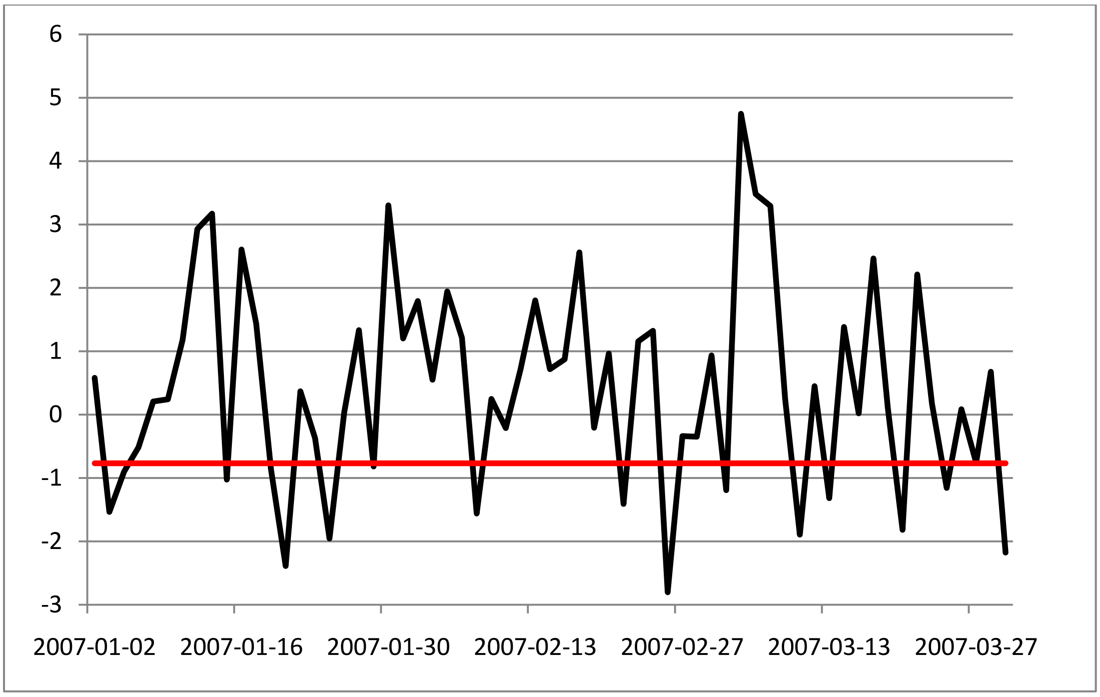
7.2. Portfel akcji i walut

Na Rysunku 7.5 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 2_2006. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze spadkiem (wzrostem) stopy zwrotu nie następuje liniowy spadek (wzrost) wartości zagrożonej. Spowodowane jest to najprawdopodobniej tym, że wartość zagrożona nie jest wypukła.



Rysunek 7.5. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 2_2006.



Rysunek 7.6. Zwroty i VaR dla Portfela 2_2006 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.6 umieszczono wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można dużą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.5.

Widzimy, że udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest prawie jednakowa dla wszystkich metod optymalizacji dla Portfela 2_2006. Stanowi ona aż 25% wszystkich stóp zwrotu z portfela.

Tabela 7.5. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 2_2006.

Metoda	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*- wartość
Markowitz	16	25.81%	29.7756	<0.0001
Minimax	15	24.19%	26.08425	<0.0001
MAD	16	25.81%	29.7756	<0.0001
CVaR	16	25.81%	29.7756	<0.0001
Min War_ CVaR_Rt	16	25.81%	29.7756	<0.0001
Max Rt_CVaR	15	24.19%	26.08425	<0.0001
Max Rt_War	15	24.19%	26.08425	<0.0001

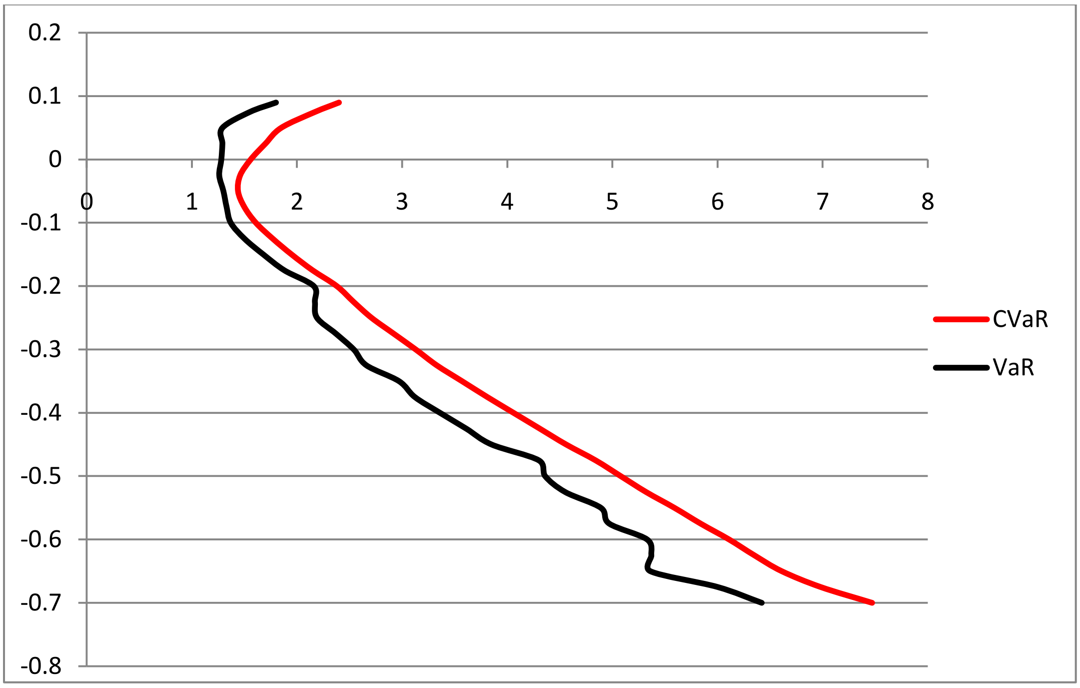
W Tabeli 7.6 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 7.6. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 2_2006.

Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	0.98	1.12
Minimax	0.93	1.01
MAD	0.94	1.08
CVaR	0.97	1.08
Min War_ CVaR_Rt	0.98	1.12
Max Rt_CVaR	1.34	1.52
Max Rt_War	1.37	1.57
W próbie (CVaR)	**0.77**	**0.98**

Z Tabeli 7.6 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR. Dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej oraz metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej wariancji, następuje aż dwukrotny wzrost VaR. Dla pozostałych metod nie jest to aż tak znaczące zwiększenie, a dla metody „minimax" CVaR wzrasta tylko o 0.03 pkt. procentowego.

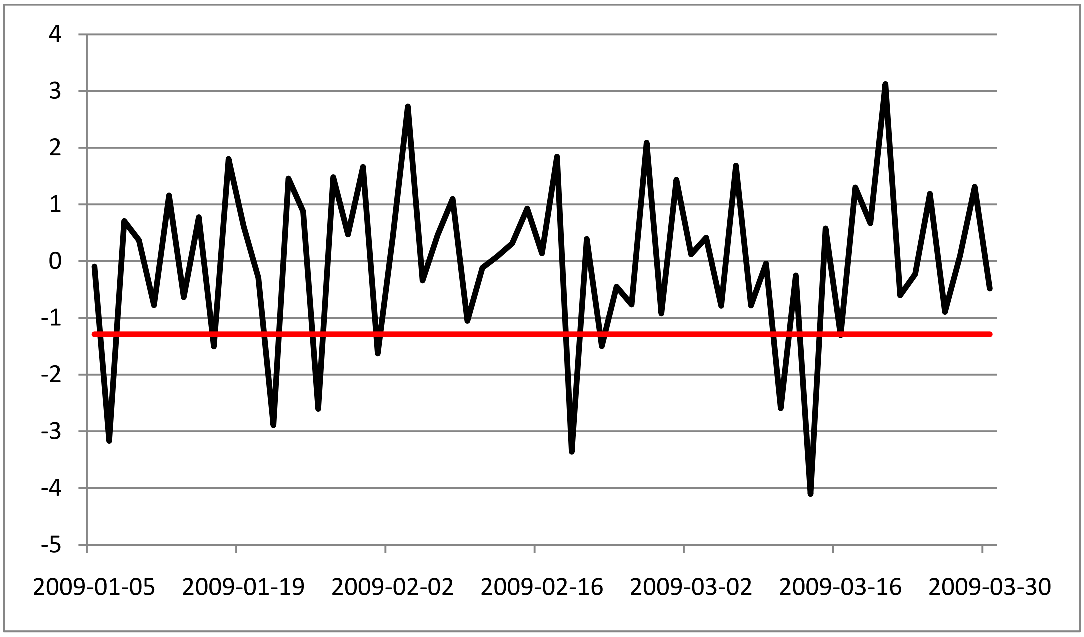
Na Rysunku 7.7 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 2_2008.



Rysunek 7.7. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 2_2008.

Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze spadkiem stopy zwrotu nie następuje liniowy spadek wartości zagrożonej.



Rysunek 7.8. Zwroty i VaR dla Portfela 2_2008 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.8 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można dość sporą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.7.

Udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest różnorodna dla rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 2_2008.

Tabela 7.7. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 2_2008.

Metoda	**Liczba prze-kroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Statystyka Kupca**	***p*- wartość**
Markowitz	9	14.52%	7.996592	0.0047
Minimax	21	33.87%	50.64499	<0.0001
MAD	8	12.90%	5.78807	0.0161
CVaR	10	16.13%	10.46553	0.0012
Min War_ CVaR_Rt	11	17.74%	13.17327	0.0003
Max Rt_CVaR	9	14.52%	7.996592	0.0047
Max Rt_War	10	16.13%	10.46553	0.0012

W Tabeli 7.4 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 7.8. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 2_2008.

Metoda	**VaR**	**CVaR**
Markowitz	2.84	4.19
Minimax	2.84	4.25
MAD	2.87	4.23
CVaR	2.88	4.22
Min War_ CVaR_Rt	2.84	4.19
Max Rt_CVaR	2.97	4.35
Max Rt_War	3.14	4.66
W próbie	**1.29**	**1.85**

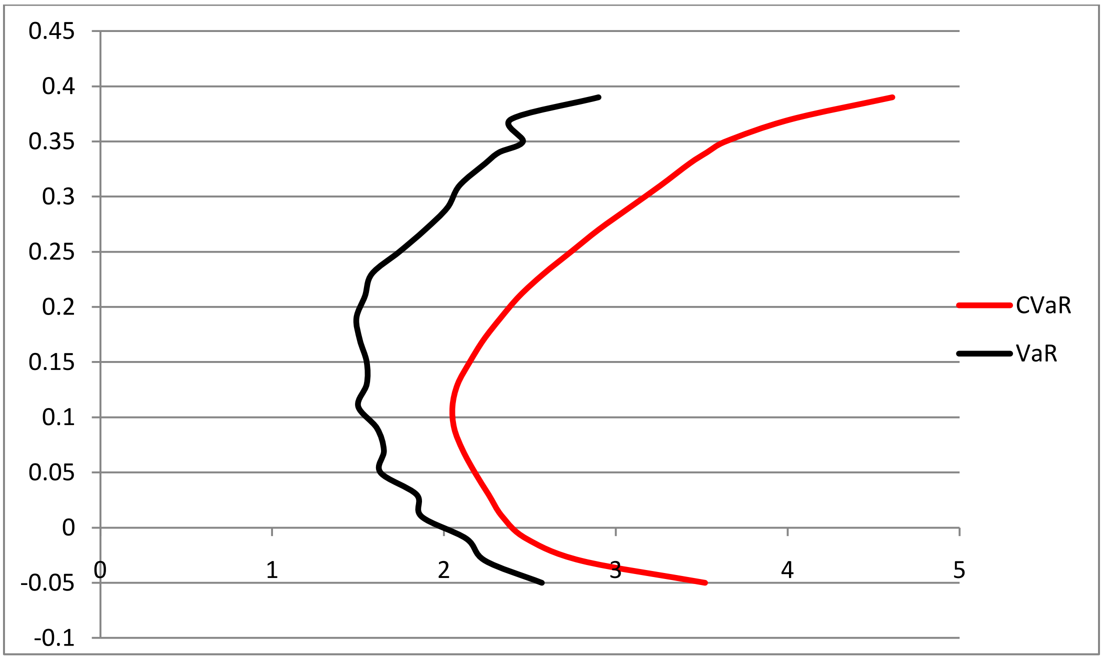
Z Tabeli 7.8 można zaobserwować, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR i to aż dwukrotnie. Najmniejszy wzrost VaR i CVaR odnotowujemy dla Portfela 2_2008 uzyskanego za pomocą metody Markowitza i minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej wariancji.

