Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

Praca doktorska

Kierunki rozszerzenia możliwości eksplanacyjnych neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego

Piotr Pietraszewski

Promotor:
dr hab. Roman Kiedrowski
Katedra Ekonomii Matematycznej

Poznań 2009

Spis treści

Wstęp **5**

Rozdział pierwszy

Podstawowy neoklasyczny model wzrostu gospodarczego na tle podejścia keynesowskiego **21**

1.1. Keynesowskie podejście do modelowania wzrostu gospodarczego 22

1.1.1. Model równomiernego wzrostu Harroda – Domara 22

1.1.2. Niestabilność wzrostu w modelach keynesowskich 28

1.1.3. Model Harroda – Domara z postępem techniczno – organizacyjnym 35

1.1.4. Uwagi o modelu Kaldora 37

1.2. Podstawowy neoklasyczny model wzrostu gospodarczego Solowa 39

1.3. Porównanie podejścia neoklasycznego z podejściem keynesowskim 49

Rozdział drugi

Zdolności eksplanacyjne modelu neoklasycznego **55**

2.1. Model Solowa a „stylizowane fakty" wzrostu gospodarczego 55

2.2. Model Solowa a badania porównawcze 57

2.3. Problem konwergencji gospodarczej 61

2.4. Dekompozycja Solowa 72

Rozdział trzeci

Wpływ państwa na wzrost gospodarczy w neoklasycznych modelach wzrostu ... **74**

3.1. „Złota reguła akumulacji" Phelpsa 74

3.2. Problem okresu wyrzeczeń 78

3.3. Maksymalizacja dobrobytu społecznego w ujęciu dynamicznym - problem społecznego planisty 83

3.4. Maksymalizacja dobrobytu społecznego w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej 94

3.5. Możliwości oddziaływania państwa na wzrost w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej ... 101

Rozdział czwarty

Wzrost równomierny a pracoefektywnościowa tendencja postępu technicznego w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego ... 113

4.1. Klasyfikacja tendencji postępu technicznego ... 113
4.2. Pracoefektywnościowa tendencja postępu technicznego jako konieczny warunek wzrostu równomiernego ... 121
4.3. Koncepcja indukowanego postępu technicznego – krzywa możliwości innowacyjnych ... 126
4.4. Endogeniczne ujęcie tendencji postępu technicznego w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego ... 129

Rozdział piąty

Kapitał ludzki jako czynnik wzrostu gospodarczego ... 139

5.1. Rozwój koncepcji kapitału ludzkiego ... 140
5.2. Akumulacja kapitału ludzkiego na poziomie mikroekonomicznym ... 148
5.3. Akumulacja kapitału ludzkiego w skali makroekonomicznej w modelu wzrostu endogenicznego Lucasa ... 164
5.4. Walory eksplanacyjne modelu Lucasa ... 177
5.5. Krytyka modelu Lucasa ... 181

Rozdział szósty

Rozszerzenie modelu neoklasycznego o akumulację kapitału ludzkiego ... 185

6.1. Prezentacja modelu ... 185
6.2. Stabilność ścieżki wzrostu równomiernego ... 195
6.3. Rozszerzony model neoklasyczny a fakty empiryczne dotyczące wzrostu gospodarczego ... 200
6.4. Problem „reszty Solowa”. W kierunku wzrostu endogenicznego ... 210

Rozdział siódmy

Możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w modelu z kapitałem ludzkim **214**

7.1. Wrażliwość stanu stacjonarnego na zmiany wartości instrumentów polityki fiskalnej 214

7.2. „Złota reguła akumulacji” kapitału rzeczowego i ludzkiego 217

7.3. Optymalne stopy inwestycji publicznych w warunkach braku reakcji podmiotów prywatnych na zmiany w polityce fiskalnej 219

7.4. Dynamiczna maksymalizacja społecznego dobrobytu - problem społecznego planisty 228

7.5. Optymalne inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki a polityka fiskalna w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej 242

Zakończenie **258**

Bibliografia **263**

Spis rysunków i tabel **269**

Wstęp

Praca ta poświęcona jest teorii wzrostu gospodarczego. Ma ona w całości charakter teoretyczny, a przytaczane w niej wyniki badań empirycznych służą jedynie weryfikacji założeń bądź konkluzji wynikających z przedstawianej teorii.

W pracy zajmujemy się wyłącznie klasycznie rozumianą teorią wzrostu, w odróżnieniu od teorii rozwoju gospodarczego. Wyjaśnimy zatem, jak rozumiemy pojęcia wzrostu i rozwoju oraz w jaki sposób dzielimy teorie na wspomniane wyżej dwie grupy.

Pod pojęciem wzrostu gospodarczego rozumie się najczęściej przyrost produktu krajowego brutto w cenach stałych. Wzrost gospodarczy utożsamiany jest więc ze wzrostem zmiennej ilościowej, będącej syntetycznym miernikiem rezultatów działalności podmiotów gospodarczych w określonym kraju w danym horyzoncie czasowym. Teoria wzrostu stawia sobie za cel wyjaśnienie źródeł i mechanizmów tego zjawiska. Tak określona, teoria wzrostu wpisuje się w główny nurt rozwoju analizy ekonomicznej, ograniczającej się w zasadzie do zjawisk bezpośrednio kwantyfikowalnych i przy tym dających się ująć w abstrakcyjne, możliwie irrelewantne historycznie prawa.

W przeciwieństwie do niej, teoria rozwoju gospodarczego ma właśnie charakter historyczny, w tym sensie, że prawa, które stara się formułować, dotyczą nie tego, co w działalności gospodarczej społeczeństw jest uniwersalne, lecz tego, co stanowi o jej ewolucji w czasie historycznym i co warunkuje przekraczanie kolejnych stadiów jej organizacji. Takie przynajmniej zadania sobie stawia, jeśli chce być teorią rozwoju właśnie, a nie tylko zwykłym opisem historycznym[1]. Pod pojęciem rozwoju gospodarczego rozumie się zatem zespół zmian strukturalnych i jakościowych w gospodarce, a nie tylko sam fizyczny przyrost rezultatów gospodarowania, stanowiący zasadniczy przedmiot zainteresowań teorii wzrostu. Stosunek między oboma pojęciami nie jest bynajmniej oczywisty. Trudno na przykład ustalić jednoznacznie kierunek

[1] Do tak zdefiniowanego typu teorii zaliczyć można teorię rozwoju K. Marksa, wyjaśniającą ewolucję ustrojów gospodarczych od ustroju niewolniczego począwszy, na komunizmie zaś - do którego zdaniem Marksa zmierzają wszystkie gospodarki kapitalistyczne - skończywszy. Musimy jednak zaznaczyć, że w naszym rozumieniu teoria rozwoju gospodarczego nie ogranicza się do systemów tak rozległych jak system marksowski, lecz obejmuje również koncepcje wyjaśniające zmiany strukturalne zachodzące w samym tylko ustroju kapitalistycznym, jak teorie rozwoju gospodarczego J. Schumpetera, T. Veblena czy koncepcja stadiów wzrostu gospodarczego W. W. Rostowa.

relacji przyczynowo - skutkowej łączącej oba procesy. Pozostawiając tę kwestię otwartą, a jednocześnie chcąc uzasadnić perspektywę badawczą przyjętą w pracy, możemy zaryzykować stwierdzenie, że dopóki pozostajemy w rozważaniu tych problemów na płaszczyżnie stricte ekonomicznej, powinniśmy traktować wzrost gospodarczy jako zjawisko pierwotne względem rozwoju, w tym sensie, że to zmiany strukturalne i jakościowe są postrzegane jako pochodna wzrostu gospodarczego, a nie odwrotnie[2]. Z tych uwag nie należy oczywiście wyciągać wniosku, że sam rozwój teorii wzrostu byłby możliwy w oderwaniu od wszelkiej analizy instytucjonalnej, czy też niezależnie od aktualnego stanu rozwoju społeczeństw i wszelkich przemian strukturalnych zachodzących w realnie istniejących gospodarkach. Jest to bowiem problem innej natury od tego, który postawiliśmy.

W kontekście dyskutowanego rozróżnienia pomiędzy teorią wzrostu i teorią rozwoju istotna jest również kwestia modelowania matematycznego.

Jeden z czołowych przedstawicieli tzw. nowej teorii wzrostu, P. Romer, sprowadza istotę utrzymującego się rozłamu pomiędzy obydwoma obszarami badawczymi do kwestii narzędziowych: „*Ekonomiści zajmujący się wzrostem używali języka sformalizowanego, natomiast ekonomiści zajmujący się rozwojem - języka opisowego.* (…) *Tak więc przyczyną tej dychotomii były nie tyle różnice w warstwie merytorycznej, stanowiącej przedmiot ich badań, ile w zakresie wykorzystywanego instrumentarium*”[3]. Choć w świetle przedstawionych wcześniej dystynkcji pojęciowych trudno jest zgodzić się w pełni z opinią wyrażoną przez Romera, pozostaje faktem, że matematyczne modele wzrostu były dla teorii wzrostu gospodarczego, w całym jej historycznym rozwoju, narzędziem typowym. Podstawową cechą tych modeli jest uwzględnienie wzajemnych powiązań pomiędzy zmiennymi ekonomicznymi. Powiązania te, od strony czysto formalnej mają charakter zależności funkcyjnych, ekonomista zaś nadaje tym zależnościom charakter związków przyczynowo - skutkowych, tak, że mogą one wyjaśniać procesy gospodarcze. „*Autor modelu ma na początku - jako ekonomista - pewien obraz powiązań między wielkościami ekonomicznymi, których wzrostem się interesuje. Przypisawszy tym wielkościom określone symbole, stara się opisać ów obraz w języku matematycznym, przyjmując odpowiednie założenia modelowe. Następnie -*

---

[2] Na takim stricte ekonomicznym poziomie analizy usiłowała pozostać teoria K. Marksa, czy bardziej współcześnie, J. Schumpetera, w przeciwieństwie do koncepcji M. Webera czy T. Veblena, którym metodologicznie bliżej do socjologii.

[3] B. Snowdon, H. R. Vane, *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*, Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 2003, s. 400.

występując w roli matematyka - wyprowadza z założeń konsekwencje, po czym powraca znów do roli ekonomisty, komentując te konsekwencje, z których wynikają wnioski interesujące badacza gospodarki lub kierującego nią polityka.”[4] Podkreślenie tego rozróżnienia jest istotne, gdyż, zdaniem autora, prawdziwy rozwój teorii wzrostu, jak każdej innej gałęzi ekonomii, wymaga nie tylko wykorzystywania wciąż nowych i coraz bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych, ale przede wszystkim pracy myślowej nad założeniami tworzonych konstrukcji teoretycznych, przy wsparciu ze strony badań empirycznych[5]. Stąd też duży nacisk położony jest w pracy na gruntowne wyjaśnienie ekonomicznej treści i krytyczną ocenę założeń analizowanych modeli i wyprowadzanych z nich wniosków.

Po tych wstępnych wyjaśnieniach możemy określić bliżej przedmiot teorii wzrostu gospodarczego.

Mówiąc o teorii wzrostu gospodarczego mamy z reguły na myśli tzw. wzrost długookresowy, który możemy utożsamiać z trendem wzrostu produktu krajowego, ujawniającym się w danych statystycznych, zestawionych dla wystarczająco długiego horyzontu czasu. Choć samo pojęcie trendu ma charakter statystyczny, przyjęło się nadawać mu w makroekonomii określoną interpretację teoretyczną. Ów długookresowy trend wzrostu produktu utożsamia się mianowicie z przyrostem tzw. mocy produkcyjnych gospodarki[6], wynikającym ze wzrostu dostępnych zasobów czynników produkcji i postępu techniczno - organizacyjnego, wpływającego na produktywność tych zasobów. Wzrost gospodarczy wiązać więc należy z tzw. podażową stroną gospodarki. Odchylenia rzeczywistych rozmiarów produkcji od linii trendu interpretuje się z kolei jako krótkookresowe wahania aktywności gospodarczej, oznaczające różny stopień wykorzystania potencjału produkcyjnego. Odchylenia te spowodowane są przez koniunkturalne wahania popytu globalnego (tzw. popytowa strona gospodarki). Nie wdając się w dyskusję adekwatności takiego ujęcia z perspektywy różnych nurtów

[4] Z. Czerwiński, *Moje zmagania z ekonomią*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2002, s. 141.

[5] Znamiennym przykładem postępu teoretycznego, uzyskanego dzięki jednoczesnemu zastosowaniu nowych narzędzi matematycznych (rachunku różniczkowego) i rewolucyjnej zmianie w samych fundamentach analizy ekonomicznej (zastąpienie subiektywną teorią wartości jej wersji obiektywnej) jest w historii myśli ekonomicznej tzw. przewrót subiektywno - marginalistyczny z drugiej połowy XIX stulecia. Innym przykładem jest „rewolucja racjonalnych oczekiwań” w makroekonomii w drugiej połowie ubiegłego wieku.

[6] Nazywanym też w wielu podręcznikach do makroekonomii przyrostem tzw. produktu potencjalnego, czyli produktu możliwego do osiągnięcia w danym okresie przy pełnym i możliwie efektywnym wykorzystaniu dostępnych w gospodarce zasobów.

teoretycznych, jakie pojawiły się w makroekonomii od czasu wydania przez Keynesa jego „Ogólnej teorii zatrudnienia, procentu i pieniądza", pragniemy zaznaczyć, że z punktu widzenia teorii wzrostu gospodarczego wspomniane krótkookresowe zmiany koniunktury gospodarczej uznajemy za nieistotne, przyjmując tym samym założenie, że długookresowy wzrost gospodarczy jest zdeterminowany przede wszystkim przez czynniki podażowe. Oczywiście, analizując proces wzrostu gospodarczego, nie możemy pomijać struktury zagregowanego popytu, gdyż ta ma wpływ na rozmiary społecznej akumulacji kapitału, niemniej jednak właściwe zagadnienia teorii koniunktury pozostawiamy na boku, rozważając gospodarkę funkcjonującą na poziomie pełnego wykorzystania mocy produkcyjnych. Implikuje to także określony sposób podejścia do polityki gospodarczej państwa, którą rozważamy jedynie pod kątem jej oddziaływania na stronę podażową, pomijając jej funkcje stabilizacyjne Logicznym dopełnieniem zarysowanej perspektywy badawczej wydaje się wreszcie pominięcie sfery pieniężnej gospodarki i skoncentrowanie się wyłącznie na sferze realnej[7].

Tak rozumiana teoria wzrostu gospodarczego była przez główny nurt makroekonomii dość długo zaniedbywana. Przyczyn tego stanu rzeczy należy upatrywać w samych początkach rozwoju makroekonomii jako samodzielnej dyscypliny teoretycznej, kojarzonych najczęściej z dziełem J. M. Keynesa, które ukierunkowało wysiłek badawczy zarówno zwolenników, jak i przeciwników jego poglądów, na problemy związane z krótkookresową niestabilnością systemu gospodarczego. Miało to z kolei oczywisty związek z rzeczywistymi problemami zachodnich gospodarek kapitalistycznych (Wielki Kryzys), na które teoria Keynesa była odpowiedzią. Niejednoznaczność keynesowskich koncepcji oraz kontrowersyjny charakter jego przekonania o konieczności aktywnej roli państwa w utrzymywaniu stabilności gospodarki rynkowej zapoczątkowały niekończące się spory na temat: „co Keynes naprawdę chciał powiedzieć", próby zintegrowania tej teorii z ekonomią neoklasyczną (synteza neoklasyczna), a w końcu wysiłki zmierzające do jej obalenia w świetle nowych badań empirycznych (monetaryzm) i problemów z inflacją (nowa ekonomia klasyczna). Dodatkowym czynnikiem nie sprzyjającym zainteresowaniu ekonomistów teorią wzrostu mogły być, paradoksalnie, wysokie wskaźniki wzrostu

[7] Należy wyraźnie podkreślić, że nakreślony obraz gospodarki stanowi jedynie pewną perspektywę metodologiczną, odpowiednią dla rozważania określonej grupy problemów stanowiących przedmiot teorii wzrostu gospodarczego. Perspektywa ta stanowi rewers podejścia, które przyjmujemy, rozważając problemy związane z krótkookresową niestabilnością systemu gospodarczego, kiedy to zakładamy stałą wielkość dostępnych zasobów kapitału oraz określony stan wiedzy technologicznej.

gospodarczego osiągane przez większość krajów świata zachodniego w okresie powojennym. Teza taka opiera się na przekonaniu ogólniejszej natury, że rozwój wiedzy, w tym szczególnie nauk społecznych, pozostaje pod silnym wpływem aktualnych problemów w realnym świecie, oddziałujących w charakterze bodźca wyzwalającego wysiłek do ich intelektualnego opanowania. W świetle tego przekonania nieprzypadkowa wydaje się zbieżność w czasie osłabienia ogólnoświatowego tempa wzrostu gospodarczego w ostatniej ćwierci XX wieku i renesansu badań nad wzrostem pod koniec tegoż stulecia.

W kontekście naszkicowanej historii rozwoju makroekonomii postrzegać należy pierwsze matematyczne modele wzrostu gospodarczego, stworzone jeszcze w pierwszej połowie XX wieku przez R. Harroda i E. Domara, w których „*konsekwentnie studiuje się długookresowe problemy przy użyciu standardowych krótkookresowych narzędzi* (…) *w kategoriach mnożnika, akceleratora, współczynnika kapitałowego*" (tł. aut.)[8]. Odpowiednią perspektywę badawczą dla zagadnień związanych z długookresowym wzrostem gospodarczym stworzył dopiero Robert Solow w słynnym artykule z 1956 roku. Model przedstawiony w tym artykule oraz jego rozwinięcia stanowią trzon dominującej w literaturze przedmiotu po dzień dzisiejszy neoklasycznej teorii wzrostu[9].

W swoim komentarzu do najnowszych osiągnięć makroekonomicznej teorii wzrostu gospodarczego R. Solow wyróżnia trzy fazy w dwudziestowiecznej historii rozwoju tej teorii: pierwszą, zapoczątkowaną pionierskimi pracami Harroda i Domara, drugą, związaną z rozwojem neoklasycznej teorii wzrostu i zainspirowaną, dodajmy, przez dwa słynne artykuły samego Solowa, i wreszcie ostatnią, trzecią, stanowiącą reakcję na „pominięcia i niedostatki" modelu neoklasycznego[10]. Prezentowana praca wpisuje się koncepcyjnie w nurt trzeci, najnowszy, choć w swojej treści odwołuje się do rezultatów wypracowanych również w ramach dwóch poprzednich nurtów.

Ogólnym celem pracy jest, zgodnie z tytułem, rozpatrzenie możliwych kierunków rozszerzenia walorów eksplanacyjnych neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa. Przez walory eksplanacyjne modelu rozumiemy jego zdolność do wyjaśniania zjawisk zachodzących w realnym świecie, w tym przypadku związanych z

---

[8] R. M. Solow, *A Contribution To The Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956, s. 66.

[9] Model ten w literaturze nazywany jest również modelem Solowa-Swana. Zob. T. W. Swan, *Economic Growth and Capital Accumulation*, Economic Record, vol. 32, November 1956, s. 334-361.

[10] Por. R. M. Solow, *Perspectives on Growth Theory*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 45.

długofalowym wzrostem gospodarczym. Rozszerzenie możliwości eksplanacyjnych oznacza, po pierwsze, poszerzenie zakresu zagadnień pozostających w zasięgu analitycznym modelu, a po drugie, zwiększenie spójności wniosków wynikających z modelu z faktami (ustaleniami) empirycznymi dotyczącymi długofalowego wzrostu gospodarczego.

W ogólnym zarysie zadanie to jest realizowane w następujący sposób. Wychodzimy od analizy walorów eksplanacyjnych modelu Solowa i wskazujemy na jego ograniczenia w tym zakresie. Rozpatrujemy następnie możliwe rozszerzenia czy modyfikacje struktury tego modelu, pozwalające na przezwyciężenie wskazanych ograniczeń. Korzystamy przy tym z koncepcji wypracowanych w ramach podejścia neoklasycznego, w obszarach bezpośrednio lub pośrednio związanych z tematyką długofalowego wzrostu gospodarczego, które w wielu punktach rozwijamy i uogólniamy.

W ten sposób praca jako całość stanowi pewien rodzaj syntezy, rozwijającej osiągnięcia standardowego neoklasycznego podejścia w teorii wzrostu gospodarczego, przeprowadzonej pod kątem walorów eksplanacyjnych tej teorii. Przez standardowe podejście neoklasyczne rozumiemy tu podejście, w którym utrzymane jest założenie o doskonałej konkurencji, znajdujące swoją egzemplifikację w stałych korzyściach skali agregatowej funkcji produkcji. Synteza ta powstaje na bazie podstawowej w tym podejściu struktury teoretycznej, utożsamianej z modelem Solowa, poprzez uchylanie niektórych upraszczających założeń i wprowadzanie do modelu nowych elementów.

Rezultaty prezentowane w pracy mieszczą się w obrębie pięciu, często przenikających się, obszarów tematycznych, w jakich rozwijana jest neoklasyczna teoria wzrostu:

1) międzyokresowa maksymalizacja dobrobytu społecznego (endogeniczne ujęcie stopy oszczędności/inwestycji w gospodarce),
2) dynamiczna równowaga ogólna w gospodarce konkurencyjnej,
3) endogenizacja pracoefektywnościowej tendencji postępu technicznego,
4) oddziaływanie państwa na wzrost gospodarczy poprzez politykę fiskalną,
5) akumulacja kapitału ludzkiego w procesie wzrostu gospodarczego.

W ramach przeprowadzonej syntezy neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego, głównym przyczynkiem autora do rozwoju tej teorii jest teoretyczne uogólnienie i rozwinięcie idei zaczerpniętej z pracy N. G. Mankiwa, D. Romera i N. Weila[11], polegającej na rozszerzeniu neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego o akumulację kapitału ludzkiego. W przeciwieństwie do wymienionych autorów, którzy dla celów analizy empirycznej posłużyli się funkcją produkcji Cobba - Douglasa, w sformułowanym w pracy modelu założono ogólną postać neoklasycznej funkcji produkcji. Analiza zagadnień związanych z długofalowym wzrostem gospodarczym przeprowadzona na podstawie tego modelu i jego dalszych rozszerzeń umieszczona została w dwóch kontekstach:

- po pierwsze, w odniesieniu do wskazanych ograniczeń eksplanacyjnych podstawowego modelu neoklasycznego, uwzględniającego wyłącznie akumulację kapitału rzeczowego,
- po drugie, w kontekście podjętej w pracy dyskusji nad znaczeniem procesu akumulacji kapitału ludzkiego we wzroście gospodarczym (ujętej w pytaniu: *growth effect* czy *level effect*?), zapoczątkowanej analizą i krytyką sposobu ujęcia tego procesu w modelu wzrostu endogenicznego R. Lucasa.

Praca ma w całości charakter teoretyczny. Zasadnicza część rozważań prowadzona jest z użyciem technik matematycznego modelowania zjawisk gospodarczych. Stosowane narzędzia matematyczne obejmują: rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, optymalizację nieliniową, sterowanie optymalne. Wyniki analizy teoretycznej porównywane są z ustaleniami empirycznymi zaczerpniętymi z literatury.

Plan realizacji ogólnego celu badawczego znajduje odzwierciedlenie w samej strukturze pracy, dlatego też jego przedstawienie i charakterystykę szczegółowych zadań połączymy z omówieniem zawartości merytorycznej poszczególnych rozdziałów.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów.

W rozdziale pierwszym porównywane są dwa nurty w makroekonomicznej teorii wzrostu gospodarczego: nurt keynesowski (reprezentowany w pracy przez modele Harroda - Domara i N. Kaldora) i nurt neoklasyczny (reprezentowany przez model Solowa). Celem tego zestawienia jest przede wszystkim rozpoznanie tych cech podejścia neoklasycznego, które stanowią o jego skuteczności w ujmowaniu problemów związanych z długofalowym wzrostem gospodarczym i które wytyczyły kierunek dalszego rozwoju teorii wzrostu.

[11] N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *A Contribution To The Empirics Of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, May 1992, p. 407 - 437

W analizie modelu Harroda - Domara szczególny nacisk kładziemy na rozpoznanie źródeł niestabilności wzrostu gospodarczego, stanowiącej immanentną cechę podejścia keynesowskiego. W tym kontekście podajemy argumenty poddające w wątpliwość spotykane w literaturze twierdzenie o rzekomym „uelastycznieniu" keynesowskiego podejścia w modelu wzrostu gospodarczego Kaldora. W tym samym kontekście stawiamy tezę, że sposób przedstawienia przez Solowa w artykule z 1956 r. modelu Harroda - Domara w kategoriach funkcji produkcji Koompansa - Leontiefa, przy założeniu tożsamości oszczędności i inwestycji w gospodarce, ignoruje istotę podejścia keynesowskiego. W ujęciu Solowa niestabilność wzrostu w modelach keynesowskich wynika wyłącznie z braku mechanizmu zapewniającego ustalanie się w gospodarce właściwej proporcji dostępnych zasobów kapitału i pracy, co powoduje powstawanie wąskich gardeł produkcji po jednego czynnika i niewykorzystanie części zasobów drugiego. Ujęcie takie ignoruje właściwy problem „ostrza noża", wynikający z braku mechanizmu gwarantującego odpowiednie tempo wzrostu inwestycji, zapewniające ciągłą równowagę pomiędzy planowanymi inwestycjami i oszczędnościami na poziomie pełnego wykorzystania mocy produkcyjnych w gospodarce. Proponujemy pewien sposób formalizacji tego rodzaju niestabilności wzrostu w podejściu keynesowskim, prezentując uogólnienie modelu Harroda - Domara na przypadek, gdy gospodarka znajduje się poza ścieżką równomiernego wzrostu. Istotę zagadnienia „ostrza noża" wyjaśniamy także na przykładzie skutków wzrostu stopy oszczędności, uruchamiającego klasyczny keynesowski mechanizm depresyjny (dynamiczna wersja słynnego „paradoksu oszczędności"). Porównujemy te skutki z zachowaniem się gospodarki opisywanej przez neoklasyczny model wzrostu gospodarczego. Myślą przewodnią analizy przeprowadzonej w rozdziale pierwszym jest teza, że różnica pomiędzy podejściem keynesowskim a neoklasycznym w teorii wzrostu gospodarczego jest bardziej zasadnicza, niż wynika to z artykułu Solowa.

W rozdziale drugim konfrontujemy model Solowa z ustaleniami empirycznymi dotyczącymi długofalowego wzrostu gospodarczego. W ramach tej analizy pokazujemy, że zachowanie się teoretycznej gospodarki na ścieżce wzrostu równomiernego odpowiada długookresowym tendencjom empirycznym (tzw. „stylizowanym faktom" wzrostu gospodarczego) podanym przez Kaldora. Wskazujemy natomiast na ograniczenia modelu w wyjaśnianiu obserwowanych różnic w poziomach zamożności (PKB *per capita*) pomiędzy krajami. Rozpatrujemy zależności logiczne pomiędzy różnymi typami hipotezy konwergencji gospodarczej, a następnie przedstawiamy wynikające z modelu mechanizmy konwergencji wspierające zasadność poszczególnych hipotez. Zestawiamy wnioski teoretyczne z ustaleniami empirycznymi w tym zakresie. Dyskusja implikacji modelu Solowa odnośnie zjawiska konwergencji naprowadza na jeden z głównych tropów wyjścia poza wskazane ograniczenia eksplanacyjne modelu. Trop ten, związany z akumulacją kapitału ludzkiego, podejmujemy i rozwijamy w rozdziałach piątym, szóstym i siódmym pracy.

W rozdziale trzecim, na bazie modelu Solowa i jego dalszych rozszerzeń, przeprowadzamy analizę możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy poprzez politykę fiskalną. W modelu uwzględniamy *explicite* sektor budżetowy. Wychodząc od stwierdzenia braku możliwości oddziaływania państwa na długookresową stopę wzrostu gospodarczego (*growth effect*) i potencjalnej zdolności do przejściowego stymulowania tempa wzrostu - w okresach przejścia gospodarki pomiędzy różnymi ścieżkami wzrostu równomiernego (*level effect*) - stawiamy pytanie o optymalną, z punktu widzenia dobrobytu społecznego, politykę fiskalną państwa. W tym kontekście wykorzystujemy tzw. „złotą regułę akumulacji" E. Phelpsa, wskazując jednocześnie na ograniczenia analityczne tej koncepcji. Zwracamy między innymi uwagę na ignorowany przez tę regułę problem okresu wyrzeczeń, związanego ze zwiększaniem stopy oszczędności/inwestycji w gospodarce (pokazujemy sposób policzenia długości tego okresu dla danej zmiany stopy oszczędności), a także na założoną na arbitralnym poziomie stopę dyskonta konsumpcji, w przypadku, gdy regułę Phelpsa stosuje się do modelu uwzględniającego autonomiczny postęp techniczny. Przezwyciężenie tych ograniczeń wymaga głębszego ujęcia zagadnienia dobrobytu, poprzez odniesienie się do preferencji społecznych co do rozkładu konsumpcji w czasie. Realizacja tego postulatu znajduje formalny wyraz w zadaniu dynamicznej optymalizacji, w którym maksymalizowana jest międzyokresowa funkcja dobrobytu społecznego. Zagadnienie to, wywodzące się z prac F. Ramsey'a, D. Cassa i T. Koopmansa, określane jest w literaturze jako „problem społecznego planisty". W przygotowaniu do uogólnienia na przypadek modelu z kapitałem ludzkim (w rozdziale siódmym pracy), prezentujemy autorski, przeprowadzony w czysto analityczny sposób, dowód twierdzenia o stabilności długookresowej równowagi dynamicznej modelu[12].

Wyprowadzenie optymalnej stopy inwestycji na ścieżce wzrostu równomiernego z wyrażonych *explicite* preferencji społecznych pozwala ustalić, przy jakim charakterze

[12] W literaturze dowód ten przeprowadzany jest graficznie z użyciem portretu fazowego.

tych preferencji, w gospodarce startującej z dowolnego punktu i zmierzającej w kierunku ścieżki wzrostu równomiernego związanej ze „złotą regułą akumulacji”, maksymalizowany jest dobrobyt społeczny. Podkreślając wyłącznie normatywny (w realiach gospodarki rynkowej) status tej analizy, weryfikujemy wnioski odnośnie optymalnej polityki fiskalnej państwa, sformułowane wcześniej na bazie reguły Phelpsa.

W dalszej części rozdziału trzeciego zagadnienia związane z polityką fiskalną państwa rozpatrywane są już w zasadniczo odmiennej perspektywie badawczej, wynikającej z przejścia od normatywnego do pozytywnego opisu funkcjonowania gospodarki rynkowej. Prezentowany model gospodarki konkurencyjnej stanowi pewne uogólnienie neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, polegające na tym, że zamiast założenia o stałej, egzogenicznie danej stopie oszczędności (inwestycji), poziom tej stopy w każdym momencie wynika z zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów mikroekonomicznych działających na rynku. Wykorzystywane tutaj „podejście od strony dynamicznej równowagi ogólnej” (*a dynamic general equilibrium approach* – skr. DGEA) w sformułowanych w pracy modelach gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym pozwala na postawienie pytań o samą możliwość oddziaływania na wzrost gospodarczy poprzez politykę fiskalną i skutki tego oddziaływania z punktu widzenia dobrobytu społecznego. W porównaniu z modelami prezentowanymi w literaturze, w przeprowadzonej w pracy analizie uwzględniamy możliwość inwestycji budżetowych i dochodów budżetowych z tych inwestycji oraz różnice w stopach opodatkowania dochodów gospodarstw domowych pochodzących z różnych źródeł. Rozpatrujemy także dwa alternatywne założenia dotyczące tego, czy podmioty prywatne uwzględniają konsumpcję publiczną w swoich decyzjach optymalizacyjnych.

Warto podkreślić, że w całej pracy, w analizie prowadzonej na gruncie neoklasycznych modeli wzrostu, posługujemy się konsekwentnie ogólną postacią neoklasycznej funkcji produkcji (zamiast często używanej funkcji Cobba - Douglasa). Takie rozwiązanie podyktowane jest po pierwsze zamiarem uogólnienia analizowanych konstrukcji teoretycznych, a w ten sposób również ich uodpornienia na zarzuty formułowane pod adresem konkretnych postaci funkcji produkcji, w tym funkcji Cobba - Douglasa, jako formuł aproksymacyjnych mających odwzorowywać rzeczywiste procesy produkcji. Po drugie, ma ono służyć również zachowaniu spójności struktury neoklasycznych modeli wzrostu z podejmowanymi w literaturze próbami teoretycznego uzasadnienia zakładanej w tych modelach określonej tendencji zmian techniczno - organizacyjnych, tzn. ich neutralności w sensie Harroda.

Szczegółowe wyjaśnienie tych kwestii, w szerszym kontekście neoklasycznej taksonomii tendencji innowacyjnych, stanowi przedmiot rozdziału czwartego. Przedstawiając trzy podstawowe w ekonomii głównego nurtu klasyfikacje tendencji postępu technicznego (autorstwa J. Hicksa, R. Harroda i R. Solowa) i wynikające z nich trzy różne koncepcje neutralności tego postępu, wskazujemy na związek neutralności postępu technicznego w sensie Harroda (równoważnej z czysto pracoefektywnościową tendencją zmian innowacyjnych) z koncepcją wzrostu równomiernego, stanowiącą centralny punkt neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego. Prezentujemy koncepcję indukowanego co do tendencji postępu technicznego C. Kennedy'ego, opartą na „krzywej możliwości innowacyjnych"[13], porównując ją z Hicksowską koncepcją postępu technicznego indukowanego zmianami cen czynników produkcji. Zintegrowanie koncepcji Kennedy'ego z podstawową strukturą neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego prowadzi do pewnego uogólnienia tego modelu, polegającego na wyprowadzeniu, zakładanej w nim, czysto pracoefektywnościowej tendencji postępu technicznego z zachowań optymalizacyjnych przedsiębiorstw, kierujących się w wyborach innowacyjnych kryterium minimalizacji kosztów produkcji. Prezentowany model oparty jest na założeniach modelu E. Drandakisa i E. Phelpsa, choć analiza prowadzona jest w kategoriach innych zmiennych[14]. Istotnym elementem tego modelu, gwarantującym stabilność długookresowej równowagi dynamicznej, jest założenie, że elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem technicznego uzbrojenia pracy (stosunku kapitału do pracy) jest większa od jeden. W tym punkcie wnioskowania głębszego znaczenia nabiera rezygnacja z posługiwania się funkcją produkcji Cobba - Douglasa, dla której powyższa elastyczność jest równa jeden, na rzecz ogólniejszej postaci funkcji produkcji. Rozpatrujemy także argumenty teoretyczne

---

[13] C. Kennedy, *Induced Bias In Innovation and the Theory of Distribution*, The Economic Journal, vol. 74, September 1964, s. 541 – 547.

[14] Por. E. M. Drandakis, E. S. Phelps, *A Model of Induced Invention, Growth and Distribution*, The Economic Journal, vol 76, 1966, s. 823 – 840.
W porównaniu z oryginalnym modelem, w równaniu dynamiki kapitału uwzględniamy stopę deprecjacji kapitału i m.in. w związku z tą modyfikacją (czyli ze względów technicznych), choć także dla zachowania jednolitości z wcześniejszą analizą w tym rozdziale, przedstawiamy odmienny sposób rozwiązania modelu, rozpatrując np. dynamikę współczynnika kapitałowego zamiast dynamiki stopy wzrostu kapitału.

uzasadniające to założenie, zaczerpnięte z koncepcji A. Atkinsona i J. Stiglitza o „lokalnym poszukiwaniu".

W pozostałej części pracy podejmujemy jeden z najbardziej istotnych tropów w najnowszej historii badań nad wzrostem gospodarczym, związany z teorią kapitału ludzkiego. Rozdział piąty, w strukturze całej pracy spełnia w pewnym sensie funkcję przygotowawczą dla analizy przeprowadzanej w kolejnych rozdziałach. Na tle zwięzłego zarysu historii koncepcji kapitału ludzkiego uwypuklamy rewolucyjny charakter teorii stworzonej przez G. Beckera i T. Schulza w latach 60 - tych i 70 - tych XX w. Chodzi tutaj głównie o podkreślenie rozpoznania przez tę teorię inwestycyjnego charakteru wydatków, zaliczanych tradycyjnie do popytu konsumpcyjnego, a tym samym szerszego zakresu społecznej akumulacji kapitału. Kwestia ta stanowi bowiem zwornik wzajemnych wpływów i związków tej teorii z teorią wzrostu gospodarczego. Jej teoretyczna operacjonalizacja następuje w pierwszej kolejności w mikroekonomicznych modelach akumulacji kapitału ludzkiego, aspirujących do odzwierciedlania mechanizmu ekonomicznego generującego obserwowalne ścieżki całożyciowych dochodów jednostek. Rozwiązujemy zadanie sterowania optymalnego, opisujące sytuację decyzyjną podmiotu, dzielącego swój czas pomiędzy pracę zarobkową i inwestycje „w siebie", sformułowane w oparciu o założenia modelu przedstawionego przez W. Haley'a[15]. W stosunku do oryginalnych założeń w modelu Haley'a wprowadzamy niewielką modyfikację, polegającą na uwzględnieniu możliwości stałego wzrostu stawki renty z kapitału ludzkiego z tytułu sekularnego wzrostu gospodarczego. Przedstawiamy różnice pomiędzy podejściem Haley'a i podejściem Y. Ben - Poratha w modelowaniu całożyciowych ścieżek stopy inwestycji w kapitał ludzki i dochodów jednostek, wskazując jednocześnie na charakterystyczną symetrię obu tych podejść. Rozpatrujemy także szczególny przypadek modelu Haley'a z liniową funkcją produkcji kapitału ludzkiego. Zwracamy uwagę na analogię pomiędzy tą wersją modelu a sposobem ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w modelu wzrostu endogenicznego R. Lucasa[16].

Specyfika kapitału ludzkiego, wynikająca z faktu jego ucieleśnienia w człowieku, przejawia się m. in. w tym, że istotnym kosztem jego tworzenia są dla poszczególnych

---

[15] Zob. W. J. Haley, *Human Capital. The Choice Between Investments and Income*, The American Economic Review, 1973, vol. 63, no. 5, December, s. 929 – 944.

[16] Zob. R. E. Lucas, Jr., *On The Mechanics of Economic Development, Journal of Monetary Economics*, vol. 22, July 1988, s. 3 – 42.

„inwestujących w siebie” osób ich stracone zarobki, z punktu widzenia zaś całej gospodarki - niezrealizowana część możliwej do wytworzenia wielkości produktu. Inaczej rzecz ujmując, problem akumulacji kapitału ludzkiego wiąże się z rezygnacją nie tylko z bieżącej konsumpcji (jak w przypadku kapitału rzeczowego), ale również z bieżącego dochodu. Powinno to także znaleźć odzwierciedlenie w makroekonomicznych modelach wzrostu gospodarczego, w których kapitał ludzki identyfikuje się jako oddzielny - obok kapitału rzeczowego - podlegający akumulacji czynnik produkcji. Próby przeniesienia idei akumulacji kapitału ludzkiego na poziom makro i rozpatrzenie możliwości eksplanacyjnych tej idei dla zagadnień związanych z długofalowym wzrostem gospodarczym, stanowią przedmiot rozważań w dalszej części rozdziału piątego oraz kolejnych rozdziałach pracy.

W analizie modelu Lucasa podkreślamy przesłanki oraz konsekwencje uwzględnienia w agregatowej funkcji produkcji efektów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego. Rozpatrujemy walory eksplanacyjne modelu w zakresie różnic w poziomach zamożności pomiędzy krajami oraz zjawiska konwergencji, podkreślamy rolę akumulacji kapitału ludzkiego i efektów zewnętrznych w wyjaśnianiu tych zjawisk. Z tego punktu widzenia porównujemy model Lucasa ze standardowym podejściem neoklasycznym.

W modelu Lucasa akumulacja kapitału ludzkiego jest motorem długofalowego wzrostu gospodarczego, zastępując w tej roli egzogeniczny postęp techniczny zakładany w modelu neoklasycznym. Sposób ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w modelu Lucasa, w ostatnim punkcie rozdziału piątego jest przedmiotem krytyki. Wskazujemy między innymi na trudności w uzasadnieniu ciągłego przyrostu przeciętnych zasobów kapitału ludzkiego w gospodarce opisywanej przez model Lucasa. Wyjaśniamy „krytyczne” znaczenie przyjętego w tym modelu założenia o liniowości funkcji produkcji kapitału ludzkiego z punktu widzenia zasadniczych własności rozwiązania modelu, w szczególności zaś, równomiernego wzrostu gospodarczego. Wskazujemy na ekstremalną „nieodporność” modelu, polegającą na tym, że jakiekolwiek odchylenie od liniowości w produkcji kapitału ludzkiego powoduje drastyczną zmianę jakościowych własności rozwiązania. Na podstawie tej krytyki poddajemy w wątpliwość teoretyczną możliwość uczynienia z procesu akumulacji kapitału ludzkiego wyłącznego motoru długofalowego wzrostu gospodarczego.

W rozdziale szóstym rozpatrujemy alternatywne podejście, oparte na idei przedstawionej w artykule N. G. Mankiwa, D. Romera i N. Weila z 1992 r.[17], polegającej na rozszerzeniu standardowego neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego o akumulację kapitału ludzkiego. Zamiast funkcji Cobba - Douglasa, w sformułowanym w pracy modelu założono ogólną postać neoklasycznej funkcji produkcji. W przeciwieństwie do modelu Lucasa, stopa inwestycji w kapitał ludzki wpływa tutaj jedynie na „położenie” ścieżki wzrostu równomiernego, nie wpływa natomiast na długookresową stopę wzrostu na tej ścieżce. Porównując oba podejścia, wskazujemy na alternatywę: *growth effect* czy *level effect*? w dyskusji nad znaczeniem akumulacji kapitału ludzkiego w „mechanice” długofalowego wzrostu gospodarczego. Pokazujemy także możliwość szerszej interpretacji modelu, uwzględniającej, oprócz „mierzalnych” inwestycji w kapitał ludzki, oznaczających rezygnację z bieżącej konsumpcji na rzecz zwiększonej konsumpcji przyszłej, także inwestycje „niemierzalne”, oznaczające rezygnację inwestujących „w siebie” podmiotów z bieżących dochodów na rzecz zwiększonych dochodów w przyszłości.

Po wykazaniu istnienia jednoznacznie określonego stanu stacjonarnego badamy zachowanie się teoretycznej gospodarki na ścieżce wzrostu równomiernego (odpowiadającej stanowi stacjonarnemu). Analizujemy wpływ poszczególnych parametrów modelu na położenie ścieżki wzrostu równomiernego. Przeprowadzamy analizę stabilności długookresowej równowagi dynamicznej, w ramach pokazujemy najpierw, że punkt równowagi ma charakter lokalnie stabilnego węzła. Następnie dowodzimy globalnej stabilności tego punktu.

W ramach porównania walorów eksplanacyjnych modelu ze standardowym modelem neoklasycznym, pokazujemy, w jaki sposób uwzględnienie akumulacji kapitału ludzkiego przyczynia się do:

- lepszego tłumaczenia przez model obserwowanych różnic w poziomach PKB *per capita* między krajami (poprzez zwiększenie elastyczności produktu względem stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i stopy przyrostu naturalnego oraz wprowadzenie nowego czynnika wyjaśniającego w postaci stopy inwestycji w kapitał ludzki),
- możliwości wyjaśnienia na podstawie modelu obserwowanej zbieżności tych poziomów pomiędzy niektórymi krajami (tworzącymi tzw. kluby konwergencji), przy

[17] N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *op. cit.*

jednoczesnym niewystępowaniu procesów konwergencji (bądź występowaniu dywergencji) w skali ogólnoświatowej,

- większej zgodności tempa zbieżności wynikającego z modelu z historycznie obserwowanym tempem doganiania jednych krajów (regionów) przez drugie, na obszarach, na których konwergencja faktycznie występowała.

W rozdziale siódmym, na bazie neoklasycznego modelu wzrostu z wyodrębnionym kapitałem ludzkim, przeprowadzamy analizę możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu społecznego. Z tego względu do modelu wprowadzamy *explicite* sektor budżetowy.

Struktura tego rozdziału jest podobna do struktury rozdziału trzeciego. Na pierwszym etapie analizy utrzymujemy założenie o stałych, egzogenicznie danych stopach inwestycji podmiotów prywatnych w kapitał rzeczowy i ludzki, oznaczające między innymi brak reakcji tych podmiotów na zmiany w polityce fiskalnej państwa. Wykorzystując, odpowiednio uogólnioną, koncepcję „złotej reguły akumulacji" Phelpsa, formułujemy i rozwiązujemy zagadnienie optymalnej struktury wydatków budżetowych w podziale na inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki oraz konsumpcję, przy danej stopie redystrybucji dochodu przez budżet. Wskazujemy na ograniczenia możliwości zagwarantowania przez państwo realizacji „złotej reguły akumulacji", badamy też zakresy zmienności stopy redystrybucji, gwarantujące taką możliwość. W dalszej części tego rozdziału pokazujemy, że „złota reguła akumulacji" stanowi szczególny (graniczny) przypadek bardziej ogólnej reguły optymalizacyjnej, wynikającej z maksymalizacji międzyokresowej funkcji dobrobytu społecznego. W tym celu formułujemy i rozwiązujemy zadanie sterowania optymalnego (problem centralnego planisty w gospodarce z kapitałem rzeczowym i ludzkim), stanowiące uogólnienie zadania przedstawionego w rozdziale trzecim. Prezentujemy analityczny dowód twierdzenia o globalnej stabilności długookresowej równowagi dynamicznej.

W ostatnim punkcie rozdziału siódmego przedstawiamy model gospodarki konkurencyjnej, w której gospodarstwa domowe podejmują decyzje o międzyokresowej alokacji swoich dochodów pomiędzy konsumpcję oraz inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki, maksymalizując sumę zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji swoich członków. Pokazujemy, że w analizowanym modelu, w dynamicznej równowadze konkurencyjnej w gospodarce maksymalizowany jest społeczny dobrobyt. Następnie włączamy do modelu sektor budżetowy, kontynuując i uogólniając w ten sposób analizę możliwości i skutków oddziaływania państwa na wzrost w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej, rozpoczętą w rozdziale trzecim.

Rozdział pierwszy

Podstawowy neoklasyczny model wzrostu gospodarczego na tle podejścia keynesowskiego

Wprowadzenie

W tym rozdziale konfrontujemy dwa podejścia do modelowania wzrostu gospodarczego: podejście keynesowskie (reprezentowane przez modele Harroda – Domara i Kaldora) i podejście neoklasyczne (na przykładzie modelu Solowa).

Spośród wielu możliwych klasyfikacji modeli wzrostu gospodarczego, z merytorycznego punktu widzenia podział na ujęcie keynesowskie i neoklasyczne wydaje się najważniejszy. Zaprezentowane tutaj modele obu nurtów ucieleśniają, zdaniem autora, wszystkie podstawowe idee tzw. starej teorii wzrostu[1], a jednocześnie ich formalna prostota pozwala na skoncentrowanie uwagi na tychże ideach, z pominięciem mniej ważnych, z naszego punktu widzenia, niektórych szczegółowych kwestii formalnych.

Według innych kryteriów klasyfikacji oba modele należą do klasy modeli jednoproduktowych (jednosektorowych), z tzw. przekuwalnym (*malleable*) kapitałem i nieucieleśnionym (*disembodied*) postępem technicznym. Oznacza to, iż opisują one gospodarkę, w której wytwarza się jednorodny produkt, mogący służyć zarówno jako dobro konsumpcyjne, jak i kapitałowe, a odbywający się postęp techniczny dotyczy w jednakowym stopniu całego dostępnego zasobu kapitału, niezależnie od daty (rocznika) jego włączenia w procesy produkcyjne[2]. Z punktu widzenia zastosowań empirycznych

[1] Określenia „stara teoria wzrostu" używa się zazwyczaj w sensie historycznym, dla odróżnienia dawniejszych modeli od modeli najnowszych, powstałych na fali ostatniego ożywienia zainteresowania teorią wzrostu gospodarczego, zapoczątkowanego opublikowaniem przez P. Romera w 1986 r. słynnego artykułu *„Increasing Returns and Long – Run Growth"* (Zob. P. M. Romer, *Increasing Returns and Long – Run Growth,* Journal of Political Economy, October 1986, vol. 94, no. 5, p. 1002 – 10037). Często też kryterium podziału na „starą" i „nową" teorię wzrostu utożsamia się z charakterem postępu techniczno – organizacyjnego, odpowiednio, egzo- bądź endogenicznym

[2] Oprócz modeli jednoproduktowych w literaturze analizuje się także modele dwuproduktowe (dwusektorowe), uwzględniające oddzielnie sektory dóbr konsumpcyjnych i kapitałowych (a zatem dwie odrębne funkcje produkcji), oraz modele wieloproduktowe (wielosektorowe), uwzględniające wiele oddzielnych sektorów w gospodarce, a w skrajnym przypadku – pojedyncze dobra (tzw. zdezagregowane

ową „jednoproduktowość” traktuje się jako uproszczenie, stosowane na potrzeby teorii, która pragnie abstrahować od złożonych problemów agregacji. W badaniach empirycznych poszczególne zmienne, oznaczające produkcję lub kapitał, traktuje się jako agregaty uzyskiwane za pomocą cen.

Cechą wspólną analizowanych w tym rozdziale modeli jest również to, że zasadniczym elementem ich struktury są równania akumulacji kapitału rzeczowego. Stopa wzrostu kapitału jest zmienną endogeniczną, wynikająca z modelu. Stopy wzrostu pozostałych czynników produkcji – siły roboczej i poziomu technologii (wiedzy) – traktowane są jako wielkości egzogeniczne, dane z zewnątrz.

1.1. Keynesowskie podejście do modelowania wzrostu gospodarczego

1.1.1. Model równomiernego wzrostu Harroda – Domara

Prezentowany model stanowi pewną syntezę keynesowskich modeli wzrostu gospodarczego R. Harroda i E. Domara, którą nazywać będziemy modelem Harroda - Domara[3]. Możliwość takiej syntezy wynika z faktu, iż struktura formalna obu modeli jest w zasadzie taka sama, różnice zaś dotyczą sposobu wnioskowania i interpretacji ekonomicznej. W tej prezentacji zależy nam przede wszystkim na uwypukleniu tych cech keynesowskiego podejścia do modelowania wzrostu gospodarczego, które okażą się istotne przy porównaniu z ujęciem neoklasycznym, świadcząc jednocześnie na rzecz tezy o większej efektywności podejścia neoklasycznego w ujmowaniu zagadnień z natury długookresowych, właściwych dla teorii wzrostu gospodarczego.

Podstawowym zagadnieniem w modelu Harroda - Domara jest ustalenie warunków koniecznych dla zapewnienia ciągłego, równomiernego wzrostu gospodarczego, w

---

modele wzrostu). Obok modeli z jednorodnym kapitałem istnieją tzw. modele rocznikowe (*vintage models*), w których rozważa się kolejne generacje kapitału. W modelach rocznikowych zakres substytucyjności pracy i kapitału ograniczony jest do ostatniej generacji kapitału (jeśli kapitał trwały jest już w eksploatacji, to substytucja między nim a pracą nie jest już możliwa). W tego typu modelach najczęściej (choć niekoniecznie) zakłada się tzw. ucieleśniony (*embodied*) postęp techniczny, czyli kolejne generacje kapitału ucieleśniają coraz to nowsze metody technologiczne, różniąc się swoją produktywnością i – co za tym idzie – wysokością przynależnego im wynagrodzenia (stopy zysku z kapitału).

[3] Zob. R. F. Harrod, *An Essay in Dynamic Theory*, Economic Journal, June 1939, s. 14 – 33; E. Domar, *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa 1962; E. Domar, *Expansion and Employment*, American Economic Review, 37, March 1947, s. 34 – 55; E. Domar, *Capital expansion, rate of growth, and employment*, Econometrica, 14, 1946, s. 137 – 147.

warunkach normatywnego (pożądanego) wykorzystania dostępnych zasobów kapitału (mocy produkcyjnych) i pełnego wykorzystania siły roboczej.

Model przedstawimy w czterech etapach, prezentując kolejno:

1) podażowy aspekt nakładów inwestycyjnych,
2) popytowy aspekt nakładów inwestycyjnych,
3) postulat normatywnego wykorzystania zasobów kapitału (postulat równomiernego wzrostu),
4) postulat równowagi na rynku siły roboczej.

Podażowy aspekt nakładów inwestycyjnych

Istniejący w gospodarce zasób kapitału $K(t)$ może być wykorzystany z różną intensywnością. W rezultacie, z danego zasobu kapitału można uzyskać różną wielkość produktu. Zakładamy, że istnieje pewien pożądany (normatywny) stopień intensywności eksploatacji kapitału u, któremu odpowiada potencjalna wielkość produktu $Y^*(t)$, spełniająca równanie:

$$Y^*(t) = uK(t)\,. \tag{1.1}$$

Produkt potencjalny $Y^*(t)$ jest poziomem produktu zapewniającym pożądaną przez przedsiębiorców relację kapitału do produktu, czyli normatywną kapitałochłonność produkcji:

$$v = \frac{1}{u} = \frac{K(t)}{Y^*(t)}\,.$$

Pożądany (normatywny) współczynnik kapitałochłonności produkcji v odzwierciedla zarówno możliwości technologiczne, jak i pożądany przez przedsiębiorców poziom utrzymywanych rezerw kapitałowych oraz zapasów produktów (zaliczanych do kapitału obrotowego)[4].

[4] Zdaniem autora, przyjęty tutaj postulat normatywnego (pożądanego przez przedsiębiorców) wykorzystania zasobów kapitału (nawiązujący do rozumowania Harroda) jest bardziej uzasadniony od przyjmowanego często w omówieniach modelu Harroda-Domara postulatu pełnego wykorzystania mocy produkcyjnych, rozumianych czysto technologicznie i oznaczających maksymalny możliwy do wytworzenia poziom produktu przy danych zasobach kapitału. W tym drugim przypadku trudniej jest interpretować sytuację, rozpatrywaną zarówno przez Harroda, jak i Domara, gdy $Y(t) > Y^*(t)$. Dla ścisłości należy zaznaczyć, że Harrod nie posługuje się bezpośrednio pojęciem produktu potencjalnego, lecz wprowadza rozróżnienie pomiędzy pożądanym współczynnikiem kapitałochłonności produkcji v^p i faktycznym współczynnikiem kapitałochłonności v^f, oznaczającym faktycznie osiąganą relację kapitału do produktu. W przekonaniu autora, wprowadzenie pojęcia produktu potencjalnego na bazie harrodowskiego pożądanego współczynnika kapitałochłonności sprawia, że rozumowanie staje się

Z (1.1) wynika, że[5]:

$$\dot{Y}^{*}(t) = \dot{K}(t) \cdot \frac{1}{v}. \tag{1.2}$$

Z definicji, przyrost kapitału $\dot{K}(t)$ równy jest inwestycjom $I(t)$:

$$I(t) = \dot{K}(t).$$

Z (1.2) wynika zatem, że:

$$\dot{Y}^{*}(t) = I(t) \cdot \frac{1}{v}. \tag{1.3}$$

Równanie (1.3) opisuje podażowy aspekt nakładów inwestycyjnych - inwestycje zwiększają zasoby kapitału (moce produkcyjne), przez co przyczyniają się do ciągłego powiększania produktu potencjalnego.

Popytowy aspekt nakładów inwestycyjnych

Inwestycje są równocześnie składową globalnego popytu, do którego dostosowuje się wielkość faktycznie wytworzonej produkcji (dochodu) $Y(t)$. Popytowy aspekt nakładów inwestycyjnych rozpatrujemy przy założeniu równowagi między popytem i podażą na rynku produktu. Zakładając, że popyt globalny składa się z planowanej konsumpcji $C(t)$ i planowanych inwestycji $I(t)$, warunek równowagi na rynku produktu oznacza, że:

$$C(t) + I(t) = Y(t).$$

Ponieważ z definicji nieskonsumowana część produktu (dochodu), $Y(t) - C(t)$, oznacza oszczędności $S(t)$, warunek ten jest równoważny równości planowanych inwestycji i oszczędności:

$$I(t) = S(t). \tag{1.4}$$

Zakładamy, że planowane oszczędności $S(t)$ kształtują się zgodnie z równaniem:

---

bardziej czytelne niż w przypadku, gdy operuje się rozróżnieniem pomiędzy pożądanym i faktycznym współczynnikiem kapitałochłonności.

[5] W całej pracy zakładamy, ze zmienne oznaczające zasoby bądź strumienie są różniczkowalnymi funkcjami czasu. W celu uproszczenia zapisu indeks czasu pomijamy. Przyjmujemy ponadto następujące oznaczenia dla pochodnej zmiennej $x(t)$ względem czasu: $\dot{x} = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ oraz stopy wzrostu w czasie $\mathring{x} = \mathring{x}(t) = \frac{d\,\dot{x}(t)}{dt}$.

$$S(t) = sY(t), \qquad 0 < s < 1,$$

gdzie *s* oznacza stałą krańcową i przeciętną skłonność do oszczędzania.
Warunek (1.4) jest zatem równoważny warunkowi:

$$Y(t) = I(t) \cdot \frac{1}{s}. \tag{1.5}$$

Zgodnie z keynesowską teorią równowagi na rynku produktu (keynesowskim modelem mnożnikowym), poziom produktu w równowadze zdeterminowany jest przez poziom popytu inwestycyjnego. Równanie (1.5) implikuje następującą relację przyrostową:

$$\dot{Y}(t) = \dot{I}(t) \cdot \frac{1}{s}. \tag{1.6}$$

W teorii keynesowskiej przyjmuje się, że równanie (1.6) wyraża popytowy aspekt nakładów inwestycyjnych - przyrost produktu zależy od przyrostu popytu inwestycyjnego. Parametr $1/s$ jest keynesowskim mnożnikiem inwestycyjnym, opisującym przyrost produktu spowodowany jednostkowym przyrostem popytu inwestycyjnego.

Postulat normatywnego wykorzystania zasobów kapitału
(postulat równomiernego wzrostu)

Podstawowym problemem rozpatrywanym w modelu Harroda - Domara jest identyfikacja warunków zapewniających wzrost gospodarczy w warunkach normatywnego wykorzystania kapitału, czyli taki wzrost kapitału i produkcji, aby w każdym momencie horyzontu czasowego spełniona była równość:

$$Y(t) = Y^*(t). \tag{1.7}$$

Łącząc (1.3), (1.6) i (1.7), otrzymujemy, że $\dot{I}(t) \cdot \frac{1}{s} = I(t) \cdot \frac{1}{v}$, czyli:

$$\frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{s}{v}. \tag{1.8}$$

Stąd oraz z (1.1), (1.5) i (1.7) wynika, że w warunkach normatywnego wykorzystania kapitału także produkcja i zasoby kapitału rosną ze stopą s/v:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{s}{v}, \qquad \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{v}. \tag{1.9}$$

Posługując się terminologią R. Harroda, stałą w czasie stopę równomiernego wzrostu s/v nazywamy gwarantowaną stopą wzrostu.

Mechanizm równomiernego wzrostu w modelu Harroda – Domara można zilustrować geometrycznie przechodząc od ciągłej do dyskretnej wersji tego modelu, w której kluczowe równania (1.3) i (1.6) przyjmują postać następującą:

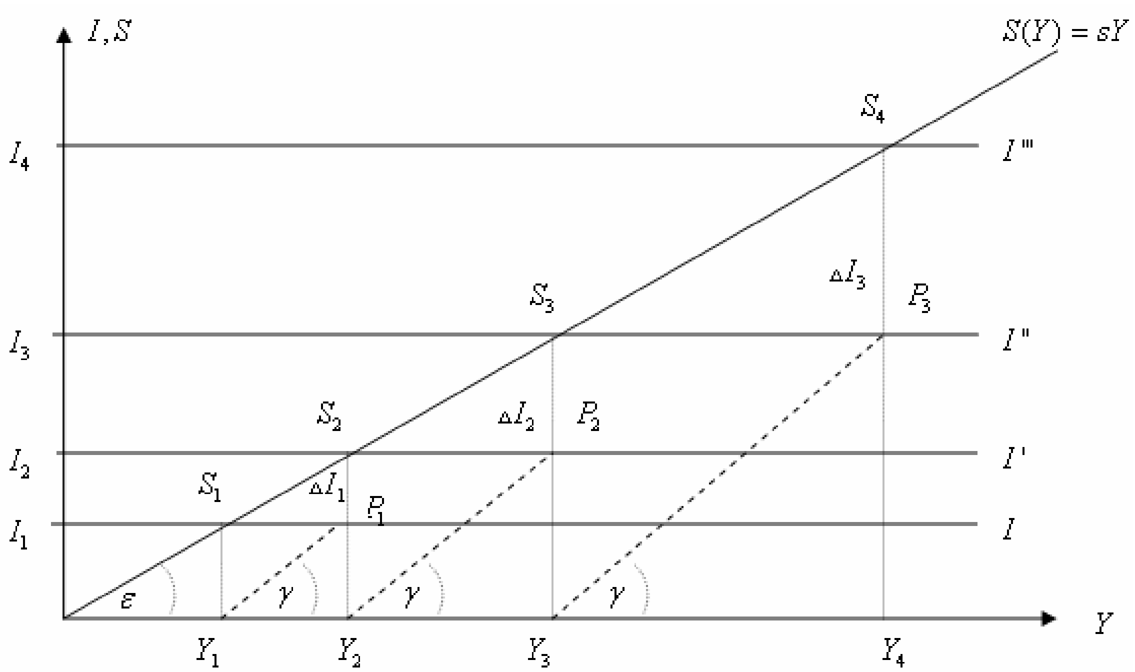
$$\Delta Y_t^* = I_t \frac{1}{v}, \tag{1.10}$$

$$\Delta Y_t = \Delta I_t \frac{1}{s}. \tag{1.11}$$

Ilustrację taką przedstawia rysunek 1.1. Na rysunku tym tangens kąta ε nachylenia funkcji oszczędności $S(Y) = sY$ wyraża stałą krańcową i przeciętną skłonność do oszczędzania s ($tg\,\varepsilon = s$), zaś tangens kąta γ nachylenia linii pomocniczych P_1, P_2, P_3 jest miarą normatywnego współczynnika kapitałochłonności produkcji v ($tg\ \gamma = v$).

Rysunek 1.1

Mechanizm wzrostu równomiernego w modelu Harroda – Domara



źródło: opracowanie własne – zmieniona wersja rysunku zamieszczonego w: M. Blaug, *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa 2000, s. 184

Przyjmujemy założenie, że w momencie wyjściowym wytworzona produkcja równa jest potencjalnej i wynosi Y_1. Punkt S_1 obrazuje wyjściową równowagę pomiędzy planowanymi inwestycjami i oszczędnościami przy tym poziomie produkcji.

Następnie poszukujemy takiej stopy wzrostu inwestycji i produkcji, przy której równość pomiędzy produktem zrealizowanym i potencjalnym będzie nadal zachowana. Osią rozumowania jest podwójny - podażowy i popytowy - aspekt nakładów inwestycyjnych. Zgodnie z (1.10) i zasadami konstrukcji rysunku 1.1, różnica $Y_2 - Y_1$ przedstawia przyrost potencjalnego produktu uzyskany dzięki inwestycjom I_1. Aby ów przyrost potencjalnego produktu (mocy produkcyjnych) był równy przyrostowi rzeczywiście wytworzonego produktu, zgodnie z (1.11) niezbędny jest impuls popytowy w postaci przyrostu inwestycji $I_2 - I_1$, który, poprzez efekty mnożnikowe, doprowadzi do wzrostu popytu i faktycznego produktu do poziomu Y_2. W kolejnym okresie, nowe inwestycje, zwiększone do poziomu I_2, spowodują przyrost potencjalnego produktu o różnicę $Y_3 - Y_2$. Aby ów przyrost zdolności wytwórczych został w pełni wykorzystany niezbędny jest kolejny wzrost inwestycji o $I_3 - I_2$, itd. W ten sposób w kolejnych okresach zachowana jest równość $\Delta Y_t^* = \Delta Y_t$, równoważna wobec (1.10) – (1.11) równości $I_t \frac{1}{v} = \Delta I_t \frac{1}{s}$. Stąd z kolei wynika, że inwestycje muszą rosnąć z gwarantowaną stopą wzrostu:

$$\frac{\Delta I_t}{I_t} = \frac{s}{v}.$$

Z tą samą stopą rosną też produkcja i zasoby kapitału (por. (1.9)).

Postulat równowagi na rynku siły roboczej

Założenie równowagi na rynku pracy sprowadza się do warunku pełnego zatrudnienia rozporządzalnej siły roboczej. Przyjmuje się, że podaż siły roboczej $L^S(t)$ rośnie według stałej stopy *n*, utożsamianej ze stopą przyrostu naturalnego[6]:

$$L^S(t) = L(0)e^{nt}.$$

Popyt na siłę roboczą $L^D(t)$ zależy od wielkości produkcji:

---

[6] Uproszczenie to odpowiada założeniu, że nie zmieniają się współczynniki aktywności zawodowej ludności, pod warunkiem jednak, że zasoby pracy liczone są w osobach (a ściślej – w robotnikolatach). Ponieważ w większości krajów rozwiniętych w drugiej połowie XX wieku współczynniki te rosły na skutek wzrostu aktywności zawodowej kobiet, to mając na względzie kwestie empiryczne, warto jest zasoby siły roboczej wyrażać w roboczogodzinach. Wtedy bowiem wspomniana tendencja jest równoważona w przybliżeniu przez tendencję do skracania czasu pracy, m. in. na skutek wydłużenia okresu kształcenia i obniżania wieku emerytalnego, a także ze względu na skracanie dnia i tygodnia pracy oraz zmniejszanie się liczby dni roboczych w roku.

$$L^D(t) = lY(t),$$

gdzie l oznacza stały współczynnik pracochłonności produkcji.

Równowaga na rynku pracy oznacza, że:

$$L^S(t) = L^D(t).$$

Zgodnie z (1.9), dla utrzymania tej równowagi w procesie wzrostu, w warunkach normatywnego wykorzystania kapitału, niezbędne jest aby:

$$\frac{s}{v} = n.$$

Jeśli stopa wzrostu produktu równa jest stopie przyrostu naturalnego to nazywana jest naturalną stopą wzrostu. Wzrost produktu według stopy naturalnej zapewnia pełne zatrudnienie rosnących zasobów siły roboczej.

1.1.2. Niestabilność wzrostu w modelach keynesowkich

Postawmy teraz pytanie: co się będzie działo, jeśli faktyczna stopa wzrostu inwestycji (i produktu) będzie się różnić od stopy s/v? Czy zmienne powrócą na ścieżkę wzrostu równomiernego, czy też, z upływem czasu, będą się jeszcze bardziej od niej odchylać?

Przedstawiony model nie udziela oczywiście odpowiedzi na to pytanie, gdyż z założenia jest modelem równomiernego wzrostu na poziomie produktu potencjalnego. Z prac Harroda i Domara wynika jednakże, że zdaniem obu ekonomistów w realnych systemach gospodarczych wzrost równomierny jest niestabilnym typem długookresowej równowagi dynamicznej tych systemów. Wąska ścieżka równowagi przebiega - według popularnego określenia - „na ostrzu noża”. Jakiekolwiek odchylenie faktycznej stopy wzrostu inwestycji od jednoznacznie określonej stopy wzrostu równomiernego (stopy gwarantowanej) nie tylko wywołuje nierównowagę pomiędzy realizowanym poziomem produktu a produktem potencjalnym, ale również uruchamia mechanizmy pogłębiające zaistniały stan nierównowagi, zamiast mechanizmów równowagę przywracających.

Stwierdzenia te wyrażają pierwszą istotną cechę keynesowskiego podejścia do modelowania wzrostu gospodarczego.

Załóżmy dla przykładu, że w pewnym okresie z jakiś powodów inwestycje będą rosły wolniej niż wymaga tego utrzymanie się na ścieżce wzrostu równomiernego, czyli

$$\frac{\triangle I}{I} < \frac{s}{v} \quad \Leftrightarrow \quad \triangle I \cdot \frac{1}{s} < I \cdot \frac{1}{v},$$

co, zgodnie z (1.10) – (1.11), jest równoważne nierówności $\triangle Y < \triangle Y^*$. Rzeczywisty przyrost produktu mniejszy od przyrostu produktu potencjalnego oznacza nadwyżkę kapitału (mocy produkcyjnych) w gospodarce. Niewykorzystanie części zasobów kapitałowych będzie przypuszczalnie zniechęcać przedsiębiorców do inwestowania, co spowoduje dalszy spadek stopy wzrostu inwestycji i jeszcze bardziej oddali gospodarkę od ścieżki równomiernego wzrostu ze stopą s/v. Uruchomiony zostanie mechanizm pogłębiania nierównowagi pomiędzy produktem rzeczywistym a potencjalnym[7].

Podobnie, jeśli $\frac{\Delta I}{I} > \frac{s}{v}$ to $\Delta Y > \Delta Y^*$. Stopień wykorzystania mocy produkcyjnych jest w takim przypadku wyższy od pożądanego (normatywnego), co oznacza niedobór kapitału. Niedobór ten stanowi motywację do jeszcze wyższej stopy inwestowania, powodując paradoksalnie pogłębienie niedoboru kapitału[8].

Zasygnalizowane zagadnienie niestabilności wzrostu w modelu Harroda – Domara (zagadnienie "ostrza noża") można sformalizować w różny sposób, przyjmując określone założenia dotyczące reakcji popytu inwestycyjnego na odchylenia od ścieżki wzrostu równomiernego[9]. Należy jednakże mieć świadomość, że każda tego typu formalizacja zniekształca do pewnego stopnia istotę podejścia keynesowskiego, w którym eksponuje się brak przewidywalności zachowań inwestorów.

Poniżej pokażemy w sposób bardziej sformalizowany, że jeśli w stanie początkowym gospodarka nie znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu, to z upływem czasu będzie się od niej coraz bardziej oddalać. W tym celu powrócimy do analizy z czasem ciągłym.

---

[7] W interpretacji Harroda temu stanowi gospodarki odpowiada wzrost faktycznego współczynnika kapitałochłonności produkcji, v^f, powyżej poziomu pożądanego v^p na skutek gromadzenia się nie sprzedanych zapasów towarów oraz unieruchomienia części kapitału trwałego. Wówczas $s/v^f < s/v^p$, czyli faktyczna stopa wzrostu gospodarczego jest niższa od stopy gwarantowanej. Zob. R. F. Harrod, *op. cit.*, s. 22 oraz przypis 4.

[8] W interpretacji Harroda, faktyczny współczynnik kapitałochłonności, v^f, obniża się poniżej poziomu pożądanego, v^p, na skutek zmniejszania się stanu zapasów w przedsiębiorstwach poniżej ich pożądanych wielkości. Wówczas $s/v^f > s/v^p$, czyli faktyczna stopa wzrostu gospodarczego jest wyższa od stopy gwarantowanej. Zob. *tamże*.

[9] Inne możliwości formalizacji problemu niestabilności wzrostu równomiernego rozpatruje Flaschel. Zob. P. Flaschel, *The Macrodynamics of Capitalism. Elements for a Synthesis of Marx, Keynes and Schumpeter*, Springer -Verlag , Berlin, Heidelberg 2009, s. 64-72.

Przypomnijmy najpierw, że na ścieżce równomiernego wzrostu (gdzie produkt zrealizowany $Y(t)$ jest zawsze równy produktowi potencjalnemu $Y^* t)$), zgodnie z (1.8) i (1.9), stopa wzrostu inwestycji jest równa stopie wzrostu kapitału:

$$\frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{v} . \tag{1.12}$$

Ponieważ z (1.12) wynika $\frac{(\dot{I/K})(t)}{(I/K)(t)} = 0$, czyli $(I/K)(t) = const.$, oznacza to również, że inwestycje w relacji do istniejących już zasobów kapitału utrzymywane są na stałym poziomie.

Przyjmijmy teraz, że $Y(t) \neq Y^*(t)$ (co oznacza, że uchylamy założenie o normatywnym wykorzystaniu zasobów kapitału) i oznaczmy przez θ stosunek produktu zrealizowanego do produktu potencjalnego:

$$\theta(t) = Y(t)/Y^*(t) . \tag{1.13}$$

Wprowadźmy także następujące założenie behawioralne o reakcji inwestorów na odchylenia od równowagi na poziomie produktu potencjalnego[10]:

$$\frac{(\dot{I/K})(t)}{(I/K)(t)} = \gamma(\theta(t) - 1) , \tag{1.14}$$

gdzie $\gamma > 0$ jest parametrem reakcji inwestorów.

Zgodnie z równaniem (1.14) inwestorzy zwiększają inwestycje w relacji do istniejących zasobów kapitału wówczas, gdy stopień wykorzystania kapitału jest większy od normatywnego ($\theta > 1 \Leftrightarrow Y > Y^*$). Odwrotna sytuacja ($\theta < 1 \Leftrightarrow Y < Y^*$) wywołuje reakcję przeciwną, polegającą na ograniczaniu stosunku inwestycji do istniejących zasobów kapitału.