7.3. Portfel akcji i towarów

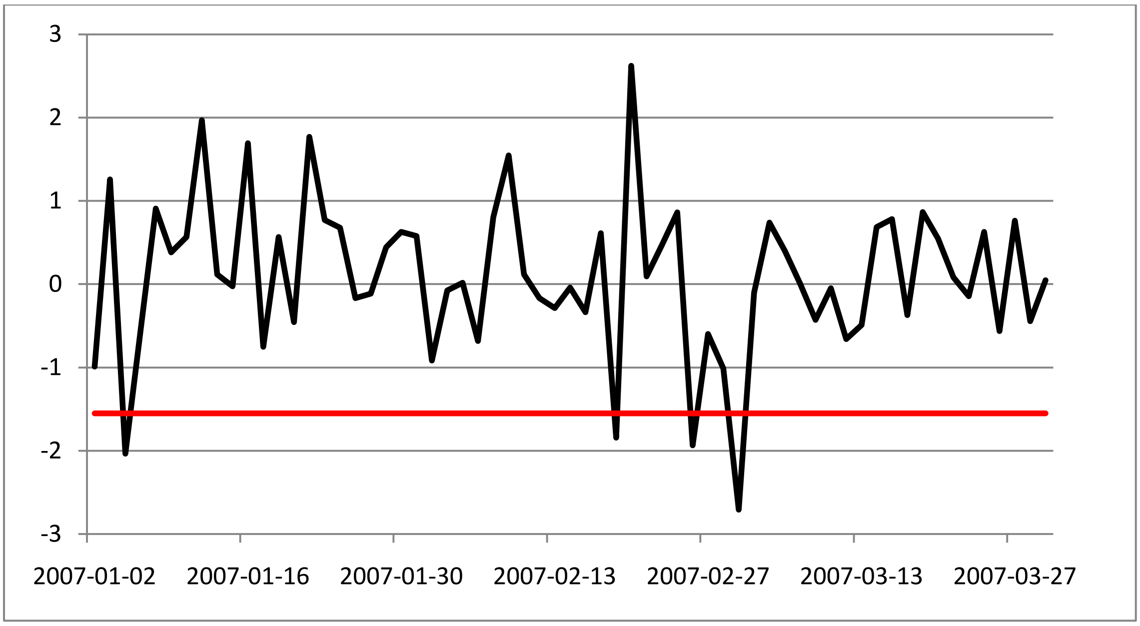
Na Rysunku 7.9 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 3_2006.

Widzimy, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze wzrostem stopy zwrotu nie następuje liniowy wzrost wartości zagrożonej. Spowodowane jest to tym, że wartość zagrożona nie jest wypukła.



Rysunek 7.9. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 3_2006.



Rysunek 7.10. Zwroty i VaR dla Portfela 3_2006 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.10 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można niewielką liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.9.

Widzimy, że udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Jedynie dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej poziom udziału przekroczeń jest mniejszy od poziomu istotności. Ilość przekroczeń jest porównywalna dla rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 3_2006.

Tabela 7.9. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 3_2006.

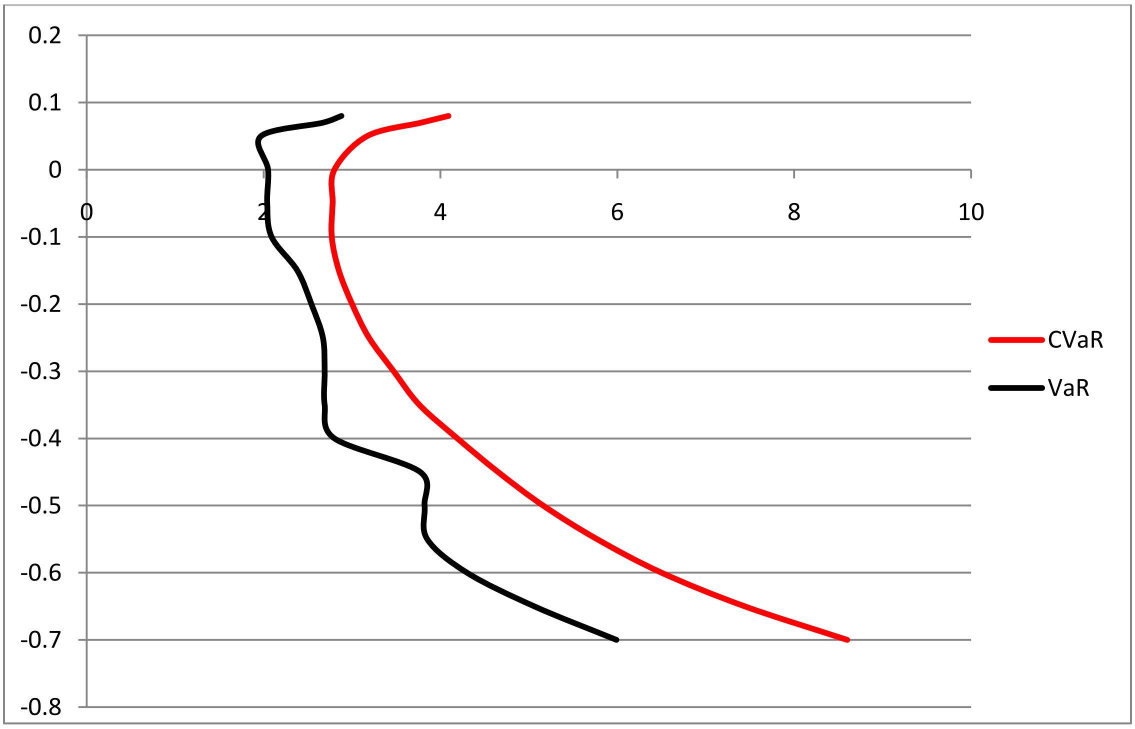
Metoda	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Statystyka Kupca**	***p*- wartość**
Markowitz	4	6.45%	0.252961	0.615
Minimax	6	9.68%	2.269476	0.1319
MAD	4	6.45%	0.252961	0.615
CVaR	4	6.45%	0.252961	0.615
Min War_ CVaR_Rt	4	6.45%	0.252961	0.615
Max Rt_CVaR	3	4.84%	0.00343	0.9533
Max Rt_War	4	6.45%	0.252961	0.615

W Tabeli 7.10 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 7.10. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 3_2006.

Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	1.73	2.25
Minimax	2.28	2.64
MAD	1.77	2.49
CVaR	1.79	2.54
Min War_ CVaR_Rt	1.73	2.25
Max Rt_CVaR	2.65	3.67
Max Rt_War	2.15	2.91
W próbie	**1.55**	**2.15**

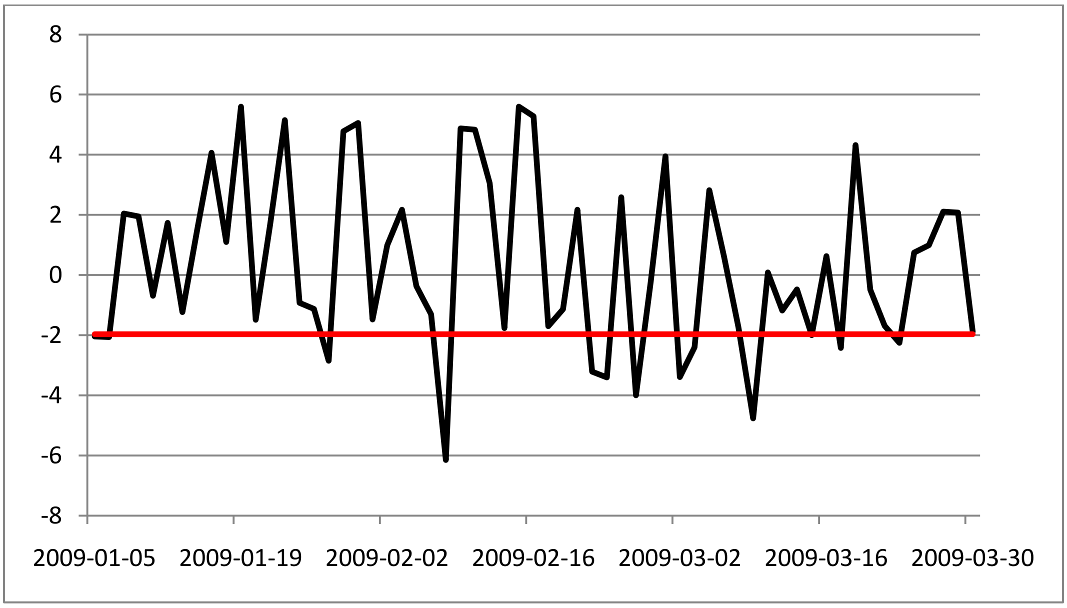
Z Tabeli 7.10 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR. Najmniejszy wzrost VaR i CVaR odnotowujemy dla Portfela 3_2006 uzyskanego za pomocą metody Markowitza i minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.



Rysunek 7.11. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 3_2008.

Na Rysunku 7.11 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 3_2008. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze wzrostem stopy zwrotu nie następuje liniowy wzrost wartości zagrożonej.



Rysunek 7.12. Zwroty i VaR dla Portfela 3_2008 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.12 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można dość sporą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.11.

Udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest identyczna dla rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 3_2008.

Tabela 7.11. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 3_2008.

Metoda	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*- wartość
Markowitz	13	20.97%	19.23819	<0.0001
Minimax	13	20.97%	19.23819	<0.0001
MAD	13	20.97%	19.23819	<0.0001
CVaR	13	20.97%	19.23819	<0.0001
Min War_ CVaR_Rt	13	20.97%	19.23819	<0.0001
Max Rt_CVaR	13	20.97%	19.23819	<0.0001
Max Rt_War	13	20.97%	19.23819	<0.0001

W Tabeli 7.12 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Z Tabeli 7.12 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR. Najmniejszy wzrost VaR i CVaR odnotowujemy dla Portfela 3_2008 uzyskanego za pomocą metody Markowitza, minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej, MAD oraz warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Niepokojący jest znacznie procentowo większy wzrost wartości zagrożonej, aniżeli warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 7.12. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 3_2008.

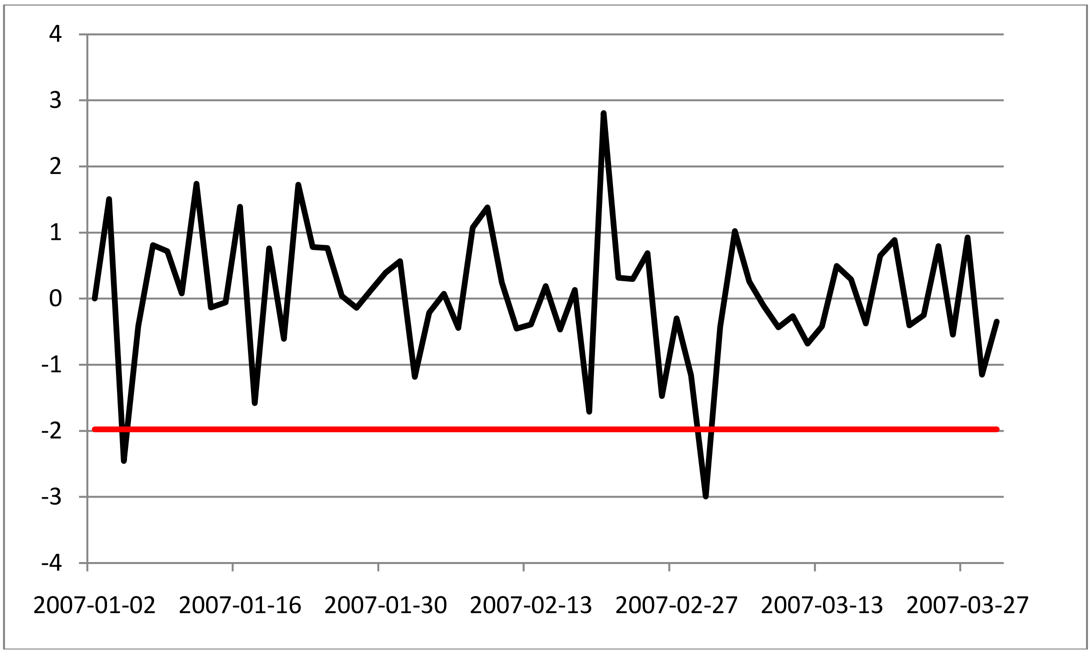
Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	3.56	3.73
Minimax	3.78	4.07
MAD	3.56	3.73
CVaR	3.56	3.73
Min War_ CVaR_Rt	3.56	3.73
Max Rt_CVaR	4.36	4.75
Max Rt_War	3.89	4.16
W próbie	**1.97**	**3.17**

7.4. Portfel walut i towarów

Na Rysunku 7.13 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 4_2006. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze wzrostem (spadkiem) stopy zwrotu nie następuje liniowy wzrost (spadek) wartości zagrożonej.