Przyjmując za punkt odniesienia równanie (1.12), zapiszmy równanie (1.14) w równoważnej postaci:

$$\frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \gamma(\theta(t) - 1) . \tag{1.14a}$$

Równanie (1.14a) jest uogólnieniem modelu Harroda – Domara z punktu 1.1.1 na przypadek, gdy gospodarka znajduje się poza ścieżką równomiernego wzrostu. Jego interpretacja staje się bardziej wyrazista, jeżeli zauważymy, że:

---

[10] Równanie to jest autorskim pomysłem formalizacji zagadnienia „ostrza noża”.

$$\frac{\dot{I}(t)}{I(t)}-\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{I(t)}{K(t)}\right)/\frac{I(t)}{K(t)}.$$

Wówczas bowiem, pamiętając, że $\dot{K}(t)=I(t)$, równanie (1.14a) możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right)/\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=\gamma(\theta(t)-1). \tag{1.14b}$$

Zgodnie z równaniem (f), tak długo, jak kapitał (moce produkcyjne) wykorzystany jest w stopniu wyższym od normatywnego $(\theta(t)>1)$, inwestorzy, poprzez swoje decyzje inwestycyjne, nieustannie zwiększają stopę wzrostu kapitału. W przeciwnym przypadku, gdy stopień wykorzystania mocy produkcyjnych jest niższy od normatywnego $(\theta(t)<1)$, inwestorzy zmniejszają stopę wzrostu kapitału.

Aby pokazać, że działania takie powodują oddalanie się gospodarki od ścieżki równomiernego wzrostu, zwróćmy uwagę, że z (1.13) wynika, iż:

$$\frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t)}=\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}-\frac{\dot{Y}^*(t)}{Y^*(t)}.$$

Równocześnie, zgodnie z (1.1) i (1.5), zachodzi $I(t)=sY(t)$ oraz $Y^*(t)=uK(t)$.

W konsekwencji:

$$\frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t)}=\frac{\dot{I}(t)}{I(t)}-\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}. \tag{1.15}$$

Korzystając z (1.15) równanie (1.14a) możemy zapisać w zwięzłej postaci:

$$\frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t)}=\gamma(\theta(t)-1), \qquad \gamma>0. \tag{1.16}$$

Z równania (1.16) wynika ważny wniosek, że jakiekolwiek odchylenie gospodarki od ścieżki wzrostu równomiernego na poziomie produktu potencjalnego ($\theta>1$ lub $\theta<1$) uruchamia mechanizmy pogłębiające zaistniałą nierównowagę (odpowiednio, $\dot{\theta}/\theta>0$, $\dot{\theta}/\theta<0$).

Jedynym sposobem uniknięcia nierównowagi pomiędzy realizowanym poziomem produktu a produktem potencjalnym jest pokierowanie strumienia inwestycyjnego dokładnie wzdłuż ścieżki równowagi ze stopą wzrostu s/v, gdyż brakuje mechanizmów, które by ją samoczynnie na tę ścieżkę kierowały[11]. Jest oczywiste, że przedstawione, keynesowskie podejście do modelowania długofalowego wzrostu gospodarczego odzwierciedla po prostu ogólne poglądy na gospodarkę obu ekonomistów, których praca naukowa zgodna jest z duchem i argumentacją teorii J. M. Keynesa i stanowi logiczne rozwinięcie tej teorii na gospodarkę dynamiczną[12]. Obu twórcom zależało na tym, aby w sposób modelowy scharakteryzować warunki stabilnego, długofalowego wzrostu produktu krajowego, przy pełnym zatrudnieniu wszystkich czynników produkcji, nie zaś udowadniać, że gospodarka rynkowa samoczynnie taki proces zapewnia. Przeciwnie, ani R. Harrod, ani E. Domar nie wierzyli, że cokolwiek skłania prywatnych przedsiębiorców do utrzymywania stałego tempa zwiększania wydatków inwestycyjnych, odpowiedniego dla realizacji warunków równomiernego wzrostu gospodarczego. Podstawową przyczyną niestabilności systemu gospodarczego jest zatem, w opinii obu ekonomistów, brak stabilności wydatków inwestycyjnych, które zależą od zbyt wielu czynników, najczęściej trudnych do uchwycenia, ze względu na dominującą rolę tzw. „zwierzęcych instynktów" w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Argumentacja ta służyła potwierdzeniu słuszności przekonania Keynesa o potrzebie aktywnej interwencji państwa w gospodarkę, mającej polegać między innymi na korygowaniu poziomu prywatnych inwestycji poprzez wydatki inwestycyjne z budżetu państwa.

Zauważmy ponadto, że wzrost produktu w warunkach normatywnego wykorzystania kapitału nie oznacza tutaj automatycznie pełnego zatrudnienia dostępnej siły roboczej. W modelu nie identyfikuje się żadnych sił, które zapewniałyby zrównanie gwarantowanej stopy wzrostu produktu ze stopą wzrostu dostępnej siły roboczej, utożsamianą ze stopą przyrostu naturalnego. Poziom wytwarzanej produkcji, wyznaczony na rynku produktu, określa sztywno wielkość zapotrzebowania na pracę, które zmienia się według tej samej stopy co produkcja i tylko przypadkiem może się zdarzyć, że stopa ta odpowiada stopie wzrostu zasobów pracy. Ten wyjątkowy stan

[11] Harrod i Domar nie zajmowali się w swoich pracach analizą cykli koniunkturalnych w gospodarce, nie uwzględniali zatem mechanizmów, które sprawiają, że w fazach recesji czy nadmiernej ekspansji gospodarka w końcu odbija się od dna czy od szczytu i przechodzi, odpowiednio, w fazę ożywienia lub osłabienia koniunktury, czyli wciąż oscyluje wokół ścieżki trendu wzrostu długofalowego.

[12] Przypominamy, że przez analizę dynamiczną w makroekonomii zwykle rozumie się taką analizę, która uwzględnia zmiany w zasobach produkcyjnych gospodarki. W tym sensie w *„Ogólnej teorii zatrudnienia, procentu i pieniądza"* rozważania Keynesa ograniczają się do gospodarki statycznej.

gospodarki w modelu Harroda - Domara został trafnie nazwany przez Joan Robinson[13] „złotym wiekiem", co tyle podkreśla jego wysoce pożądany charakter, co nikłe szanse na jego wystąpienie.

Jeżeli na przykład w pewnym okresie $s/v < n$, to wzrost według stopy gwarantowanej, zapewniającej normatywne wykorzystanie kapitału, może się odbywać w nieskończoność przy niepełnym zatrudnieniu zasobów pracy. Co więcej, nawet wówczas, gdy produkcja będzie rosła według stopy naturalnej, może się to odbywać w warunkach niewykorzystania części zasobów pracy, jeśli w przeszłości aparat wytwórczy rozwijał się w tempie niewystarczającym do wchłonięcia potencjalnych rezerw siły roboczej. Aby osiągnąć pełne ich wykorzystanie, tempo wzrostu gospodarczego musiałoby być przez jakiś czas wyższe od tempa wzrostu siły roboczej. W przypadku gdy $s/v > n$, normatywne wykorzystanie zasobów kapitału jest możliwe dopóty, dopóki istnieją niewykorzystane rezerwy siły roboczej. Prędzej czy później, ze względu na założony stały współczynnik pracochłonności produkcji, praca staje się wąskim gardłem procesu produkcji, co uniemożliwia normatywne wykorzystanie kapitału.

Stwierdzenia te charakteryzują drugą istotną własność keynesowskich modeli wzrostu gospodarczego, odróżniającą je, jak dalej pokażemy, od ujęcia neoklasycznego. Przyczyną opisanej sztywności modelu jest oczywiście sposób potraktowania dynamiki siły roboczej jako wpływu zewnętrznego, nie biorącego udziału w wyznaczaniu tempa wzrostu gospodarczego, a jedynie stanowiącego jego górną granicę. Sam mechanizm wzrostu opiera się w całości na akumulacji kapitału rzeczowego, która staje się de facto jedynym motorem wzrostu. Jak pisał sam E. Domar „(...) *wzrost siły roboczej, albo jej wydajność ma tylko ten skutek, że podnosi zdolność produkcyjną, ale nie rodzi sam przez się dochodu*"[14].

W literaturze, w omówieniach keynesowskich modeli wzrostu gospodarczego, najczęściej nie odróżnia się wyraźnie dwóch przedstawionych powyżej źródeł niestabilności wzrostu: problemu „ostrza noża" i problemu niestabilności „złotowiekowej" ścieżki wzrostu. Trzeba przyznać, że do zatarcia tej różnicy mógł przyczynić się sam Solow, który we wstępie do swojego artykułu z 1956 r. wyraźnie utożsamia pojęcie „ostrza noża" z problemem zrównywania się stopy gwarantowanej ze

[13] Zob. J. Robinson, *Akumulacja kapitału,* Warszawa 1958, s. 133.

[14] E. Domar, *Szkice …*, *op. cit.*, s. 127.

stopą naturalną[15]. Nie chodzi przy tym o kwestię wyłącznie natury terminologicznej – w całym artykule Solow konsekwentnie sugeruje, że problem z niestabilnością wzrostu w modelu Harroda - Domara sprowadza się właśnie do braku „mechanizmu" zapewniającego ustalanie się w gospodarce właściwej proporcji dostępnych zasobów kapitału i pracy (odpowiadającej relacji stałych z założenia współczynników kapitałochłonności i pracochłonności produkcji), umożliwiającej jednoczesne pełne wykorzystanie obu tych czynników. Zgodnie z wywodem Solowa sztywność modelu Harroda – Domara stanowi jedynie konsekwencję przyjętego założenia o stałych współczynnikach kapitałochłonności i pracochłonności produkcji v i l. Z tego względu, rozpatrując problem niestabilności wzrostu, Solow przedstawia model Harroda – Domara w kategoriach funkcji produkcji Koopmansa – Leontiewa: $Y = \min\left\{\frac{K}{v}, \frac{L}{u}\right\}$, (charakteryzującej się brakiem możliwości substytucji czynników produkcji), utożsamiając jednocześnie stopę oszczędności ze stopą inwestycji w gospodarce. Założenia te implikują, że przynajmniej jeden z czynników jest zawsze w pełni wykorzystywany w procesie produkcji. Niewykorzystanie mocy produkcyjnych w gospodarce (nadwyżka kapitału) może pojawić się tylko wówczas, gdy czynnik pracy stanowi „wąskie gardło" procesu produkcji, tzn., gdy $K/L = v/l$[16]. Innymi słowy, wyklucza się przez to możliwość sytuacji, że faktyczna stopa wzrostu jest niższa zarówno od stopy naturalnej, jak i gwarantowanej, tak, że gospodarka funkcjonuje przy niepełnym wykorzystaniu obu czynników produkcji (a zatem wyklucza się typowy mechanizm depresyjny)[17].

---

[15] Zob. R. M. Solow, *A Contribution to the Theory of Economic Growth,* Quarterly Journal of Economics, February 1956, s. 65 – 66.

[16] Tamże, s. 73 – 75.

[17] W referacie wygłoszonym z okazji otrzymania Nagrody Nobla Solow zdaje się świadomie już ignorować właściwy problem „ostrza noża", zbywając go następującym stwierdzeniem: „(...) *Teoria* [wzrostu Harroda – Domara – przyp. aut.] *sugerowała coś jeszcze bardziej dramatycznego. Szczególnie pisma Harroda pełne były nie do końca dopracowanych twierdzeń, że rozwój równomierny jest, w każdym razie, bardzo niestabilnym rodzajem równowagi: jakiekolwiek niewielkie odchylenie zostałoby powiększone na czas nieokreślony przez proces, który wydawał się zależeć głównie od niejasnych uogólnień dotyczących zachowań przedsiębiorców"* (tłum. aut.). [Zob. R. M. Solow, *Growth Theory and After*, American Economic Review, June 1988, s. 307], by następnie, w innym miejscu, przyznać: *„W tym miejscu muszę przyznać się do pewnego mojego młodzieńczego zakłopotania. We wczesnych dyskusjach dotyczących teorii wzrostu Harroda – Domara dużo mówiło się o nieodłącznej niestabilności ścieżki wzrostu równomiernego. „Niestabilność" mogła oznaczać – i faktycznie oznaczała – dwie różne rzeczy i te dwa znaczenia nie były zawsze wyraźnie rozróżniane. Mogła zatem oznaczać, że dobrze zachowujące się ścieżki równowagi są otoczone przez źle zachowujące się ścieżki równowagi, tak, że jakiekolwiek ześlizgnięcie się* [z dobrze zachowującej się ścieżki równowagi – przyp. aut.] *mogło prowadzić w konsekwencji do katastrofy. Albo też niestabilność mogła dotyczyć zachowania się systemu w nierównowadze, tak, że gospodarka, która raz zboczyłaby ze ścieżki równowagi, nie znalazłaby drogi*

Obie scharakteryzowane w tym punkcie własności modelu Harroda – Domara stanowią uprawomocnienie opinii wyrażonych przez R. Solowa na temat tego modelu[18]: *„Teoria wzrostu, jak większa część makroekonomii, była produktem depresji lat trzydziestych oraz wojny, która ostatecznie położyła jej kres. Podobnie było i w moim przypadku. Niemniej jednak wydawało mi się, że historia opowiadana przez te modele nie jest prawdziwa. Ekspedycja przybywająca na Ziemię z Marsa po przeczytaniu tej literatury spodziewałaby się, że znajdzie tylko ruiny kapitalizmu, który rozpadł się na części dawno temu"* (tłum. aut.)[19]. *„Byłem dosyć sceptycznie nastawiony do modelu Harroda – Domara (…). Pomyślałem sobie mianowicie, że gdyby świat rzeczywiście funkcjonował zgodnie z proponowanym przez nich modelem, to historia kapitalizmu byłaby o wiele bardziej burzliwa, niż to było w rzeczywistości. Gdyby model Harroda – Domara był dobrym, długookresowym modelem makroekonomicznym, to w moim przekonaniu niemożliwe byłoby wyjaśnienie, w jaki sposób udawało się ograniczyć wahania gospodarcze, jak można oszacować linię trendu i obserwować wahania wokół tej linii i dlaczego te wahania, pomijając nieliczne przypadki głębszych recesji, mieszczą się w obrębie 3 – 4 procentowego pasma. Doszedłem do wniosku, że musi istnieć jakiś sposób modelowania wzrostu gospodarczego, który nie byłby obarczony charakterystyczną dla modelu Harroda – Domara właściwością balansowania niczym na ostrzu noża"*[20].

1.1.3. Model Harroda – Domara z postępem techniczno – organizacyjnym

W zaprezentowanej wersji modelu Harroda - Domara równowaga dynamiczna na poziomie maksymalnej możliwej do osiągnięcia długookresowej stopy wzrostu, czyli tzw. stopy naturalnej, gwarantuje jedynie ciągłe utrzymywanie niezmiennego w czasie

---

powrotnej do żadnej ścieżki równowagi. Oryginalny model Harroda – Domara wydawał się podlegać obydwu tym trudnościom. Myślę, że pokazałem, że rozszerzenie modelu usuwa pierwszy rodzaj niestabilności. Drugi rodzaj jednakże tak naprawdę wymaga integracji krótkookresowej i długookresowej makroekonomii, teorii wzrostu i teorii cykli koniunkturalnych. Harrod i wielu współczesnych komentatorów przeszli nad tym problemem przez przyjęcie bardzo specyficznych i nieprzekonujących założeń o zachowaniu inwestorów. Wtedy nie byłem tak przekonany jak teraz o różnicy pomiędzy dwoma pojęciami niestabilności". Tamże, s. 310.

[18] Dodajmy, niezależnie od faktycznych przesłanek kierujących ich autorem. Zob. przypis 17.

[19] Tamże, s. 308.

[20] B. Snowdon, H. R. Vane, *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami,* Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 2003, s. 366.

poziomu zamożności społeczeństwa, jeśli bowiem produkt rośnie w takim samym tempie jak liczba ludności, to produkt *per capita* (*p.c.*) pozostaje wciąż na stałym, wyjściowym poziomie.

Uogólnimy teraz model o postęp techniczno - organizacyjny neutralny w rozumieniu Harroda, czyli potęgujący pracę (czysto pracoefektywnościowy) w tym sensie, że jest on równoważny z odpowiednim wzrostem ilości siły roboczej[21]. Nakład pracy mierzony w jednostkach wydajności $\overline{L}(t)$ jest dany wzorem:

$$\overline{L}(t) = A(t)L(t), \tag{1.17}$$

gdzie $A(t)$ oznacza poziom technologii, o którym zakłada się, że rośnie ze stałą stopą:

$$\dot{A} / A = m. \tag{1.18}$$

Układ równań (1.17) – (1.18) interpretuje się łącznie w ten sposób, ze wskutek postępu technologicznego (potęgującego pracę) jeden zatrudniony w momencie t jest równoważny $\exp(mt)$ zatrudnionym w momencie początkowym, lub też – w momencie t daną wielkość produktu można otrzymać z tych samych nakładów kapitału połączonych z $\exp(mt)$ razy mniejszym fizycznym nakładem siły roboczej niż w momencie początkowym.

Z (1.17) oraz (1.10) i (1.18) wynika, że podaż pracy w jednostkach efektywności, $\overline{L}^S(t)$, rośnie wykładniczo ze stopą $n + m$.

Ponieważ popyt na pracę (mierzony teraz w jednostkach efektywności) kształtuje się nadal zgodnie z (1.10), czyli $\overline{L}^D(t) = lY(t)$, to dla zapewnienia pełnego zatrudnienia siły roboczej inwestycje, kapitał i produkcja muszą również rosnąć ze stopą $n + m$, czyli musi zachodzić:

$$\frac{s}{v} = n + m. \tag{1.19}$$

Sumę $n + m$ określa się teraz jako naturalną stopę wzrostu.

W takim wypadku produkt *p.c.* (Y/L) rośnie ze stopą równą stopie postępu technicznego m.

---

[21] Ściśle rzecz biorąc, oryginalna definicja harrodowskiej neutralności postępu technicznego i jej bezpośredni sens ekonomiczny są inne od przyjmowanych w tym miejscu pracy. Wykazano jednak jej równoważność z ujęciem tutaj przedstawionym. Zob. H. Uzawa, *Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium*, Review of Economic Studies, Vol. 28, No. 2, February 1961, s. 117 – 124.

Definicję neutralności w sensie Harroda i uzasadnienie przyjmowania tego rodzaju neutralności postępu technicznego w makroekonomicznych modelach wzrostu gospodarczego przedstawiamy w rozdziale czwartym pracy.

1.1.4. Uwagi o modelu Kaldora

Jako przykład pewnego uelastycznienia modelu Harroda – Domara podaje się często w literaturze keynesowski model Kaldora[22]. Zgodnie z tą opinią, uelastycznienie to ma polegać na złagodzeniu rygorystycznego warunku (1.19), nałożonego na cztery parametry modelu. Środkiem realizacji tego celu ma być uwzględnienie podziału wytworzonego produktu Y na wynagrodzenia pracowników najemnych W oraz zyski właścicieli kapitału P ($Y = W + P$), co pozwala z kolei na wyodrębnienie oszczędności pracowników najemnych oraz oszczędności właścicieli kapitału. Zakłada się, że oszczędzana jest stała część wynagrodzeń $0 \leq s_w \leq 1$ i stała (niekoniecznie taka sama) część zysków $0 \leq s_p \leq 1$. Oszczędności w skali całej gospodarki narodowej są więc sumą:

$$S = s_w W + s_p P.$$

Podstawiając $W = Y – P$, otrzymujemy:

$$S = s_w (Y – P) + s_p P = (s_w + (s_p - s_w)P/Y)Y .$$

Jak widzimy, średnia stopa oszczędności w skali całej gospodarki $s = s_w + (s_p - s_w)P/Y$, przy danych stopach s_w i s_p, zależy od proporcji, w jakich na produkt Y składają się zyski z kapitału i wynagrodzenia.

Po tej modyfikacji warunek (1.19) wzrostu równomiernego przy normatywnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych i pełnym zatrudnieniu siły roboczej przybiera postać:

$$\frac{1}{v}(s_w + (s_p - s_w)\, qK/Y) = n + m,$$

gdzie $q = P/K$ oznacza stopę zysku z kapitału.

Korzystając z definicji współczynnika kapitałochłonności produkcji $v = K/Y$, warunek powyższy można zapisać w postaci:

$$\frac{s_w}{v} + (s_p - s_w)\, q = n + m. \qquad (1.20)$$

Lewa strona równania (1.20) określa teraz poziom gwarantowanej stopy wzrostu, prawa zaś – stopy naturalnej. Jak widzimy, parametrem determinującym poziom gwarantowanej stopy wzrostu przy danych stopach s_w i s_p jest stopa zysku q. Gdy q

[22] N. Kaldor, *Eseje z teorii stabilizacji i wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa 1971.

zmienia się od 0 do $1/v$ (czyli P zmienia się od 0 do $Y = K/v$), lewa strona równania (1.20) zmienia się w przedziale pomiędzy wartościami s_w/v i s_p/v.

Aby zapewnić wzrost równomierny w warunkach pełnego zatrudnienia, stopa zysku q, przy danych pozostałych parametrach, musi kształtować się na ściśle określonym poziomie, wynikającym z (1.20):

$$q = \frac{n + m - s_w / v}{s_p - s_w}. \tag{1.21}$$

Z modelu nie wynika jednak, w jaki sposób ta wymagana stopa zysku ma zostać osiągnięta. Jest to w istocie jeszcze jeden egzogeniczny parametr, pozostawiony do określenia przez czynniki zewnętrzne, i znów jedynie kwestią przypadku jest, czy osiągnie on odpowiednią wartość. Przedstawiana w literaturze argumentacja, zgodnie z którą model Kaldora jest bardziej elastyczny od modelu Harroda – Domara ze względu na to, że "*podczas gdy w modelu Harroda – Domara n* (zob. przypis 23) *musi się równać pojedynczej wartości s/v, to teraz może być gdzieś między wartościami* s_w/v *oraz* s_p/v"[23], wydaje się mało przekonująca. *De facto*, wymagana sztywna relacja pomiędzy $n + m$, s oraz v zostaje tutaj zastąpiona przez inną, równie sztywną relację pomiędzy większą liczbą parametrów: $n + m$, s_w, s_p, q oraz v. Dopóki żaden z tych parametrów nie jest wyznaczany wewnątrz modelu, tak, aby jego poziom dostosowywał się do pozostałych, nie może być mowy o żadnym uelastycznieniu modelu. Realny postęp w tej kwestii można by osiągnąć dopiero wówczas, gdyby model zawierał jakąś teorię podziału dochodu, z której by wynikało, że stopa zysku dostosowuje się do poziomu wyznaczonego przez (1.21).

Zauważmy jednak, że przyjmowanie w keynesowskich modelach wzrostu stałych współczynników produktywności nakładów samo przez się eliminuje wszelkie kwestie dotyczące zmian krańcowych produktywności czynników i, co za tym idzie, neoklasyczną teorię podziału dochodu na wynagrodzenia pracy i kapitału. Nie ma tu także możliwości wyprowadzenia udziałów poszczególnych czynników produkcji w dochodzie. Jest to jeszcze jeden aspekt nieelastyczności tych modeli.

Na koniec zwracamy uwagę, że rzekome uelastycznienie podejścia keynesowskiego w modelu Kaldora dotyczyć ma jedynie problemu zrównywania się gwarantowanej

---

[23] Zob. R. D. G. Allen, *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*, PWN, Warszawa 1975, s. 216 – 217 (oryginalnie u Allena nie ma postępu technicznego, czyli $m = 0$). Argumentację tę powtarza także Tokarki (zob. T. Tokarski, *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001, s. 17 – 19), uważając ten fakt za "*złagodzenie (…) problemu ostrza noża*".

stopy wzrostu ze stopa naturalną. Nie ma natomiast nic wspólnego z problemem „ostrza noża".

1.2. Podstawowy neoklasyczny model wzrostu gospodarczego Solowa

W 1956 roku Robert Solow przedstawił model wzrostu gospodarczego, który stał się fundamentem nowej, neoklasycznej teorii wzrostu, wolnej od sztywności modeli keynesowskich. Przełomowym, jak się później okazało, dla teorii wzrostu gospodarczego rezultatem było przedstawienie przez Solowa matematycznego opisu mechanizmu ekonomicznego, sprawiającego, że gospodarka, pozostająca poza ścieżką wzrostu równomiernego, z upływem czasu osiąga takie proporcje między czynnikami produkcji, które pozwalają na wzrost równomierny w warunkach pełnego zatrudnienia dostępnych zasobów siły roboczej.

Gospodarka rozpatrywana przez Solowa jest gospodarką zamkniętą składającą się z dowolnej liczby przedsiębiorstw wytwarzających jeden i ten sam produkt (produkcję finalną) za pomocą tej samej technologii. Produkt, inwestycje, konsumpcja i zasoby kapitału (majątku produkcyjnego) wyrażone są wartościowo (w cenach stałych). Przedsiębiorstwa funkcjonują w warunkach doskonałej konkurencji.

Procesy produkcyjne zachodzące w gospodarce opisuje się za pomocą jednej agregatowej funkcji produkcji o ogólnej postaci:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), t), \tag{1.22}$$

której charakterystyczną cechą jest to, że dopuszcza możliwość substytucji między nakładami kapitału i pracy. W oryginalnym modelu Solowa argumentami funkcji produkcji były wyłącznie kapitał i praca. Uzależnienie funkcji produkcji od zmiennej czasu wiąże się z uwzględnieniem postępu techniczno – organizacyjnego.

Zakłada się, że funkcja (1.22) jest ciągła i (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna[24] (przy czym $F_t = \partial F / \partial t > 0$), zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt, charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi produktywnościami krańcowymi obu czynników wytwórczych oraz jest

[24] Ekonomiczny sens założenia o gładkości (ciągła i różniczkowalna) funkcji produkcji wyraża się w stwierdzeniu, iż dopuszcza ona nieskończoną liczbę możliwych procesów produkcyjnych, dających określony poziom produkcji, gładko przechodzących jeden w drugi, tak, że relacje *Y/K* i *Y/L* zmieniają się w sposób ciągły.

funkcją wklęsłą. Dwa ostatnie założenia można wyrazić formalnie w następujący sposób[25]:

$$F_K, F_L > 0, \qquad F_{KK}, F_{LL} < 0, \qquad F_{KK}F_{LL} - (F_{KL})^2 \geq 0 .$$

O funkcji (1.22) zakłada się również, że spełnia tzw. warunki Inady:

$$\lim_{X \to 0} F_X = \infty, \ \lim_{X \to \infty} F_X = 0, \text{ gdzie: } X \in \{K, L\}.$$

Podobnie jak w modelu Harroda – Domara przyjmujemy, że postęp techniczno – organizacyjny ma charakter czysto pracoefektywnościowy (neutralny w sensie Harroda). Funkcja produkcji ma wtedy następującą postać:

$$Y(t) = F(K(t), \overline{L}(t)), \tag{1.23}$$

gdzie $\overline{L}(t) = A(t)L(t)$ oznacza zasoby siły roboczej mierzone w jednostkach efektywności.

O funkcji produkcji zakłada się ponadto, że jest dodatnio jednorodna stopnia jeden. Oznacza to, że dla dowolnej liczby $\xi > 0$, zachodzi równość:

$$F(\xi K; \xi \overline{L}) = \xi F(K; \overline{L}).$$

Warunek ten równoważny jest założeniu o stałych korzyści skali (stałych przychodach względem skali produkcji).

Przyjmując $\xi = (\overline{L})^{-1}$, mamy: $F(K/\overline{L}, 1) = \overline{L}^{-1} F(K; \overline{L})$. Wprowadzając oznaczenia: $\overline{y} = Y/\overline{L}$, $\overline{k} = K/\overline{L}$, odpowiednio, dla produktu i kapitału na jednostkę efektywnej pracy (*njep*) oraz $F(\overline{k}, 1) = f(\overline{k})$, otrzymujemy:

$$\overline{y}(t) = f(\overline{k}(t)). \tag{1.24}$$

Funkcja (1.24) nazywana jest funkcją produkcji w postaci intensywnej. Wyraża ona zależność między produkcją i kapitałem w kategoriach *njep*.

Z założeń o funkcji produkcji (1.22) wynika, że funkcja produkcji (1.24) posiada następujące własności:

a) jest ciągła i (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna,
b) dla zerowego nakładu kapitału *njep* daje zerowy produkt: $f(0) = 0$,
c) jest rosnąca i silnie wklęsła: $f'(\overline{k}) > 0$, $f''(\overline{k}) < 0$,

[25] Dla uproszczenia zapisu stosujemy następujące oznaczenia dla pochodnych cząstkowych funkcji *F*(*X;Y*): $F_X = \dfrac{\partial F}{\partial X}, F_{XX} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2}, F_{XY} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}$.

d) spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{\bar{k}\to 0} f'(\bar{k}) = \infty$, $\lim_{\bar{k}\to\infty} f'(\bar{k}) = 0$.

Własności c) i d) wynikają z faktu, że:

$$f'(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{L}}\frac{\partial F(K,\bar{L})}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \bar{k}} = F_K, \qquad f''(\bar{k}) = \frac{\partial F_K}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \bar{k}} = F_K \bar{L}. \tag{1.25}$$

Stałe korzyści skali agregatowej funkcji produkcji są wyrazem założenia o formie organizacji rynku, na którym działają maksymalizujące zyski przedsiębiorstwa (konkurencja doskonała). Ponieważ z założenia wszystkie firmy wytwarzają jednorodny produkt przy użyciu tej samej technologii, cała gospodarka funkcjonuje tak, jak pojedyncza gałąź przemysłu w warunkach doskonałej konkurencji. Maksymalizując zyski, przedsiębiorstwa najmują usługi pracy i kapitału do momentu zrównania się krańcowych produktywności poszczególnych czynników produkcji z rynkowymi cenami tych czynników, które traktują jako dane (na które nie mają wpływu)[26]. Ze względu na przyjmowane w modelu doskonałej konkurencji założenie o swobodzie wejścia i wyjścia z rynku (*free entry and exit*), w równowadze długookresowej wszystkie przedsiębiorstwa osiągają zerowe zyski czyste, funkcjonując na poziomie minimum swoich długookresowych krzywych przeciętnego kosztu produkcji. Produkt (wartość wytworzonej produkcji finalnej) każdej firmy rozkłada się w całości na wynagrodzenia kapitału i pracy.

W modelu Solowa zakłada się, że gospodarka znajduje się w stanie permanentnej długookresowej równowagi konkurencyjnej[27]. Oznacza to, że sumując produkcję oraz nakłady kapitału i pracy wszystkich przedsiębiorstw, możemy dla każdego momentu t zapisać równanie:

$$Y(t) = q(t)K(t) + w(t)L(t), \tag{1.26}$$

[26] Chodzi oczywiście o ceny wynajęcia czynników na potrzeby bieżącej produkcji.

[27] Zob. np. H. R. Varian, *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, 7th edition, W. W. Norton & Company, 2005, s. 403 – 408.

Należy podkreślić, że przymiotnik „długookresowy" użyty jest tutaj w takim znaczeniu, w jakim używany jest w analizie mikroekonomicznej, gdzie przez długi okres rozumie się taki okres, w którym wszystkie czynniki (koszty) produkcji firmy można traktować jako czynniki (koszty) zmienne. W dalszej części pracy będziemy rozróżniać pojęcia: „długookresowa równowaga konkurencyjna" (w sensie mikroekonomicznym) oraz „dynamiczna równowaga długookresowa", oznaczająca stan stacjonarny gospodarki, w którym zachowane są pewne relacje strukturalne pomiędzy wielkościami ekonomicznymi. Pomimo że mikroekonomiczna koncepcja długookresowej równowagi na rynku doskonale konkurencyjnym jest z istoty koncepcją dynamiczną, w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego zakładana jest jako permanentny stan gospodarki (w każdym momencie t).

gdzie Y, K, L oznaczają globalne wielkości produkcji oraz nakładów kapitału i efektywnej pracy, zaś q i w – rynkowe stawki wynagrodzeń za usługi, odpowiednio, kapitału i pracy.

Podkreślenia wymaga fakt, że model nie determinuje rozmiarów (wielkości produkcji) pojedynczych firm w równowadze długookresowej (co wcale nie oznacza, że brak takich w modelu się zakłada)[28], a tym samym liczby firm w gospodarce przy danych zasobach kapitału i pracy. Całą gospodarkę możemy natomiast traktować jako jedno duże przedsiębiorstwo, funkcjonujące w takich samych warunkach rynkowych jak każda pojedyncza firma.

Z przyjętych założeń o funkcjonowaniu gospodarki wynika, że dla całej gospodarki w każdym momencie t spełnione są warunki maksymalizacji zysku:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = q(t), \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} = w(t). \tag{1.27}$$

Z (1.26) i (1.27) oraz na podstawie twierdzenia Eulera wnioskujemy, że agregatowa funkcja produkcji jest dodatnio jednorodna stopnia jeden, czyli gospodarka funkcjonuje przy zerowych korzyściach skali produkcji.

Podobnie jak w modelu Harroda – Domara, w modelu Solowa zakłada się, że zasoby siły roboczej rosną wykładniczo ze stałą stopą n, utożsamianą ze stopą przyrostu naturalnego:

$$\dot{L}(t) / L(t) = n. \tag{1.28}$$

Przyjmujemy także, że postęp techniczno – organizacyjny odbywa się ze stałą, egzogenicznie daną stopą m:

$$\dot{A}(t) / A(t) = m, \tag{1.29}$$

gdzie $\overline{L}(t) = A(t)L(t)$ oznacza zasoby siły roboczej mierzone w jednostkach efektywności.

[28] Innymi słowy, stałe korzyści skali agregatowej funkcji produkcji nie oznaczają wcale, że mikroekonomiczne funkcje produkcji wszystkich przedsiębiorstw są dodatnio jednorodne stopnia jeden dla każdego poziomu produkcji.

Podkreślmy raz jeszcze, że stałe korzyści skali agregatowej funkcji produkcji są wyrazem założenia o formie organizacji rynku, a nie o technologii produkcji w każdej pojedynczej firmie, funkcjonującej na rynku. Takie wyjaśnienie stanowi jedyną i (w ograniczonym zakresie) wystarczającą mikroekonomiczną „podbudowę” modelu. W tym kontekście warto również zauważyć, że spotykane czasem w literaturze z zakresu tzw. nowej teorii wzrostu modele, w których przyjmuje się arbitralnie założenie o rosnących korzyściach skali agregatowej funkcji produkcji bez żadnej mikroekonomicznej „podbudowy”, poza ćwiczeniem z zakresu matematyki stosowanej nie mają większego sensu.

Z (1.29) i (1.28) otrzymujemy zatem, że zasoby efektywnej pracy $\overline{L} = AL$ rosną ze stałą stopą $n+m$. Wynikające stąd równanie $\overline{L} = \overline{L}_0 e^{(n+m)t}$ traktujemy jako równanie (doskonale nieelastycznej) podaży zasobów efektywnej pracy w momencie *t*.

W podobny sposób, globalną (również doskonale nieelastyczną) podaż kapitału w momencie *t* utożsamiamy z globalnym zasobem kapitału wynikającym z dotychczasowych inwestycji netto. Oznaczając przez $I(t)$ globalne inwestycje brutto oraz przez δ stałą stopę deprecjacji kapitału, zmiany podaży kapitału w gospodarce określa równanie:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t). \tag{1.30}$$

Poziom inwestycji w gospodarce jest zdeterminowany przez poziom oszczędności, oznaczających nieskonsumowaną część produktu (dochodu): $S(t) = Y(t) - C(t)$.

W modelu zakłada się stały poziom stopy oszczędności *s*, czyli: $S(t) = sY(t)$.

Zatem:

$$I(t) \equiv S(t) \quad \Leftrightarrow \quad I(t) \equiv sY(t). \tag{1.31}$$

Znak tożsamości w (1.31) służy podkreśleniu różnicy w stosunku do założeń modelu Harroda – Domara. W przeciwieństwie do (1.5), równanie (1.31) jest z założenia spełnione dla dowolnego poziomu produkcji i opisuje *de facto* zależność bilansową. Oznacza to, że w modelu Solowa pomija się wszelkie zagadnienia związane z agregatowym popytem i wszelkie możliwe różnice pomiędzy wielkościami planowanymi i faktycznymi[29]. Ze względu na drugą z tożsamości w (1.31), stopę oszczędności *s* możemy również nazywać stopą inwestycji w gospodarce.

Na podstawie (1.30) i (1.31) otrzymujemy ostatecznie następujące równanie dynamiki globalnych zasobów kapitału:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t). \tag{1.32}$$

Równanie (1.32) kończy proces definiowania modelu Solowa. Matematyczny model wzrostu Solowa dany jest zatem przez układ równań (1.29) - (1.23), (1.27) - (1.28) oraz (1.32), postaci:

równanie agregatowej funkcji produkcji: $$Y(t) = F(K(t), \overline{L}(t)),$$ $$\overline{L}(t) = A(t)L(t),$$

[29] Tożsamość $I(t) \equiv S(t)$, równoważna tożsamości globalnego popytu i globalnej podaży na rynku produktu, nazywana jest w literaturze prawem rynków Say'a.

równania podziału produktu pomiędzy czynniki wytwórcze:	$Y(t) = q(t)K(t) + w(t)L(t)$, $q(t) = F_K$, $w(t) = F_L$,
równania dynamiki czynników wytwórczych:	$\dot{L}(t)/L(t) = n$, $\dot{A}(t)/A(t) = m$, $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$.