Rysunek 7.13. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 4_2006.



Rysunek 7.14. Zwroty i VaR dla Portfela 4_2006 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.14 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można tylko dwa przekroczenia wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.13.

Widzimy, że udział przekroczeń jest niższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Zatem oszacowania wartości zagrożonej są dobre. Ilość przekroczeń jest identyczna dla wszystkich rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 4_2006.

Tabela 7.13. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 4_2006.

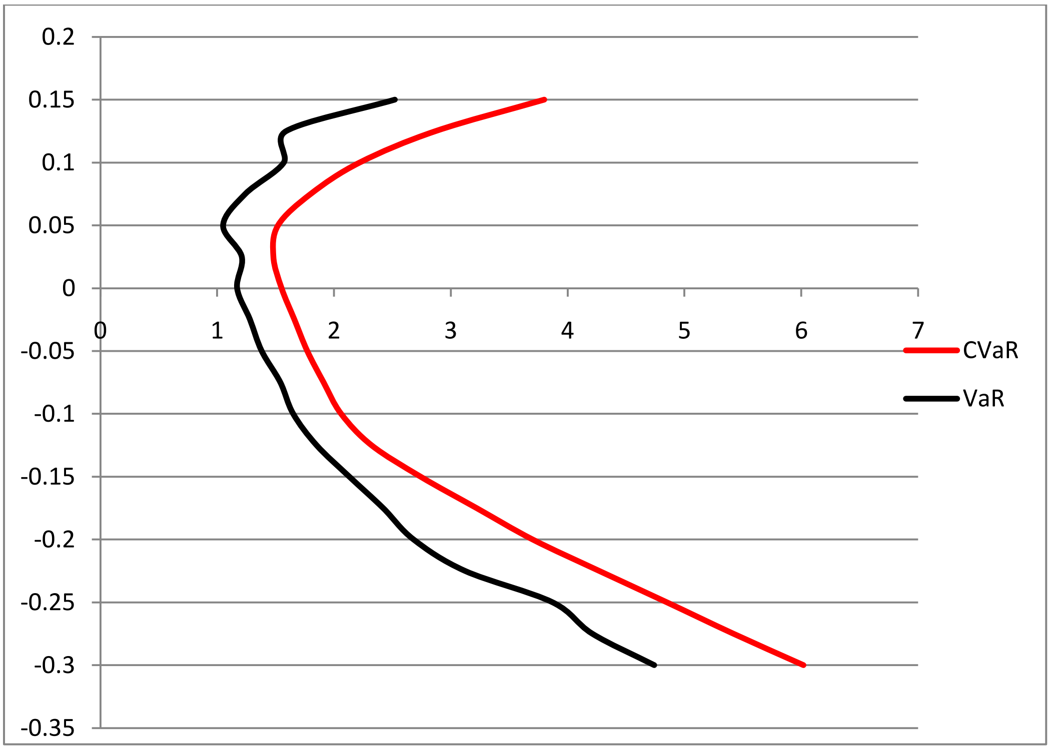
Metoda	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Statystyka Kupca**	***p*- wartość**
Markowitz	2	3.22%	0.467397	0.4942
Minimax	2	3.22%	0.467397	0.4942
MAD	2	3.22%	0.467397	0.4942
CVaR	2	3.22%	0.467397	0.4942
Min War_ CVaR_Rt	2	3.22%	0.467397	0.4942
Max Rt_CVaR	2	3.22%	0.467397	0.4942
Max Rt_War	2	3.22%	0.467397	0.4942

W Tabeli 7.14 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Z Tabeli 7.14 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje minimalny spadek VaR i CVaR. Największy spadek odnotowujemy dla metody MAD oraz warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej. W przeciwieństwie do pozostałych metod, następuje wzrost warunkowej wartości zagrożonej, natomiast wartość zagrożona minimalnie spada.

Tabela 7.14. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 4_2006.

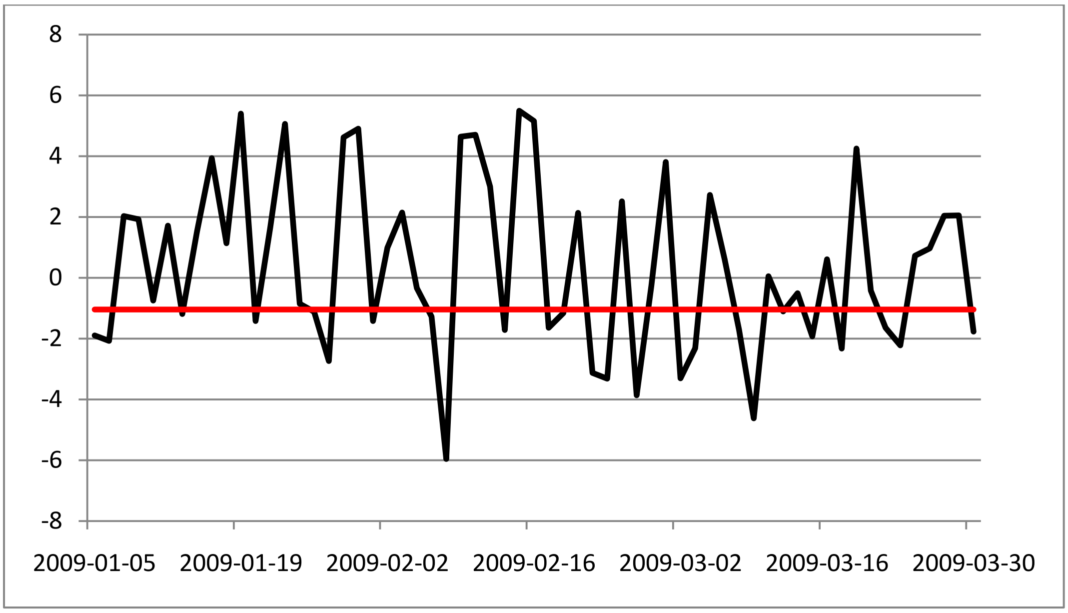
Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	1.44	2.13
Minimax	1.49	2.23
MAD	1.43	2.08
CVaR	1.43	2.08
Min War_ CVaR_Rt	1.44	2.13
Max Rt_CVaR	1.61	2.36
Max Rt_War	1.58	2.35
W próbie	**1.98**	**2.25**



Rysunek 7.15. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 4_2008.

Na Rysunku 7.15 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 4_2008. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tę zależność jest zgodny z teoretycznym kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze spadkiem stopy zwrotu nie następuje liniowy spadek wartości zagrożonej.



Rysunek 7.16. Zwroty i VaR dla Portfela 4_2008 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.16 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można tylko dość sporą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.15.

Widzimy, że udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest identyczna dla rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 4_2008 i wynosi ona aż 40% wszystkich stóp zwrotu dla Portfela 4_2008.

Tabela 7.15. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 4_2008.

Metoda	Liczba prze-kroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p-* wartość
Markowitz	25	40.32%	69.96937	<0.0001
Minimax	25	40.32%	69.96937	<0.0001
MAD	25	40.32%	69.96937	<0.0001
CVaR	25	40.32%	69.96937	<0.0001
Min War_ CVaR_Rt	25	40.32%	69.96937	<0.0001
Max Rt_CVaR	25	40.32%	69.96937	<0.0001
Max Rt_War	25	40.32%	69.96937	<0.0001

W Tabeli 7.16 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Można zaobserwować, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR. Najmniejszy wzrost odnotowujemy dla metody „minimax". Zatem metodą nie powodującą większego narażenia na ryzyko, jest metoda „minimax". Natomiast największy wzrost, bo aż ponad dwukrotny VaR i CVaR, zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.

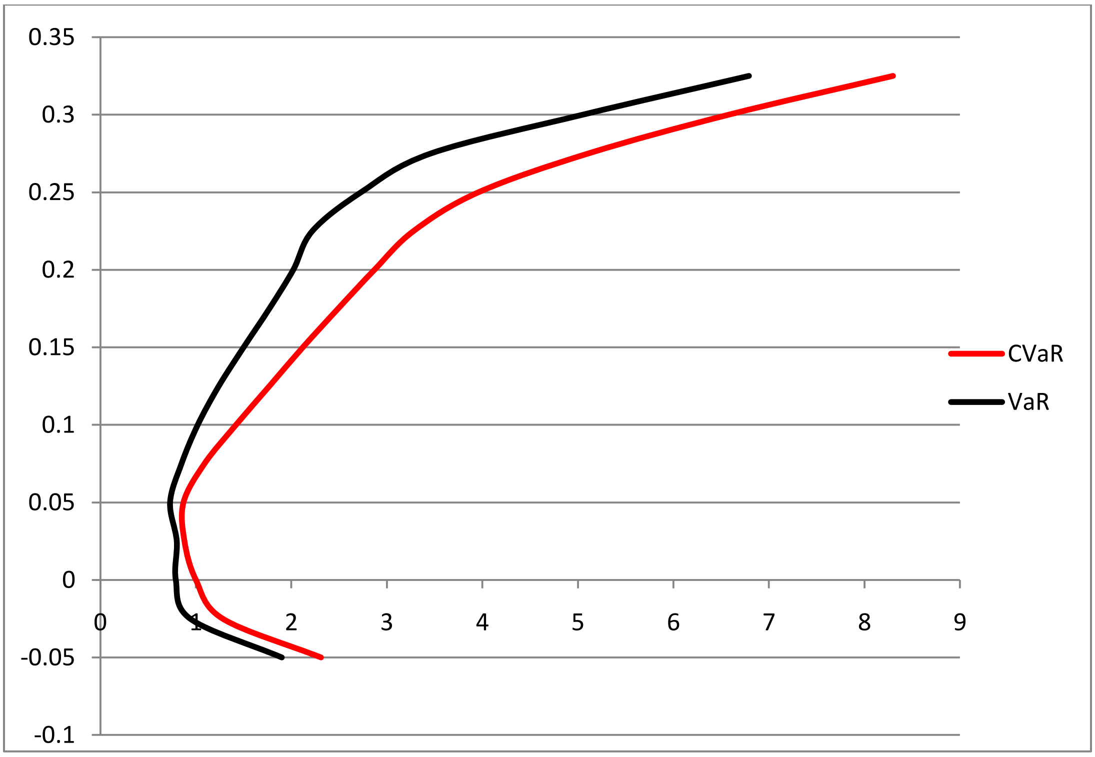
Tabela 7.16. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 4_2008.

Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	2.26	2.95
Minimax	2.10	2.64
MAD	2.41	3.17
CVaR	2.41	3.20
Min War_ CVaR_Rt	2.26	2.95
Max Rt_CVaR	2.58	3.35
Max Rt_War	2.42	3.09
W próbie	**1.05**	**1.52**

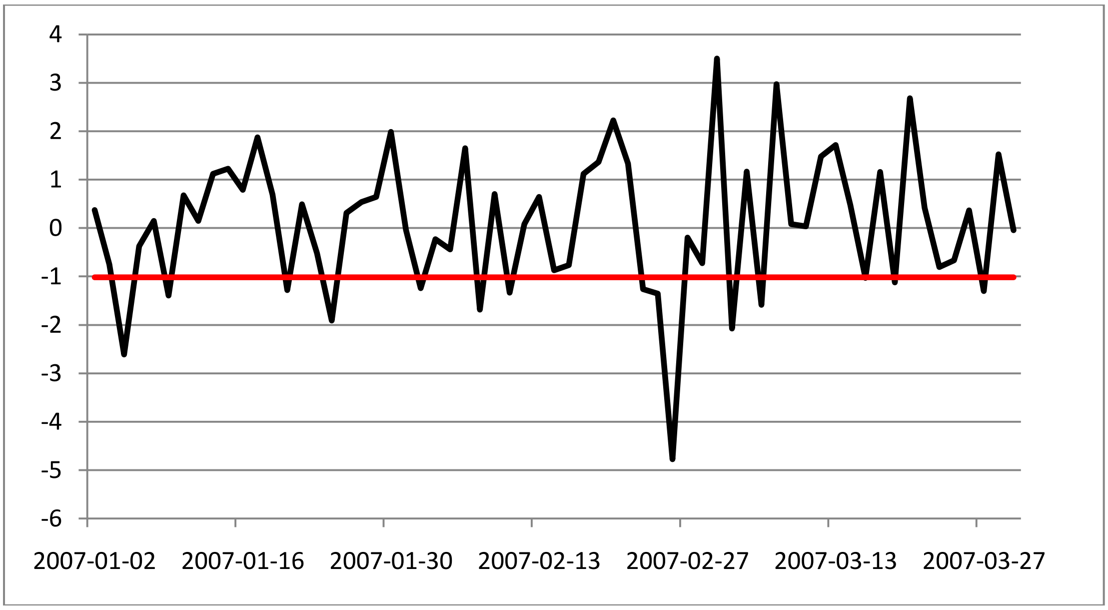
7.5. Portfel akcji, walut i towarów

Na Rysunku 7.17 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 5_2006. Zaobserwować można, że zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tą zależność jest zgodny z teoretycznym kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Widzimy, że wraz ze wzrostem stopy zwrotu nie następuje liniowy wzrost wartości zagrożonej. Chociaż jest to już bardziej stabilne zachowanie się granicy efektywności, niż w pozostałych rozpatrywanych przypadkach.



Rysunek 7.17. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 5_2006.



Rysunek 7.18. Zwroty i VaR dla Portfela 5_2006 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Na Rysunku 7.18 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można dość sporą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela. Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.17.

Udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Liczba przekroczeń jest prawie identyczna dla wszystkich rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 5_2006. Udział przekroczeń wartości zagrożonej stanowi ponad 20% wszystkich stóp zwrotu z portfela.

Tabela 7.17. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 5_2006.

Metoda	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*- wartość
Markowitz	14	22.58%	22.5689	<0.0001
Minimax	14	22.58%	22.5689	<0.0001
MAD	14	22.58%	22.5689	<0.0001
CVaR	15	24.19%	26.08425	<0.0001
Min War_ CVaR_Rt	14	22.58%	22.5689	<0.0001
Max Rt_CVaR	15	24.19%	26.08425	<0.0001
Max Rt_War	15	24.19%	26.08425	<0.0001

W Tabeli 7.18 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

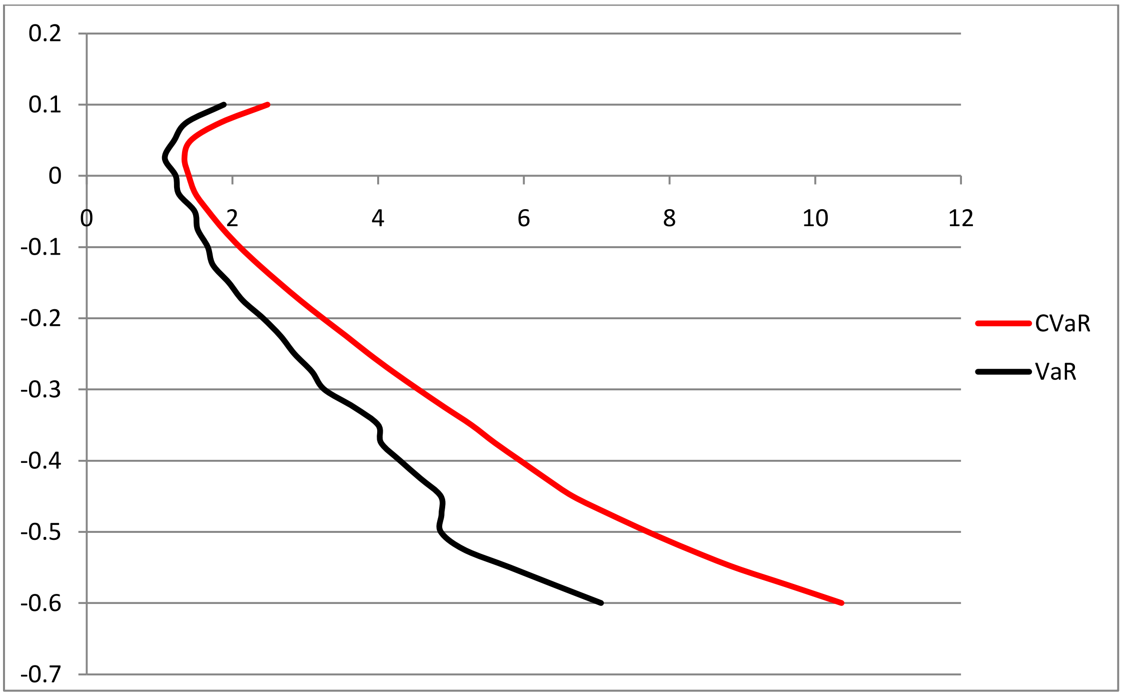
Tabela 7.18. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 5_2006.

Metoda	VaR	CVaR
Markowitz	1.11	1.49
Minimax	1.20	1.57
MAD	1.15	1.52
CVaR	1.15	1.52
Min War_ CVaR_Rt	1.11	1.49
Max Rt_CVaR	1.63	2.18
Max Rt_War	1.21	1.63
W próbie	**1.02**	**1.42**

Z Tabeli 7.18 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost VaR i CVaR. Najmniejszy wzrost odnotowujemy dla Portfela 5_2006 uzyskanego za pomocą metody Markowitza oraz minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Warunkowa wartość zagrożona, dla wymienionych powyżej metod, wzrasta tylko o 0.07 pkt. procentowego. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej.

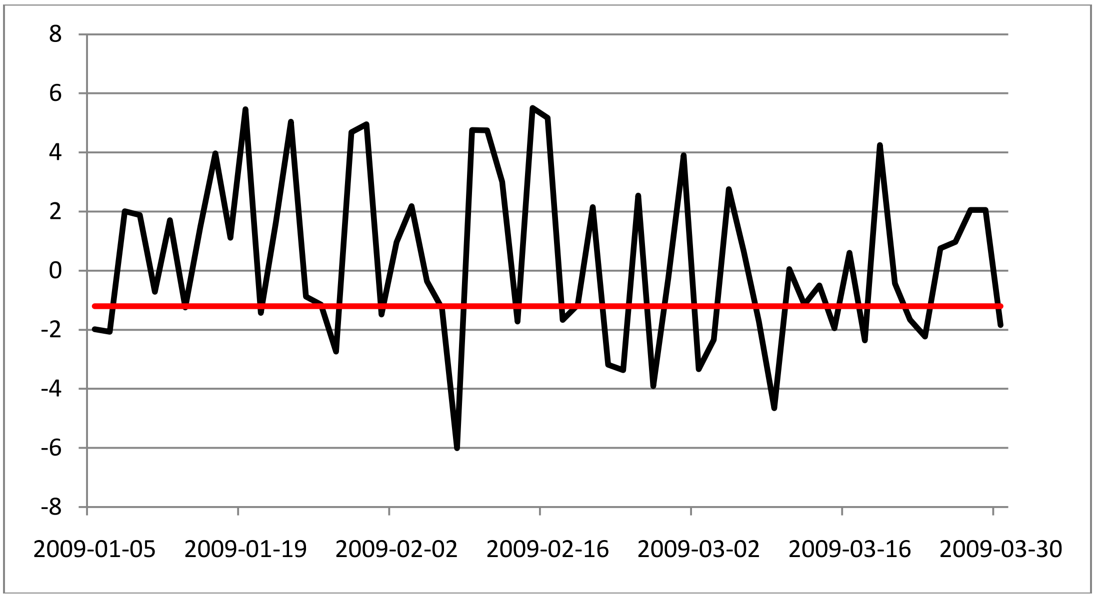
Na Rysunku 7.19 umieszczono granice efektywności warunkowej wartości zagrożonej i wartości zagrożonej, uzyskanych z metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, dla Portfela 5_2008. Zależność stopa zwrotu – CVaR jest stabilna. Co oznacza, że kształt krzywej obrazującej tą zależność jest zgodny z kształtem krzywej granicy efektywności.

Podobnej stabilności nie można otrzymać dla wartości zagrożonej. Wraz ze spadkiem stopy zwrotu nie następuje liniowy spadek wartości zagrożonej.



Rysunek 7.19. Granica efektywności portfeli minimalizujących CVaR dla Portfela 5_2008.

Na Rysunku 7.20 widzimy wykres stóp zwrotu portfela otrzymanego za pomocą metody warunkowej wartości zagrożonej (czarna linia). Czerwoną linią zaznaczono wielkość wartości zagrożonej otrzymanej ze wspomnianej metody, dla okresu próby. Zaobserwować można dość sporą liczbę przekroczeń wartości zagrożonej przez stopę zwrotu z portfela.



Rysunek 7.20. Zwroty i VaR dla Portfela 5_2008 otrzymanego metodą warunkowej wartości zagrożonej (okres testowy).

Ocena jakości wyliczeń wartości zagrożonej znajduje się w Tabeli 7.19. Widzimy, że udział przekroczeń jest wyższy od poziomu istotności, który wynosi 5%. Ilość przekroczeń jest identyczna dla wszystkich rozpatrywanych metod optymalizacji dla Portfela 5_2008. Udział przekroczeń wartości zagrożonej stanowi ponad 35% wszystkich stóp zwrotu z portfela.

Tabela 7.19. Oceny jakości wyliczeń VaR dla portfeli uzyskanych z zestawu 5_2008.

Metoda	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*- wartość
Markowitz	22	35.48%	55.20724	<0.0001
Minimax	22	35.48%	55.20724	<0.0001
MAD	22	35.48%	55.20724	<0.0001
CVaR	22	35.48%	55.20724	<0.0001
Min War_ CVaR_Rt	22	35.48%	55.20724	<0.0001
Max Rt_CVaR	22	35.48%	55.20724	<0.0001
Max Rt_War	22	35.48%	55.20724	<0.0001

W Tabeli 7.20 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz wielkości warunkowej wartości zagrożonej.

Z Tabeli 7.20 zaobserwować można, że dla wszystkich rozpatrywanych metod, następuje wzrost i to aż dwukrotny VaR i CVaR. Najmniejszy wzrost odnotowujemy dla Portfela 5_2008 uzyskanego za pomocą metody Markowitza oraz minimalizacji wariancji przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Zatem metodami nie powodującymi większego narażenia na ryzyko, są wspomniane powyżej metody. Natomiast największy wzrost zauważamy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej, gdzie zaobserwować można wzrost CVaR z 1.43% aż do 3.78%.

Tabela 7.20. Wielkość VaR i CVaR poza próbą, dla portfeli uzyskanych z zestawu 5_2008.

Metoda	**VaR**	**CVaR**
Markowitz	2.26	2.89
Minimax	2.05	2.66
MAD	2.34	3.12
CVaR	2.33	3.11
Min War_ CVaR_Rt	2.26	2.89
Max Rt_CVaR	2.90	3.78
Max Rt_War	2.34	2.99
W próbie	**1.20**	**1.43**

ROZDZIAŁ VIII

PODSUMOWANIE ANALIZ

Zarządzanie ryzykiem jest jednym z najważniejszych zadań w procesie inwestowania na rynkach finansowych. Wprowadzenie wartości zagrożonej do procesu zarządzania ryzykiem spowodowało wzrost zainteresowania procesem ilościowego zarządzania ryzykiem. VaR stał się bardzo popularny mimo, że nie posiada pewnych cech dobrej miary ryzyka. We współczesnym świecie, gdy inwestorzy często w bardzo krótkim czasie podejmują bardzo ryzykowne decyzje dotyczące alokacji kapitału, poszukiwanie nowych, lepszych narzędzi zarządzania ryzykiem jest koniecznością. Jedną z nowych propozycji dotyczących pomiaru ryzyka jest warunkowa wartość zagrożona. W przeciwieństwie do VaR posiada ona pewne zgodne z intuicją własności, dlatego jest gorąco polecana przez jej twórców. Jednak pomimo istnienia sporej ilości opracowań teoretycznych poświęconych CVaR, nadal jest ona bardzo mało znana wśród praktyków. Być może jest to spowodowane niedostatkiem rzetelnych badań empirycznych, analizujących skuteczność CVaR na rynkach finansowych.