Po zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu równania $\bar{k} = K/\bar{L}$ względem czasu oraz po uwzględnieniu (1.29) i (1.28), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{k}}/\bar{k} = \dot{K}/K - (n+m)\,. \tag{1.33}$$

Korzystając kolejno z (1.32) i (1.24), dostajemy:

$$\dot{K}/K = s \cdot Y/K - \delta = s \cdot \bar{y}/\bar{k} - \delta = s \cdot f(\bar{k})/\bar{k} - \delta\,. \tag{1.34}$$

Po podstawieniu (1.34) do (1.33) i obustronnym pomnożeniu przez $\bar{k}$ dochodzimy do zasadniczego równania modelu:

$$\dot{\bar{k}}(t) = sf(\bar{k}(t)) - (n+m+\delta)\bar{k}(t)\,, \tag{1.35}$$

opisującego dynamikę zmian kapitału *njep*.

Rozwiązując równanie różniczkowe (1.35), po przyjęciu określonej, analitycznej postaci funkcji produkcji (np. funkcji Cobba – Douglasa) i wyjściowe poziomu kapitału *njep* $\bar{k}_0$, można wyznaczyć ścieżkę czasową $\bar{k}(t)$, a następnie, na jej podstawie, ścieżki czasowe wszystkich pozostałych zmiennych. Jak pokażemy dalej, najważniejsze wnioski wynikające z równania (1.35) można też uzyskać metodami jakościowej analizy równań różniczkowych, odwołując się jedynie do wymienionych przed chwilą ogólnych własności funkcji $f(\bar{k})$, bez konieczności precyzowania jej postaci analitycznej.

Wyrażenie po prawej stronie równania (1.35) można zinterpretować jako różnicę pomiędzy faktycznymi inwestycjami (*njep*) a inwestycjami niezbędnymi do utrzymania kapitału *njep* $\bar{k}$ na istniejącym poziomie[30].

[30] Dla utrzymania $\bar{k} = K/AL$ na stałym poziomie zasoby kapitału muszą rosnąć wykładniczo ze stopą wzrostu efektywnej pracy powiększoną o stopę deprecjacji, $\dot{K}/K = n + m + \delta$. Zatem wymagane inwestycje w kategoriach *njep* wynoszą $\dot{K}/AL = (n+m+\delta)K/AL$. Stopa $n+m+\delta$ jest nazywana efektywną stopą deprecjacji dla kapitału *njep*.

Definicja 1.1. Stanem stacjonarnym modelu Solowa nazywamy taki szczególny poziom kapitału *njep* $\bar{k}_e$, że jeżeli gospodarka osiągnie ów poziom, to nie będzie on podlegał już dalszym zmianom.

Formalnie, stan stacjonarny $\bar{k}_e$ jest to taki poziom zmiennej $\bar{k}$, przy którym $\dot{\bar{k}} = 0$. Jak wynika z (1.35), w stanie stacjonarnym spełnione jest równanie:

$$\frac{f(\bar{k}_e)}{\bar{k}_e} = \frac{n+m+\delta}{s}. \tag{1.36}$$

Przyjęte założenia o funkcji produkcji (własności c) i d) funkcji (1.24)) gwarantują istnienie jednoznacznie określonego poziomu $\bar{k}_e$ [31].

Oczywiście, w stanie stacjonarnym również produkt *njep* pozostaje na stałym poziomie $\bar{y}_e = f(\bar{k}_e)$. Z (1.33) wynika, że zasoby kapitału K (w ujęciu bezwzględnym) rosną wówczas wykładniczo ze stopą $n+m$. Z analogicznego równania, wyprowadzonego na podstawie definicji $\bar{y} = Y/\bar{L}$, wnioskujemy, że z tą samą stopą rośnie także produkt Y. Ponieważ zasoby siły roboczej rosną ze stałą stopą n, zatem stopa wzrostu kapitału i produktu *p.c.* jest równa stopie zmian jakościowych m, określanych mianem postępu technicznego. Wzrost kapitału i produktu z tą samą stopą oznacza, że relacja produktu do kapitału pozostaje stała, określona przez (1.36).

W przeciwieństwie do keynesowskich modeli wzrostu gospodarczego, model Solowa określa także dynamikę rynkowych cen czynników wytwórczych oraz podział produktu na wynagrodzenia pracy i kapitału.

Zgodnie z (1.27), stawki jednostkowych wynagrodzeń za usługi kapitału i pracy równe są ich krańcowym produktywnościom. Można je wyrazić w kategoriach kapitału *njep*. Na podstawie (1.25), mamy:

$$q(t) = f'(\bar{k}(t)). \tag{1.37}$$

Korzystając z (1.24) oraz definicji zmiennych $\bar{y}$ i $\bar{k}$, otrzymujemy także:

$$F_L = \frac{\partial\left(ALf(\bar{k})\right)}{\partial L} = Af(\bar{k}) + ALf'(\bar{k})\frac{\partial\bar{k}}{\partial L} = Af(\bar{k}) - ALf'(\bar{k})\frac{K}{L^2} = A\left(f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k})\right).$$

Stąd i z założenia (1.27) wynika zatem, że:

---

[31] Nietrudno zauważyć, że dla istnienia stanu równowagi $\bar{k}_e > 0$ faktycznie wystarczy, aby: $\lim_{\bar{k}\to 0} sf'(\bar{k}) > n+m+\delta$, $\lim_{\bar{k}\to\infty} sf'(\bar{k}) < n+m+\delta$. Warunki Inady stanowią silniejszą formę tego założenia.

$$w(t) = A(t)\left(f(\bar{k}(t)) - \bar{k}(t) f'(\bar{k}(t)) \right). \tag{1.38}$$

Z (1.37) oraz definicji zmiennych $\bar{y}$, $\bar{k}$, $\bar{L}$ wynikają równości:

$$qK + wL = Y \quad \Leftrightarrow \quad qK/Y + wL/Y = 1,$$

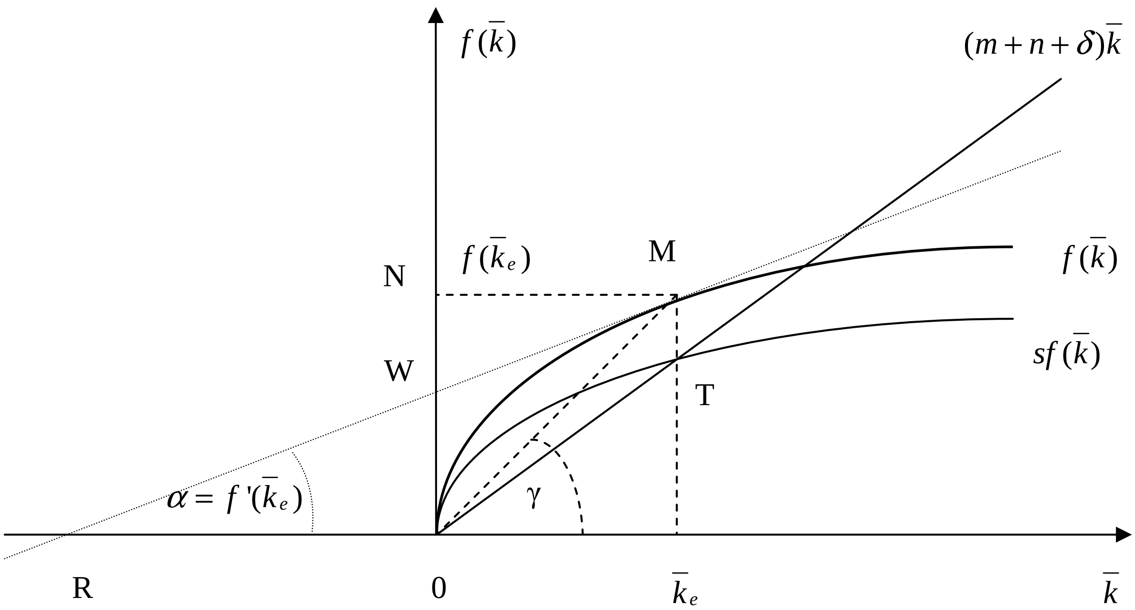
czyli całość wytworzonego produktu rozkłada się bez reszty na płace i zyski z kapitału. Równania te stanowią *de facto* inną postać założenia (1.26). Wyrażając to samo jeszcze inaczej, udziały wynagrodzeń kapitału, $qK/Y = \bar{k} f'(\bar{k})/f(\bar{k})$, i pracy, $wL/Y = 1 - \bar{k} f'(\bar{k})/f(\bar{k})$, w produkcie sumują się do jedności.

Z równań (1.37) - (1.38) wynika, że w stanie stacjonarnym, dla $\bar{k} = \bar{k}_e$, stopa zysku z kapitału q pozostaje stała, a stawka płac w rośnie wykładniczo ze stopą postępu technicznego m. Przypomnijmy, że w stanie stacjonarnym z tą samą stopą rośnie również relacja kapitału do pracy. Jednocześnie, pomimo wzrostu tej relacji, stopa zysku z kapitału nie maleje, lecz utrzymuje się na stałym poziomie. Stałe są również udziały wynagrodzeń poszczególnych czynników w wytwarzanym produkcie. Wynika stąd ważny wniosek, że, w stanie stacjonarnym, założony w modelu neutralny w sensie Harroda postęp techniczny oddziałuje na gospodarkę w taki sposób, że dokładnie kompensuje efekt malejących przychodów z kapitału.

Geometryczny obraz gospodarki w stanie stacjonarnym prezentujemy na rysunku 1.2.

Rysunek 1.2

Stan stacjonarny i podział produktu w modelu Solowa



źródło: opracowanie własne

Linia przerywana, wychodząca z początku układu współrzędnych i nachylona do osi $0\bar{k}$ pod kątem γ, takim, że *tg γ* = (*n* + *m* +*δ*) */ s*, wyznacza punkt M na krzywej *f*($\bar{k}$), określający wartości $\bar{k}_e$ i $f(\bar{k}_e)$. Jednocześnie, poziom $\bar{k}_e$ opowiada współrzędnej punktu przecięcia T funkcji faktycznych oszczędności/inwestycji brutto (*njep*) oraz linii inwestycji niezbędnych do utrzymania poziomu kapitału *njep* na stałym poziomie.

Z rysunku 1.2 można także odczytać charakterystykę podziału produktu w stanie stacjonarnym. Stopa zysku w stanie stacjonarnym odpowiada nachyleniu stycznej do krzywej $f(\bar{k})$ w punkcie *M*, czyli $q_e = tg\alpha = \left|\overline{WN}\right| / \left|\overline{NM}\right|$. Stąd $\left|\overline{WN}\right| = \bar{k}_e q_e$, czyli długość odcinka $\overline{WN}$ wyraża łączne wynagrodzenia kapitału, przypadające na jednostkę efektywnej pracy. Ponieważ $\left|\overline{ON}\right| = f(\bar{k}_e) = \bar{y}_e$, to z (1.38) wynika, że $w_e / A(t) = \left|\overline{ON}\right| - \left|\overline{WN}\right| = \left|\overline{OW}\right|$, czyli długość odcinka $\overline{OW}$ wyraża stawkę płac *njep*. Ponieważ $q_e = \cos\alpha = \left|\overline{OW}\right| / \left|\overline{OR}\right| = \bar{w}_e / \left|\overline{OR}\right|$, to $\left|\overline{OR}\right| = w_e / A(t) q_e$, czyli długość odcinka $\overline{OR}$ wyraża relację cen efektywnej pracy i kapitału.

Scharakteryzowany wyżej stan stacjonarny modelu opisuje gospodarkę znajdującą się w długookresowej równowadze dynamicznej, określanej mianem „ścieżki wzrostu równomiernego”.

Uwaga 1.1. Pojęcie wzrostu równomiernego w literaturze rozumiane jest w mniej lub bardziej restrykcyjny sposób, w zależności od liczby warunków nakładanych na określany tym terminem proces wzrostu gospodarczego. W neoklasycznej teorii wzrostu przez wzrost równomierny rozumiany jest zazwyczaj taki proces wzrostu, który charakteryzuje się następującymi cechami:

1) wielkość produktu (lub wszystkich produktów, jeśli w modelu rozróżnia się np. dobra konsumpcyjne i inwestycyjne lub dokonuje bardziej szczegółowej dezagregacji) oraz wszystkie wytwarzane nakłady podlegające akumulacji (w szczególności kapitał rzeczowy) rosną z tą samą, stałą stopą wzrostu, tak, że relacja produktu do tych nakładów pozostaje stała,

2) ze stałą stopą rosną również wielkości nakładów niewytwarzalnych (w szczególności siły roboczej),

3) wartościowe relacje nakładów do produktu / - ów (względne udziały wynagrodzeń czynników wytwórczych w produkcie) pozostają na stałych poziomach[32].

Wymienione własności składają się na definicję wzrostu równomiernego w węższym sensie. Tego rodzaju wzrost równomierny charakteryzuje gospodarkę w stanie stacjonarnym w modelu Solowa.

Czasem jednak proces wzrostu gospodarczego określany jako równomierny rozumie się w szerzej, rezygnując w definicji z ostatniego bądź dwóch ostatnich z podanych warunków. W takim właśnie szerszym sensie mowa była o wzroście równomiernym w prezentowanym wcześniej modelu Harroda – Domara.

[32] Prawidłowości te okazują się zgodne ze stylizowanymi faktami wzrostu gospodarczego, do których odwołamy się w drugim rozdziale pracy (patrz punkt 2.1).

1.3. Porównanie podejścia neoklasycznego z podejściem keynesowskim

Jeżeli posłużymy się współczynnikiem kapitałochłonności produkcji $v = K/Y$, równanie (1.36) możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\frac{\bar{L}f(\bar{k}_e)}{\bar{L}\bar{k}_e} = \frac{Y}{K} = \frac{1}{v} = \frac{n+m+\delta}{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{s}{v} - \delta = n + m. \tag{1.39}$$

Otrzymaliśmy zależność analogiczną do tej, jaka wynikała z modelu Harroda – Domara (zob. (1.19))[33]: dla wzrostu równomiernego, przy pełnym zatrudnieniu siły roboczej, gwarantowana stopa wzrostu jest równa stopie naturalnej.

Różnica jest jednak zasadnicza: o ile poprzednio równość ta była kwestią szczęśliwego dopasowania czterech określonych niezależnie od siebie parametrów, o tyle teraz jest osiągana poprzez zmiany kapitałochłonności produkcji v, będącej zmienną ciągłą zależną od $\bar{k}$ ($v = \bar{k} / f(\bar{k})$). Niezależnie od poziomu początkowego, $\bar{k}$ zawsze zmierza do poziomu stacjonarnego $\bar{k}_e$, odpowiadającego ścieżce równomiernego wzrostu. Zawsze bowiem, jeżeli $\bar{k} < \bar{k}_e$, to - zgodnie z (1.35) - $\dot{\bar{k}} > 0$ i $\bar{k}$ rośnie, gdy zaś $\bar{k} > \bar{k}_e$, to $\dot{\bar{k}} < 0$ i $\bar{k}$ maleje. Jeżeli $\bar{k} = \bar{k}_e$, to $\dot{\bar{k}} = 0$ i $\bar{k}$ pozostaje bez zmian. Pamiętając o podanej wyżej interpretacji poszczególnych składników różnicy, występującej po prawej stronie równania (1.35), nietrudno zrozumieć ekonomiczną treść tego dostosowania: dopóki faktyczne inwestycje są wyższe (niższe) od ich wielkości niezbędnej do utrzymania relacji kapitału do efektywnej pracy, *K/AL*, na niezmiennym poziomie, to wywołują wzrost (spadek) tej relacji. Inaczej mówiąc – w kategoriach formuły (1.38) - jeśli produktywność kapitału będzie większa od poziomu w stanie stacjonarnym, to będzie ona maleć na skutek szybszego wzrostu zasobu kapitału aniżeli ilości efektywnej pracy, gdy zaś będzie mniejsza, to będzie rosnąć wraz ze spadkiem $\bar{k}$.

Wejście gospodarki na ścieżkę równomiernego wzrostu jest tylko kwestią czasu[34]. Ścieżka równomiernego wzrostu i korespondujący z nią stan stacjonarny $\bar{k}_e$ wyznaczają zatem stan stabilnej równowagi dynamicznej gospodarki. Zauważmy jeszcze, że

---

[33] Różnica wynika jedynie z uwzględnienia w zaprezentowanym modelu Solowa stopy deprecjacji kapitału δ.

[34] Ściśle rzecz biorąc, stabilność długookresowej równowagi dynamicznej ma – jak to zwykle bywa przy rozwiązaniach równań różniczkowych – charakter asymptotyczny. Zgodnie z powszechnym zwyczajem przyjmujemy, że dla ekonomicznej interpretacji nie ma to większego znaczenia

stabilność ta nie zależy od konkretnej postaci funkcji produkcji, np. funkcji Cobba – Douglasa. Wniosek ten ma szczególne znaczenie z punktu widzenia problemów, podjętych w czwartym rozdziale tej pracy[35]. Automatyczne dostosowywanie się wydajności kapitału jest oczywiście konsekwencją założeń przyjętych odnośnie postaci funkcji produkcji, przede wszystkim prawa malejących przychodów z kapitału. Stanowi to potwierdzenie opinii Solowa przytoczonej na początku poprzedniego punktu.

Pomimo to, stwierdzenie, że wszelkie różnice między modelem Harroda - Domara a modelem Solowa wynikają z formalnej postaci funkcji produkcji przesłania jednakże fakt kluczowy, że o ile ten pierwszy model jest modelem *stricte* keynesowskim, o tyle model Solowa zbudowany został na całkiem odmiennych założeniach ekonomii neoklasycznej o funkcjonowaniu gospodarki[36]. W modelu Solowa zakłada się *implicite*, że w gospodarce funkcjonują mechanizmy równoważące, które:

- prowadzą do uzgadniania popytu i podaży na rynkach pracy i kapitału,
- dostosowują popyt inwestycyjny do poziomu oszczędności przy pełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych (prawo rynków Say'a).

  Rynki produktu, kapitału i pracy są permanentnie zrównoważone (ma zatem miejsce równowaga ogólna w gospodarce).

W przeciwieństwie do tego, w modelu Harroda - Domara:

- ignoruje się mechanizmy zapewniające równowagę na rynku pracy (o zatrudnieniu decyduje zapotrzebowanie na siłę roboczą, wyznaczone sztywno przez poziom produkcji, dostosowującej się do popytu globalnego),

---

[35] W świetle przedstawionego tutaj wnioskowania, błędna jest opinia wyrażona w klasycznej już i znanej polskiemu czytelnikowi od wielu lat pracy Allena (Zob. R. G. D. Allen, *op. cit.*). Na stronie 257 czytamy: *„Przyczyną ograniczonej przydatności ujęcia neoklasycznego jest to, że pozostawia ono na uboczu następujące zagadnienia: co się dzieje, jeżeli w dowolnym momencie relacja: produkcja – kapitał nie jest odpowiednia dla wzrostu równomiernego? W funkcjonowaniu samego modelu neoklasycznego można znaleźć tylko częściową odpowiedź. Dopóki spełnione są wszystkie warunki równowagi, model określa równanie różniczkowe (lub różnicowe), które, jeżeli może być rozwiązane, daje ścieżki równowagi zmiennych od jakiejkolwiek początkowej wartości relacji: produkcja – kapitał (..) Problem polega na rozwiązaniu równania; w istocie niewiele można posunąć się naprzód, jeśli nie przyjmie się konkretnej postaci funkcji produkcji, takiej jak na przykład funkcja Cobba – Douglasa."* I dalej (s. 271): *„Zagadnienie stabilności czy trawersu między stanami stacjonarnymi możemy rozpatrzyć tylko w przypadku pewnej konkretnej postaci funkcji produkcji. Przyjmujemy tutaj przypadek funkcji Cobba – Douglasa"*.

[36] Sugestywnym wyrazem tego faktu jest możliwość wprowadzenia problemu „ostrza noża" do modelu wzrostu z neoklasyczną funkcją produkcji (dopuszczającą substytucję nakładów kapitału i pracy), pod warunkiem usunięcia założenia o obowiązywaniu prawa rynków Say'a (tożsamości oszczędności i inwestycji). Przykłady takiej kombinacji założeń keynesowskich i neoklasycznych (prezentowane jako modyfikacje modelu Solowa) przedstawia Nikkaido. Zob. H. Nikaido, *Harrodian Pathology of Neoclassical Growth: The Irrelevance of Smooth Factor Substitution*, Zeitschrift für Nationalökonomie 40, 1980, s. 111 – 134, przedruk w: H. Nikaido, *Prices, Cycles, and Growth*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1996.

- zakłada się odwrotny kierunek w procesie równoważenia planowanych inwestycji i oszczędności: oszczędności dostosowują się popytu inwestycyjnego poprzez zmiany ilościowe w wielkości wytwarzanego produktu (zgodnie z równaniem (1.5)), a zatem również wykorzystywanego kapitału.

  Jest zatem możliwa równowaga na rynku produktu przy nie pełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych (kapitału) i siły roboczej.

Przyjęcie neoklasycznych przesłanek w modelu Solowa usuwa w gruncie rzeczy z założenia te problemy, z którymi spotkaliśmy się w przypadku modelu Harroda - Domara: problem „ostrza noża” oraz kwestię takiego kształtowania się zasobu kapitału i poziomu produktu, które pozwoli na angażowanie w proces produkcyjny rosnących wciąż zasobów siły roboczej (czyli sytuację nazwaną przez J. Robinson „złotym wiekiem”).

Przejściowe stany wzrostu nierównomiernego, kiedy zasoby kapitału w gospodarce rosną wolniej lub szybciej niż zasoby efektywnej pracy, nie prowadzą tutaj – jak to jest w przypadku modelu Harroda – Domara – do niepełnego wykorzystania któregoś z czynników produkcji. Automatyczne mechanizmy przywracania równowagi na rynkach czynników produkcji eliminują z założenia taką możliwość. Tym zaś, czego dotyczy problem stabilności długookresowej równowagi dynamicznej modelu (wzrostu równomiernego) jest wyłącznie kwestia kształtowania się struktury mocy produkcyjnych (relacji kapitału do zatrudnienia) w procesie wzrostu oraz - pośrednio - odpowiedzi na pytanie, czy stopa wzrostu produktu może trwale różnić się od tzw. stopy naturalnej. Mówiąc jeszcze inaczej, z perspektywy dalszego rozwoju teorii wzrostu gospodarczego, zasadnicza różnica pomiędzy modelem Solowa a keynesowskimi modelami wzrostu Harroda i Domara polega nie tylko (lub nawet, nie tyle) na zagwarantowaniu stabilności ścieżek wzrostu równomiernego, co na radykalnym odseparowaniu problematyki długofalowego wzrostu od zagadnień krótkookresowych, związanych z efektywnym popytem.

Aby lepiej uchwycić istotę różnicy pomiędzy keynesowskim a neoklasycznym podejściem do modelowania wzrostu gospodarczego, rozważmy dla przykładu konsekwencje trwałego podniesienia stopy oszczędności, przy założeniu, że w punkcie wyjścia gospodarka jest w stanie wzrostu równomiernego przy pełnym wykorzystaniu zasobów. W kategoriach modelu Harroda – Domara bezpośrednim skutkiem jest wzrost gwarantowanej stopy wzrostu gospodarczego i pojawienie się nierówności pomiędzy poziomem tej stopy a poziomem faktycznej stopy wzrostu inwestycji, kapitału i produktu, przekładającej się na nierównowagę pomiędzy pożądanym a faktycznym wykorzystaniem mocy produkcyjnych. Popyt globalny rośnie wolniej niż możliwości produkcyjne gospodarki – nie tylko z powodu wzrostu tempa podaży kapitału (oszczędności), ale także wskutek spadku tempa wzrostu konsumpcji. W przeciwieństwie do modelu Solowa, w keynesowskim schemacie funkcjonowania gospodarki nie zakłada się istnienia mechanizmu, który umożliwiałby automatyczne wchłonięcie zwiększonej podaży oszczędności przez rosnące w odpowiednio szybszym tempie inwestycje. Dostosowanie przebiega tutaj w przeciwnym kierunku, od planowanych oszczędności do inwestycji, poprzez ograniczenie tempa wzrostu produktu[37]. Ponieważ, zgodnie z keynesowskim scenariuszem, prawdopodobnie wpłynie to ujemnie na skłonność do inwestowania, w konsekwencji uruchomi tendencję do ograniczania wzrostu inwestycji i dalszego spadku faktycznej stopy wzrostu produktu. W ten oto sposób zamiast przyspieszenia wzrostu gospodarczego, otrzymujemy klasyczny mechanizm recesji w gospodarce[38].

W przeciwieństwie do tego, w modelu Solowa wzrost stopy oszczędności wywołuje przejściowe podniesienie tempa wzrostu kapitału i produktu, skutkujące przesuwaniem się gospodarki w kierunku nowego stanu stacjonarnego (ścieżki wzrostu równomiernego), o wyższych poziomach kapitału i produktu *njep*. Zmiana stopy oszczędności jest bowiem tutaj w zasadzie równoznaczna ze zmianą stopy inwestycji, dzięki założonemu mechanizmowi dostosowywania poziomu inwestycji do poziomu oszczędności poprzez zmiany realnej stopy procentowej, spadkowi której, w tym

[37] Otrzymujemy w ten sposób dynamiczną wersję tzw. paradoksu oszczędności.

[38] Dla osadzenia powyższych rozważań w bardziej całościowej wizji gospodarki w ujęciu keynesowskim, warto w tym miejscu poczynić na marginesie dwie uwagi.

Po pierwsze, należałoby wspomnieć o mechanizmach przeciwdziałających przedstawionym tendencjom do pogłębiania recesji, w postaci wzrostu skłonności do konsumpcji wraz ze spadkiem dochodów, dolnej granicy dla spadku inwestycji wyznaczanej przez inwestycje restytucyjne, czy tez spadku stopy procentowej na rynku pieniądza w wyniku ograniczania popytu na pieniądz (w tym ostatnim przypadku, działanie którego ograniczane jest, zdaniem Keynesa, przez względną nieelastyczność inwestycji względem zmian stopy procentowej oraz możliwość wystąpienia pułapki płynności).

Po drugie zaś, zarysowany wyżej scenariusz zachowania systemu gospodarczego, wywołanego wzrostem skłonności podmiotów do oszczędzania, w połączeniu z przekonaniem Keynesa o istnieniu historycznej tendencji do wzrostu skłonności do oszczędzania wraz ze wzrostem zamożności społeczeństw, dają podstawy do swoistej wersji teorii stagnacji sekularnej, wywołanej przez czynniki o charakterze popytowym (zakwestionowanej później przez M. Friedmana w jego hipotezie dochodu permanentnego). Ze względu na stosunkowo odległy związek tych zagadnień z głównym tematem tej pracy, autor nie zamierza ich tutaj rozwijać.

przypadku, odpowiada spadek krańcowego produktu kapitału w miarę postępu substytucji czynników produkcji i wzrostu relacji kapitału do ilości efektywnej pracy.

W kategoriach zamieszczonego wyżej rysunku 1.2 wzrost *s* przesuwa funkcję faktycznych inwestycji w górę, tak, iż $\bar{k}_e$ wzrasta. Jednak $\bar{k}$ nie przybierze od razu nowej wartości $\bar{k}_e$. Gdy na początku inwestycje faktyczne przewyższają inwestycje niezbędne do utrzymania $\bar{k}$ na stałym poziomie, to zgodnie z równaniem dynamiki zmian kapitału *njep* (1.35), poziom $\bar{k}$ rośnie. Oznacza to przejściowy wzrost kapitału i produktu według stopy wyższej od $n+m$. Malejąca produktywność krańcowa kapitału wymusza jednak powrót gospodarki na ścieżkę wzrostu równomiernego w miarę jak $\bar{k}$ stabilizuje się na poziomie nowej wartości $\bar{k}_e$[39]. Zatem w długookresowej perspektywie zmienia się co prawda poziom rozwoju, ale nie stopa wzrostu gospodarczego.

W tym kontekście możemy teraz stan długookresowej równowagi dynamicznej modelu postrzegać jako identyfikację pewnego ograniczenia potencjału wzrostowego każdej gospodarki, zamiast jako charakterystykę jej „złotego wieku”, jak to było w przypadku modelu Harroda - Domara. W stanie stacjonarnym akumulacja kapitału z czynnika napędzającego wzrost staje się czynnikiem ten wzrost jedynie podtrzymującym. Stabilność ścieżki wzrostu równomiernego oznacza zatem między innymi to, że gospodarka nie może na stałe utrzymać stopy wzrostu produktu *p.c.* wyższej od tej, która wynika z postępu techniczno - organizacyjnego. Teoretycznie byłoby to możliwe, gdyby społeczeństwo decydowało się oszczędzać i inwestować coraz większą względną część wytwarzanego produktu, jednakże (pomijając empiryczną kwestię obserwowalnych stóp oszczędności) prowadziłoby to w końcu do stanu suboptymalnego z punktu widzenia społecznego dobrobytu, mierzonego poziomem konsumpcji *p.c.* Problem ten przedstawimy szczegółowo w rozdziale trzecim.

Koncentracja na długookresowych ścieżkach równowagi ogólnej w gospodarce stanowi tę właśnie zasadniczą cechę modelu neoklasycznego, która – pomimo zastrzeżeń i wątpliwości samego Solowa – okazała się w dalszym rozwoju

---

[39] Równolegle do spadku produktu krańcowego kapitału, na skutek wzrostu stosunku kapitału do ilości pracy w jednostkach efektywności następuje również wzrost krańcowej produktywności efektywnej pracy, a zatem – przejściowo – przyspieszony wzrost płacy realnej. To czy względny udział wynagrodzeń kapitału i pracy w wytwarzanym produkcie wzrośnie, zmaleje czy pozostanie na niezmienionym poziomie, zależy od wartości wskaźnika elastyczności krańcowej stopy substytucji kapitału przez pracę względem technicznego uzbrojenia pracy (relacji kapitału do pracy).

makroekonomicznej teorii wzrostu podejściem bardzo efektywnym. Umożliwiła bowiem skupienie uwagi na tzw. podażowej stronie gospodarki, zostawiając na boku kwestie przejściowych odchyleń od stanów równowagi, odpowiedzialnych za wahania koniunktury gospodarczej i kojarzonych głównie z czynnikami leżącymi po stronie globalnego popytu (o charakterze „realnym" bądź pieniężnym)[40]. Jak stwierdza P. Romer „*Model Solowa wniósł znaczący wkład w rozwój ekonomii i był źródłem postępu w zakresie tworzenia narzędzi analitycznych. Było to niezwykle doniosłe przedstawienie sposobu, w jaki stosować można teorię równowagi ogólnej i wykorzystywać ją do opisu funkcjonowania rzeczywistego świata.* (...) *Solow wzbudził w nas przekonanie, że wykorzystując proste formy funkcyjne i upraszczające założenia, można mówić o równowadze w całej gospodarce i formułować na tej podstawie ważne konkluzje. Stanowiło to zupełnie odmienny sposób ujęcia teorii równowagi ogólnej w porównaniu z tym, jaki zaprezentowali Arrow i Debreu i w porównaniu z ich innymi, bardziej abstrakcyjnymi badaniami, jakie wówczas prowadzili. Musimy pamiętać o tym, że mniej więcej w tym samym czasie Solow i Samuelson musieli się zaangażować w „wojnę pozycyjną" przeciwko ekonomistom z Cambridge, w Anglii, aby zapewnić wolność dla tych, którzy chcieli posługiwać się pojęciem funkcji produkcji*!"[41].

[40] Pod koniec XX w. tego rodzaju podejście metodologiczne w makroekonomii, rozgraniczające długookresowy wzrost gospodarczy (jako zdeterminowany przez jej stronę podażową) i krótkookresowe wahania koniunktury gospodarczej (warunkowane przez stronę popytową) zostało zakwestionowane przez szkołę realnego cyklu koniunkturalnego. Teoretycy pracujący w tym nurcie badań makroekonomicznych podchodzą z pozycji równowagi ogólnej do analizy samego cyklu koniunkturalnego, dokonując przy tym swoistej integracji teorii wzrostu i fluktuacji, poprzez utożsamienie wahań koniunktury gospodarczej z fluktuacjami samego trendu, wywołanymi trwałymi wstrząsami ogólnej produktywności czynników (*total factor productivity* – skr. TEP). Zob. rozdział dtugi, punkt 2.4.

[41] B. Snowdon, H. R. Vane, *op. cit.*, s. 402. Koncepcja agregatowej funkcji produkcji, za pomocą której Solow dokonuje – wspomnianego przez P. Romera w przytoczonym cytacie – wprowadzenia teorii równowagi ogólnej do obszaru badań makroekonomicznych (zarówno teoretycznych, jak i empirycznych), niesie ze sobą poważne problemy teoretyczne i była w literaturze wielokrotnie kwestionowana. Sugestywnie na ten temat pisze M. Blaug, który podważa przy okazji logikę krytycznej argumentacji tzw. szkoły z Cambridge, koncentrującej się na problemach z mierzeniem kapitału, podkreślając z kolei trudności z dokonaniem logicznie spójnej agregacji mikroekonomicznych funkcji produkcji i uzasadnieniem „symplistycznej" neoklasycznej teorii podziału dochodu na zasadzie produkcyjności krańcowej w zastosowaniu do całości gospodarki. Zob. M. Blaug, *op. cit.*, s. 476 – 484.

Rozdział drugi

Zdolności eksplanacyjne modelu neoklasycznego

2.1. Model Solowa a „stylizowane fakty" wzrostu gospodarczego

Najważniejsze wnioski odnośnie długofalowego zachowania się systemów gospodarczych płynące z neoklasycznego modelu wzrostu, przedstawionego w rozdziale pierwszym, są zgodne z zestawem empirycznych regularności wzrostu gospodarczego w krajach rozwiniętych, zidentyfikowanych i podanych przez N. Kaldora w 1961 r., określanych mianem „stylizowanych faktów"[1]. Określenie „stylizowane" sugeruje pewne, mniejsze bądź większe uproszczenia rzeczywistości. Niemniej jednak, są one po dziś dzień uznawane za swego rodzaju „wzorzec", „*minimum wymagań, jakie każdy model wzrostu gospodarczego powinien spełniać*"[2].

Poniżej przedstawimy sześć „stylizowanych faktów" Kaldora, wskazując jednocześnie na ich podobieństwo do charakterystyk wzrostu równomiernego w modelu Solowa[3].

F1. Rzeczywiste stopy wzrostu produkcji oraz wydajności pracy są, na przestrzeni długich okresów, w przybliżeniu stałe. Wzrost wydajności pracy wynika z faktu, iż nakład pracy mierzony w roboczogodzinach rośnie znacznie wolniej niż produkt.

Jak pamiętamy z poprzedniego rozdziału, zgodnie z modelem Solowa, na ścieżce wzrostu równomiernego, stopa wzrostu produktu równa jest sumie, stałych z założenia, stóp wzrostu nakładów pracy i postępu techniczno – organizacyjnego. Oznacza to, że produkt na zatrudnionego rośnie według stopy postępu techniczno – organizacyjnego.

F2. Empirycznej relacji kapitału do produktu nie charakteryzuje żaden systematyczny trend zmian. Wynika stąd, że kapitał na zatrudnionego rośnie również w przybliżeniu ze stałą stopą, odpowiadającą stopie wzrostu wydajności pracy.

---

[1] Zob. N. Kaldor, *Capital Accumulation and Economic Growth*, w: Lutz F. A., Hague D. C. (eds), *The Theory of Capital*, St. Martin's Press, New York 1961, s. 177 – 222.

[2] B. Valdes, *Economic Growth. Theory, Empirics and Policy*, Edward Legar Publishing, Inc., Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA, 1999, s. 10.

[3] Ustalenia Kaldora można zaprezentować w różnych zestawieniach, gdyż niektóre z charakterystyk wynikają z innych.

W modelu Solowa, na ścieżce wzrostu równomiernego, kapitał na zatrudnionego rośnie z tą samą stopą, co produkt na zatrudnionego, tak, że relacja kapitału do produktu pozostaje stała, określona przez (1.39).

F3. Obserwowane stopy zysku z kapitału oraz realna stopa procentowa[4] charakteryzują się wysokim stopniem zmienności, lecz nie ujawniają widocznego trendu zmian. Występuje tu ostry kontrast w stosunku do płac realnych, które odznaczają się rosnącym trendem. Oznacza to, że długookresowy wzrost wydajności pracy jest w całości przenoszony na wzrost płac realnych i poziomu życia pracowników.

Zgodnie z modelem na ścieżce wzrostu równomiernego stopa zysku z kapitału (równa krańcowej produktywności kapitału) pozostaje stała, zaś stawka płac realnych (równa krańcowej wydajności pracy) rośnie z tą samą stopą, co wydajność pracy (równa stopie postępu techniczno – organizacyjnego).