W niniejszej pracy podjęto próbę oceny skuteczności CVaR jako narzędzia do zarządzania ryzykiem. Założony cel został zrealizowany poprzez porównanie zyskowności i ryzyka portfeli optymalizowanych przy użyciu CVaR jako miary ryzyka, z portfelami, których ryzyko mierzone było innymi sposobami.

W ramach badania przeanalizowano po pięć różnych zestawów instrumentów – każdy w dwóch okresach, różniących się koniunkturą na rynkach finansowych. Pięć przypadków rozpatrywaliśmy na danych za 2006 rok, pięć z nich na danych za 2008 rok. Należy przy tym podkreślić fakt, że według wiedzy autorki jest to pierwsze, w tak szerokim zakresie, badanie empiryczne, wykorzystujące nową miarę ryzyka – warunkową wartość zagrożoną.

Na wstępie niniejszego badania został stworzony profil inwestora, zainteresowanego metodami optymalizacji swoich inwestycji. Wybór aktywów do portfela był kolejnym, bardzo istotnym zadaniem. Decyzja o wyborze rozważanych aktywów jest kluczowym etapem procesu inwestowania. Teoretycznie inwestor rozważał portfele utworzone z :

- akcji,
- akcji i walut,
- akcji i towarów,
- towarów i walut,
- akcji, walut oraz towarów.

W ten sposób została stworzona możliwość porównania rozpatrywanych metod na zróżnicowanych aktywach. W przypadku tworzenia portfela składającego się z samych akcji, dokonywaliśmy wstępnej dywersyfikacji sektorowej. Dokonywana była również analiza branży, pozwalająca na wyodrębnienie inwestycji, która będzie cechowała się pożądanymi charakterystykami, uwzględniającymi takie wielkości jak ryzyko, bądź stopę zwrotu. Umożliwiło to wyodrębnienie tych sektorów, w których moglibyśmy uzyskać największe zyski. Następnym krokiem było wyodrębnienie odpowiednich aktywów. Wybór ten był dokonywany na podstawie rekomendacji zawartych w dziennikach prasowych, jak i również na portalach internetowych. Należy pamiętać o tym, że w poniższej pracy rozpatrywany jest profil inwestora, jako osoby, która posiada pewną wiedzę na temat inwestowania, jednakże nie posiada zbyt wiele wolnego czasu, aby zagłębić się szczegółowo w analizę spółek. Ponadto jest to osoba, która dysponuje wolnymi środkami finansowymi w wysokości 100 000 zł i podejmuje samodzielne decyzje w celu utworzenia portfela inwestycyjnego. Nie korzysta z usług firm doradczych. Traktuje inwestowanie jako element prestiżu, i być może, hazardu.

W rozdziałach VI i VII pracy, na zbiorze różnorodnych instrumentów finansowych, porównane zostały omówione w rozdziale IV metody optymalizacji portfela. Badanie przeprowadzono dla dwóch różnych okresów na giełdzie - hossy i bessy. Zadania optymalizacyjne rozwiązywane były na danych pochodzących z 2006 i 2008 roku.

W rozdziale VI opisano skład procentowy zoptymalizowanych portfeli. Następnie szczegółowo omówiono zysk lub ewentualną stratę, otrzymaną na dzień 31.03.2007 r. lub 31.03.2009 r.

Przedstawiona w pracy analiza zysku polega na tym, że badamy różnicę pomiędzy wartością portfela na koniec okresu testowego, a wartością portfela na początek okresu testowego. Na początku okresu testowego, czyli 02.01.2007 r. lub 05.01.2009 r. inwestujemy 100 000 zł w spółki, których akcje weszły w skład portfeli otrzymanych w wyniku rozwiązania odpowiednich zadań optymalizacyjnych. Przez cały okres testowy, nie zmieniamy składu portfela. Na dzień 31.03.2007 r. lub 31.03.2009 r., czyli na koniec rozważanych okresów testowych realizujemy zysk lub ewentualną stratę, która ma miejsce tylko dla jednego rozpatrywanego portfela.

Następnym etapem badania była ocena rentowności portfeli, czyli zbadanie, czy rozważane przypadki charakteryzują się wyższą czy niższą rentownością, aniżeli portfel rynkowy. W pracy tej za portfel rynkowy przyjęto indeks WIG. Chcąc wyliczyć wskaźniki rentowności portfela: Sharpe'a, Treynora i Jensena, należało przyjąć średnią realną stopę zwrotu z inwestycji wolnej od ryzyka w badanym okresie, którą przyjęto jako stopę referencyjną R=4.53%. Ponadto, do wyznaczenia wskaźnika Treynora oraz wskaźnika Jensena, potrzebna jest również znajomość współczynnika beta portfela.

W Tabeli 8.1 umieszczono porównanie wszystkich portfeli pod względem wartości wskaźników rentowności. Pogrubiono te wartości, dla każdego rozpatrywanego przypadku, dla których wskaźniki rentowności przyjmują największe wartości. Ponadto w Tabeli 8.1 na czerwono zaznaczono wartości, dla których wskaźniki rentowności są gorsze aniżeli dla portfela rynkowego. Natomiast na zielono zaznaczono wartości, dla których wskaźniki rentowności są większe, aniżeli dla portfela rynkowego. Wartości wskaźników Sharpe'a i Treynora, dla portfela rynkowego na danych z okresu testowego od 02.01.2007 r. do 31.03.2007 r. wynoszą odpowiednio: S=0.0815 a T=0.1099. Natomiast wartości tych wskaźników na danych z okresu testowego od 02.01.2009 r. do 31.03.2009 r. wynoszą odpowiednio: S=-0.1520, a T=-0.3149. Biorąc pod uwagę tylko wskaźniki rentowności trudno jest wyróżnić jedną konkretną metodę.

W celu porównania metod, pod względem rentowności portfela utworzyliśmy ranking. Polega on na tym, że dla każdego portfela, nadajemy metodą punkty od 1 do 7. Najwyższą ilość, czyli 7 pkt., otrzymuje ta metoda, dla której rozpatrywany wskaźnik przyjmuje największą wartość. Natomiast najniższą wartość, czyli tylko 1 pkt. otrzymuje ta metoda, dla której wielkość wskaźnika jest najniższa. W przypadku, gdy wartości wskaźników są identyczne, przyznawana jest średnia arytmetyczna punktów, którą otrzymujemy z sumowania ilości punktów, które mogłyby otrzymać metody. Wartości punktów podane są w Tabeli 8.1, przy każdej wartości wskaźnika, w nawiasie.

Tabela 8.1. Porównanie portfeli.

	Portfel 1_2006			Portfel 1_2008			Portfel 2_2006			Portfel 2_2008		
Wskaźnik	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**
Markowitz	0.1357(3)	0.3077(2.5)	0.0856(1.5)	**-0.0652(5)**	**2.3408(5)**	**-0.1373(5)**	0.0912(1.5)	0.3130(1.5)	0.0350(1.5)	0.0952(3.5)	-0.6618(2.5)	0.0853(3.5)
Minimax	0.1497(6)	0.3410(6)	**0.1564(7)**	**-0.0652(5)**	**2.3408(5)**	**-0.1373(5)**	0.1039(5)	**0.4402(7)**	0.0442(5)	0.0778(1)	-0.6305(6)	0.0665(1)
MAD	0.1336(1)	0.3256(4)	0.0913(3)	**-0.0652(5)**	**2.3408(5)**	**-0.1373(5)**	0.1029(4)	0.3549(4)	0.0409(4)	0.0974(5)	-0.6426(5)	0.0858(5)
CVaR	0.1357(3)	0.3278(5)	0.0915(4)	**-0.0652(5)**	**2.3408(5)**	**-0.1373(5)**	0.0977(3)	0.3626(5)	0.0397(3)	0.0996(6)	-0.6500(4)	0.0891(6)
Min War_ CVaR_Rt	0.1357(3)	0.3077(2.5)	0.0856(1.5)	**-0.0652(5)**	**2.3408(5)**	**-0.1373(5)**	0.0912(1.5)	0.3130(1.5)	0.0350(1.5)	0.0952(3.5)	-0.6618(2.5)	0.0853(3.5)
Max Rt_CVaR	0.1387(5)	0.2704(1)	0.1511(6)	-0.0656(2)	1.8868(1)	-0.1480(1)	**0.1501(7)**	0.3832(6)	**0.0863(7)**	**0.1054(7)**	-0.6692(1)	**0.1067(7)**
Max Rt_War	**0.1692(7)**	**0.3640(7)**	0.1328(5)	-0.0653(2)	2.2655(2)	-0.1387(2)	0.1184(6)	0.3241(3)	0.0645(6)	0.0893(2)	**-0.5658(7)**	0.0747(2)

	Portfel 3_2006			Portfel 3_2008			Portfel 4_2006			Portfel 4_2008		
Wskaźnik	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**
Markowitz	0.0677(3.5)	0.1138(2.5)	0.0024(2.5)	-0.0383(2.5)	**0.2786**(5.5)	**-0.1744**(5.5)	-0.1517(1.5)	-0.8082(3.5)	-0.1494(5.5)	0.0923(4.5)	-0.5249(4.5)	0.0502(3.5)
Minimax	0.0665(2)	0.1766(6)	0.0343(5)	-0.0271(6)	0.1714(2)	-0.1747(3)	**-0.1384(7)**	-0.7835(5)	**-0.1417(7)**	0.0868(2)	-0.6203(1)	0.0541(5)
MAD	**0.1142(7)**	**0.2387(7)**	**0.1601(7)**	-0.0383(2.5)	**0.2786**(5.5)	**-0.1744**(5.5)	-0.1570(5)	-0.8199(1)	-0.1532(3)	0.0924(6)	-0.5333(3)	0.0548(6)
CVaR	0.0308(2)	0.0511(1)	-0.0382(1)	-0.0383(2.5)	**0.2786**(5.5)	**-0.1744**(5.5)	-0.1569(4)	-0.8197(2)	-0.1531(4)	**0.0947(7)**	-0.5500(2)	**0.0587(7)**
Min War_ CVaR_Rt	0.0677(3.5)	0.1138(2.5)	0.0024(2.5)	-0.0383(2.5)	**0.2786**(5.5)	**-0.1744**(5.5)	-0.1517	-0.8082(3.5)	-0.1494(5.5)	0.0923(4.5)	-0.5249(4.5)	0.0502(3.5)
Max Rt_CVaR	0.0836(5)	0.1493(4)	0.0351(6)	**-0.0216(7)**	0.1190(1)	-0.2061(1)	-0.1525(3)	**-0.7673(7)**	-0.1682(1)	0.0857(1)	**-0.4602(7)**	0.0420(1)
Max Rt_War	0.0853(6)	0.1499(5)	0.0294(4)	-0.0303(5)	0.1906(3)	-0.1881(2)	-0.1492(6)	-0.7674(6)	-0.1620(2)	0.0873(3)	-0.4723(6)	0.0424(2)

	Portfel 5_2006			Portfel 5_2008		
Wskaźnik	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**	**SHARPE'A**	**TREYNORA**	**JENSENA**
Markowitz	0.0088(2.5)	0.0201(1.5)	-0.0264(4.5)	0.0451(3.5)	-0.3313(5)	0.0030(2.5)
Minimax	0.0144(5)	0.0312(6)	-0.0263(6)	-0.0332(1)	**0.5048(7)**	-0.0665(1)
MAD	0.0091(1)	0.0202(3)	-0.0279(1)	0.0601(5.5)	-0.4746(1)	**0.0284(7)**
CVaR	0.0107(4)	0.0238(4)	-0.0266(3)	0.0601(5.5)	-0.4724(2)	0.0281(6)
Min War_ CVaR_Rt	0.0088(2.5)	0.0201(1.5)	-0.0264(4.5)	0.0451(3.5)	-0.3313(5)	0.0030(2.5)
Max Rt_CVaR	**0.0310(7)**	**0.0702(7)**	**-0.0172(7)**	**0.0676(7)**	-0.3313(5)	0.0058(5)
Max Rt_War	0.0199(6)	0.0265(5)	-0.0274(2)	0.0526(2)	-0.3400(3)	0.0055(4)

W Tabeli 8.2 umieszczono ranking modeli utworzony oddzielnie dla każdego wskaźnika rentowności.