Nietrudno zauważyć, że z faktów F2 i F3 wynika, że podział produktu (dochodu) na wynagrodzenia kapitału i pracy w długookresowej perspektywie można uznać w przybliżeniu za stały w czasie, co także znajduje potwierdzenie w modelu.

F4. W realnych gospodarkach, w długim horyzoncie czasowym, stosunek inwestycji brutto do produktu (stopa inwestycji brutto) nie ulega istotnym zmianom.

Przypomnijmy, że założenie o stałej stopie inwestycji jest w modelu koniecznym warunkiem asymptotycznej zbieżności gospodarki do ścieżki wzrostu równomiernego. Dane empiryczne pozwalają zatem wnioskować, że w analizie długookresowej założenie to jest wystarczająco wiarygodne. Ponieważ stopa oszczędności (determinująca stopę inwestycji) jest w modelu parametrem behawioralnym, bezpośrednie teoretyczne uzasadnienie tendencji do utrzymywania się jej wartości na stałym poziomie wymaga odwołania się *explicite* do preferencji podmiotów podejmujących decyzje o podziale dochodów między konsumpcję i oszczędności. Zadanie to realizujemy w rozdziale trzecim pracy.

Listę wymienionych dotąd, sekularnych tendencji, skatalogowanych przez Kaldora, można zatem postrzegać jako empiryczną egzemplifikację teoretycznej koncepcji wzrostu równomiernego, stanowiącej centralny punkt neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego.

---

[4] W warunkach konkurencji doskonałej (oznaczającej m.in. brak ryzyka) i bez groźby inflacji stopa zwrotu z kapitału jest równa realnej stopie procentowej od obligacji i innych aktywów finansowych.

Pozostałe dwa „stylizowane fakty" mają nieco inny charakter, gdyż odnoszą się do porównań międzynarodowych.

F5. Istnieje znaczne zróżnicowanie stóp wzrostu produkcji i wydajności pracy pomiędzy krajami.

Wynikające z modelu przesłanki zróżnicowania stóp wzrostu w różnych gospodarkach przedstawimy w punkcie 2.3, w kontekście zagadnienia konwergencji gospodarczej.

F6. Gospodarki różnią się między sobą udziałem zysków w dochodach oraz stopami inwestycji, a obie te wielkości są ze sobą silnie dodatnio skorelowane.

Z modelu Solowa nie wynikają żadne wnioski odnośnie zależności pomiędzy podziałem produktu na płace i zyski z kapitału a stopą inwestycji. Zauważmy jednak, że o ile nie zakładamy w modelu funkcji produkcji Cobba - Douglasa (charakteryzującej się stałą elastycznością produktu względem kapitału, $F_K K/Y = \bar{k} f'(\bar{k}) / f(\bar{k})$, determinującą - przy założeniu, że czynniki produkcji opłacane są według ich krańcowych produktywności - udział wynagrodzenia kapitału w produkcie), model nie wyklucza również takiej zależności. Jak pokażemy w kolejnym punkcie tego rozdziału, stopa inwestycji determinuje poziom kapitału *njep* w stanie stacjonarnym. Aby z modelu wynikała jakaś zależność pomiędzy udziałem zysków z kapitału w produkcie a stopą inwestycji, najpierw musiałaby zostać skonkretyzowana zależność pomiędzy elastycznością produktu względem kapitału a poziomem tego kapitału, dana we wzorze $\bar{k} f'(\bar{k}) / f(\bar{k})$.

2.2. Model Solowa a badania porównawcze

Pomimo, że model Solowa (podobnie jak wszystkie modele wzrostu gospodarczego przedstawiane w tej pracy) opisuje gospodarkę pojedynczego kraju, tytułowe zdolności eksplanacyjne tego modelu można oceniać nie tylko w odniesieniu do analiz jednej, odosobnionej gospodarki, lecz także w odniesieniu do badań porównawczych.

Model Solowa potwierdza jednoznacznie kierunek zależności, ujawniających się w danych przekrojowych między poziomem dochodu *p.c.* a stopą oszczędności (zależność dodatnia) oraz tempem przyrostu ludności (zależność ujemna).

Dla formalnego potwierdzenia kierunku oraz zbadania siły wpływu stopy oszczędności na położenie długookresowej ścieżki wzrostu, wyprowadzimy wzór na elastyczność produktu (na jednostkę wydajności) na ścieżce wzrostu równomiernego względem stopy oszczędności.

Z definicji elastyczności mamy:

$$\varepsilon_s^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s} \cdot \frac{s}{\bar{y}_e} = \frac{f'(\bar{k}_e)\partial \bar{k}_e}{\partial s} \cdot \frac{s}{f(\bar{k}_e)}. \tag{2.1}$$

Na ścieżce wzrostu równomiernego obowiązuje zależność (1.36), którą możemy zapisać w postaci:

$$sf(\bar{k}_e) = (n+m+\delta)\bar{k}_e. \tag{2.2}$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu względem s i prostych przekształceniach, dostajemy:

$$\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s} = \frac{f(\bar{k}_e)}{n+m+\delta - sf'(\bar{k}_e)}. \tag{2.3}$$

Podstawiając (2.3) do (2.1) i korzystając ponownie z (2.2), po kilku elementarnych przekształceniach otrzymujemy:

$$\varepsilon_s^{\bar{y}_e} = \frac{\bar{k}_e f'(\bar{k}_e)/f(\bar{k}_e)}{1-\bar{k}_e f'(\bar{k}_e)/f(\bar{k}_e)}. \tag{2.4}$$

W celu uproszczenia formuły (2.4) przyjmujemy oznaczenie:

$$\alpha(\bar{k}) = \bar{k} f'(\bar{k})/f(\bar{k}), \tag{2.5}$$

gdzie $\alpha(\bar{k})$ to elastyczność produktu względem kapitału[5].

Przy założeniu, że realne wynagrodzenie kapitału równe jest jego produktowi krańcowemu, $\alpha(\bar{k})$ oznacza również udział wynagrodzenia kapitału w produkcie. Na ścieżce wzrostu równomiernego, czyli dla $\bar{k} = \bar{k}_e$, $\alpha(\bar{k})$ przyjmuje stałą wartość $\alpha(\bar{k}_e)$. Zgodnie z (2.4) i (2.5) mamy:

$$\varepsilon_s^{\bar{y}_e} = \frac{\alpha(\bar{k}_e)}{1-\alpha(\bar{k}_e)}.$$

Ponieważ badania empiryczne pokazują, że w większości gospodarek zindustrializowanych część dochodu przypadająca kapitałowi wynosi około 1/3[6], to, jak

---

[5] Nietrudno zauważyć, że $\partial Y/\partial K \cdot K/Y = \partial y/\partial k \cdot k/y = f'(\bar{k}) \cdot \bar{k}/f(\bar{k}) = \alpha(\bar{k})$, skoro $K/Y = k/y = \bar{k}/f(\bar{k})$ oraz $\partial Y/\partial K = \partial y/\partial k = f'(\bar{k})$.

[6] Zob. np. A. Maddison, *Growth and Slowdown in Advanced Capitalist Economies: Techniques of Quantitative Assessment*, Journal of Economic Literature, 25, 1987, June, s. 649 – 698.

wynika z powyższego wzoru, elastyczność produktu względem stopy oszczędności (inwestycji) należałoby szacować na około 1/2. Przykładowo, z modelu wynika, że podniesienie stopy inwestycji z 0,1 do 0,12 (czyli o 20 %) wywoła, w długofalowej perspektywie, dziesięcioprocentowy wzrost produktu *njep*.

W celu określenia wpływu stopy wzrostu siły roboczej (stopy przyrostu naturalnego) na poziom produktu *njep* w stanie stacjonarnym, wyprowadzamy najpierw formułę na elastyczność $\bar{y}_e$ względem $n+m+\delta$:

$$\varepsilon_{n+m+\delta}^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial(n+m+\delta)} \cdot \frac{n+m+\delta}{\bar{y}_e} = f'(\bar{k}_e)\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta)} \cdot \frac{n+m+\delta}{f(\bar{k}_e)}. \qquad (2.6)$$

Różniczkując równanie (2.2) względem $(n+m+\delta)$, dostajemy:

$$\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m)} = \frac{\bar{k}_e}{sf'(\bar{k}_e)-(n+m)}. \qquad (2.7)$$

Podstawiając (2.7) do (2.6) oraz korzystając z (2.2) i z definicji (2.5), po kilku elementarnych przekształceniach otrzymujemy:

$$\varepsilon_{n+m+\delta}^{\bar{y}_e} = -\frac{\bar{k}_e f'(\bar{k}_e)/f(\bar{k}_e)}{1-\bar{k}_e f'(\bar{k}_e)/f(\bar{k}_e)} = -\frac{\alpha(\bar{k}_e)}{1-\alpha(\bar{k}_e)}.$$

Szacunek bezwzględnej wartości $\varepsilon_{n+m+\delta}^{\bar{y}_e}$ odpowiada zatem szacunkowi wartości $\varepsilon_s^{\bar{y}_e}$, z tym, że kierunek wpływu poszczególnych parametrów na produkt jest przeciwny. Elastyczność produktu względem stopy przyrostu naturalnego możemy teraz policzyć w następujący sposób[7]:

$$\varepsilon_n^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial n}\frac{n}{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial(n+m+\delta)} \cdot \frac{\partial(n+m+\delta)}{\partial n} \cdot \frac{n}{\bar{y}_e} = \frac{n}{n+m+\delta}\varepsilon_{n+m+\delta}^{\bar{y}_e}.$$

Empiryczną analizę wpływu poszczególnych parametrów modelu Solowa na poziom produktu *p.c.* (przy założeniu, że gospodarki znajdują się na swoich ścieżkach wzrostu równomiernego) przeprowadzili m.in. N. G. Mankiw, D. Romer i D. N. Weil[8].

Poddali oni estymacji następujące równanie regresji:

$$ln\, y = \frac{\alpha}{1-\alpha} ln\, s - \frac{\alpha}{1-\alpha} ln\left(n+m+\delta\right) + a + \varepsilon,$$

---

[7] W analogiczny sposób możemy uzyskać formuły na elastyczność $\bar{y}_e$ względem m i względem δ.

[8] N. G. Mankiw, D. Romer i D. N. Weil, *A Contribiution to the Empirics of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, May 1992, s. 407 – 437.

wyprowadzone z równania (1.36), charakteryzującego stan stacjonarny w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba – Douglasa, postaci $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, przy założeniu, że $lnA(0) = a + \varepsilon$. Założenie to oznacza, że wszelkie różnice w poziomie technologii między krajami traktuje się jako losowe (*country – specific shocks*), zgodnie z duchem modelu Solowa[9]. Ponadto przyjęto tę samą wartość sumy $m + \delta = 0,05$ dla wszystkich krajów oraz założono niezależność s i n od ε (co pozwala szacować równanie MNK, unikając niezgodności estymatorów). Badaniu poddano trzy grupy krajów: 98 krajów za wyjątkiem tych, w których większa część GDP pochodzi ze sprzedaży surowców energetycznych; 75 krajów o ludności przekraczającej 1 milion w 1960r.; 22 kraje OECD. We wszystkich trzech przypadkach znaki oszacowanych parametrów okazały się zgodne z przewidywaniami modelu, jednak dla pierwszych dwóch prób, dla których uzyskano zadawalające dopasowanie równania regresji do danych empirycznych, otrzymane wartości parametrów znacznie przekroczyły wartości implikowane przez model teoretyczny. Poza tym, pomimo, że ograniczenie (założenie o równości) nałożone na parametry stojące przy $ln\, s$ i $ln(n + m + \delta)$ nie zostało w żadnej próbie odrzucone, to implikowane wartości α dla pierwszych dwóch prób, dla których były one silnie statystycznie istotne, okazały się dwukrotnie wyższe w porównaniu z przewidywaniami modelu. Bardzo niskie dopasowanie oszacowanego równania regresji do obserwacji w próbie krajów OECD oraz znacząco niższe wartości współczynników autorzy tłumaczą (także na podstawie dalszych badań), przyjmując hipotezę o dużych odchyleniach tych gospodarek od ich ścieżek wzrostu równomiernego, wywołanych przez II wojnę światową, która niewątpliwie bardziej oddziałała na te właśnie kraje niż na resztę świata.

Na podstawie wyników przeprowadzonych analiz, wymienieni autorzy doszli do wniosku, że *„mimo, że model* (Solowa – przyp. aut.) *pozwala na właściwą prognozę kierunku oddziaływania oszczędności i przyrostu ludności, to nie pozwala na prawidłową prognozę skali tego oddziaływania. W świetle danych empirycznych rzeczywisty wpływ oszczędności i przyrostu ludności na poziom dochodu okazuje się znacznie większy.”*[10]

[9] Zgodnie z logiką założenia o egzogenicznym w stosunku do gospodarki, nieucieleśnionym charakterze postępu techniczno – organizacyjnego, porównując na podstawie modelu różne gospodarki powinniśmy zakładać, że w różnych krajach postęp ten zachodzi z tą samą stopą.

[10] Tamże, s. 408.

Dla wszystkich przytaczanych do tej pory faktów empirycznych poszukiwaliśmy ich odzwierciedlenia w modelu przy założeniu, że gospodarki znajdują się na swoich ścieżkach wzrostu równomiernego. Idąc dalej tym tropem należałoby stwierdzić, że wnioski płynące z modelu pozostają w sprzeczności, już na poziomie samej analizy jakościowej. z obserwowanym w rzeczywistości stosunkowo silnym związkiem między stopami inwestycji i stopami wzrostu gospodarczego. Dane empiryczne wskazują dość wyraźnie, że im większy jest udział inwestycji w produkcie, tym wyższe jest tempo rozwoju gospodarki[11].

W modelu Solowa na ścieżce wzrostu równomiernego stopa wzrostu produktu *p.c.* nie zależy od stopy inwestycji i jest zdeterminowana wyłącznie przez stopę zmian jakościowych. Jeśli jednak weźmie się pod uwagę fakt, iż nie wszystkie kraje musiały osiągnąć już swoje ścieżki wzrostu równomiernego (co szczególnie dotyczyć może tych mniej zaawansowanych w rozwoju) oraz uwzględni się możliwość przepływu kapitału między krajami, to w tak rozszerzonym polu analizy okazuje się możliwe teoretyczne uzasadnienie obserwowanej zależności. Kwestię tę rozpatrujemy w kontekście problemu konwergencji w następnym punkcie tego rozdziału.

2.3. Problem konwergencji gospodarczej

Zdaniem R. Barro model Solowa stanowi mocną podstawę do sformułowania hipotezy konwergencji, zgodnie z którą kraje ubogie, o niższym poziomie PKB *p.c.* i niższym nasyceniu kapitałem, powinny wykazywać szybszy wzrost niż kraje bogate i w ten sposób doganiać je pod względem poziomu zamożności[12].

Ponieważ w literaturze poświęconej temu zagadnieniu panuje pewne zamieszanie terminologiczne, postaramy się krótko uporządkować dystynkcje pojęciowe[13].

---

[11] Zob. M. Burda, Ch. Wyplosz, *Makroekonomia. Podręcznik europejski*. PWE, Warszawa 1995, s. 185 (Rysunek 6.10), za: R. Summers, A. Heston, *The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950 – 1988*, Quarterly Journal of Economics, No. 106, s. 327 – 368 oraz R. J. Barro, *Economic Growth In a Cross Section of Countries*, Quarterly Journal of Economics, May 1991, s. 407 – 443.

[12] Zob. R. J. Barro, *op. cit.*, s. 407.

[13] Często np. utożsamia się bezwarunkową wersję hipotezy konwergencji z konwergencją absolutną, zaś warunkową wersję tej hipotezy z konwergencją względną, co prowadzi np. do niewłaściwego przeciwstawienia zbieżności absolutnej i warunkowej. Zob. np. B. Snowdon, H. R. Vane, *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*, Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 2003, s.105 – 106.

Z logicznego punktu widzenia hipoteza konwergencji może mieć charakter warunkowy lub bezwarunkowy.

O konwergencji warunkowej mówi się wtedy, gdy identyfikuje się zbieżność pewnej zmiennej (w naszym przypadku - produktu *p.c.*) w różnych gospodarkach do wspólnego poziomu pod warunkiem, że gospodarki te charakteryzują takie same wartości określonych parametrów, determinujących położenie długookresowej równowagi. Z silniejszą wersją hipotezy - konwergencją bezwarunkową - mamy do czynienia wówczas, jeśli przyjmuje się, iż zbieżność powyższa występuje zawsze, bez względu na wartości jakichkolwiek parametrów. Zarówno wersja warunkowa jak i bezwarunkowa oznaczają konwergencję absolutną w tym sensie, że gospodarki osiągają w długim okresie ten sam poziom zamożności.

Oprócz tego w literaturze funkcjonuje również pojęcie konwergencji względnej, oznaczającej – w odniesieniu do wzrostu gospodarczego – szybszy wzrost tych gospodarek, które oddalone są bardziej od swoich, niekoniecznie jednakowych, punktów równowagi długookresowej. Zauważmy, iż ta wersja hipotezy konwergencji nie jest równoważna z podaną wyżej wersją warunkową i jest od niej silniejsza[14].

Nietrudno zauważyć, że teza o konwergencji warunkowej wynika z modelu w sposób bezpośredni. Jeśli bowiem gospodarki różnych krajów charakteryzują się takimi samymi stopami oszczędności, przyrostu naturalnego, deprecjacji kapitału oraz nieograniczonym dostępem do tej samej technologii, to zgodnie z modelem powinny wszystkie podążać do wspólnego stanu stacjonarnego, określonego przez (1.36), przy czym im kraj biedniejszy, mniej zasobny w kapitał, a zatem bardziej oddalony od docelowego poziomu $\bar{k}_e$, tym szybciej powinien akumulować kapitał i rozwijać się, doganiając tym samym kraje bogatsze. Jednocześnie, jeżeli przytoczone wyżej warunki nie są spełnione, to każda gospodarka zmierza do swojego własnego stanu równowagi długookresowej, a różnice tempa wzrostu w okresie przejściowym wynikają ze względnego oddalenia gospodarek od ich ścieżek wzrostu równomiernego (konwergencja względna).

Hipoteza konwergencji warunkowej nie wyklucza zatem sytuacji, że kraj o niższych poziomach kapitału i produktu *p.c.* wykazuje niższą stopę wzrostu niż kraj bogatszy,

[14] Konwergencja względna implikuje bowiem konwergencję warunkową, choć nie odwrotnie. Ponieważ równocześnie konwergencja bezwarunkowa implikuje konwergencję warunkową, to konwergencja warunkowa stanowi warunkiem konieczny zarówno konwergencji bezwarunkowej, jak i względnej. Ponadto, ściśle rzecz biorąc, bezwarunkowa i względna wersja hipotezy konwergencji wykluczają się wzajemnie (tzn. prawdziwość jednej z nich implikuje fałszywość drugiej).

pod warunkiem, że znajduje się relatywnie bliżej swojego punktu długookresowej równowagi dynamicznej.

Z równania (1.35), po podzieleniu obu stron przez $\bar{k}$, otrzymujemy wzór na stopę wzrostu kapitału przypadającego na jednostkę efektywnej pracy:

$$\dot{\bar{k}}/\bar{k} = \frac{sf(\bar{k})}{\bar{k}} - (n + m + \delta). \tag{2.8}$$

Ponieważ $k = A\bar{k}$, zatem:

$$\dot{k}/k = \dot{\bar{k}}/\bar{k} + m. \tag{2.9}$$

Na podstawie (2.8) i (2.9) oraz korzystając z definicji $\bar{k}$, otrzymujemy:

$$\dot{k}/k = \frac{sAf(A^{-1}k)}{k} - (n + \delta). \tag{2.10}$$

Analogicznie, z uwagi na równanie $y = A\bar{y}$, dostajemy:

$$\dot{y}/y = \dot{\bar{y}}/\bar{y} + m. \tag{2.11}$$

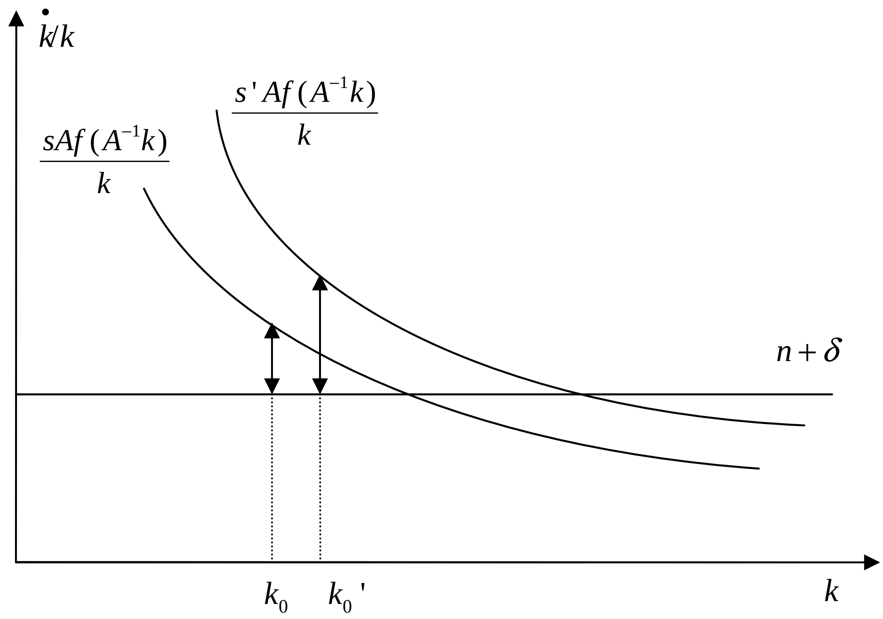
Jednocześnie, na podstawie równania $\bar{y} = f(\bar{k})$ oraz (2.5), mamy: $\dot{\bar{y}}/\bar{y} = \alpha(\bar{k}) \cdot \dot{\bar{k}}/\bar{k}$. Stąd oraz z (2.9) i (2.11) otrzymujemy:

$$\dot{y}/y = \alpha(\bar{k}) \cdot \dot{k}/k + (1 - \alpha(\bar{k}))m. \tag{2.12}$$

Na rysunku 2.1 stopa wzrostu kapitału *p.c.* odpowiada – zgodnie z (2.10) - pionowej odległości między krzywą: $\frac{sAf(A^{-1}k)}{k}$, która jest malejącą funkcją *k*, a prostą na poziomie $(n + \delta)$.

Rysunek 2.1

Mechanizm konwergencji względnej



źródło: opracowanie własne

Jeśli zatem, ze względu na wyższą stopę oszczędności (*s'* > *s*) i/lub wyższy poziom technologii[15], wspomniana krzywa dla kraju wysoko rozwiniętego jest położona wyżej niż dla kraju mniej rozwiniętego, to ten pierwszy może osiągać wyższą stopę wzrostu kapitału *p.c.* pomimo wyższego jego poziomu ($k_0' > k_0$).

Potencjalne znaczenie może mieć również fakt, że kraje zacofane cechują się z reguły wyższymi stopami przyrostu naturalnego, niż kraje wysoko rozwinięte[16]. Prawidłowość ta wynika z kolei z obserwowanej silnej ujemnej korelacji pomiędzy wskaźnikami płodności a stopami wzrostu PKB *p.c.*, która, jak się okazuje, nie jest równoważona przez odpowiednio wyższą śmiertelność w krajach uboższych[17].

---

[15] Ze względu na mniejszą od jedności wartość elastyczności produktu względem kapitału, wartość $\frac{sAf(A^{-1}k)}{k}$ rośnie wraz ze wzrostem *A*.

[16] 95 % ogólnego przyrostu ludności całego świata w ostatnim dziesięcioleciu XX wieku miało miejsce w krajach Afryki, Azji i Ameryki Łacińskiej. Zob. J. Skodlarski, R. Materna, *Tendencje rozwoju gospodarki światowej na przestrzeni dziejów*, Gospodarka w Praktyce i Teorii, Nr 1 (12) 2003; s. 90 – 91.

[17] Eksplozja demograficzna w drugiej połowie XX wieku w krajach rozwijających się wynikała de facto ze spadku wskaźników umieralności w tych krajach, dzięki osiągnięciom krajów wysoko rozwiniętych w dziedzinie medycyny i ochrony zdrowia. Zob. *op. cit.* s. 91.

Jeśli zaś wyższa stopa wzrostu kapitału *p.c.* przekłada się na wyższą stopę wzrostu produktu *p.c.* (patrz równanie (2.12))[18], to w rozważanym przypadku porównywane gospodarki nie wykazywałyby tendencji do wyrównywania poziomów zamożności, lecz przeciwnie, do pogłębiania istniejących różnic.

Rozumowanie to komplikuje się jednak, jeśli uwzględnia się prawdopodobne różnice w stopach „postępu technicznego". Można bowiem zasadnie argumentować, że kraje rozwijające się, o niższych poziomach produktu *p.c.*, z reguły mniej zaawansowane technologicznie, powinny wykazywać tendencję do wyższej stopy innowacyjności, niż kraje wysoko rozwinięte, stanowiące – według określenia S. Gomułki – światowy „obszar granicy technologicznej" (*technology frontier area* - skr. TFA)[19]. Przesłanką takiej dodatniej zależności pomiędzy stopą postępu technicznego a wielkością „luki technologicznej" może być na przykład oczywisty fakt, że kopiowanie technologii, nie tylko opracowanych cudzym nakładem środków, ale także zweryfikowanych już w praktyce gospodarczej, jest z pewnością o wiele mniej kosztowne i szybsze niż tworzenie i implementowanie nowych[20]. W takim wypadku, zgodnie z formułą (2.12), stopa wzrostu gospodarczego może być niższa, nawet przy wyższej stopie wzrostu kapitału *p.c.*. Tego typu wnioskowanie, dopuszczające zróżnicowanie poziomu technologii oraz stopy innowacyjności między krajami, stanowi już jednak *de facto* pewne wykroczenie poza ściesłe ramy analityczne modelu wzrostu, będącego tutaj przedmiotem analizy[21].

Pozostając przy hipotezie konwergencji warunkowej, możemy oszacować tempo zbieżności gospodarek różnych krajów do wspólnego stanu stacjonarnego. Pokażemy, że zgodnie z modelem produkt w otoczeniu stanu stacjonarnego zbliża się doń z szybkością odwrotnie proporcjonalną do odległości od $\overline{y}_e$.

Dokonując liniowej aproksymacji równania (1.35), postaci[22]:

---

[18] Dla uproszczenia abstrahujemy tutaj od możliwej zależności α od $\overline{k}$.

[19] Zob. S. Gomułka, *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, Centrum Analiz Społeczno – Ekonomicznych, Warszawa 1990, s. 35, 148.

[20] Jednocześnie, badania empiryczne wskazują, że dla krajów najbardziej zacofanych luka technologiczna stanowi raczej obciążenie ujawniające się w tym, że zależność między jej wielkością a stopą innowacyjności jest wręcz odwrotna; zob. S. Gomułka, *op. cit.*, s. 140.

[21] Przykładem tego typu podejścia jest model zaproponowany przez Barro i Sala-i-Martin, zob. R. J. Barro, X. Sala-.i- Martin, *Convergence*, Journal of Political Economy, April 1992, vol.100, no. 2, s. 223-51.

[22] Wyprowadzenie formuły (2.15) można znaleźć np. w: D. Romer, *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000, s. 40 – 41. Dalsza część wnioskowania, prowadząca do

$$\dot{\bar{k}}(t) = sf(\bar{k}(t)) - (n+m+\delta)\bar{k}(t),$$

w otoczeniu punktu dynamicznej równowagi długookresowej $\bar{k}_e$, możemy wyznaczyć, a następnie oszacować ową szybkość zbieżności. Przybliżając liniowo szeregiem Taylora powyższe równanie dostajemy:

$$\dot{\bar{k}} \approx \dot{\bar{k}}(\bar{k}_e) + \frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{k}}(\bar{k}_e) \cdot (\bar{k} - \bar{k}_e), \tag{2.13}$$

gdzie $\dot{\bar{k}}(\bar{k}_e) = 0$ oraz:

$$\frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{k}}(\bar{k}_e) = sf'(\bar{k}_e) - (n+m+\delta). \tag{2.14}$$

Korzystając z równania (2.2) oraz definicji $\alpha(\bar{k})$ (2.5), formułę (2.14) możemy zapisać:

$$\frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{k}}(\bar{k}_e) = -\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta),$$

czyli ostatecznie (2.13) zapisujemy w następującej postaci:

$$\dot{\bar{k}} \approx -\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)(\bar{k} - \bar{k}_e). \tag{2.15}$$

Jednocześnie, różniczkując względem czasu obie strony równania $\bar{y} = f(\bar{k})$, dostajemy:

$$\dot{\bar{y}}/\bar{y} = \frac{f'(\bar{k})}{f(\bar{k})} \cdot \dot{\bar{k}} = \alpha(\bar{k}) \cdot \dot{\bar{k}}/\bar{k}. \tag{2.16}$$

Mnożąc (2.16) obustronnie przez $\bar{y} = f(\bar{k})$ oraz podstawiając w miejsce $\dot{\bar{k}}$ prawą stronę (2.15), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{y}} \approx -\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)(\bar{k} - \bar{k}_e) f'(\bar{k}). \tag{2.17}$$

Ponieważ $\bar{y}_e$ możemy przybliżać liniowo w następujący sposób:

$$\bar{y}_e \approx \bar{y} + f'(\bar{k}) \cdot (\bar{k}_e - \bar{k}).$$

to (2.17) możemy ostatecznie zapisać w postaci:

$$\dot{\bar{y}} \approx -\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)(\bar{y} - \bar{y}_e). \tag{2.18}$$

---

formuły (2.19), stanowi rezultat własny autora. W znanej autorowi literaturze (cytowanej na końcu pracy) można natomiast znaleźć wyprowadzenie tej formuły dla przypadku funkcji Cobba – Douglasa.

Ponieważ $\dot{\bar{y}} = (\bar{y} - \dot{\bar{y}}_e)$, to wyrażenie: $-\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)$ stanowi stopę spadku różnicy $(\bar{y} - \bar{y}_e)$, czyli odległości produktu *njep* od stanu stacjonarnego. Rozwiązanie równania (2.18) ma postać następującą:

$$\bar{y}(t) - \bar{y}_e \approx e^{-\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)t}\left(\bar{y}(0) - \bar{y}_e\right), \tag{2.19}$$

gdzie $\bar{y}(0)$ oznacza pewną początkową wartość $\bar{y}(t)$.

Można dokonać kalibracji tego równania dla zbadania, ile czasu potrzeba gospodarce, startującej z dowolnego miejsca, na przebycie połowy drogi do punktu, w którym wstępuje na ścieżkę wzrostu równomiernego.

Zakładając, jak wcześniej, $n + m + \delta = 6\%$ rocznie oraz $\alpha = 1/3$, otrzymujemy średnie tempo zbieżności na poziomie $(1-\alpha)(n+m+\delta) =$ 4% rocznie. Logarytmując obustronnie (2.19) i dokonując prostych przekształceń, dostajemy:

$$t \approx -\frac{1}{(1-\alpha)(n+m+\delta)} \cdot \ln\frac{\bar{y}(t) - \bar{y}_e}{\bar{y}(0) - \bar{y}_e}.$$

Podstawiając $\frac{\bar{y}(t) - \bar{y}_e}{\bar{y}(0) - \bar{y}_e} = 0{,}5$, obliczamy $t \approx -\ln 0{,}5/0{,}04 \approx 17{,}3$.

Uzyskany wynik stanowi przybliżony czas (mierzony w latach) pokonania przez gospodarkę połowy odległości między stanem początkowym a stanem stacjonarnym**.** Można go również utożsamiać z wynikającym z modelu połówkowym czasem trwania procesów konwergencji w grupie krajów charakteryzujących się tym samym stanem stacjonarnym $\bar{y}_e$ (zgodnie z hipotezą konwergencji warunkowej).

Ze studiów R. Barro i X. Sala-i-Martina wynika jednakże, że dla obszarów potencjalnie spełniających przesłanki hipotezy konwergencji warunkowej (a zatem charakteryzujących się podobnymi poziomami $\bar{y}_e$), jak poszczególne stany USA (w latach 1880 – 1988) oraz regiony Europy Zachodniej (w latach 1950 – 1985), niwelowanie występujących różnic w poziomie produktu *p.c.* obywało się w średnim tempie 2% rocznie[23]. Nawet zatem przy mało wiarygodnym założeniu o braku

[23] Zob. R. J. Barro, Sala-i- X. Martin, *op. cit*.

Wyższe tempo zbieżności uzyskali Z. Matkowski i M. Próchnik w studiach empirycznych nad konwergencją w krajach Europy Środkowo – Wschodniej w okresie 1993 – 2003. Niwelowanie różnic w poziomie rozwoju pomiędzy ośmioma krajami, które w 2004 przystąpiły do Unii Europejskiej, odbywało się w średnim tempie 3,4 % rocznie. Jednakże w analizie zbieżności pomiędzy tymiż krajami a dotychczasowymi członkami Unii, zarówno przy rozpatrywaniu poszczególnych krajów z osobna, jak też w ogólniejszym ujęciu regionalnym (UE – 15 i 8 nowych członków), uzyskane wyniki (odpowiednio –

przepływów kapitału z obszarów bogatszych do biedniejszych, potencjalnie przyspieszających procesy konwergencji (choć, z drugiej strony, przy równie mało realistycznym założeniu o dostępie do tej samej technologii w każdym momencie), wynikające z modelu tempo konwergencji okazuje się dwukrotnie przewyższać to obserwowane w rzeczywistości.

Wydaje się jednak, że niezależnie od scharakteryzowanego powyżej mechanizmu zbieżności warunkowej, model Solowa sugeruje znacznie silniejszą, bo bezwarunkową wersję hipotezy konwergencji.

Dwie zasadnicze przesłanki tej hipotezy są następujące:

1) Niekonkurencyjny charakter wiedzy powoduje, że kraje biedniejsze mogą - drogą importu, dyfuzji oraz naśladownictwa nieznanych im dotychczas technologii - czerpać korzyści zewnętrzne z szybszego rozwoju technologicznego krajów bogatych. Różnice w zamożności, o tyle, o ile warunkowane są przez stopień zaawansowania technologicznego, powinny zatem zanikać, w miarę jak kraje mniej rozwinięte uzyskują dostęp do najnowocześniejszych metod wytwarzania i organizacji produkcji.

2) Przy założeniu, że kraje uzyskują dostęp do tej samej technologii, niższy PKB *p.c.* musi wynikać – zgodnie z założoną w modelu funkcją produkcji - z niższego zasobu kapitału *p.c.*, co oznacza z kolei wyższą stopę przychodowości tego kapitału. Stanowi to bodziec do przepływu kapitału z krajów bogatych do biednych i warunkuje efekt doganiania.

Można oszacować siłę wspomnianych wyżej bodźców do przepływu kapitału (przy założeniu, że kraje mają dostęp do tej samej technologii). Innymi słowy, chcemy dowiedzieć się, jakie różnice w poziomie kapitału *p.c.* i - co za tym idzie - stopie jego przychodowości wiążą się, zgodnie z modelem, z daną różnicą w poziomach produktu *p.c.*, zakładając, że te pierwsze miałyby być jedynym czynnikiem wyjaśniającym obserwowane różnice zamożności między krajami.

Zgodnie z definicją elastyczności produktu względem kapitału, mamy:

$$\frac{dy}{dk}\frac{k}{y} = \alpha(k)\,. \tag{2.20}$$

1,94% i 2,17%) odpowiadają tym, otrzymanym przez Barro i Sala-i-Martina. Zob. Z. Matkowski i M. Próchnik, *Zbieżność rozwoju gospodarczego w krajach Europy Środkowo – Wschodniej i w stosunku do Unii Europejskiej*, Ekonomista 2005, nr 3, s. 293 – 319, szczególnie 298 – 304.

Przyjmujemy dla uproszczenia, że $\alpha(k)$ jest stałe, czyli $\alpha(k)=\alpha$. Mnożąc obie strony (2.20) przez dk/k, a następnie całkując obustronnie, otrzymujemy $\ln y=\alpha \ln k+c$, zaś po opuszczeniu logarytmów:

$$y=Ck^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad k=By^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad B=C^{-\frac{1}{\alpha}}>0, \tag{2.21}$$

gdzie $C=e^{c}>0$ obejmuje wpływ wszystkich innych czynników poza kapitałem *p.c.* na produkt *p.c.*. Podstawiając za k w (2.20) prawą stronę równania (2.21), po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dk}=\alpha B^{-1}y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \tag{2.22}$$

Przyjmując, jak dotąd, α = 1/3, na podstawie (2.21) i (2.22), wnioskujemy, że przy pominięciu wszelkich różnic w poziomie wykorzystywanej technologii, wytłumaczenie 10 - krotnej różnicy w produkcie *p.c.*[24] wymagałoby, odpowiednio, 1000 - krotnego zróżnicowania kapitału na pracownika i 100 - krotnego zróżnicowania krańcowej produktywności kapitału. Z modelu wynika zatem, że bodźce do przepływu kapitału w przypadku różnicy w poziomach zamożności powinny być bardzo silne.
Z przeprowadzonych obliczeń wynika również olbrzymie zróżnicowanie stosunku kapitału do produktu między krajami różniącymi się poziomem produktu *p.c.*. Dla kraju o 10 - krotnie mniejszym poziomie produktu *p.c.*, relacja ta powinna być 100 - krotnie mniejsza.