Tabela 8.2. Ranking modeli pod względem rentowności portfela.

	WSKAŹNIK		
	SHARPE'A	**TREYNORA**	**JENSENA**
Markowitz	31	34	35.5
Minimax	40	**51**	45
MAD	42	38.5	**46.5**
CVaR	42	35.5	44.5
Min War_ CVaR_Rt	31	34	35.5
Max Rt_CVaR	**51**	40	42
Max Rt_War	45	47	31

Z Tabeli 8.2 wynika, że dla wskaźnika Sharpe'a najlepiej wypada metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Dla wskaźnika Treynora najlepszą okazuje się metoda „minimax". Natomiast dla wskaźnika Jensena najlepszą okazuje się metoda MAD. Najgorszą metodą, we wspomnianym rankingu, okazuje się metoda Markowitza oraz dająca identyczne wyniki metoda minimalizacji wariancji przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej.

Widzimy, że metoda warunkowej wartości zagrożonej daje pośrednie wyniki, czyli nie jest ani najgorsza, ani najlepsza. Na uwagę zasługuje metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej, która wypada dość dobrze w powyższym rankingu. Ze względu na cel pracy i hipotezę pracy jest to bardzo pozytywny wynik. Jako porównywalnie dobry możemy ocenić model maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji, który w powyższym rankingu osiąga drugą pozycję, jeżeli weźmiemy pod uwagę wskaźnik Sharpe'a i Treynora. Oznacza to, że w tej części badania najlepiej wypadają metody, które maksymalizują stopę zwrotu z portfela.

Tabela 8.3. Wielkość zysku dla poszczególnych portfeli.

	Portfel 1_2006	**Portfel 1_2008**	**Portfel 2_2006**	**Portfel 2_2008**	**Portfel 3_2006**
Oczekiwana stopa zwrotu	10%	2%	10%	5%	15%
Markowitz	7 948.50(1.5)	**-2 978.55(5)**	29 619.80(1.5)	5 291.80(4.5)	7 839.30(3.5)
Minimax	11 235.80(6)	**-2 978.55(5)**	32 502.20(5)	-17 879.88(1)	**14 916.90(7)**
MAD	8 527.90(3)	**-2 978.55(5)**	29 994.70(3)	885.40(3)	6 400.10(2)
CVaR	8 598.20(4)	**-2 978.55(5)**	31 182.40(4)	-355.24(2)	6 289.60(1)
Min War_ CVaR_Rt	7 948.50(1.5)	**-2 978.55(5)**	29 619.80(1.5)	5 291.80(4.5)	7 839.30(3.5)
Max Rt_CVaR	**20 256.20(7)**	-3 564.15(1)	**36 445.00(7)**	**13 982.20(7)**	12 970.30(6)
Max Rt_War	9 787.00(5)	-3 052.30(2)	**35 094.00**(6)	**13 726.50(6)**	9 839.00(5)

	Portfel 3_2008	**Portfel 4_2006**	**Portfel 4_2008**	**Portfel 5_2006**	**Portfel 5_2008**
Oczekiwana stopa zwrotu	5%	5%	5%	10%	5%
Markowitz	25 596.40(3.5)	15 876.40(2.5)	25 198.20(3.5)	5 669.50(4.5)	25 143.00(4.5)
Minimax	25 555.80(1)	11 256.50(1)	25 304.20(5)	4 983.90(1)	24 852.70(2)
MAD	25 596.40(3.5)	**20 283.00(7)**	25 147.50(2)	5 304.00(2)	24 861.90(3)
CVaR	25 596.40(3.5)	20 166.00(6)	25 057.40(1)	5 418.40(3)	24 819.90(1)
Min War_ CVaR_Rt	25 596.40(3.5)	15 876.40(2.5)	25 198.20(3.5)	5 669.50(4.5)	25 143.00(4.5)
Max Rt_CVaR	**25 661.80(7)**	19 346.20(5)	25 500.60(6)	**7 111.30(7)**	**25 572.50(7)**
Max Rt_War	25 628.00(6)	16 235.00(4)	**25 523.00(7)**	5 860.70(6)	25 242.60(6)

W Tabeli 8.3 umieszczono wielkość zysku dla poszczególnych metod i portfeli. Największą wartość zysku, wynoszącą aż 36%, otrzymujemy dla Portfela 2_2006 wyznaczonego metodą maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Dla metody „minimax” ponosimy częściej straty, bo taka sytuacja ma miejsce aż dla 2 portfeli. Należy zwrócić również uwagę na to, że w przypadku Portfela 2_2008, metoda „minimax” generuje największą stratę (zaznaczoną na czerwono).

W rankingu najgorzej wypada Portfel 1_2008, zbudowany z samych akcji, dla którego ponosimy zawsze straty, bez względu na wybór metody optymalizacji portfela.

Na uwagę zasługuje również fakt, że zadania optymalizacyjne wyliczano dla ograniczeń na średnią stopę zwrotu z portfela zawartych w Tabeli 8.3, ale wielkość zysku, jaki był generowany w okresie testowym, nie jest związana ze wstępnymi założeniami. Podkreślić należy, że czasami przy niższej założonej oczekiwanej stopie zwrotu, np. 5%, uzyskiwano wyższy zysk nawet do 25%.

W celu porównania metod pod względem zyskowności otrzymanych portfeli, utworzono ich ranking, analogiczny co do metodologii do rankingu rentowności portfeli. Zasady nadawania punktów są identyczne. Ranking modeli oraz średni zysk z portfeli przedstawiono w Tabeli 8.4.

Tabela 8.4. Ranking modeli pod względem generowanego zysku oraz średni zysk.

Metoda	Ilość punktów rankingowych	Średni zysk
Markowitz	34.5	14 520.44
Minimax	34	12 974.96
MAD	33.5	14 402.24
CVaR	30.5	14 379.45
Min War_ CVaR_Rt	34.5	14 520.44
Max Rt_CVaR	**60**	**18 328.20**
Max Rt_War	53	16 388.35

Z Tabeli 8.4 wynika, że pod względem zyskowności, najlepiej wypada metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Nie dziwi to, gdyż jest to metoda, która powinna generować najwyższe zyski. Na drugim miejscu znalazła się metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji. Bardzo niepokojące jest zachowanie się metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, gdyż dla tej metody otrzymujemy najmniejszą liczbę punktów rankingowych uwzględniających wielkość zysku, jaki wygenerowały metody.

W Tabeli 8.4 umieszczono również średnią wartość zysku dla poszczególnych metod. Największą wartość otrzymujemy dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, natomiast najgorszą pod tym względem okazuje się metoda „minimax". Powodem dla którego metoda „minimax" generuje najmniejszy średni zysk, jest to, że dla tej metody notujemy największą stratę (Portfel 2_2008).

Łącznie w rankingach modeli pod względem rentowności i zyskowności portfela, najlepiej wypada metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Kolejną metodą, która plasuje się na drugim miejscu, jest maksymalizacja stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji.

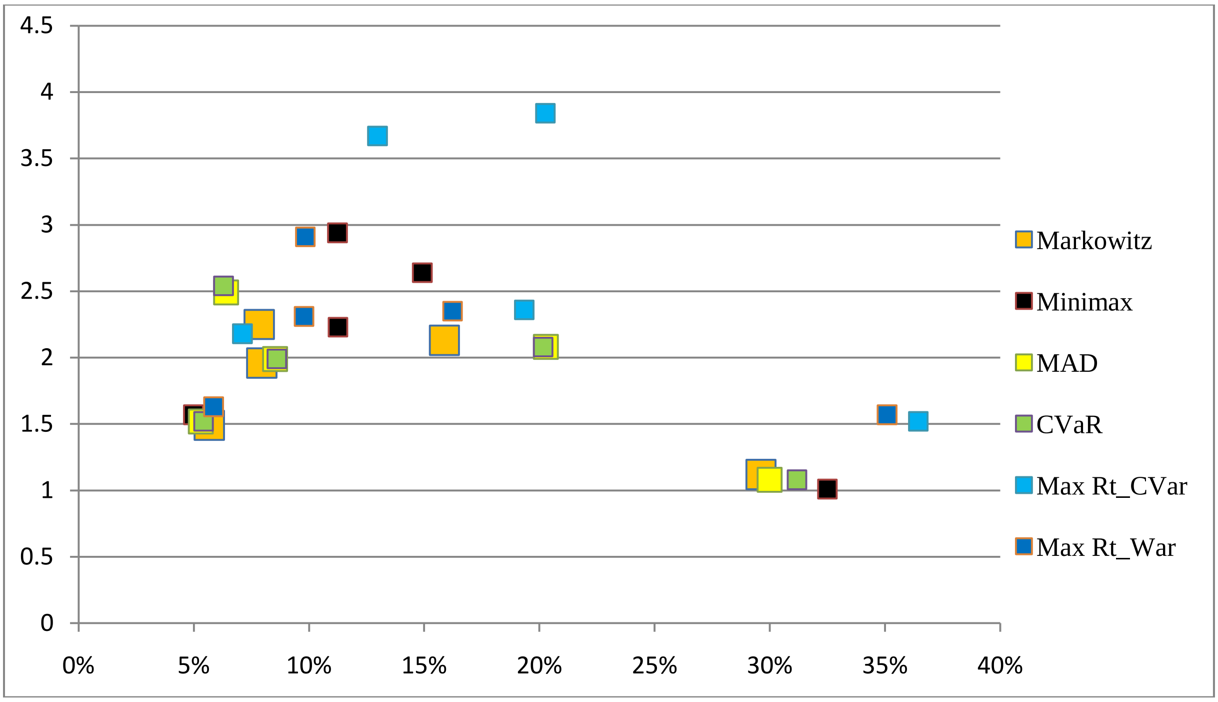
Interesujące byłoby przeprowadzenie podobnych badań, ale dla większej ilości portfeli, różnych pod względem składu. Wykonując takie badanie być może można byłoby wysnuć statystycznie istotne wnioski, które umożliwiłyby wskazanie jednej konkretnej najlepszej metody. Rozważana w pracy liczba przypadków, chodź już dość wymagająca pod względem obliczeniowym nie pozwala jeszcze na tak daleko idące uogólnienie.

Druga część analizy poświęcona jest ocenie metod pod względem skuteczności zarządzania ryzykiem.

W Tabeli 8.5 umieszczono ocenę jakości wyliczeń wartości zagrożonej. Widzimy, że jedynie w przypadku dwóch portfeli (Portfel 1_2008, Portfel 4_2006) nie następuje przekroczenie, przy zadanym poziomie istotności, wartości zagrożonej przez stopy zwrotu z portfela. Dla pozostałych rozpatrywanych przypadków, widzimy, że ilość przekroczeń jest o wiele większa, aniżeli dopuszczalny poziom istotności. Wnioskujemy stąd, że wielkość wartości zagrożonej jest niedoszacowana. Jest to wynik bardzo niepokojący.