Biorąc pod uwagę dowolnie szeroki zakres krajów, nie znajduje się różnic w kapitałochłonności produkcji tego rzędu, jakie wynikają z modelu. Podobnie niewiarygodne są wymagane różnice produktu krańcowego kapitału, które mogłyby tłumaczyć istniejące rozpiętości dochodów. W obliczu różnic tego rzędu w stopach zwrotu z kapitału trudno byłoby wyobrazić sobie, w jaki sposób jakiekolwiek inwestycje w krajach bogatych są w ogóle podejmowane, nawet jeśli uwzględni się takie czynniki ograniczające mobilność kapitału, jak ryzyko polityczne (i związane z nim ryzyko wywłaszczenia), niedorozwój infrastruktury w krajach biedniejszych, itp.

Przy okazji rozważań nad konwergencją uzyskujemy zatem jeszcze jeden ważny wniosek ogólniejszej natury: jeśli przychody osiągane na rynku przez kapitał mają stanowić przybliżony wskaźnik jego wkładu w produkt (czyli spełniona jest zasada

[24] Tej wielkości różnicę przywołuje np. P. Romer, jako charakteryzującą stosunek zamożności (mierzony poziomem produktu *p.c.*) w USA i na Filipinach w 1960 r. Zob. P. M. Romer., *The Origins of Endogenous Growth*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 6.

wynagradzania czynników według ich krańcowych produktywności, co umożliwia określanie elastyczności produktu względem kapitału na podstawie udziału zysków z kapitału w dochodzie), to rozpiętości w akumulacji kapitału nie są w stanie wytłumaczyć obserwowanych międzynarodowych różnic zamożności. Rolę czynnika wyjaśniającego te różnice muszą przejąć czynniki jakościowe, które określamy tutaj mianem stopnia zaawansowania techniczno - organizacyjnego.

Z hipotezy konwergencji bezwarunkowej wynika jeszcze jedna istotna predykcja, która zdaje się nie znajdować potwierdzenia w danych empirycznych. Jeśli różnicom w poziomie zamożności między krajami miałyby towarzyszyć masowe przepływy kapitału z krajów bogatych do biednych, to stopy inwestycji w krajach ubogich powinny znacznie przewyższać krajowe stopy oszczędności, odpowiednio do tego, jak część inwestycji w tych krajach miałaby być finansowana poprzez deficyty handlowe. Odpowiednio, stopy oszczędności powinny być wyższe od stóp inwestycji w krajach bogatych, w takim stopniu, w jakim oszczędności tych krajów finansują - poprzez nadwyżki handlowe - inwestycje za granicą. Idąc dalej tym tropem myślenia, jeśli międzynarodowa mobilność kapitału zapewniająca wyrównywanie stóp zysku z kapitału w poszczególnych krajach miałaby stanowić istotny czynnik konwergencji, a zatem szybszego wzrostu w krajach biedniejszych, to mogłoby to stanowić pewne teoretyczne uzasadnienie wspomnianej pod koniec punktu 2.2 empirycznej korelacji pomiędzy stopami inwestycji oraz stopami wzrostu gospodarczego.

Badania statystyczne wykazują jednak, że krajowe stopy oszczędności oraz stopy inwestycji są ze sobą ściśle skorelowane, zarówno w czasie, jak i w ujęciu przekrojowym dla poszczególnych krajów[25]. Ustalenia te podważają tym samym teoretyczne przesłanki bezwarunkowej wersji hipotezy konwergencji.

Analizy danych empirycznych, mające na celu weryfikację hipotezy konwergencji, wykazały, że zbieżność rzeczywiście występuje wśród gospodarek już rozwiniętych, względnie homogenicznych pod względem podstawowych instytucji gospodarczych i politycznych, takich jak gospodarki krajów należących do OECD oraz – w stopniu

[25] Zależność ta znana jest w literaturze pod nazwą „zagadki Feldsteina – Horioki”, od nazwisk dwóch ekonomistów, którzy testowali ją dla 21 krajów uprzemysłowionych, uzyskując statystycznie istotne wysokie wartości współczynnika regresji. Zob. M. Feldstein, Ch. Horioka, *Domestic Saving and International Capital Flows*, Economic Journal, t. 90, June 1980, s. 314 – 329.

Oprócz ograniczeń w mobilności kapitału, o których już wspominaliśmy, jako możliwe wyjaśnienie tego faktu podaje się troskę rządów o saldo bilansu handlowego i związane z tym dążenie do równoważenia krajowych oszczędności i inwestycji poprzez dostosowywanie rządowych oszczędności i inwestycji do poziomów sektora prywatnego lub też odpowiednią politykę podatkową.

jeszcze silniejszym - między stanami i regionami w USA, Europie Zachodniej i Japonii[26]. Natomiast z badań R. Barro i P. Romera wynika, że dla większej, bardziej zróżnicowanej grupy krajów, czyli w skali całego świata, efekt „doganiania" nie zachodzi[27].

Na pierwszy rzut oka, przytoczone wyniki badań empirycznych zdają się zatem potwierdzać warunkową wersję hipotezy konwergencji, przemawiają zaś przeciwko zasadności jej wersji bezwarunkowej. Należy przy tym mieć świadomość, że poza parametrami określającymi poziom kapitału i produktu *njep* w stanie stacjonarnym w modelu Solowa, wiele innych czynników i zmiennych, w modelu nie uwzględnianych, może mieć wpływ na to, czy następuje doganianie jednych krajów przez drugie. Idea poszukiwania takich potencjalnie znaczących czynników na podstawie analizy danych przekrojowych sprowadza się do sprawdzania, czy dla krajów, dla których odpowiednie zmienne utrzymują mniej więcej stały poziom w badanych okresach, średnie stopy wzrostu gospodarczego w tych okresach są ujemnie skorelowane z wyjściowym poziomem PKB *p.c.*[28].

Wydaje się jednak oczywiste, że czynnikiem zbieżności pomiędzy krajami tworzącymi tzw. kluby konwergencji są również, w mniejszym bądź większym stopniu, przepływy kapitału oraz nadrabianie zaległości w dziedzinie technologii[29]. Innymi słowy, nie sposób jednoznacznie stwierdzić, że proces „doganiania" wynika jedynie z samej tylko wewnętrznej akumulacji kapitału w ramach poszczególnych krajów oraz reguł dynamiki systemu gospodarczego, ujętych w modelu Solowa i stanowiących mechanizm zbieżności w przypadku warunkowej wersji hipotezy konwergencji.

---

[26] Zob. W. Baumol, *Productivity, Growth, Convergence and Welfare*, American Economic Review, vol. 76, December 1986, s. 1072 – 1085; Barro R. J., Sala-i-Martin X., *op. cit.*

[27] Zob. Barro R., *Makroekonomia*, PWE, Warszawa 1997, s. 326 – 27; P. M. Romer, *Increasing Returns and Long – Run Growth*, Journal of Political Economy, October 1986, vol. 94, no. 5, s. 1002 – 10037 oraz P. M. Romer, *The Origins …, op. cit.*, s. 5 (Figure 1).

[28] Przykładem tego rodzaju analizy jest studium R. Barro, zob. R. Barro, *Economic …, op. cit.*

Pod adresem badań empirycznych tego rodzaju można jednakże zgłaszać wątpliwość związaną z problemem odwrotnej przyczynowości, wyrażoną zwięźle przez R. Solowa: „Im większa liczba zmiennych ujętych po prawej stronie modeli regresji, w tym większym stopniu wydaje się, że równie dobrze mogą one być skutkiem przyspieszenia albo zahamowania długookresowego wzrostu gospodarczego, jak i tego przyczyną". Zob. B. Snowdon, H. R. Vane, *op. cit*, s. 370 -371 oraz R. M. Solow, *Perspectives on Growth Theory*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 51.

Poza tym, tego typu regresje przekrojowe okazują się nieodporne na zmiany w zestawie zmiennych objaśniających, zob. R. Levine, D. Reinelt, *A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions*, American Economic Review, September 1992, vol. 82, no. 4, s. 942-63.

[29] W kategoriach międzynarodowej dyfuzji technologii procesy konwergencji interpretuje np. S. Gomułka, zob. S. Gomułka, *op. cit.*, s. 133 – 147.

Pozostaje pytanie, dlaczego w takim razie zasięg tego procesu jest tak bardzo ograniczony i nie dotyczy całego świata? Podstawowy model neoklasyczny w zasadzie nie daje podstaw do teoretycznego wyjaśnienia tej zagadki.

Co więcej, z badań empirycznych wynika, że w krajach o bardzo niskim PKB *p.c.* zależność pomiędzy stopą wzrostu a poziomem produktu *p.c.* jest dodatnia i dopiero po przekroczeniu pewnego progu PKB *p.c.* stopa wzrostu zaczyna spadać[30]. W takiej sytuacji, między najbiedniejszymi krajami a całą resztą świata, zamiast konwergencji następują procesy dywergencji. Można zatem stwierdzić, że kraje bardzo biedne wpadły w tzw. pułapkę ubóstwa, przy niskim PKB *p.c.* i niskim tempie jego wzrostu, która na gruncie modelu Solowa nie może być wyjaśniona.

Podsumowując powyższe rozważania jeszcze raz wnioskujemy, że zróżnicowanie zamożności między krajami musi wynikać w dużym stopniu z czynników nie uwzględnionych w modelu Solowa. W kontekście problemu konwergencji widać dopiero wyraźnie, że trzymając się ściśle tego modelu, nie potrafimy dobrze wyjaśnić ani skąd te różnice się biorą, ani dlaczego się utrzymują.

2.4. Dekompozycja Solowa

W artykule z 1957 r. Solow przedstawił sposób wykorzystania agregatowej neoklasycznej funkcji produkcji (ze stałymi przychodami względem skali) do zidentyfikowania źródeł wzrostu gospodarczego[31]. Rozważana przez Solowa agregatowa funkcja produkcji ma postać:

$$Y = AF(K, L). \tag{2.23}$$

W funkcji (2.23) postęp techniczny, reprezentowany przez parametr A, a ściślej, jego wzrost w czasie, jest neutralny w sensie Hicksa[32].

Ze względu na założenie o dodatniej jednorodności stopnia pierwszego, funkcję produkcji (2.23) można przedstawić w postaci intensywnej:

$$y = Af(k), \tag{2.24}$$

[30] Czyli zależność między stopą wzrostu a poziomem PKB *per capita* ma charakterystyczny kształt odwróconej litery U, nazwany przez S. Gomułkę „krzywą kapeluszową", zob. S. Gomułka, *op. cit.*, Rys. 9.1 i 9.2, s. 135 – 136. Zob. także: R. J. Barro, *op. cit.*, s. 407 – 408.

[31] R. M. Solow, *Technical Change and the Aggregate Production Function*, Review of Economics and Statistics, August 1957, s. 312 – 320.

[32] Patrz rozdział czwarty, punkt 4.1.

gdzie *y = Y/L*, *k = K/L*.

Różniczkowanie zupełne (2.24) względem czasu i obustronne podzielenie przez *y* daje:

$$\dot{y}/y = \frac{kf'(k)}{f(k)} \cdot \dot{k}/k + \dot{A}/A \tag{2.25}$$

gdzie $\dot{A}/A$ określa się często w literaturze ekonometrycznej jako stopę wzrostu łącznej produktywności czynników wytwórczych (*total factor productivity* – skr. TFP).

Nietrudno wykazać, że $kf'(k)/f(k) = \partial Y/\partial K \cdot K/Y$. Przy założeniu, że czynniki produkcji są wynagradzane według ich produktów krańcowych, $kf'(k)/f(k)$ wyznacza zatem udział kapitału w produkcie. Stosując oznaczenie $\alpha(k) = kf'(k)/f(k)$, równanie (2.25) zapisujemy w postaci:

$$\dot{y}/y = \alpha(k) \cdot \dot{k}/k + \dot{A}/A. \tag{2.26}$$

Stopę wzrostu $\dot{A}/A$, określaną w literaturze mianem „reszty Solowa", można zatem interpretować jako tę część wzrostu wydajności pracy (PKB *p.c.*), która nie może być wyjaśniona przyrostem technicznego uzbrojenia pracy (kapitału *p.c.*).

Na podstawie szeregów czasowych produktu na roboczogodzinę, kapitału na roboczogodzinę i udziałów wynagrodzenia kapitału w produkcie[33] Solow obliczył, że w latach 1909 – 1949 w USA jedynie 12, 5 % wzrostu produktu na zatrudnionego wynikało z procesów akumulacji kapitału rzeczowego (wzrostu technicznego uzbrojenia pracy), zaś pozostałe 87,5 % należy przypisać „zmianom techniczno - organizacyjnym".

Ponieważ w modelu Solowa nie wskazuje się na źródła postępu technicznego, resztę Solowa określano jako „miarę naszej niewiedzy". Często w literaturze spotyka się stwierdzenie, że model Solowa przyjmuje jako dane wartości zmiennych, które, w świetle wniosków wynikających z tego modelu, są główną siłą napędową wzrostu gospodarczego, a zatem „*modelujemy wzrost na podstawie założenia, że ma miejsce wzrost*".

[33] Dokładniej, Solow wykorzystuje dane roczne o kształtowaniu się GNP na roboczogodzinę z wyłączeniem rolnictwa i sektora publicznego oraz zasobów kapitału - które mnoży przez odsetek zatrudnionej w danym roku siły roboczej dla obliczenia zasobów kapitału w użyciu (przyjmując przy tym, jak widać, założenie, że odsetek wykorzystywanego kapitału zawsze odpowiada odsetkowi zatrudnionej siły roboczej) oraz dzieli przez liczby przepracowanych w odpowiednich latach roboczogodzin.

Rozdział trzeci

Wpływ państwa na wzrost gospodarczy w neoklasycznych modelach wzrostu

3.1. „Złota reguła akumulacji” Phelpsa

Kluczową własnością neoklasycznego modelu wzrostu z punktu widzenia możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy jest to, że długookresowa stopa wzrostu równomiernego nie zależy od stopy inwestycji. Model Solowa nie daje zatem politykom gospodarczym do ręki żadnych narzędzi oddziaływania na długookresowe tempo wzrostu. Potencjalnym celem ich działań mogłoby być natomiast ciągłe zwiększanie poziomu produktu *njep* w stanie stacjonarnym (przesuwanie w górę ścieżki wzrostu równomiernego) poprzez pobudzanie stopy inwestycji w gospodarce. Skutkowałoby to podwyższoną akumulacją kapitału i utrzymywaniem stopy wzrostu produktu – w okresach przejściowych pomiędzy kolejnymi punktami dynamicznej równowagi długookresowej - powyżej stopy naturalnej. Jak pokażemy poniżej, w określonych warunkach, w perspektywie długookresowej, działania takie mogą jednak prowadzić do pogorszenia dobrobytu społecznego (poziomu konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym).

Ponieważ oszczędności stanowią nie skonsumowaną część produktu, to:

$$S = sY = Y - C \quad \Leftrightarrow \quad C = (1 - s)Y,$$

W kategoriach poziomów przypadających na jednostkę efektywnej pracy drugie równanie przybiera postać:

$$\bar{c} = (1 - s)\, f(\bar{k})\,, \tag{3.1}$$

gdzie $\bar{c} = C / AL$ oznacza konsumpcję *njep*.

Podobnie jak w rozdziale pierwszym, dynamikę kapitału *njep* opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{\bar{k}}(t) = sf(\bar{k}(t)) - (n + m + \delta)\bar{k}(t)\,,$$

z którego wynika, że kapitał *njep* oraz pozostałe zmienne (produkcja, konsumpcja) *njep* zmierzają do pewnych stałych wartości charakteryzujących stan stacjonarny gospodarki. Stanowi stacjonarnemu odpowiada równomierny wzrost zmiennych w kategoriach absolutnych z naturalną stopą wzrostu, równą sumie stóp wzrostu siły roboczej *n* i egzogenicznego postępu technicznego *m* (ścieżka równomiernego wzrostu). Każdej wartości stopy oszczędności (inwestycji) $0 < s < 1$ odpowiadają inne wartości zmiennych w stanie stacjonarnym i inna ścieżka równomiernego wzrostu. Chociaż wzrost zmiennych na każdej ścieżce równomiernego wzrostu odbywa się z identyczną stopą wzrostu $n + m$, to nie wszystkie stany stacjonarne (ścieżki równomiernego wzrostu) są jednakowo dobre z punktu widzenia podstawowego celu każdej gospodarki, jakim jest zaspokojenie potrzeb konsumpcyjnych społeczeństwa. W tym kontekście kluczowego znaczenia nabiera spostrzeżenie, że manipulując stopą oszczędności (inwestycji) możemy zwiększać lub zmniejszać wielkość konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym (chociaż nie możemy w ten sposób wpływać na długookresową stopę wzrostu gospodarczego).

Ponieważ w stanie stacjonarnym zachodzi (zob. (2.2)):

$$sf(\bar{k}_e) = (n + m + \delta)\bar{k}_e . \tag{3.2}$$

to konsumpcja *njep* w tym stanie, $\bar{c}_e$, wyraża się wzorem:

$$\bar{c}_e = f(\bar{k}_e) - (n + m + \delta)\bar{k}_e . \tag{3.3}$$

Dane wielkości $\bar{k}_e$ i $f(\bar{k}_e)$ wyznaczają pewną wielkość $\bar{c}_e$, a dana ścieżka wzrostu produkcji wyznacza pewną ścieżkę wzrostu konsumpcji. W rozdziale drugim pokazaliśmy, że elastyczność produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stopy oszczędności (inwestycji) jest dana przez $\varepsilon_s^{\bar{y}_e} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} > 0$, gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e)$. Wzrost *s* powoduje zatem wzrost $\bar{k}_e$ i $f(\bar{k}_e)$. Nie musi to jednak oznaczać wzrostu $\bar{c}_e$.

Dla zbadania wpływu *s* na $\bar{c}_e$ różniczkujemy (3.3) względem *s*:

$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s} = \left[f'(\bar{k}_e) - (n + m + \delta) \right] \frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s} .$$

Ponieważ $\dfrac{\partial \bar{k}_e}{\partial s} > 0$, to $\bar{c}_e$ wzrasta wraz ze wzrostem *s* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f'(\bar{k}_e) > (n + m + \delta) . \tag{3.4}$$

Jeżeli natomiast:

$$f'(\bar{k}_e) < (n + m + \delta) , \tag{3.5}$$

to zwiększenie stopy inwestycji powoduje, że dodatkowy produkt, pochodzący ze zwiększonych zasobów kapitału *njep*, nie wystarcza do utrzymania tych zasobów na wyższym poziomie. Aby utrzymać ten zwiększony poziom $\bar{k}$, konsumpcja *njep* musi spaść. Zmniejszając wówczas stopę oszczędności (inwestycji) w gospodarce można osiągnąć wyższy poziom konsumpcji, zarówno obecnie, jak i w przyszłości.

Niech s^* oznacza stopę oszczędności (inwestycji), przy której $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s} = 0$, czyli:

$$f'(\bar{k}_e) = (n + m + \delta). \tag{3.6}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $s = s^*$ wielkość konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym jest maksymalna. Ponieważ $\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s} > 0$ i $f''(\bar{k}_e) < 0$, to dla $s < s^*$ zachodzi (3.4), czyli $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s} > 0$, zaś dla $s > s^*$ zachodzi (3.5), czyli $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s} < 0$.

Stopa s^* nazywana jest optymalną stopą oszczędności i opisuje tzw. złotą regułę akumulacji kapitału Phelpsa[1]. Podobnie jak wcześniej, przez $\alpha(\bar{k})$ oznaczmy elastyczność produktu względem kapitału. Wówczas, w stanie stacjonarnym zachodzi:

$$f'(\bar{k}_e) = \alpha(\bar{k}_e)\frac{f(\bar{k}_e)}{\bar{k}_e}.$$

Korzystając z (3.2) oraz (3.6), powyższe równanie zapisujemy w postaci:

$$\alpha(\bar{k}_e)\frac{n + m + \delta}{s} = n + m + \delta \quad \Leftrightarrow \quad s^* = \alpha(\bar{k}_e). \tag{3.7}$$

Jak wynika z (3.7), optymalna stopa oszczędności (inwestycji) równa jest elastyczności produktu względem kapitału, bądź też – przy założeniu, że czynniki produkcji wynagradzane są zgodnie z ich produktami krańcowymi – udziałowi wynagrodzenia kapitału w produkcie. Inaczej mówiąc, na ścieżce równomiernego wzrostu gospodarka osiąga maksymalną konsumpcję, jeżeli nakłady na akumulację kapitału równe są dochodom z kapitału[2].

W szczególności, stopa inwestycji przekraczająca $\alpha(\bar{k}_e)$ oznaczałaby, że na akumulację kapitału permanentnie przeznacza się więcej, niż wynoszą łączne generowane przezeń dochody, co w praktyce gospodarczej sprowadzałoby się do tego,

---

[1] Zob. E. Phelps, *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, American Economic Review, 1961, September, s. 638 – 643.

[2] Wniosek ten można również odczytać z równania (3.6). Ponieważ $n + m$ oznacza stopę wzrostu produktu i kapitału na ścieżce wzrostu równomiernego, to:

$\dot{K}/K = f'(\bar{k}_e) - \delta \Leftrightarrow \dot{K} + \delta K = f'(\bar{k}_e)K$, czyli całość zysków z kapitału przeznaczana jest na jego restytucję i dalszą akumulację.

że część kapitału z konieczności znajdowałaby zastosowanie z wynagrodzeniem poniżej kosztu. Stwierdzenia te wyrażają najbardziej istotną treść tzw. „złotej reguły akumulacji” Phelpsa.

Przechodząc do zagadnienia oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy należy stwierdzić, że ze „złotej reguły akumulacji” kapitału wynika istnienie naturalnej granicy dla ewentualnych starań państwa o ciągłe podnoszenie stopy inwestycji w gospodarce, której przekroczenie skutkuje obniżeniem dobrobytu społeczeństwa, i to nie tylko w krótkim okresie.

Załóżmy, że w gospodarce istnieją dwa sektory: sektor prywatny i sektor budżetowy. Dochodem sektora budżetowego są podatki płacone przez sektor prywatny oraz dochody z majątku państwowego[3]. Przyjmijmy, że do budżetu trafia część produktu (dochodu) równa τY, gdzie τ oznacza stopą redystrybucji dochodu przez budżet ($0 \le \tau \le 1$). Dochód do dyspozycji sektora prywatnego wynosi zatem $(1-\tau)Y$. Oba sektory przeznaczają swoje dochody na inwestycje i konsumpcję. Opisują to równania:

$$\tau Y = s_B \tau Y + C^B,$$
$$(1-\tau)Y = s_P(1-\tau)Y + C^P,$$

gdzie s_B, s_P oznaczają, odpowiednio, stopę inwestycji budżetowych i stopę inwestycji prywatnych (przy czym $0 \le s_B \le 1$, $0 \le s_P \le 1$), natomiast C^B i C^P – konsumpcję sektora budżetowego i prywatnego. Łączne inwestycje obu sektorów wynoszą sY, gdzie:

$$s = s_P(1-\tau) + s_B \tau, \tag{3.8}$$

oznacza społeczną stopę inwestycji.

Przy założeniu, że stopa inwestycji prywatnych wynosi s_P, można wyznaczyć optymalną – tzn. zgodną ze „złotą regułą akumulacji” – stopę inwestycji budżetowych s_B^* (przy danej stopie redystrybucji τ), lub alternatywnie – optymalną stopę redystrybucji τ^* (przy danej stopie inwestycji budżetowych s_B). Uwzględniając (3.7), z (3.8) wyznaczamy:

$$s_B^* = \frac{\alpha(\bar{k}_e) - s_P(1-\tau)}{\tau} \qquad \text{lub} \qquad \tau^* = \frac{\alpha(\bar{k}_e) - s_P}{s_B - s_P}.$$

[3] Dochody z kapitału zakumulowanego dzięki inwestycjom sektora budżetowego (np. zyski z przedsiębiorstw państwowych).

Nietrudno sprawdzić, że ze względu na ograniczenia: $0 \le s_B \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, optymalna stopa inwestycji budżetowych i optymalna stopa redystrybucji powinny być, ściśle rzecz biorąc, określone w sposób następujący:

$$\textit{optymalna stopa } \tau = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } \; s_P < s_B \le \alpha \quad \text{lub} \quad s_P > s_B \ge \alpha \\ 0 & \textit{gdy } \; s_B < s_P \le \alpha \quad \text{lub} \quad s_B > s_P \ge \alpha \\ \textit{dowolne} & \textit{gdy } \; s_B = s_P \\ \tau^* & \textit{w pozostaych przypadkach} \end{cases}$$

$$\textit{optymalna stopa } s_B = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } \; s_p \le (\alpha - \tau)/(1-\tau), \ \tau \ne 1 \\ 0 & \textit{gdy } \; s_p \ge \alpha/(1-\tau), \ \tau \ne 1 \quad \text{lub } \textit{gdy } \tau = 0 \\ s_B^* & \textit{w pozostaych przypadkach} \end{cases}$$

Jeżeli, zgodnie z przytaczanymi w rozdziale drugim szacunkami, przyjmiemy, że udział dochodów z kapitału w produkcie wynosi 1/3, to zgodnie ze „złotą regułą akumulacji" kapitału, aby maksymalizować poziom konsumpcji na ścieżce wzrostu równomiernego gospodarka powinna jedną trzecią wytworzonego produktu przeznaczać na akumulację kapitału. W świetle danych empirycznych oznacza to, że gospodarki większości krajów charakteryzują niższe od „złotej reguły akumulacji" stopy inwestycji[4]. Podniesienie tych stóp skutkowałoby osiąganiem wyższych poziomów konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym. Na ścieżce wzrostu równomiernego, osiągalnej przy ciągłym reinwestowaniu całości dochodów z kapitału, poziom konsumpcji *p.c.* byłby w każdym momencie wyższy od poziomu, osiąganego na każdej innej możliwej ścieżce wzrostu równomiernego.

W kolejnym punkcie tego rozdziału wskażemy na pewne ograniczenia analityczne, przedstawionej tutaj w kontekście problemu oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy, koncepcji „złotej reguły akumulacji".

3.2. Problem „okresu wyrzeczeń"

Sformułowana oryginalnie przez Phelpsa koncepcja „złotej reguły akumulacji" sprowadza problem optymalnego, z punktu widzenia społecznego dobrobytu, podziału dochodu pomiędzy konsumpcję i inwestycje, do maksymalizacji poziomu konsumpcji

[4] W sprawie empirycznie obserwowanych stóp inwestycji, zob. np. M. Burda, Ch. Wyplosz, *Makroekonomia. Podręcznik europejski*, PWE, Warszawa 1995, s. 157 (Rys. 5.10) i s. 160 (Rys. 5.12).

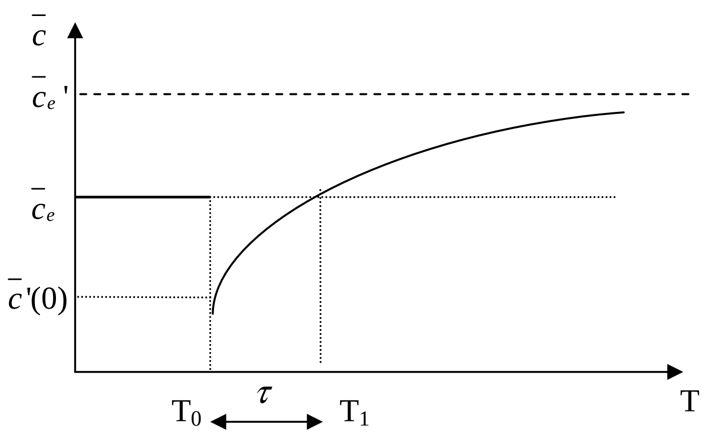
p.c. na ścieżce wzrostu równomiernego. Phelps nie uwzględniał w swojej analizie postępu technicznego, który, jak pokazaliśmy, jest w stanie zagwarantować wzrost konsumpcji *p.c.* także w stanie stacjonarnym. Przedstawione w poprzednim punkcie zastosowanie tej koncepcji do modelu uwzględniającego postęp techniczny nasuwa jednak pytanie o zasadność samego kryterium optymalności – maksymalizacji konsumpcji *njep* (zamiast *p.c.*) jako kryterium dobrobytu społecznego. Mówiąc inaczej, maksymalizacja konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym oznacza, że w międzyokresowym rachunku dobrobytu zakłada się *de fakto* dyskonto przyszłej konsumpcji z arbitralnie ustaloną stopą równą stopie postępu technicznego[5].

Odrębnym zagadnieniem jest kwestia przejścia gospodarki z określonego stanu początkowego do stanu stacjonarnego odpowiadającego „złotej regule akumulacji” (wejścia gospodarki na optymalną ścieżkę równomiernego wzrostu) i możliwych wyrzeczeń z tym związanych.

Jak łatwo zauważyć, każde zwiększenie poziomu konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym, poprzez zwiększenie stopy oszczędności (inwestycji), wiąże się z koniecznością przejściowego ograniczenia konsumpcji bieżącej na rzecz wzrostu jej poziomu w przyszłości. Kształtowanie się konsumpcji *njep* po wzroście stopy oszczędności przedstawiamy na rysunku 3.1.

Rysunek 3.1

Reakcja konsumpcji na wzrost stopy oszczędności



źródło: opracowanie własne

[5] Zwracamy uwagę, że koncepcja „złotej reguły akumulacji” jest koncepcją dynamiczną w tym sensie, że nie chodzi w niej o maksymalizację dobrobytu w danym momencie, lecz o maksymalizację międzyokresową (międzypokoleniową). To samo mamy również na uwadze, przedstawiając problem okresu wyrzeczeń jako ograniczenie analityczne koncepcji „złotej reguły akumulacji”.

Załóżmy, że w okresie t_0 gospodarka znajduje się w stanie stacjonarnym $\bar{k}_e$ odpowiadającym stopie oszczędności s, z poziomem konsumpcji *njep* $\bar{c}_e$. Załóżmy ponadto, że wyższej stopie oszczędności s' odpowiada stan stacjonarny $\bar{k}_e'$ z wyższym poziomem konsumpcji *njep* $\bar{c}_e'$. Jeżeli w celu osiągnięcia tego stanu w okresie t_0 nastąpi wzrost stopy oszczędności do poziomu s', to początkowym efektem nie będzie jednak wzrost, lecz spadek konsumpcji *njep* do pewnego poziomu $\bar{c}'(0)$, niższego od dotychczasowego poziomu $\bar{c}_e$. Z upływem czasu konsumpcja w kategoriach bezwzględnych będzie jednak rosła według stopy wyższej od $n+m$, choć stopa ta będzie asymptotycznie malała do poziomu $n+m$.

Takie zachowanie konsumpcji wynika z dynamiki kapitału. W punkcie wyjścia, przy danej stopie *s*, w stanie stacjonarnym $\bar{k}_e$ spełnione jest równanie:

$$0 = sf(\bar{k}_e) - (n+m+\delta)\bar{k}_e .$$

Jeśli zwiększymy stopę oszczędności (inwestycji) do poziomu s', to zgodnie z równaniem dynamiki kapitału *njep*:

$$\dot{\bar{k}} = s' f(\bar{k}) - (n+m+\delta)\bar{k},$$

zachodzi $\dot{\bar{k}} > 0$. Zatem $\bar{k}$ rośnie (coraz wolniej), zmierzając asymptotycznie do nowego stanu stacjonarnego $\bar{k}_e'$. Jeśli rośnie $\bar{k}$, to rosną także $\bar{y} = f(\bar{k})$ i $\bar{c} = (1-s')\bar{y}$. Wzrost kapitału, produktu i konsumpcji w kategoriach *njep* oznacza, że kapitał, produkt i konsumpcja w kategoriach bezwzględnych, w okresie przejścia od jednego do drugiego stanu stacjonarnego, rosną ze stopą wyższą od $n + m$.

Z upływem czasu gospodarka dążyć będzie do nowego stanu stacjonarnego z konsumpcją $\bar{c}_e'$ wyższą od $\bar{c}_e$. Istnieje jednak pewien okres τ $(0 < \tau < \infty)$ potrzebny do przywrócenia poziomu konsumpcji $\bar{c}_e$, jaki charakteryzował gospodarkę przed podniesieniem stopy oszczędności. Okres ten możemy nazwać okresem wyrzeczeń.

Ponieważ z założenia konsumpcja stanowi stałą część produktu, to szybkość zbieżności konsumpcji *njep* $\bar{c}$ do nowego poziomu stacjonarnego $\bar{c}_e$ jest taka sama, jak szybkość zbieżności produktu *njep* $\bar{y}$ do nowego poziomu stacjonarnego $\bar{y}_e$. Dynamikę konsumpcji *njep* w pobliżu punktu równowagi długookresowej $\bar{c}_e$ można zatem opisać wzorem analogicznym do (2.19):

$$\bar{c}(t)-\bar{c}_e \approx e^{-\left(1-\alpha(\bar{k}_e)\right)(n+m+\delta)t}\left(\bar{c}(0)-\bar{c}_e\right). \tag{3.9}$$

Tak samo też przedstawiają się szacunki czasu, w jakim dochodzi do tej zbieżności.

Z punktu widzenia społeczeństwa, które decyduje się na ograniczenie konsumpcji bieżącej na rzecz trwałego zwiększenia konsumpcji przyszłej, poprzez zwiększenie części produktu przeznaczonego na akumulację kapitału, istotna jest jednak długość okresu wyrzeczeń τ, w którym konsumpcja pozostaje na poziomie niższym niż ten, który byłby osiągany, gdyby zmiany stopy oszczędności (inwestycji) nie było.

Twierdzenie 3.1.[6] Dla niewielkiej zmiany stopy oszczędności (inwestycji) z s do s' długość okresu wyrzeczeń w przybliżeniu wyraża się wzorem:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(1-\dfrac{s}{(1-s')\varepsilon_s^{\bar{y}_e}}\right)}{-\left(1-\alpha\right)(n+m+\delta)}, \tag{3.10}$$

gdzie $\varepsilon_s^{\bar{y}_e}$ oznacza elastyczność produktu względem stopy oszczędności (inwestycji) na ścieżce wzrostu równomiernego daną przez (2.1) oraz $\alpha=\alpha(\bar{k}_e')$.

Dowód. Na podstawie (3.9) długość okresu τ stanowi rozwiązanie **(**względem t**)** następującego równania:

$$\bar{c}_e-\bar{c}_e' \approx e^{-(1-\alpha(\bar{k}_e'))(n+m+\delta)t}\left(\bar{c}'(0)-\bar{c}_e'\right), \tag{3.11}$$

gdzie $\bar{c}'(0)<\bar{c}_e<\bar{c}_e'$. Przekształcenie logarytmiczne tego równania prowadzi do wzoru:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(\dfrac{\bar{c}_e-\bar{c}_e'}{\bar{c}'(0)-\bar{c}_e'}\right)}{-\left(1-\alpha(\bar{k}_e')\right)(n+m+\delta)}.$$

Ponieważ: $\bar{c}_e=(1-s)\bar{y}_e$, $\bar{c}_e'=(1-s')\bar{y}_e'$, oraz $\bar{c}'(0)=(1-s')\bar{y}_e$, zatem powyższe równanie można przedstawić nastepująco:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(\dfrac{(s'-s)\bar{y}_e}{(1-s')(\bar{y}_e-\bar{y}_e')}+1\right)}{-\left(1-\alpha(\bar{k}_e')\right)(n+m+\delta)}.$$

---

[6] Twierdzenie 3.1 jest własnym rezultatem autora.

Korzystając z definicji (2.1) wskaźnika elastyczności $\varepsilon_s^{\bar{y}_e}$, otrzymujemy w przybliżeniu, dla niewielkich zmian stopy oszczędności (inwestycji), formułę (3.10).

■

Dla α = 1/3 oraz $n + m + \delta$ = 0,06 rocznie, wzrost stopy inwestycji z poziomu s = 0,2 do s' = 0,22 wiąże się z okresem wyrzeczeń o długości około 18 lat[7].

Phelps omija problem okresu wyrzeczeń rozważając gospodarkę nieograniczoną w czasie wstecz *(endless looking backward),* która od zawsze cieszy się równomiernym wzrostem według stopy naturalnej *(golden – age growth at the natural rate). „Każda generacja w bezkresnym złotym wieku naturalnej stopy wzrostu będzie preferować ten sam poziom stopy inwestycji, a tym samym - tę samą ścieżkę wzrostu"* (tłum. aut.)[8]. „Złota reguła akumulacji" Phelpsa miałaby zatem stanowić odpowiedź na pytanie o najlepszą, w punktu widzenia każdej generacji, stopę oszczędności (inwestycji), w hipotetycznej sytuacji, gdyby gospodarka zawsze osiągała automatycznie odpowiadającą tej stopie ścieżkę wzrostu równomiernego.

Ujmując problem nieco inaczej, koncepcja Phelpsa ignoruje fakt, iż w każdym momencie istnieje możliwość obniżenia stopy oszczędności (inwestycji), skutkująca osiąganiem przez pewien okres poziomu konsumpcji wyższego od tego, który byłby osiągany w przeciwnym razie. Dopiero uwzględnienie explicite preferencji podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie pozwala ustalić, w jakich warunkach (tzn. przy jakim charakterze tych preferencji), w gospodarce startującej z dowolnego punktu i zmierzającej w kierunku ścieżki wzrostu równomiernego związanej ze „złotą regułą akumulacji", maksymalizowany będzie dobrobyt społeczny.

---

[7] Zauważmy jeszcze, że przyjęte przez nas założenie, iż w punkcie wyjścia gospodarka znajduje się na pewnej ścieżce wzrostu równomiernego, nie jest istotne z punktu widzenia wniosku o występowaniu okresu wyrzeczeń. Założenie to przyjęto tutaj wyłącznie ze względu na możliwość wykorzystania wskaźnika elastyczności produktu w stanie stacjonarnym względem stopy oszczędności $\varepsilon_s^{\bar{y}_e}$ (w ostatnim kroku dowodu Twierdzenia 3.1) do skalibrowania długości okresu wyrzeczeń.

[8] E. Phelps, *op. cit.*, s. 640.

3.3. Dynamiczna maksymalizacja społecznego dobrobytu – problem społecznego planisty

Rozważymy teraz problem międzyokresowej maksymalizacji społecznego dobrobytu przy założeniu określonych preferencji społecznych co do rozkładu konsumpcji w czasie. Formalnym wyrazem tych preferencji jest, po pierwsze, określona postać funkcji chwilowej użyteczności konsumpcji $u(c(t))$, czyli funkcji użyteczności, w której argumentem jest poziom konsumpcji *p.c.* realizowany w chwili *t*. Po drugie, założona stopa dyskontowa ρ określa różną wagę przypisywaną do tej samej konsumpcji w różnych momentach czasu – dodatni poziom tej stopy jest wyrazem założenia, iż konsumpcja przyszła jest dla reprezentatywnego członka społeczeństwa mniej cenna niż konsumpcja bieżąca.

Zagadnienie tego typu jest zazwyczaj określane w literaturze jako „problem społecznego (centralnego) planisty"[9]. W odniesieniu do realiów gospodarki rynkowej określenie to jest wyrazem wyłącznie normatywnego charakteru tego zagadnienia. Zauważmy również, że w przypadku, gdy w gospodarce nie funkcjonują żadne inne podmioty (np. rząd) poza gospodarstwami domowymi i przedsiębiorstwami, zagadnienie to jest tożsame z „problemem reprezentatywnego agenta", teoretycznego konstruktu, łączącego w sobie funkcje typowego gospodarstwa domowego (konsument, właściciel czynników produkcji) i typowego przedsiębiorstwa (producent), stanowiącego swoisty „skalarny model całej gospodarki"[10].

Zakładamy, że celem społecznego planisty jest maksymalizacja łącznej zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji *p.c.* w nieskończonym horyzoncie czasu, czyli maksymalizacja funkcjonału[11]:

[9] Jako pierwszy problem ten sformułował F. Ramsey. Zob. F.P. Ramsey, *A Mathematical Theory of Savings*, Economic Journal, December 1928, s. 543 – 559. Uogólnienie problemu Ramsey'a przedstawili następnie niezależnie D. Cass i T. Koopmans. Zob. D. Cass, *Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation*, Review of Economic Studies, 32, July 1965, s. 233 – 240, T.C. Koopmans, *On the Concept of Optimal Economic Growth*, w: *The Econometric Approach to Development Planning, Amsterdam*, North Holland 1965.

[10] W przypadku, gdy w gospodarce funkcjonuje również sektor budżetowy, rozwiązania problemów „centralnego planisty" i „reprezentatywnego agenta" nie zawsze są ze sobą tożsame.

[11] Tego typu sformułowanie funkcjonału celu społecznego planisty, w którym funkcja chwilowej użyteczności mnożona jest przez liczbę ludności, nazywana jest w literaturze Benthamowską funkcją dobrobytu społecznego, od nazwiska angielskiego filozofa społeczno – politycznego i moralnego, J. Benthama (1748 – 1832), jednego z czołowych przedstawicieli utylitaryzmu. W rachunku utylitarystycznym bardziej słuszne jest to postępowanie, które prowadzi do większej ilości szczęścia większej liczby ludzi.

$$\int_0^\infty u\left(c(t)\right) L_0 e^{nt} e^{-\rho t} dt, \qquad \rho > 0. \tag{3.12}$$

Przyjmujemy, że funkcja $u(c)$ spełnia standardowe neoklasyczne założenia o malejącej dodatniej użyteczności krańcowej oraz tzw. warunki Inady:

$$\begin{aligned} &u'(c) > 0; \quad u''(c) < 0, \qquad c > 0, \\ &\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty, \quad \lim_{c\to\infty} u'(c) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Standardowo w tego typu problemach optymalizacyjnych przyjmuje się, iż funkcja chwilowej użyteczności wyraża się wzorem[12]:

$$u\left(c(t)\right) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad \gamma \in (0,1). \tag{3.14}$$

Większy parametr γ oznacza większe tempo spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji (wartość bezwzględna stopy zmian $u'(c)$ względem *c*, czyli $\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\gamma c^{-1}$, rośnie wraz ze wzrostem γ), a zatem – przy założeniu maksymalizacji funkcjonału (3.12) – im większe γ, tym większa skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie[13]. Przy $\gamma \to 0$ zaś, społeczeństwu zaczyna być obojętne, czy całość konsumpcji przypada na jeden moment, czy też jest rozłożona w czasie, dlatego są skłonne odkładać konsumpcję w czasie, jeśli tylko stopa zysku z kapitału zakumulowanego dzięki oszczędnościom jest dostatecznie wysoka w porównaniu z ich stopą dyskontową.

W przypadku zagadnienia społecznego planisty, maksymalizującego dobrobyt zarówno obecnego, jak i przyszłych pokoleń, celowość zabiegu dyskontowania użyteczności, oznaczającego m.in. przywiązywanie coraz mniejszej wagi do dobrobytu każdego następnego pokolenia, może wydawać się dyskusyjna. Zob. F.P. Ramsey, *op. cit.*

[12] Ta postać funkcji użyteczności znana jest w literaturze pod nazwą funkcji o stałej względnej awersji do ryzyka (*CRRA – constant rate of risk aversion*), przy czym stopę tej awersji określa parametr γ. Interpretację w kategoriach ryzyka tutaj pomijamy, mamy bowiem do czynienia z modelem *stricte* deterministycznym. Z naszego punktu widzenia istotne jest to, że funkcja ta charakteryzuje się malejącą krańcową użytecznością konsumpcji. Przyjęcie w analizie konkretnej postaci funkcji użyteczności podyktowane zostało zamiarem uzyskania formuł określających optymalną stopę oszczędności (inwestycji) na ścieżce wzrostu równomiernego i możliwości ich porównania ze stopą wynikającą z reguły Phelpsa. Należy podkreślić, że wszystkie wnioski uzyskane w tym i kolejnym punkcie pracy pozostają prawdziwe przy założeniu dowolnej postaci funkcji użyteczności spełniającej ograniczenia (3.13).

[13] Odwrotność współczynnika γ wyraża stałą wartość międzyokresowej elastyczności substytucji konsumpcji (między konsumpcją w dwóch dowolnych momentach w czasie); zob. R. J. Barro, X. Sala i Martin, *Economic Growth*, McGraw – Hill Inc., New York 1995, s. 64 – 65.

Wyrażając konsumpcję *p.c.* w kategoriach konsumpcji *njep* $\bar{c} = C / AL$, funkcjonał celu można zapisać następująco:

$$\int_0^\infty \frac{\left(A_0 e^{mt} \bar{c}(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} L_0 e^{n-\rho t} dt = \int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} L_0 A_0^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt .$$

Dla zapewnienia zbieżności tej całki zakładamy, że: $\rho - (1-\gamma)m - n > 0$ [14].

Zakładamy, że funkcja produkcji posiada te same własności, jakie przyjmowaliśmy w neoklasycznym modelu wzrostu przedstawionym w punkcie 1.2. Równanie akumulacji kapitału w kategoriach *njep* ma postać następującą:

$$\dot{\bar{k}}(t) = s(t) f(\bar{k}(t)) - (n + m + \delta)\bar{k}(t), \tag{3.15}$$

gdzie stopa inwestycji nie jest teraz parametrem, lecz zmienną $s(t)$, podlegającą rachunkowi optymalizacyjnemu. Problem optymalnego podziału produktu na konsumpcję i inwestycje w każdym momencie *t*, czyli ustalenia optymalnej trajektorii stopy inwestycji $s(t)$, przyjmuje postać następującego zadania optymalizacji dynamicznej[15]:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \xrightarrow{\bar{c}} \max, \qquad \rho - (1-\gamma)m - n > 0, \tag{3.16}$$

przy warunkach:

$$\dot{\bar{k}}(t) = f(\bar{k}(t)) - \bar{c}(t) - (n + m + \delta)\bar{k}(t), \tag{3.17}$$

$$\bar{k}(0) > 0, \qquad \bar{k}(t), \bar{c}(t) \geq 0. \tag{3.18}$$

Do rozwiązania tego problemu można posłużyć się teorią sterowania optymalnego, w szczególności tzw. zasadą maksimum L. S. Pontriagina[16]. Rolę zmiennej sterującej

---

[14] Ponieważ warunek ten można zapisać w równoważnej postaci $\gamma > 1 - \frac{\rho - n}{m}$, oznacza to, że model nie posiada rozwiązania w sytuacji, gdy zbyt małe są skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie (parametr γ) i / lub stopa dyskonta konsumpcji. Przy tego typu preferencjach społeczeństwo byłoby skłonne odkładać konsumpcję w nieskończoność. Nałożony warunek eliminuje zatem sytuacje mało realistyczne.

[15] Stała $A_0^{1-\gamma}$ nie ma wpływu na rozwiązanie maksymalizujące funkcjonał celu, dlatego można ją pominąć.

[16] W sprawie rozwiązywania problemów dynamicznej optymalizacji w ramach teorii sterowania optymalnego, z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina, zob. A. C. Chiang, *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa 2002, s. 163 – 310 oraz R. J. Barro, X. Sala i Martin, op. cit., s. 498 – 510. Najszerszy w polskim piśmiennictwie zbiór zastosowań teorii sterowania optymalnego w modelowaniu makroekonomicznym znajduje się w pracy E. Panka. Zob. E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, wyd. 2 poszerzone, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003, s. 373 – 713.

przypisujemy zmiennej $\bar{c}$. Równanie dynamiki (3.17) zmiennej stanu $\bar{k}$ stanowi modyfikację równania (3.15), przy czym w celu wyeliminowania zmiennej s skorzystaliśmy z równania (3.1). Hamiltonian w tym problemie ma postać:

$$H(t)=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}+\lambda(t)\left[f(\bar{k}(t))-\bar{c}(t)-(n+m+\delta)\bar{k}(t)\right],$$

bądź, alternatywnie, tzw. hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje postać:

$$H_C(t)=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta(t)\left[f(\bar{k}(t))-\bar{c}(t)-(n+m+\delta)\bar{k}(t)\right], \tag{3.19}$$

gdzie $\theta=\lambda e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$ jest tzw. mnożnikiem Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej, $\bar{c}(t)>0$, oraz zmiennej stanu, $\bar{k}(t)>0$, warunki konieczne zasady maksimum mają postać następującą:

$$\frac{\partial H_C(t)}{\partial\bar{c}(t)}=\bar{c}(t)^{-\gamma}-\theta(t)=0, \tag{3.20}$$

$$\dot{\bar{k}}(t)=\frac{\partial H_C(t)}{\partial\theta(t)}=f(\bar{k}(t))-\bar{c}(t)-(n+m+\delta)\bar{k}(t), \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t)&=-\frac{\partial H_C(t)}{\partial\bar{k}(t)}+\theta(t)\big(\rho-n-(1-\gamma)m\big)=\\&=-\theta(t)\Big(f'(\bar{k}(t))-(m+\delta+\rho-(1-\gamma)m)\Big),\end{aligned} \tag{3.22}$$

oraz warunki transwersalności[17]:

$$\lim_{t\to\infty}\bar{k}(t)\lambda(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\bar{k}(t)\theta(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0, \tag{3.23}$$

$$\lim_{t\to\infty}H=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}H_C\,e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0, \tag{3.24}$$

Z warunku (3.20) wynika, że dla każdej chwili t spełnione jest następujące równanie:

$$\theta(t)=\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{3.25}$$

Zgodnie ze standardową interpretacją mnożnika Lagrange'a jako ceny dualnej dla zmiennej stanu (kapitału), wartość $\theta(t)$ mierzy zmianę wartości całki preferencji, czyli „sumy chwilowej użyteczności konsumpcji" w całym przedziale optymalizacyjnym,

[17] Pierwszy warunek transwersalności występuje ze względu na swobodny stan końcowy, czyli nie ustaloną a priori wartość graniczą zmiennej stanu przy $t\to\infty$. Z pewnych technicznych względów nie ma jednak wpływu na rozwiązanie rozważanego tutaj problemu optymalizacyjnego. Drugi warunek odgrywa rolę ogólnego warunku transwersalności w problemach z nieskończonym horyzontem, ze względu na nie ustalony z konieczności końcowy moment optymalizacji. Zob. A. C. Chiang, *op. cit.*, s. 239 – 242 oraz R. J. Barro, X. Sala i Martin, *op. cit.*, 504 – 505.

wywołaną krańcową zmianą poziomu kapitału w chwili *t*. Zgodnie z regułą optymalizacyjną wyrażoną w równaniu (3.25), optymalnym poziomem konsumpcji w chwili *t* jest taki poziom, przy którym krańcowa użyteczność bieżącej konsumpcji, $\bar{c}(t)^{-\gamma}$, zrównuje się z krańcowym kosztem alternatywnym tej konsumpcji.

Różniczkując równanie (3.25) względem czasu, mamy:

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma \bar{c}(t)^{-\gamma-1} \dot{\bar{c}}(t). \tag{3.26}$$

Podstawiając (3.25) oraz (3.26) do (3.22), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{\gamma} \bar{c}(t) \Big(f\,'(\bar{k}(t)) - (m + \delta + \rho - (1-\gamma)m) \Big) \tag{3.27}$$

Ostatecznie, konieczne warunki optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (3.21), (3.27) wraz z warunkami transwersalności (3.23), (3.24), przy warunku początkowym i ograniczeniach (3.18).

Twierdzenie 3.2. Funkcje $\bar{c}^{**}(t)$ i $\bar{k}^{**}(t)$ spełniające warunki konieczne optymalności, są jedynym rozwiązaniem optymalnym zadania (3.16) - (3.17)[18].

Dowód. Podstawiając lewą stronę (3.25) za $\theta(t)$ w (3.19), z uwagi na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k})$ możemy zauważyć, że tzw. zmaksymalizowany hamiltonian wartości bieżącej, zdefiniowany jako:

$$H_C^{**}\Big(\theta(t); \bar{k}(t)\Big) = H_C\Big(\theta(t); \bar{k}(t); \bar{c}^{**}(t)\Big),$$

jest silnie wklęsłą funkcją zmiennej stanu $\bar{k}(t)$. Tym samym spełniony jest warunek wystarczający na to, aby rozwiązanie wynikające z zasady maksimum stanowiło jedyne rozwiązanie optymalne problemu (3.16) - (3.17)[19].

■

Ponieważ nie określiliśmy konkretnej postaci funkcji $f(\bar{k})$, nie możemy wyznaczyć w sposób analityczny optymalnych ścieżek poszczególnych zmiennych. Możemy jednak dokonać analizy jakościowej rozwiązania optymalnego.

---

[18] Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania optymalnego problemu tego typu, jaki tutaj rozważamy, jest w literaturze pomijany.

[19] W sprawie twierdzenia o warunku wystarczającym, zob. D. Leonard, N. Van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, twierdzenie 4.6.4.

Przyrównując lewe strony (3.21) oraz (3.27) do zera, otrzymujemy dwa alternatywne układy równań:

$$\bar{c} = f(\bar{k}) - (n+m+\delta)\bar{k} \quad \wedge \quad \bar{c} = 0, \tag{3.28}$$

$$\bar{c} = f(\bar{k}) - (n+m+\delta)\bar{k} \quad \wedge \quad f'(\bar{k}) = m+\delta+\rho-(1-\gamma)m. \tag{3.29}$$

Para $(\bar{k}_e, \bar{c}_e)$ będąca rozwiązaniem układu równań (3.28) lub (3.29), opisuje pewien stan stacjonarny gospodarki, co oznacza, że jeśli gospodarka znajdzie się w tym stanie, zmienne $\bar{k}$ i $\bar{c}$ nie będą już podlegać dalszym zmianom.

Otrzymujemy dwa punkty spełniające układ równań (3.28): $(0,0)$ oraz $(\bar{k}_1, 0)$, gdzie przez $\bar{k}_1$ oznaczyliśmy taki poziom $\bar{k} > 0$, dla którego zachodzi równość $f(\bar{k}) = (n+m+\delta)\bar{k}$.

Oznaczmy przez, $\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**} > 0$, $\bar{k}_e^{**} < \bar{k}_1)$ stan stacjonarny (stan dynamicznej równowagi długookresowej), stanowiący rozwiązanie układu równań (3.29). Stanowi temu odpowiada ścieżka równomiernego wzrostu zmiennych w kategoriach bezwzględnych.

Twierdzenie 3.3. Stan stacjonarny $(\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**})$ jest globalnie asymptotycznie stabilny, tzn. dla dowolnego stanu początkowego $\bar{k}(0) > 0$, funkcje $\bar{c}^{**}(t)$ i $\bar{k}^{**}(t)$, będące rozwiązaniem optymalnym zadania (3.16) - (3.18), z upływem czasu zmierzają do wartości w stanie stacjonarnym: $\bar{c}^{**}(t) \to \bar{c}_e^{**}$, $\bar{k}^{**}(t) \to \bar{k}_e^{**}$, gdy $t \to \infty$ [20].

Dowód. Załóżmy, że funkcje $(\bar{c}(t), \bar{k}(t))$ są rozwiązaniem optymalnym zadania (3.16) - (3.18) (dla uproszczenia zapisu pomijamy gwiazdki).

1. Pokażemy najpierw, że zachodzą równania:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{k}}(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} \dot{\bar{c}}(t) = 0 \ \text{ oraz } \lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) \neq \pm\infty, \ \lim_{t\to\infty} \bar{c}(t) \neq \pm\infty.$$

Załóżmy, że tak nie jest, czyli $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{k}}(t) \neq 0$ lub $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{c}}(t) \neq 0$ lub $\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) = \pm\infty$ lub $\lim_{t\to\infty} \bar{c}(t) = \pm\infty$.

---

[20] Dowód twierdzenia o zbieżności gospodarki do stanu stacjonarnego $\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**} > 0$ w literaturze przeprowadzany jest graficznie z użyciem portretu fazowego. Poniższy, autorski dowód, przeprowadzony w czysto analityczny sposób, stanowić ma podstawę do uogólnienia analizy stabilności stanu stacjonarnego na przypadek trójwymiarowy (dla modelu z kapitałem ludzkim). Zob. punkt 7.4, Twierdzenie 7.4.

Sytuacje, w których $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{k}}(t)<0$ lub $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{c}}(t)<0$ lub $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{k}(t)=-\infty$ lub $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{c}(t)=-\infty$ możemy od razu wykluczyć ze względu na warunki nieujemności dla $\bar{k}$ i $\bar{c}$.

Na podstawie równania (3.21) dynamiki kapitału *njep*: $\dot{\bar{k}}(t)=f(\bar{k}(t))-\bar{c}(t)-(n+m+\delta)\bar{k}(t)$, silnej wklęsłości funkcji produkcji $f(\bar{k})$, warunku Inady: $\lim\limits_{k\to\infty}f'(\bar{k})=0$ oraz warunku nieujemności dla $\bar{c}$, możemy także wykluczyć $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{k}(t)=\infty$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{k}}(t)>0$.

Zatem $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{k}}(t)=0$ i $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{k}(t)\neq\infty$. Korzystając z tego faktu rozpatrzymy sytuacje, gdy $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{c}(t)=\infty$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{c}}(t)>0$. Z równania (3.21) dynamiki kapitału *njep* wynika, że wówczas musiałoby zachodzić $\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(\bar{k})-(n+m+\delta)\bar{k}\right)=\infty$. To jest jednak niemożliwe z uwagi na silną wklęsłość funkcji produkcji $f(\bar{k})$.

Zatem $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{k}}(t)=0$ i $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\bar{c}}(t)=0$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{k}(t)\neq\pm\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{c}(t)\neq\pm\infty$.

Stąd oraz z (3.28) i (3.29) wynika, że prawdą jest:

$$\text{albo } (\bar{c}(t),\bar{k}(t))\xrightarrow[t]{}(0,0),$$

$$\text{albo } (\bar{c}(t),\bar{k}(t))\xrightarrow[t]{}(0,\bar{k}_1),\ (\bar{k}^{**}<\bar{k}_1)$$

$$\text{albo } (\bar{c}(t),\bar{k}(t))\xrightarrow[t]{}(\bar{c}_e^{**},k_e^{**})>0.$$

2. Pokażemy, że nie jest możliwe, aby $\bar{k}(t)\xrightarrow[t]{}0$ (co eliminuje zbieżność $(\bar{c}(t),\bar{k}(t))\xrightarrow[t]{}(0,0)$).

W tym celu załóżmy, że $\bar{k}(t)\xrightarrow[t]{}0$ (nie przesądzając niczego o funkcji $\bar{c}(t)$).

Ponieważ z założenia $\bar{k}(0)>0$, zatem z warunku $\bar{k}(t)\xrightarrow[t]{}0$ wynika, że istnieje takie (dowolnie duże) $\tau>0$, dla którego:

$$\bar{k}(\tau)<\bar{k}_e^{**}, \tag{3.30}$$

$$\dot{\bar{k}}(\tau)<0. \tag{3.31}$$

Z definicji $\bar{k}_e^{**}$ i silnej wklęsłości funkcji produkcji $f(\bar{k})$ wnioskujemy, że:

$$f'(\bar{k}) > m + \delta + \rho - (1-\gamma)m, \text{ dla } \bar{k} < \bar{k}_e^{**}. \tag{3.32}$$

Z (3.32) i założenia $\rho - (1-\gamma)m - n > 0$ (zob. (3.16)), wynika, że:

$$f'(\bar{k}) > n + m + \delta, \qquad \text{dla } \bar{k} < \bar{k}_e^{**}. \tag{3.33}$$

Z nierówności $(\bar{k}^{**} < \bar{k}_1)$ (por. (3.28) – (3.29)) oraz z tego, że funkcja $f(\bar{k})$ jest silnie wklęsła i zeruje się w zerze wynika, że:

$$f(\bar{k}) - (n+m+\delta)\bar{k} > 0, \qquad \text{dla } 0 \le \bar{k} < \bar{k}_e^{**}. \tag{3.34}$$

Z (3.31), równania (3.21) dynamiki kapitału *njep*: $\dot{\bar{k}}(t) = f(\bar{k}(t)) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t)$ oraz (3.30) i (3.34) wynika, że:

$$\bar{c}(\tau) > f(\bar{k}(\tau)) - (n+m+\delta)\bar{k}(\tau) > 0. \tag{3.35}$$

Stąd oraz z (3.32) i równania (3.27) dynamiki konsumpcji *njep* wynika że:

$$\dot{\bar{c}}(t) > 0, \qquad \text{dla } \bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**} \text{ i } t \ge \tau. \tag{3.36}$$

Aby wykazać, że $\bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**}$ dla $t \ge \tau$, pokażemy, że:

$$\dot{\bar{k}}(t) < 0, \qquad \text{dla } t \ge \tau. \tag{3.37}$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy, wobec (3.31), istnieje taki moment $\tau_1 > \tau$, że

$$\dot{\bar{k}}(\tau_1) \ge 0 \qquad \text{oraz} \qquad \dot{\bar{k}}(t) < 0, \quad \text{dla } t \in \langle \tau, \tau_1 \rangle. \tag{3.38}$$

Na mocy (3.30) i (3.38), zachodzi:

$$\bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**} \text{ dla } t \in \langle \tau, \tau_1 \rangle. \tag{3.39}$$

Z (3.34) i równania (3.21) dynamiki kapitału *njep* wynika wówczas, że:

$$\bar{c}(\tau_1) \le f(\bar{k}(\tau_1)) - (n+m+\delta)\bar{k}(\tau_1). \tag{3.40}$$

Z (3.30), (3.38) i (3.33) wynika również, że:

$$f(\bar{k}(\tau_1)) - (n+m+\delta)\bar{k}(\tau_1) < f(\bar{k}(\tau)) - (n+m+\delta)\bar{k}(\tau). \tag{3.41}$$

Z (3.35), (3.40) i (3.41) wynika zatem, że:

$$\bar{c}(\tau_1) < \bar{c}(\tau). \tag{3.42}$$

Z drugiej strony, z (3.39) oraz (3.36) wnioskujemy, że $\bar{c}(\tau_1) > \bar{c}(\tau)$, co prowadzi do sprzeczności z (3.42).

Tak więc $\bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**}$ dla $t \geq \tau$. Stąd oraz z (3.30) i (3.36) wynika, że:

$$\dot{\bar{c}}(t) > 0, \qquad \text{dla } t \geq \tau, \tag{3.43}$$

Różniczkując obustronnie równanie (3.21) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d\dot{\bar{k}}(t)}{dt} = \left(f'(\bar{k}(t)) - (n+m+\delta) \right)\dot{\bar{k}}(t) - \dot{\bar{c}}(t). \tag{3.44}$$

Na mocy (3.30), (3.37) i (3.43), z równania (3.44) wynika, że:

$$\frac{d\dot{\bar{k}}(t)}{dt} < 0, \text{ dla } t \geq \tau.$$

Ostatnia nierówność świadczy o tym, że istnieje taki moment $\tau < t' < \infty$, w którym $\bar{k}(t') = 0$. Z równania dynamiki kapitału *njep* (3.21) i warunku nieujemności $\bar{k}(t) \geq 0$, wynika, że w momencie t' spełniona musi być także równość $\bar{c}(t') = 0$, co jest jednak sprzeczne z warunkami (3.35) i (3.43).

Otrzymana sprzeczność wyklucza zbieżność $(\bar{c}(t), \bar{k}(t)) \xrightarrow[t]{} (0, 0)$.

3. W ostatnim kroku dowodu pokażemy, że ze względu na warunek transwersalności (3.23) nie jest także możliwa zbieżność $(\bar{c}(t), \bar{k}(t)) \xrightarrow[t]{} (0, \bar{k}_1)$.

Z definicji $\bar{k}_1$ ($\bar{k}_1 > 0$ takie, że $f(\bar{k}_1) = (n+m+\delta)\bar{k}_1$) oraz z tego, że funkcja $f(\bar{k})$ jest silnie wklęsła i zeruje się w zerze wynika, że dla $\bar{k}(t) \to \bar{k}_1$ zachodzi $f'(\bar{k}) < n+m+\delta$. Wówczas jednak z definicji mnożnika Lagrange'a wartości bieżącej $\theta = \lambda e^{(\rho - n - (1-\gamma)m)t}$ oraz jego równania dynamiki (3.22) otrzymujemy, że:

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = n+m+\delta - f'(\bar{k}) > 0,$$

co jest sprzeczne z warunkiem transwersalności (3.23). Z tego samego powodu nie jest też możliwe, aby gospodarka spełniająca warunki konieczne optymalności znalazła się w momencie początkowym w punkcie $(\bar{k}_1, 0)$.

■

Z równań (3.29) charakteryzujących długookresową równowagę dynamiczną (stan stacjonarny $(\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**})$), definicji (2.5) elastyczności produktu względem kapitału $\alpha(\bar{k})$

oraz równania $\bar{c} = (1-s)f(\bar{k})$ (zob. (3.1)), możemy wyznaczyć długookresową optymalną stopę oszczędności (inwestycji):

$$s_e^{**} = \alpha \frac{m+n+\delta}{\rho+\delta+\gamma m}, \tag{3.45}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e)$ to stały, na ścieżce wzrostu równomiernego, udział wynagrodzenia kapitału w produkcie Jak wynika z (3.45), optymalna stopa oszczędności (inwestycji) s_e^{**}, do której zmierza optymalna trajektoria $s^{**}(t) = s\left(\bar{k}^{**}(t)\right)$**,** jest tym niższa, im wyższa jest stopa dyskontowa ρ oraz im wyższy jest parametr γ (im szybciej następuje spadek krańcowej chwilowej użyteczności konsumpcji, czyli im większa skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie)**.** Przy bardzo wysokiej stopie dyskontowej i / lub bardzo wysokim γ, optymalna stopa oszczędności (inwestycji) dąży do zera. To zaś przekłada się na ekstremalnie niski poziom konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym.

W kontekście zagadnienia oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy oraz uwag o ograniczeniach analitycznych koncepcji „złotej reguły akumulacji", sformułowanych w poprzednim punkcie pracy, podkreślić należy dwie kwestie.

Wniosek 3.1. Przy przyjętym założeniu $\rho - n - (1-\gamma)m > 0$, zachodzi:

$$s^{**} < s^{*},$$

gdzie s^{*} jest stopą oszczędności (inwestycji) wynikającą ze „złotej reguły akumulacji", daną przez (3.7).

W porównaniu z wnioskami wynikającymi ze „złotej reguły akumulacji", nierówność ta oznacza zmniejszenie rozbieżności pomiędzy obserwowanymi w rzeczywistości stopami oszczędności (inwestycji), a optymalnym poziomem tej stopy, maksymalizującym dobrobyt społeczny. Tym samym oznacza to również zawężenie obszaru możliwości stymulującego wzrost gospodarczy oddziaływania państwa na poziom społecznej stopy inwestycji, poprzez politykę fiskalną, jeżeli ostatecznym celem takiej stymulacji miałaby być maksymalizacja społecznego dobrobytu.

Wniosek 3.2. W przypadku, gdy, $\rho \to \left(n + (1-\gamma)m\right)^{+}$, optymalna stopa oszczędności (inwestycji) s^{**}, określona przez (3.45), jest zbieżna do stopy s^{*}[21]. Oznacza to, że stopa s^{*} stanowi graniczny poziom optymalnej stopy oszczędności (inwestycji), przy nieskończonym horyzoncie planowania oraz określonych preferencjach co do rozkładu konsumpcji w czasie. Formalnym wyrazem tych szczególnych preferencji są różne kombinacje ρ i γ, spełniające zależność: $\rho \to \left(n + (1-\gamma)m\right)^{+}$. Sytuacja taka ma miejsce m.in. w dwóch szczególnych przypadkach, gdy:

- $\rho \to (n+m)^{+}$ oraz $\gamma \to 0^{+}$,
- $\rho \to n^{+}$ oraz $\gamma \to 1^{-}$.

Stopa oszczędności (inwestycji) zgodna ze „złotą regułą akumulacji" Phelpsa stanowi zatem optymalny poziom stopy oszczędności (inwestycji) na ścieżce wzrostu równomiernego, do której powinna zmierzać gospodarka startująca z dowolnego punktu, aby maksymalizować dobrobyt społeczny, w przypadku gdy społeczne preferencje odnośnie rozkładu konsumpcji w czasie opisuje, odpowiednio:

- liniowa funkcja chwilowej użyteczności konsumpcji (przy $\gamma \to 0^{+}$ mamy bowiem $u(c) = \dfrac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \to u(c) = c$), przy stopie dyskonta konsumpcji równej długookresowej stopie wzrostu produktu,
- logarytmiczna funkcja chwilowej użyteczności konsumpcji (przy $\gamma \to 1^{-}$ mamy $u'(c) = c^{-\gamma} \to u'(c) = c^{-1}$, zatem $u(c) \to \ln c$), przy stopie dyskonta konsumpcji równej stopie przyrostu naturalnego[22].

---

[21] Zapis $x \to a^{+}$ oznacza, że wartości zmiennej x zbiegają do poziomu a z prawej strony na osi liczbowej.

[22] W literaturze interpretacja ta nigdy nie jest wyrażana *explicite*, sugeruje się za to, że „złota reguła akumulacji" odpowiada sytuacji, w której ignoruje się jakiegokolwiek dyskonto konsumpcji przyszłej przez podmioty, przy założeniu o maksymalizacji bezpośrednio samej konsumpcji (czyli liniowej funkcji użyteczności). Zob. np. T. Tokarski, *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001, s. 117 – 123 oraz idem, *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005, s. 108 - 114. Interpretacja autora wynika prawdopodobnie stąd, iż zakłada on maksymalizację sumy zdyskontowanej konsumpcji *njep* jako cel optymalizacji podmiotu, zamiast konsumpcji *per capita*, jak wymaga tego, naszym zdaniem, logika rozważanego schematu optymalizacyjnego.

Poza tym, procedura rozwiązania sformułowanego problemu dynamicznej optymalizacji, przedstawiona w pracy Tokarskiego, nie jest poprawna z formalnego punktu widzenia. Autor utożsamia bowiem warunek konieczny maksymalizacji hamiltonianu w całym horyzoncie optymalizacji z zerowaniem się pochodnej hamiltonianu względem zmiennej sterującej, co w przypadku, gdy hamiltonian jest liniową funkcją zmiennej sterującej (a z taką sytuacją mamy do czynienia) jest postępowaniem niewłaściwym. Istotne jest to, że ten formalnie niepoprawny w samym punkcie wyjścia sposób

3.4. Maksymalizacja dobrobytu społecznego w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej

Prowadzone dotąd rozważania miały charakter wyłącznie normatywy. Zarówno „złota reguła akumulacji”, jak i problem optymalizacji dynamicznej przedstawiony w poprzednim punkcie pracy, stanowiły próby odpowiedzi na pytanie o optymalną, z punktu widzenia dobrobytu społecznego, stopę inwestycji, nie dając żadnego (pozytywnego) wyjaśnienia rzeczywistych poziomów tej stopy w gospodarkach, w których decyzje o podziale produktu podejmowane są przez indywidualne podmioty działające na rynku. Z natury rzeczy zatem, sformułowane dotychczas wnioski odnośnie możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy mają sens jedynie przy założeniu, że podmioty prywatne nie reagują w żaden sposób na działania ze strony państwa, w szczególności na zmiany stopy redystrybucji dochodu przez budżet i podziału wydatków budżetowych pomiędzy publiczną konsumpcję i inwestycje.

W najnowszej literaturze z zakresu teorii wzrostu gospodarczego problem dynamicznej optymalizacji bywa często przedstawiany w kategoriach równowagi konkurencyjnej[23]. W tym ujęciu, stopa inwestycji wynika z zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów ekonomicznych, działających w doskonale konkurencyjnym otoczeniu, w którym żaden z podmiotów nie ma wpływu na ceny (w tym wynagrodzenia czynników produkcji). Ponieważ analiza funkcjonowania

---

rozwiązania zadania stanowi przyczynę osobliwego wniosku, sformułowanego przez autora, a dotyczącego ekonomicznego sensu rozwiązania problemu. Autor stwierdza mianowicie, iż „gospodarka (…) już w momencie $t = 0$ osiąga stan wzrostu równomiernego”, co przy dowolnym – ukształtowanym „historycznie” – wyjściowym poziomie kapitału *njep* jest w oczywisty sposób niemożliwe.

Mając powyższe na uwadze, proponujemy rozważać problemy z nieskończonym horyzontem, w których optymalizacja dotyczy bezpośrednio poziomu konsumpcji, jako graniczne przypadki problemu bardziej ogólnego, sformułowanego w kategoriach funkcji użyteczności. Alternatywny sposób rozpatrywania problemu z liniową funkcją użyteczności konsumpcji, oparty na zastąpieniu maksymalizacji przez minimalizację funkcjonału celu, w którym w charakterze funkcji podcałkowej występuje odchylenie poziomu konsumpcji od tzw. punktu Blissa, można znaleźć w pracy K. Shella (K. Shell, *Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics*, [w:] H. W. Kuhn., G. P. Szego, eds., *Mathematical Systems Theory and Economics*, Vol. 1, Spring – Verlag, New York, 1969, str. 241 – 292, szczególnie s. 273 -275), do której odwołuje się A. Chiang (zob. Chiang A., *op.cit.*, s. 246 – 248). Metoda zaproponowana przez Shella wymaga jednakże znajomości punktu Blissa, czyli *de facto* asymptotycznego rozwiązania problemu (dla $t \to \infty$), jeszcze przed przystąpieniem do jego rozwiązywania, co w ogólnym przypadku ogranicza jej praktyczną użyteczność.