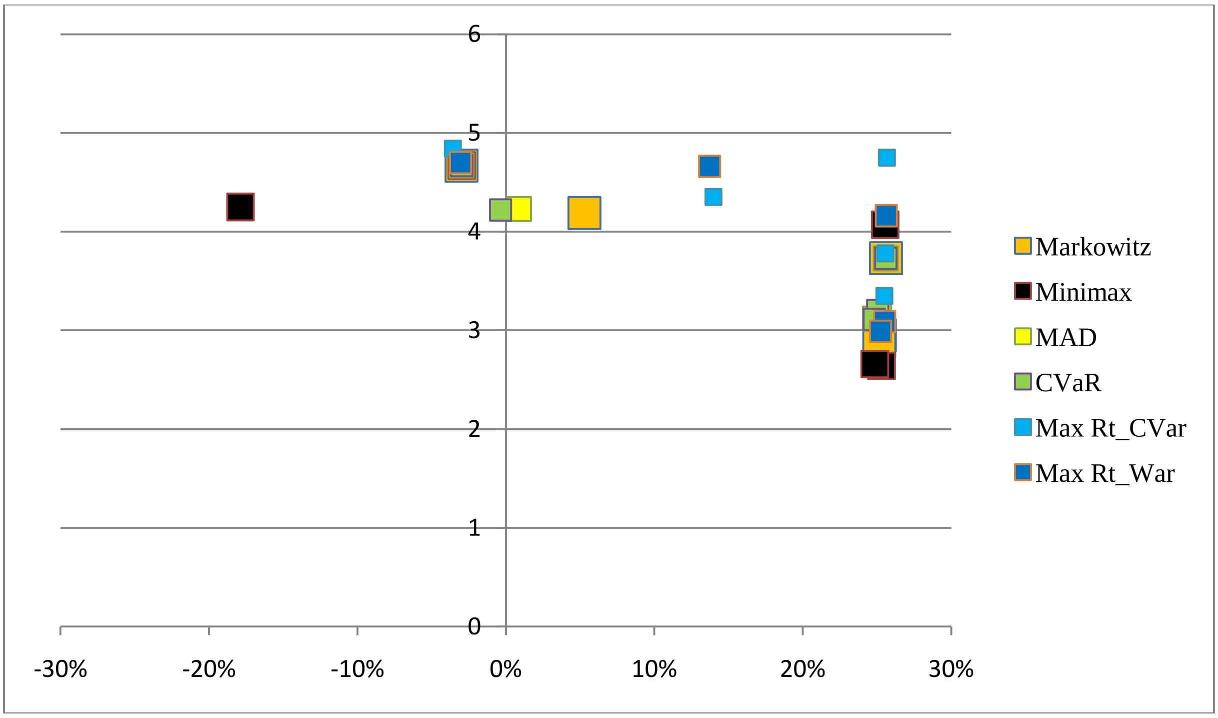
Tabela 8.5. Ocena jakości wyliczeń VaR, założony udział przekroczeń 5%.

	Portfel 1_2006		Portfel 1_2008		Portfel 2_2006		Portfel 2_2008		Portfel 3_2006	
Metoda	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**
Markowitz	4	6.45%	1	1.61%	16	25.81%	9	14.52%	4	6.45%
Minimax	6	9.68%	1	1.61%	15	24.19%	21	33.87%	6	9.68%
MAD	6	9.68%	1	1.61%	16	25.81%	8	12.90%	4	6.45%
CVaR	6	9.68%	1	1.61%	16	25.81%	10	16.13%	4	6.45%
Min War_ CVaR_Rt	4	6.45%	1	1.61%	16	25.81%	11	17.74%	4	6.45%
Max Rt_CVaR	12	19.35%	1	1.61%	15	24.19%	9	14.52%	3	4.84%
Max Rt_War	3	4.84%	1	1.61%	15	24.19%	10	16.13%	4	6.45%
	Portfel 3_2008		**Portfel 4_2006**		**Portfel 4_2008**		**Portfel 5_2006**		**Portfel 5_2008**	
Metoda	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**
Markowitz	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	14	22.58%	22	35.48%
Minimax	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	14	22.58%	22	35.48%
MAD	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	14	22.58%	22	35.48%
CVaR	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	15	24.19%	22	35.48%
Min War_ CVaR_Rt	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	14	22.58%	22	35.48%
Max Rt_CVaR	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	15	24.19%	22	35.48%
Max Rt_War	13	20.97%	2	3.22%	25	40.32%	15	24.19%	22	35.48%



Rysunek 8.1. Mapa zysk – ryzyko (CVaR) na danych za 2006 r.

Na Rysunku 8.1 umieszczono mapę obrazującą umiejscowienie modeli, pod względem zysku i ryzyka. Widzimy, że na danych za 2006 rok, wszystkie rozważane modele charakteryzują się dodatnią stopą zwrotu z portfela. Ponadto można zaobserwować skupianie się metod, które minimalizują ryzyko, przy zadanym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu z portfela. Zupełnie inne zachowanie charakteryzuje metody, które maksymalizują stopę zwrotu, przy zadanym poziomie ryzyka.



Rysunek 8.2. Mapa zysk – ryzyko (CVaR) na danych za 2008 r.

Na Rysunku 8.2 umieszczono mapę obrazującą umiejscowienie modeli, pod względem zysku i ryzyka, opartą na danych za 2008 rok. Widzimy, że nie wszystkie rozważane metody charakteryzują się dodatnią stopą zwrotu z portfela. Metoda „minimax” prowadzi do ujemnej stopy zwrotu. Ponadto można zaobserwować skupisko metod, dla których stopa zwrotu z portfela wynosi 25%. Różnice występują natomiast w poziomie warunkowej wartości zagrożonej.

Tabela 8.6. Wielkość VaR, CVaR dla portfeli.

	Portfel 1_2006		Portfel 1_2008		Portfel 2_2006		Portfel 2_2008		Portfel 3_2006	
Metoda	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**
Markowitz	1.64	1.96	3.09	4.67	0.98	1.12	2.84	4.19	1.73	2.25
Minimax	2.61	2.94	3.09	4.67	0.93	1.01	2.84	4.25	2.28	2.64
MAD	1.74	1.99	3.09	4.67	0.94	1.08	2.87	4.23	1.77	2.49
CVaR	1.74	1.99	3.09	4.67	0.97	1.08	2.88	4.22	1.79	2.54
Min War_ CVaR_Rt	1.64	1.96	3.09	4.67	0.98	1.12	2.84	4.19	1.73	2.25
Max Rt_CVaR	3.04	3.84	3.21	4.84	1.34	1.52	2.97	4.35	2.65	3.67
Max Rt_War	1.86	2.31	3.10	4.70	1.37	1.57	3.14	4.66	2.15	2.91
W próbie	1.22	1.77	4.33	7.35	0.77	0.98	1.29	1.85	1.55	2.15

	Portfel 3_2008		Portfel 4_2006		Portfel 4_2008		Portfel 5_2006		Portfel 5_2008	
Metoda	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**	**VaR**	**CVaR**
Markowitz	3.56	3.73	1.44	2.13	2.26	2.95	1.11	1.49	2.26	2.89
Minimax	3.78	4.07	1.49	2.23	2.10	2.64	1.20	1.57	2.05	2.66
MAD	3.56	3.73	1.43	2.08	2.41	3.17	1.15	1.52	2.34	3.12
CVaR	3.56	3.73	1.43	2.08	2.41	3.20	1.15	1.52	2.33	3.11
Min War_ CVaR_Rt	3.56	3.73	1.44	2.13	2.26	2.95	1.11	1.49	2.26	2.89
Max Rt_CVaR	4.36	4.75	1.61	2.36	2.58	3.35	1.63	2.18	2.90	3.78
Max Rt_War	3.89	4.16	1.58	2.35	2.42	3.09	1.21	1.63	2.34	2.99
W próbie	1.97	3.17	1.98	2.25	1.05	1.52	1.02	1.42	1.20	1.43

W Tabeli 8.6 umieszczono wielkości wartości zagrożonej oraz warunkowej wartości zagrożonej dla każdego portfela otrzymanego rozważanymi metodami optymalizacji portfela. Na czerwono zaznaczono wielkości VaR i CVaR, otrzymane w próbie. Zaobserwować można wzrost VaR i CVaR, w okresie testowym. Jedynie dla portfela 1_2008 i 4_2006 następuje spadek wartości VaR i CVaR, w porównaniu z wielkościami otrzymanymi w próbie. Potwierdza to, że oszacowania wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej nie są dobrej jakości. Obserwujemy niedoszacowanie tych dwóch wielkości.

Jeżeli przyjrzymy się dokładniej, to zauważymy, że dla metody warunkowej wartości zagrożonej, nie następuje aż tak spory wzrost wielkości VaR i CVaR. Najgorzej pod tym względem wypada metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Dla tej metody często obserwujemy dwukrotny wzrost wielkości VaR i CVaR.

Podsumowując wyniki przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że CVaR jest dobrym i użytecznym narzędziem zarządzania ryzykiem, w licznych przypadkach pozwalającym na uzyskiwanie zadowalających zysków z optymalizowanych portfeli. Nie można jednak uznać tej metody pomiaru ryzyka za panaceum na wszystkie przejawy ryzyka rynkowego we współczesnym świecie finansów. Metoda ta daje zdecydowanie lepsze wyniki w porównaniu z pozostałymi rozpatrywanymi, dla portfeli o zróżnicowanych aktywach, pochodzących z różnych rynków. Ponadto jeżeli maksymalizujemy stopę zwrotu z portfela, przy ograniczonym poziomie ryzyka, opisanym przy pomocy CVaR, to otrzymujemy w wielu rozpatrywanych przypadkach bardzo dobre wyniki. Wspomniana metoda uzyskuje najlepsze wyniki pod względem rentowności i zyskowności portfela.

Zakończenie

We współczesnym świecie każdy inwestor działający na rynku finansowym musi podejmować decyzje inwestycyjne biorąc pod uwagę szybko zmieniające się ceny aktywów finansowych i możliwość wystąpienia na tym rynku gwałtownych zawirowań, czy nawet kryzysów. Innymi słowy, nie może myśleć tylko o stopie zwrotu z inwestycji, ale musi także uważnie monitorować ryzyko.

Niniejsza praca dotyczy pewnego obszaru problematyki zarządzania ryzykiem inwestycji finansowych. Została w niej przeanalizowana stosunkowo nowa i mało znana miara ryzyka – warunkowa wartość zagrożona (*Conditional Value at Risk* – CVaR). Miara ta została zaproponowana w 2000 r. przez Rockafellara i Uryaseva.

Warunkowa wartość zagrożona przy ustalonym poziomie ufności jest wartością oczekiwaną straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną odpowiadającą temu poziomowi ufności. Miara ta, nazywana również oczekiwanym niedoborem (*expected shortfall*), stanowi przykład koherentnej miary ryzyka, to znaczy miary posiadającej pewne własności naturalne i pożądane z punktu widzenia intuicji pojęcia ryzyka i zarządzania ryzykiem.

W pracy zebrano, uporządkowano i przedstawiono teorię dotyczącą stosowania warunkowej wartości zagrożonej w optymalizacji portfela, a ponadto przeprowadzono obszerne badanie empiryczne mające na celu ocenę użyteczności tej miary w rzeczywistych warunkach rynkowych. W światowej literaturze analizy empiryczne związane z CVaR są, jak dotychczas, bardzo nieliczne, a w literaturze polskiej prace dotyczące pojęcia CVaR prawie się nie pojawiają. Twórcy oraz liczni entuzjaści tego pojęcia z przekonaniem głoszą jednak tezę, że przyszłość ilościowego zarządzania ryzykiem jest związana ze stosowaniem CVaR w miejsce VaR.

Celem pracy było zweryfikowanie powyższej opinii przez ocenę skuteczności warunkowej wartości zagrożonej jako narzędzia zarządzania ryzykiem portfela. Cel ten został zrealizowany przez porównanie zyskowności i ryzyka portfeli optymalizowanych za pomocą kryterium minimalizacji CVaR z portfelami uzyskanymi przez rozwiązywanie innego typu zadań optymalizacji portfela stosowanych w praktyce inwestowania lub opisanych w pracach teoretycznych. Jak wspomniano wcześniej, jest to pierwsze tego typu badanie empiryczne (obszerne i na rzeczywistych, zróżnicowanych danych) poświęcone stosowaniu warunkowej wartości zagrożonej jako narzędzia zarządzania ryzykiem portfela. Badanie przeprowadzono na portfelach zawierających różnorodne instrumenty finansowe. W skład portfeli weszły akcje spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, waluty oraz towary.

Przeprowadzone badanie pozytywnie weryfikuje główną hipotezę badawczą, że warunkowa wartość zagrożona jest skutecznym narzędziem do zarządzania ryzykiem portfela aktywów finansowych. Weryfikacja hipotezy dokonana została za pomocą analizy wartości portfeli aktywów finansowych, których składy uzyskano w wyniku rozwiązania odpowiednich zadań optymalizacyjnych. Analizowany był zysk inwestora z uwzględnieniem rentowności portfela oraz jego ryzyka.

Pod względem wskaźników rentowności, metoda minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej przy zadanym ograniczeniu na stopę zwrotu, dała średnie wyniki, czyli nie okazała się ani najgorsza, ani najlepsza. Na uwagę zasługiwały natomiast rezultaty uzyskane za pomocą metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danej warunkowej wartości zagrożonej. Metoda ta wypadała dość dobrze w rankingu pod względem rentowności. Ze względu na cel pracy i hipotezę pracy jest to bardzo satysfakcjonujący wynik. Jednak wypada dodać, że jako porównywalnie dobrą można było ocenić także metodę maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji, która w rankingu pod względem rentowności zajmuje drugą pozycję, jeżeli weźmiemy pod uwagę wskaźnik Sharpe'a i Treynora. Oznacza to, że w tej części badania najlepiej wypadły metody, które maksymalizują stopę zwrotu z portfela.

Pod względem zyskowności, najlepiej wypadła metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Nie dziwi to, gdyż jest to metoda, która powinna generować najwyższe zyski. Na drugim miejscu znalazła się metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji. Bardzo niepokojące było zachowanie się metody minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej, gdyż dla tej metody otrzymano najmniejszą liczbę punktów rankingowych uwzględniających wielkość zysku, jaki wygenerowały metody.

Przeprowadzono również analizę średniej wartości zysku dla poszczególnych metod. Największą wartość otrzymano dla metody maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej, natomiast najgorszą pod tym względem okazała się metoda „minimax". Powodem dla którego metoda „minimax" generowała najmniejszy średni zysk, jest to, że dla tej metody, w jednym z rozważanych przypadków, notujemy największą stratę.

Łącznie w rankingach modeli pod względem rentowności i zyskowności portfela, najlepiej wypadła metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie warunkowej wartości zagrożonej. Metodą, która uplasowała się na drugim miejscu, jest klasyczna metoda maksymalizacji stopy zwrotu przy danym poziomie wariancji.

Warunkowa wartość zagrożona, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej, jest jak dotychczas prawie nieznana w praktyce rynków finansowych. Niemniej jednak zdobywa coraz większe zaufanie w ubezpieczeniach oraz jest coraz częściej stosowana przy szacowaniu ryzyka kredytowego.

Przeprowadzone w pracy badanie nie daje zupełnie jednoznacznej odpowiedzi, co do prawdziwości twierdzenia o wyższości CVaR nad innymi metodami mierzenia ryzyka w procesie optymalizacji portfela i zarządzania ryzykiem. Jednak wskazuje, że kontrolując ryzyko za pomocą tej miary i maksymalizując stopę zwrotu, inwestor może uzyskiwać wyższe zyski i rentowność portfela niż stosując inne rozważane w tej pracy podejścia. Zatem można stwierdzić, że CVaR jest atrakcyjną alternatywą zarówno dla wariancji jak i VaR powszechnie stosowanych jako miary ryzyka.

SPIS SYMBOLI

P_t - wartość instrumentu finansowego w momencie *t*,

β - poziom ufności (bliski 1),

$1-\beta$ - poziom istotności (bliski 0),

P - prawdopodobieństwo, że strata na danym instrumencie przekroczy wartość zagrożoną.

x_i - udział *i*-tego instrumentu finansowego w portfelu,

$\mathbf{x} = (x_1,..., x_n)$ - wektor udziałów w portfelu,

y_i - stopa zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

y_{it} - stopa zwrotu *i*-tego instrumentu finansowego na przedziale czasowym *t*,

$\overline{y}_i$ - średnia stopa zawrotu *i*-tego instrumentu finansowego,

$\overline{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ - średnia wartość stopy zwrotu z portfela,

$\overline{R_f}$ - średnia wartość stopy wolnej od ryzyka,

σ_i - odchylenie standardowe *i*-tego instrumentu finansowego,

ρ_{ij} - współczynnik korelacji stóp zwrotu y_i oraz y_j, czyli *i*-tego z *j*-tym instrumentem finansowym,

Σ - macierz kowariancji pomiędzy wszystkimi stopami zwrotu *n*- aktywów,

Ω - zbiór stanów natury,

$f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ - funkcja straty,

$\alpha_\beta(\mathbf{x})$ - wartość zagrożona,

$\Phi_\beta(\mathbf{x})$ - warunkowa wartość zagrożona,

V_i - wartość pozycji w aktywach *i*-tego instrumentu w portfelu, wyrażona w jednostkach pieniężnych,

V_P - wartość portfela,

n – ilość aktywów portfelu,

G - średnia stopa zwrotu z portfela,

I – ograniczenie wariancji przez wielkość zadaną przez inwestora,

K - ograniczenie warunkowej wartości zagrożonej przez procentową stratę z portfela, zadaną przez inwestora,

S – wartość wskaźnika Sharpe'a,

T – wartość wskaźnika Treynora,

J – wartość wskaźnika Jensena,

β - współczynnik beta portfela rozpatrywanym okresie.

Literatura:

Acerbi, C., C. Nordio, C. Sirtori *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.* Derivatives Desk, Abaxbank, Milano Italy, 2001.

Acerbi C., Tasche D., *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to value at risk,* (dostępne http://www.gloriamundi.org) 10.10.2008

Acerbi C., Tasche D., *On the coherence of expected Shortfall,* (dostępne http://www.gloriamundi.org) 10.10.2008

Andersson F., Mausser H., Rosen D., Uryasev S., *Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion,* Springer-Verlag 2000 (dostępne http://www.gloriamundi.org) 08.12.2008

Andreev A., Kanto A., *A note on calculation of CVaR for Student's distribution*, Helsinki School of Economics, 2004

Andreev A., Kanto A., Malo P., *On closed form calculation of CVaR*, Helsinki School of Economics, 2005

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. , Heath D. , *Coherent Measures of Risk,* Mathematical Finance, Vol. 2, 1999

Artzner, P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Thinking Coherently.* RISK, 10, 1997.

Basel Committee on Banking Supervision *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks,* Basel, 1996.

Basel Committee on Banking Supervision *The New Basel Capital Accord.* Cosultative Document, 2003.

Bernstein P. L., *Przeciw Bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*, Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1997

Best P., *Wartość narażona na ryzyko,* Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2000

Butler C., *Tajniki Value at Risk*, K.E. Liber, Warszawa, 2001

Cox S.H., Lin Y., Tian R., Zuluaga L.F., *Portfolio Risk Management with CVaR-Like Constraints*, 2007 (dostępne http://www.soa.org) 02.03.2009

CreditMetrics – Technical Document, www.defaultrisk.com 05.06.2009

Delbaen F., *Coherent risk measures on general probability spaces,* European Journal of Operational Research *116*, 2002

Duffie D., Pan J., *An Overview of Value at Risk*, Options Markets, London: Edward Elgar, 2001.

Glavan C., *An Application of Alternative Risk Measures to Trading Portfolios*, 2004 (dostępne http://www.msfinance.ch/pdfs/CorneliaGlavan.pdf), 04.05.2009

Doman M. Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004

Doman M., Doman R., *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolters Kluwers, Kraków 2009

Elton E. J., Gruber M. J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1998

Fama E. F., *Components of Investment Performance,* Journal of Finance, 1972

Francis J. C., *Inwestycje. Analiza i zarządzanie,* WIG-Press, Warszawa 2000

Friend I, Blume M., Crockett J., *Mutual Funds and Other Institutional Investors,* McGraw – Hill, New York 1970

Van den Goorbergh R., Vlaar P., *Value-at-risk analysis of stock returns historical simulation, variance techniques or tail index estimation?*, (dostępne http://www.dnb.nl) 07.06.2009

Grubel H., *International Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows,* American Economic Review, 1968

Gupton G., Firger Ch., Bhatia M., *CreditMetrics – Technical Document,* www.defaultrisk.com 06.07.2009

Haugen R. A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1996

History of the Basel Committee and Its Membership, Basel Committee, dostępne na http://www.bis.org/bcbs/history.pdf , 05.04.2009

Holton G. A., *Defining Risk,* Financial Analysts Journal, 2004

Hürlimann W., *Conditional value-at-*risk bounds for compound Poisson *risks and a normal approximation,* Journal of Applied Mathematics 2003

Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa, 2007

Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007

Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2000

Jansen M.C., *The Performance of Mutual Funds In the Period 1945 – 64,* Journal of Finance, 1968

Jorion P., *Financial Risk Manager Handbook, Second Edition,* John Wiley & Sons, New York 2003

Jorion P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York 1997

Jurek W., *Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004

Kaczmarek T. T., *Ryzyko i zarządzanie ryzykiem. Ujęcie interdyscyplinarne,* Difin, Warszawa 2005

Knight F. H., *Risk, Uncertainty, and Profit,* New York Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company

Konno H., *Portfolio Optimization using* L_1 *Risk Function*, IHSS Report 88-9, Inst. Of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1988

Konno H., Wijayanayake A., *Mean-Absolute Deviation portfolio optimization model under transaction costs*, Journal of the Operations Research, Vol. 42, No. 4, 1999

Konno H., Yamazaki H., *Mean absolute deviation port folio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market*, Management Science, Vol. 37, No. 5, 1991

Koziorowska K., Ogrodnik K., *Minimalizacja warunkowej wartości zagrożonej*, Inwestowanie na rynku kapitałowym, red. W. Tarczyński, Szczecin 2008

Krokhmal P., Palmquista J., Uryasev S., *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints, (*http://www.gloriamundi.org), 10.01.2009

Kupiec D., *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,* Journal of Derivatives, 2, 1995

Luenberger D. G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003

Markowitz H. M., *Portfolio selection,* Journal of Finance, Vol. 7, No 1, 1952

Mausser H., Rosen D., *Efficient risk/return frontiers for credit risk,* Algo Research Quarterly 2, 1999

Mausser H., Rosen D., *Beyoun Var: From Measuring Risk to managing Risk*, Algo Research Quarterly, 1999

Ogryczak W., *Modele programowania liniowego w optymalizacji portfela inwestycji*, dostępne na Modelowanie Preferencji a Ryzyko'03, T. Trzaskalik (red.), Wyd. AE w Katowicach, Katowice 2003

Pflug G., *Some remarks on the Value-at-Risk and the conditional Value-at-Risk.* Kluwer Academic Publishers, 2000

Reilly F. K., Brown K. C., *Analiza inwestycji i zarządzanie portfelem*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001

RiskMetrics^{TM} Technical Document, 1996, (dostępne na http://www.riskmetrics.com/), 20.07.2009

Rockafellar R. T., Uryasev S., *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions,* Journal of Banking and Finance, 26/7, 2002

Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 2000

Sharpe W. F., *Mutual Fund Performance,* Journal of Business, 1966

Simaan Y., *Estimation Risk in Portfolio Selection: The mean variance model versus the mean absolute deviation model,* Management Science, Vol. 43, No 10, 1997

Tarczyński W., Mojsiewicz M., *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa 2001

Tasche, D., *Expected Shortfall and Beyond,* Journal of Banking & Finance,26, 2002

Treynor J. L., *How to Rate Management of Investment Funds,* Harvard Business Review, 1965

Uniwersalny słownik języka polskiego PWN, Wydawnictwo Naukowe PWN 2008

Uryasev S., *Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications*, (dostępne http://www.gloriamundi.org) 05.03.2009

Uryasev S., *Introduction to the theory of probabilistic functions and percentiles (Value-at-Risk),* Kluwer Academic Publishers, 2000

Wierzbicki M., *Portfel efektywny*, dostępne na: http://www.motte.pl/gng_10.php 20.05.2009

Willett A. H., The Economic Theory of Risk and Insurance, University Press of The Pacific, 2002

Wu J., Yue. W., Wang S., *Risk analysis in communication networks with Conditional Value at Risk*, www.apnoms.org 20.05.2009

Yamai Y., Yoshiba T., *Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk under market stress,* Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002

Yamai Y., Yoshiba T., *Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition and optimization*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002

Yamai Y., Yoshiba T., *On the validity of value-at-risk: Comparative analyses with expected shortfall*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002

Young M.R., *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution,* Mangement Science, Vol. 44, No. 5, 1998

Zumbach G., *The RiskMetrics 2006 methology,* (dostępne www.riskmetrics.com) 10.02.2009

www.bsi-global.com

www.coso.org

www.csa.ca

www.knf.gov.pl

www.knf.gov.pl/komisja_i_urzad_komisji/komisja/zadania/index.html 21.07.2009

www.money.pl

www.standards.com.au

www.theirm.org

http://truesoft.dyndns.org/PortfolioSimulatorService/PortfolioSimulator.aspx

www.wikipedia.org