[23] Tego typu interpretacja problemu dynamicznej optymalizacji pochodzi od Lucasa. Zob. R. Lucas Jr., *On The Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics, vol. 22, July 1988, s. 9. Por. także R. J. Barro, X. Sala i Martin, *op. cit.*, s. 60 – 71, O. J. Blanchard, S. Fisher, *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England 1990, s. 48 – 51, A. Novales, E. Fernandez, J. Ruiz, *Economic Growth, Theory and Numerical Solution Methods*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg 2009, s. 126 – 130.

gospodarki prowadzona jest na poziomie makroekonomicznych agregatów, przyjmuje się założenie o typowym gospodarstwie domowym i typowym przedsiębiorstwie, co oznacza, że wszystkie gospodarstwa domowe mają takie same preferencje, a wszystkie firmy dysponują taką samą technologią produkcji[24].

W tym ujęciu, zadanie optymalizacji dynamicznej stanowi pewne uogólnienie neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, przedstawionego w punkcie 1.2 w kategoriach równowagi konkurencyjnej. Uogólnienie to polega na tym, że zamiast założenia o stałej, egzogenicznie danej stopie oszczędności (inwestycji) przyjmuje się, że poziom tej stopy w każdym momencie wynika z zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów mikroekonomicznych działających na rynku.

Zbieżność rozwiązania „rynkowego" z rozwiązaniem optymalnym (rozwiązaniem problemu społecznego planisty) wynika wtedy z faktu, że:

- zgodnie z pierwszym twierdzeniem o dobrobycie, równowaga w warunkach konkurencji doskonałej jest stanem efektywnym w sensie Pareto (nie ma możliwości zwiększenia poziomu użyteczności jakiegokolwiek podmiotu bez konieczności jednoczesnego pogorszenia sytuacji jakiegoś innego),
- ze względu na założenie o jednakowych preferencjach wszystkich podmiotów, efektywność równowagi rynkowej w sensie Pareto oznacza maksymalizację funkcji dobrobytu społecznego traktującej wszystkie podmioty w jednakowy sposób.

Ponieważ mamy tutaj do czynienia z równowagą dynamiczną (wszystkie wielkości zmieniają się w czasie), warto przyjrzeć się temu zagadnieniu nieco dokładniej.

Zakładamy, że gospodarka składa się z dużej liczby N jednakowych gospodarstw domowych oraz dużej liczby przedsiębiorstw maksymalizujących zyski w warunkach doskonałej konkurencji. Liczba ludności w gospodarce w chwili t wynosi $L(t)$.

Każde gospodarstwo domowe dostarcza przedsiębiorstwom $L_G(t) = L(t)/N$ jednostek pracy oraz wydzierżawia $k(t)L_G(t)$ jednostek kapitału (gdzie k to kapitał *p.c.* w gospodarce) w każdym momencie t. Otrzymane dochody gospodarstwo domowe dzieli pomiędzy konsumpcję i inwestycje w kapitał.

[24] Zabieg ten jest powszechnie stosowany w modelach powstających w obrębie nowej makroekonomii klasycznej (w tym teorii realnego cyklu koniunkturalnego), a także nowej makroekonomii keynesowskiej, zgodnie z duchem tzw. indywidualizmu metodologicznego, przyjmowanego w celu stworzenia kompletnych i spójnych mikropodstaw dla teorii makroekonomicznej. Pomimo oczywistych uproszczeń, zabieg ten można postrzegać jako istotny krok naprzód na drodze do integracji teorii makro- i mikroekonomicznej.

„Chwilowy” bilans dochodów i wydatków gospodarstwa domowego przedstawia się następująco:

$$\left(k(t)\dot{L}_G(t)\right) - \delta k(t)L_G(t) + c(t)L_G(t) = w(t)L_G(t) + q(t)k(t)L_G(t)\,, \tag{3.46}$$

gdzie δ oznacza stopę deprecjacji kapitału, zaś $w(t)$ i $q(t)$ - rynkowe ceny, odpowiednio, pracy i kapitału.

Wyrażając wszystkie zmienne w kategoriach *njep* i dzieląc powyższe równanie obustronnie przez $A(t)L_G(t)$, przy czym $A(t) = A_0 e^{mt}$, $L(t) = L_0 e^{nt}$, bilans dochodów i wydatków gospodarstwa domowego możemy zapisać w postaci następującej:

$$\dot{\bar{k}}(t) + (n + m + \delta)\bar{k}(t) + \bar{c}(t) = \bar{w}(t) + q(t)\bar{k}(t)\,. \tag{3.47}$$

Zakładamy także:

$$\bar{k}(0) > 0 \text{ oraz } \bar{k}(t), \bar{c}(t) \geq 0\,. \tag{3.48}$$

Przyjmując ceny pracy $w(t)$ i kapitału $q(t)$ jako dane, gospodarstwo domowe maksymalizuje sumę zdyskontowanej (według stopy ρ) chwilowej użyteczności konsumpcji swoich członków w nieskończonym horyzoncie czasu (por. (3.14)):

$$\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} L_G(t) e^{-\rho t} dt, \qquad \rho > 0,\ \gamma \in (0,1), \tag{3.49}$$

gdzie c to konsumpcja *p.c.* w gospodarce, a $L_G(t) = L(t)/N$ oznacza liczbę członków gospodarstwa domowego w chwili *t*.

Przyjęcie nieskończonego horyzontu optymalizacji w funkcjonale celu typowego gospodarstwa domowego, może wydawać się problematyczne z punktu widzenia jego motywacji. Założenie to uzasadnia się zazwyczaj w ten sposób, że podmioty troszczą się nie tylko o własną dożywotnią konsumpcję, ale również o możliwości konsumpcyjne swoich potomków. Nieskończony horyzont planowania można więc tłumaczyć swego rodzaju altruizmem, wynikającym z silnych więzi międzypokoleniowych. W efekcie kolejne pokolenia danego podmiotu traktuje się tak, jakby tworzyły jedno, istniejące nieskończenie długo, gospodarstwo domowe. Ponadto, ze względu na malejące wykładniczo wagi nadawane kolejnym momentom czasu, odpowiednio wysoki poziom stopy dyskontowej ogranicza, praktycznie rzecz biorąc, rzeczywisty horyzont planowania do dowolnie krótkiego okresu.

W tym kontekście warto też zwrócić uwagę na czynnik w funkcjonale celu, oznaczający liczbę członków gospodarstwa domowego, rosnącą w sposób ciągły z założoną stopą przyrostu naturalnego w gospodarce. Często w literaturze, w sformułowaniach problemu optymalizacyjnego czynnik ten jest pomijany. Z formalnego punktu widzenia nie ma żadnego znaczenia, gdyż ze względu na stałą stopę przyrostu naturalnego mnożenie funkcji chwilowej użyteczności przez $L_G(t) = L_0 / Ne^{nt}$ jest równoważne z odpowiednim zmniejszeniem stopy dyskonta. Ze względu jednak na ekonomiczną interpretację problemu, umieszczenie tego czynnika *explicite* w funkcjonale celu wydaje się bardziej spójne z założeniem o nieskończonym horyzoncie planowania podmiotów. W przeciwnym razie, pojawiają się także trudności z interpretacją faktu, że z lewej strony bilansu dochodów i wydatków (3.47) tak czy inaczej pojawia się składnik $nk(t)$, wyrażający spadek kapitału *p.c.* na skutek ciągłego przyrostu naturalnego.

Definicja 3.1. Optymalnym planem konsumpcji i oszczędności gospodarstwa domowego w horyzoncie optymalizacji (t_0, ∞) w gospodarce konkurencyjnej nazywamy dwójkę $(\bar{k}^*(t), \bar{c}^*(t))$, będącą rozwiązaniem zadania (3.47) - (3.49) dla danych ścieżek $\bar{w}(t), q(t)$.

Zadanie (3.47) - (3.49) jest zadaniem sterowania optymalnego, w którym $\bar{c}(t)$ jest zmienną sterującą, zaś $\bar{k}(t)$ - zmienną stanu. Hamiltonian wartości bieżącej jest postaci:

$$H_C(t) = \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta(t)\left(\bar{w}(t) + q(t)\bar{k}(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t) - \bar{c}(t)\right),$$

gdzie $\theta = \lambda e^{(\rho - n - (1-\gamma)m)t}$ jest mnożnikiem Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej, $\bar{c}(t) > 0$, oraz zmiennej stanu, $\bar{k}(t) > 0$, warunki konieczne zasady maksimum mają postać następującą:

$$\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} = \bar{c}(t)^{-\gamma} - \theta(t) = 0, \tag{3.50}$$

$$\dot{\bar{k}}(t) = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \theta(t)} = \bar{w}(t) + q(t)\bar{k}(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t) - \bar{c}(t), \tag{3.51}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{k}(t)} + \theta(t)\left(\rho - n - (1-\gamma)m\right) = -\theta(t)\left(q(t) - (m+\delta+\rho-(1-\gamma)m)\right), \tag{3.52}$$

oraz warunki transwersalności[25]:

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0, \qquad \lim_{t\to\infty}H_C\, e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0\,, \tag{3.53}$$

Z warunku (3.50) wynika, że dla każdej chwili t spełnione jest następujące równanie:

$$\theta(t)=\bar{c}(t)^{-\gamma}.$$

Różniczkując to równanie względem czasu, mamy: $\dot{\theta}(t)=-\gamma\bar{c}(t)^{-\gamma-1}\dot{\bar{c}}(t)$.

Podstawiając oba równania do (3.52), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{c}}(t)=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\big(q(t)-(m+\delta+\rho-(1-\gamma)m)\big) \tag{3.54}$$

Ostatecznie, konieczne warunki optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (3.51), (3.54) wraz z warunkami transwersalności (3.53), przy ograniczeniach (3.48).

Przedsiębiorstwa maksymalizujące zysk najmują pracę i dzierżawią kapitał do momentu zrównania ich krańcowych produktywności z rynkowymi cenami czynników. W stanie równowagi długookresowej na rynku doskonale konkurencyjnym przedsiębiorstwa osiągają zerowe zyski czyste, czyli suma wynagrodzeń dla pracy i kapitału wyczerpuje wartość produkcji każdej firmy. Oznacza to, że na poziomie całej gospodarki zachodzą równości[26]:

$$q(t)=f'(\bar{k}(t)), \qquad \bar{w}(t)=f(\bar{k}(t))-\bar{k}(t)f'(\bar{k}(t)), \tag{3.55}$$

gdzie, jak dotychczas, $\bar{y}(t)=f(\bar{k}(t))$ oznacza postać intensywną (w kategoriach *njep*) agregatowej funkcji produkcji $Y(t)=F(K(t)\bar{L}(t))$, dodatnio jednorodnej stopnia jeden.

Definicja 3.2.[27] Mówimy, że gospodarka konkurencyjna osiąga chwilową równowagę dynamiczną w momencie t^*, jeżeli rynkowe ceny kapitału i pracy $\left(w(t^*),q(t^*)\right)$

[25] W sprawie warunków transwersalności zob. przypis 16.

[26] Bardziej szczegółowo na ten temat, zob. punkt 1.2.

[27] Definicje 3.1 i 3.2 stanowią propozycję autora. Zauważmy, że tego typu określenie równowagi rynkowej, jako takiego stanu w gospodarce, gdy faktyczne i oczekiwane zachowania podmiotów pokrywają się ze sobą, nawiązuje bezpośrednio do definicji równowagi, sformułowanej przez ekonomistów szwedzkich, zwolenników „analizy *ex post* i *ex ante*" (w szczególności E. Lindhala). Zgodnie z tą definicją, stan równowagi na rynku zostaje osiągnięty wówczas, gdy wszystkie plany i przewidywania podmiotów gospodarczych są spełnione, tak, że żaden podmiot nie wykazuje skłonności do zrewidowania swoich decyzji. Por. B. Hansen, *Przegląd systemów równowagi ogólnej*, PWN, Warszawa 1976, s.16. Por. definicję równowagi rynkowej w modelu wzrostu endogenicznego R. Lucasa w rozdziale piątym (punkt 5.3).

kształtują się na takim poziomie, że gospodarstwa domowe nie są skłonne do zmiany swojego dotychczasowego optymalnego planu oszczędzania i konsumpcji.

Gospodarka konkurencyjna znajduje się międzyokresowej równowadze dynamicznej w horyzoncie (t_0, T), jeżeli osiąga chwilową równowagę dynamiczną w każdym momencie $t \in (t_0, T)$. Oznacza to, że trajektorie rynkowych cen pracy $w(t)$ i kapitału $q(t)$ odtwarzają ścieżki założone przez reprezentatywne gospodarstwo domowe w optymalnym planie w okresie t_0.

W rozważanym modelu przyjmuje się, że gospodarka osiąga międzyokresową równowagę dynamiczną w nieskończonym horyzoncie optymalizacji gospodarstw domowych. Nie analizuje się natomiast mechanizmu prowadzącego do osiągnięcia przez gospodarkę tak rozumianej równowagi. Często w tym kontekście w literaturze przywoływana jest hipoteza racjonalnych oczekiwań. Ponieważ w modelu mamy jednak do czynienia wyłącznie z wielkościami deterministycznymi, racjonalne oczekiwania oznaczają tutaj po prostu doskonałe przewidywania podmiotów (*perfect foresight*).

Podstawiając (3.55) do (3.51) i (3.54) uzyskujemy, odpowiednio:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}}(t) &= f(\bar{k}(t)) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t), \\ \dot{\bar{c}}(t) &= \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\Big(f'(\bar{k}(t)) - (m+\delta+\rho-(1-\gamma)m)\Big). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Równania (3.56) wraz z warunkami transwersalności (3.53), warunkiem początkowym i ograniczeniami na zmienne (3.48) opisują dynamikę rozważanej gospodarki konkurencyjnej.

Nietrudno zauważyć, że stanowią one powtórzenie warunków optymalności (3.18), (3.21) - (3.24), (3.27) zadania społecznego planisty (3.16) - (3.18). Oznacza to, że w międzyokresowej dynamicznej równowadze konkurencyjnej w gospodarce maksymalizowany jest społeczny dobrobyt.

W szczególności, stopa inwestycji na ścieżce wzrostu równomiernego dana jest przez (patrz (3.45)):

$$s_e^{**} = \alpha \frac{m+n+\delta}{\rho+\delta+\gamma m}. \tag{3.57}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e)$.

W porównaniu z wnioskami uzyskanymi na bazie analizy przeprowadzonej w punktach 3.1 – 3.3, wyprowadzenie trajektorii stopy inwestycji w gospodarce z decyzji optymalizacyjnych indywidualnych podmiotów rynkowych rzuca nowe światło zarówno na zagadnienie obserwowanych w rzeczywistości poziomów tej stopy, jak i problem oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy.

Odnośnie kwestii pierwszej możemy sformułować następujące wnioski.

- Z perspektywy oceny eksplanacyjnych walorów teorii, rezygnacja z założenia o stałej, danej egzogenicznie stopie oszczędności (inwestycji) w gospodarce i endogeniczne wyprowadzenie stałego, na ścieżce wzrostu równomiernego, poziomu tej stopy z preferencji podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie można postrzegać jako uzupełnienie teoretycznego wyjaśnienia stylizowanych faktów wzrostu gospodarczego, jakie daje neoklasyczna teoria wzrostu. Przypomnijmy, że chodzi tutaj o długookresową stabilność stosunku inwestycji brutto do produktu - ostatnią z przytoczonych w punkcie 2.1 pracy długookresowych tendencji, której model wzrostu gospodarczego Solowa nie wyjaśnia, lecz którą przyjmuje jako założenie
- Przejście od normatywnego do pozytywnego opisu gospodarki, z jakim mamy tutaj do czynienia, oraz zbieżność rozwiązania problemu optymalizacyjnego w kategoriach równowagi rynkowej z rozwiązaniem optymalnym oznaczają, że wszelkie porównania faktycznie obserwowanych poziomów stopy oszczędności z optymalnym poziomem tej stopy tracą sens. Przy założeniu, że gospodarka funkcjonuje zgodnie z rozważanym tutaj modelem, obserwowany w danym społeczeństwie poziom stopy oszczędności ujawnia natomiast preferencje gospodarujących w nim podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie.
- W świetle formuły (3.45), wyjaśnieniem obserwowanych w rzeczywistości stóp oszczędności, kształtujących się zwykle znacznie poniżej poziomu wynikającego ze „złotej reguły akumulacji”, mogą być relatywnie wysokie stopy dyskonta konsumpcji (oraz niska elastyczność międzyokresowej substytucji konsumpcji), czyli koncentrowanie się przez podmioty na bieżącym dobrobycie. Poza tym, z uwagi na fakt, iż stopa dyskontowa skupia w sobie wpływy wielu różnych trudno kwantyfikowalnych czynników, wśród których z pewnością nie można pominąć poziomu ogólnej stabilności makroekonomicznej i politycznej, może stanowić teoretyczne ogniwo łączące oddziaływanie tych ostatnich na wartość społecznej stopy oszczędności.

3.5. Możliwości oddziaływania państwa na wzrost w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej

W modelu gospodarki konkurencyjnej uwzględniamy teraz sektor budżetowy[28].

Na dochody sektora budżetowego składają się podatki od dochodów uzyskiwanych przez gospodarstwa domowe oraz dochody z majątku państwowego. Rozróżniamy pomiędzy stopą opodatkowania dochodów z pracy, $0 \le \tau_w \le 1$, i kapitału, $0 \le \tau_q \le 1$. Majątek państwowy powiększa się w wyniku inwestycji budżetowych. Nie zainwestowana część dochodów budżetowych przeznaczana jest na finansowanie działalności sektora publicznego (konsumpcję budżetową).

Bilans dochodów i wydatków (zapisany w kategoriach *njep*) sektora budżetowego przedstawia się następująco:

$$\dot{\bar{k}}_B(t) + (n+m)\bar{k}_B(t) + \bar{c}_B(t) = \tau_w(t)\bar{w}(t) + \tau_q(t)q(t)\bar{k}_P(t) + q(t)\bar{k}_B(t), \qquad (3.58)$$

gdzie $\bar{k}_B$ oznacza kapitał zakumulowany dzięki inwestycjom budżetowym (majątek państwowy), przynoszący dochody do budżetu równe $q\bar{k}_B$, $\bar{k}_P$ - kapitał prywatny, a $\bar{c}_B$ oznacza konsumpcję budżetową (pozostałe oznaczenia *j.w.*). Przyjmujemy ponadto: $\bar{k}_B(0) > 0$, $\bar{k}_B(t), \bar{c}_B(t) \ge 0$.

Oznaczając przez s_B stopę inwestycji budżetowych, zdefiniowaną jako stosunek inwestycji budżetowych do dochodów budżetowych, równanie (3.58) możemy również zapisać w alternatywny sposób:

[28] Problemy związane z funkcjonowaniem sektora budżetowego w gospodarce konkurencyjnej, formułowane na gruncie modeli wzrostu typu Ramsey'a-Cassa-Koopmansa, podjęte zostały np. w pracach: O. J. Blanchard, S. Fisher, *op. cit.*, s. 52 – 58, A. Novales, E. Fernandez, J. Ruiz, *op. cit.*, s. 131-148, Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000, s. 79-92.

Sformułowane w dalszej części tego rozdziału problemy dotyczące polityki fiskalnej mają w zasadniczej mierze charakter autorski. W przeciwieństwie do zagadnień rozpatrywanych w podanej wyżej literaturze, uwzględniamy tutaj wpływ polityki fiskalnej na zdolności produkcyjne gospodarki poprzez inwestycje finansowane z budżetu oraz dokonujemy rozróżnienia pomiędzy opodatkowaniem dochodów z pracy i dochodów z kapitału i wpływem tego opodatkowania na stopę inwestycji w gospodarce. Uwzględniamy także możliwość wpływu konsumpcji publicznej na użyteczność gospodarstw domowych (zamiast przyjmowanego zazwyczaj założenia, że z punktu widzenia tych gospodarstw część produktu przechodząca przez budżet *„is thrown to the see"*) i wskazujemy na zależność charakteru rozwiązania wynikającego z równowagi konkurencyjnej z punktu widzenia maksymalizacji dobrobytu społecznego od sposobu sformułowania funkcjonału celu gospodarstw domowych. Analiza ta jest kontynuowana w rozdziale siódmym, w którym uwzględnia się inwestycje w kapitał ludzki. Pomijamy natomiast problematykę alternatywnych możliwości finansowania wydatków budżetowych poprzez deficyt budżetowy lub podatki (czyli tzw. zagadnienie ekwiwalencji ricardiańskiej).

$$\dot{\bar{k}}_B(t) + (n+m)\bar{k}_B(t) = s_B(t)\Big(\tau_w(t)\bar{w}(t) + \tau_q(t)q(t)\bar{k}_P(t) + q(t)\bar{k}_B(t)\Big), \qquad (3.58a)$$

przy czym, z definicji, względny udział wydatków na konsumpcję w całości wydatków sektora budżetowego wynosi $1 - s_B$.

Bilans dochodów i wydatków (w kategoriach *njep*) pojedynczego gospodarstwa domowego, z uwzględnieniem podatków płaconych do budżetu, przyjmuje postać następującą (por. (3.48)):

$$\dot{\bar{k}}_P(t) + (n+m)\bar{k}_P(t) + \bar{c}_P(t) = (1-\tau_w(t))\bar{w}(t) + (1-\tau_q(t))q(t)\bar{k}_P(t), \qquad (3.59)$$

gdzie $\bar{c}_P$, oznacza konsumpcję prywatną gospodarstw domowych *njep*. Przyjmujemy, że $\bar{k}_P(0) > 0$ oraz $\bar{k}_P(t), \bar{c}_P(t) \geq 0$.

Oznaczając przez s_P stopę inwestycji prywatnych, zdefiniowaną jako stosunek inwestycji gospodarstwa domowego do jego dochodów, równanie (3.59) możemy także zapisać w postaci:

$$\dot{\bar{k}}_P(t) + (n+m+\delta)\bar{k}_P(t) = s_P(t)\Big((1-\tau_w(t))\bar{w}(t) + (1-\tau_q(t))q(t)\bar{k}_P(t)\Big), \qquad (3.59a)$$

przy czym, z definicji, względny udział wydatków na konsumpcję w całości wydatków gospodarstwa domowego wynosi $1 - s_P$.

Sumując stronami bilanse dochodów i wydatków gospodarstw domowych i sektora budżetowego otrzymujemy bilans dochodów i wydatków dla całej gospodarki. Zapisany w kategoriach *njep*, przyjmuje on następującą postać:

$$\dot{\bar{k}}(t) + (n+m)\bar{k}(t) + \bar{c}(t) = \bar{w}(t) + q(t)\bar{k}(t), \qquad (3.60)$$

przy czym $\bar{c} = \bar{c}_P + \bar{c}_B$ oznacza społeczną konsumpcję *njep*, a $\bar{k} = \bar{k}_P + \bar{k}_B$ - społeczny zasób kapitału *njep*. Spełnione są ponadto ograniczenia $\bar{k}(0) > 0$ oraz $\bar{k}(t), \bar{c}(t) \geq 0$.

Przyjmujemy ponadto te same założenia o funkcjonowaniu przedsiębiorstw w warunkach doskonałej konkurencji jak w modelu gospodarki konkurencyjnej bez sektora budżetowego. W szczególności obowiązują równania:

$$q(t) + \delta = f'(\bar{k}(t)) \qquad \bar{w}(t) = f(\bar{k}(t)) - \bar{k}(t)f'(\bar{k}(t)), \qquad (3.61)$$

oznaczające, że czynniki produkcji opłacane są według ich krańcowych produktywności, a suma wypłacanych wynagrodzeń wyczerpuje wartość produkcji przedsiębiorstw. W odróżnieniu od modelu bez sektora budżetowego zakładamy tutaj, że koszty amortyzacji (deprecjacji) kapitału ponoszą przedsiębiorstwa. Jednostkowym kosztem kapitału dla przedsiębiorstwa jest zatem jego cena rynkowa q, powiększona o stopę deprecjacji δ. Ta niewielka modyfikacja w stosunku do (3.55) pozwala uwzględnić fakt, że część dochodów z kapitału przeznaczana na inwestycje restytucyjne nie podlega opodatkowaniu (zob. (3.59))[29].

Załóżmy, że celem gospodarstwa domowego jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji swoich członków w nieskończonym horyzoncie czasu, danej przez funkcjonał celu (3.49), przy czym konsumpcja finansowana przez sektor budżetowy traktowana jest jako dana, przy ograniczeniu budżetowym (3.59), w którym jako dane traktowane są rynkowe ceny pracy i kapitału, $\overline{w}(t)$ i $q(t)$, oraz stopy opodatkowania dochodów $\tau_w(t)$ I $\tau_q(t)$.

Problem optymalizacyjny typowego gospodarstwa domowego przyjmuje następującą postać:

$$\int_0^\infty \frac{\left(\overline{c}_P(t)+\overline{c}_B(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \xrightarrow{\overline{c}_P} \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m-n>0, \tag{3.62}$$

$$\dot{\overline{k}}_P(t)+(n+m)\overline{k}_P(t)+\overline{c}_P(t)=(1-\tau_w(t))\overline{w}(t)+(1-\tau_q(t))q(t)\overline{k}_P(t),$$

$$\overline{k}_P(0)>0, \qquad \overline{k}_P(t),\overline{c}_P(t)\geq 0. \tag{3.63}$$

Uwzględnienie w funkcjonale celu społecznej konsumpcji *njep*, $\overline{c}(t)=\overline{c}_P(t)+\overline{c}_B(t)$, oznacza, że gospodarstwa domowe tak samo traktują konsumpcję publiczną jak konsumpcję finansowaną z własnych środków, przy czym ścieżka konsumpcji publicznej $\overline{c}_B(t)$ jest egzogenicznie dana, zaś konsumpcja prywatna $\overline{c}_P(t)$ w każdym momencie *t* podlega rachunkowi optymalizacyjnemu.

Definicja 3.3. Optymalnym planem konsumpcji i oszczędności gospodarstwa domowego w horyzoncie optymalizacji (t_0,∞) w gospodarce konkurencyjnej z sektorem budżetowym nazywamy parę trajektorii $(\overline{k}_P^*(t),\overline{c}_P^*(t))$, będącą rozwiązaniem zadania (3.62) - (3.63), dla danych ścieżek $\overline{w}(t),q(t),\tau_w(t),\tau_q(t),\overline{c}_B(t)$.

Rozwiązując zadanie (3.62) - (3.63) przy użyciu teorii sterowania optymalnego, jako zmienną sterującą przyjmujemy $\overline{c}_P(t)$, zaś jako zmienną stanu - $\overline{k}_P(t)$. Zapisujemy hamiltonian wartości bieżącej:

[29] Koszty amortyzacji pomniejszają podstawę opodatkowania zysków przedsiębiorstw (dochodów z kapitału).

$$H_C(t) = \frac{\left(\bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} +$$
$$+\theta(t)\left[(1-\tau_w(t))\bar{w}(t) + (1-\tau_q(t))q(t)\bar{k}_P(t) - (n+m)\bar{k}_P(t) - \bar{c}_P(t)\right].$$

gdzie $\theta = \lambda e^{(\rho - n-(1-\gamma)m)t}$ jest tzw. mnożnikiem Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej, $\bar{c}_P(t) > 0$, oraz zmiennej stanu, $\bar{k}_P(t) > 0$, warunki konieczne zasady maksimum mają postać następującą:

$$\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}_P(t)} = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} \cdot \frac{\partial \bar{c}(t)}{\partial \bar{c}_P(t)} = \bar{c}(t)^{-\gamma} - \theta(t) = 0\,, \tag{3.64}$$

$$\dot{\bar{k}}_P(t) = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \theta(t)} = -\bar{c}_P(t) + (1-\tau_w(t))\bar{w}(t) + \left((1-\tau_q(t))q(t) - (n+m)\right)\bar{k}_P(t)\,, \tag{3.65}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{k}_P(t)} + \theta(t)\left(\rho - n - (1-\gamma)m\right) = -\theta(t)\left(\left((1-\tau_q)q(t) - (n+m)\right)\right), \tag{3.66}$$

oraz warunki transwersalności[30]:

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} H_C\, e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0\,, \tag{3.67}$$

Z warunku (3.64) wynika, że dla każdej chwili *t* spełnione jest następujące równanie:

$$\theta(t) = \bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{3.68}$$

Różniczkując równanie (3.68) względem czasu, mamy:

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma \bar{c}(t)^{-\gamma-1}\dot{\bar{c}}(t)\,. \tag{3.69}$$

Podstawiając prawe strony równań (3.68), (3.69) oraz $\bar{c}(t) = \bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)$ do (3.66), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{c}}_P(t) + \dot{\bar{c}}_B(t) = \frac{1}{\gamma}\left(\bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)\right)\left((1-\tau_q(t))q(t) - (m + \rho - (1-\gamma)m)\right). \tag{3.70}$$

Ostatecznie, konieczne warunki optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (3.65), (3.70) wraz z warunkami transwersalności (3.67), przy warunku początkowym i ograniczeniach (3.63).

Uwzględniając bilans dochodów i wydatków sektora budżetowego (3.58) oraz równania (3.61), charakteryzujące zachowania przedsiębiorstw, otrzymujemy kompletny model gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym. Podobnie jak w

[30] W sprawie warunków transwersalności zob. przypis 16.

modelu bez sektora budżetowego zakładamy, że gospodarka znajduje się w międzyokresowej równowadze dynamicznej (patrz definicja 3.2) w nieskończonym horyzoncie optymalizacji gospodarstw domowych.

Skoncentrujemy teraz uwagę na dynamice społecznej konsumpcji i społecznych zasobów kapitału. Zmiany w czasie konsumpcji społecznej opisuje równanie (3.70), zaś dynamika społecznych zasobów kapitału wynika z bilansu dochodów i wydatków dla całej gospodarki (równanie (3.60)). Podstawiając w obu równaniach za $\overline{w}(t), q(t)$ prawe strony równań (3.61), otrzymujemy, odpowiednio:

$$\dot{\overline{c}}(t) = \frac{1}{\gamma}\overline{c}(t)\Big((1-\tau_q(t))\Big(f'(\overline{k}(t))-\delta\Big)-(m+\rho-(1-\gamma)m)\Big) \tag{3.71}$$

$$\dot{\overline{k}}(t) = f(\overline{k}(t)) - \overline{c}(t) - (n+m+\delta)\overline{k}(t), \tag{3.72}$$

Definicja 3.4. Stanem stacjonarnym modelu nazywamy takie szczególne poziomy społecznej konsumpcji *njep* $\overline{c}_e$ i społecznych zasobów kapitału *njep* $\overline{k}_e$, że jeżeli gospodarka osiągnie te poziomy, to nie będą one podlegały dalszym zmianom (czyli spełnione są równania $\dot{\overline{c}}(t)=0$, $\dot{\overline{k}}(t)=0$).

Jak wynika z równania (3.71), warunkiem istnienia stanu stacjonarnego ($\overline{k}_e, \overline{c}_e$) > 0 jest stały poziom stopy opodatkowania dochodów z kapitału, $\tau_q(t)=\tau_q$.

Przyrównując do zera lewe strony równań (3.71) - (3.72), przy założeniu, że $\tau_q(t)=\tau_q$ oraz $\overline{c}>0$, otrzymujemy:

$$f'(\overline{k}) = \frac{\delta(1-\tau_q)+\rho+\gamma m}{1-\tau_q} \tag{3.73}$$

$$\overline{c} = f(\overline{k}) - (n+m+\delta)\overline{k}, \tag{3.74}$$

Para $\overline{k}_e^{**}, \overline{c}_e^{**} > 0$, spełniająca układ równań (3.73) - (3.74) definiuje stan stacjonarny gospodarki (długookresową równowagę dynamiczną). Zauważmy, że w tak zdefiniowanym stanie stacjonarnym, struktura zarówno konsumpcji społecznej, jak i społecznych zasobów kapitału może zmieniać się w czasie, a konsumpcja i zasoby kapitału gospodarstwa domowego „dostosowują" się w każdym momencie t po poziomów wynikających z danych trajektorii $\overline{c}_B(t)$ i $\overline{k}_B(t)$ [31].

[31] W skrajnym przypadku, zasoby kapitału i konsumpcja gospodarstw domowych mogą spaść do zera. Wtedy stopa inwestycji społecznych wynika z danych ścieżek kapitału i konsumpcji sektora

Oznaczmy przez s stopę inwestycji społecznych, zdefiniowaną jako stosunek społecznych inwestycji (prywatnych i budżetowych) do produktu. Z przyjętej definicji wynika, że społeczna stopa inwestycji spełnia równanie:

$$\bar{c}(t) = (1 - s(t)) f(\bar{k}(t)) .$$

Korzystając z tego równania, warunków długookresowej równowagi dynamicznej (3.73) – (3.74) oraz definicji elastyczności produktu względem kapitału $\alpha(\bar{k})$, wyznaczamy stałą (w stanie stacjonarnym) długookresową stopę inwestycji społecznych:

$$s^{***} = \alpha(\bar{k}_e) \frac{(1-\tau_q)(m+n+\delta)}{(1-\tau_q)\delta + \rho + \gamma m} . \tag{3.75}$$

Z równania (3.75) wynika, że długookresowa stopa inwestycji społecznych w gospodarce konkurencyjnej z sektorem budżetowym zależy od stopy opodatkowania dochodów z kapitału. Obliczając pochodną cząstkową s^{***} względem τ_q, otrzymujemy:

$$\frac{\partial s^{***}}{\partial \tau_q} = -\alpha(\bar{k}_e) \frac{(m+n+\delta)(\rho+\gamma m)}{\left((1-\tau_q)\delta + (\rho+\gamma m)\right)^2} .$$

Im wyższa jest stopa opodatkowania dochodów z kapitału, tym niższą stopę inwestycji społecznych osiąga gospodarka na ścieżce wzrostu równomiernego.

Wniosek 3.3. Porównując (3.75) ze stopą inwestycji s^{**} w gospodarce bez sektora rządowego (daną przez (3.57)) wnioskujemy, że dla dowolnego dodatniego poziomu stopy podatkowej τ_q zachodzi nierówność:

$$s^{***} < s^{**} . \tag{3.76}$$

Przy $\tau_q = 0$ zachodzi $s^{***} = s^{**}$. Jak pamiętamy z wcześniejszych rozważań, stopa inwestycji s^{**}, wynikająca z zachowań optymalizacyjnych indywidualnych podmiotów mikroekonomicznych w gospodarce konkurencyjnej bez sektora budżetowego, stanowiła jednocześnie optymalny, na ścieżce wzrostu równomiernego, poziom tej stopy z punktu widzenia społecznego dobrobytu. Mówiąc ogólniej, rozwiązanie problemu społecznego planisty maksymalizującego społeczny dobrobyt pokrywało się z

---

budżetowego. Kwestią stabilności stanu stacjonarnego $\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**} > 0$ określonego przez równania (3.73) i (3.74) w ogólnym przypadku nie będziemy się tutaj zajmować. W szczególnym przypadku, gdy $\bar{c}_B(t) = \bar{c}_B = const.$, $\tau_q(t) = \tau_q = const.$, dowód stabilności stanu stacjonarnego $\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**} > 0$ wynika z twierdzenia 3.3.

rozwiązaniem wynikającym z równowagi konkurencyjnej. Ponieważ w modelu gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym zakładamy taką samą, jak poprzednio, postać funkcjonału celu gospodarstwa domowego, zadanie społecznego planisty, maksymalizującego społeczną międzyokresową funkcję użyteczności (3.62), przy ograniczeniu budżetowym dla całej gospodarki (3.72) oraz warunku początkowym $\bar{k}(0) > 0$ i ograniczeniach $\bar{k}(t), \bar{c}(t) \geq 0$, jest tożsame z zadaniem (3.16) - (3.18). Zmienną sterującą jest konsumpcja społeczna *njep*, a podział wydatków konsumpcyjnych pomiędzy sektory budżetowy i gospodarstw domowych nie wpływa na wartość funkcjonału celu. Stopa s^{**}, dana przez (3.57), jest także optymalną (w stanie stacjonarnym) stopą inwestycji w analizowanym teraz modelu. Z nierówności (3.76) wynika zatem, że opodatkowanie dochodów z kapitału zniekształca międzyokresową alokację zasobów w gospodarce, przyczyniając się do osiągania przez gospodarkę rozwiązania suboptymalnego. Jak wynika z (3.75), takiego zniekształcającego efektu nie wywołuje natomiast opodatkowanie dochodów z pracy. W sytuacji, gdy dochody z kapitału nie podlegają opodatkowaniu ($\tau_q = 0$), stopa inwestycji społecznych w gospodarce konkurencyjnej ustala się na poziomie, przy którym maksymalizowany jest społeczny dobrobyt.

Wniosek 3.4. Z równania (3.75) wynika ponadto, że stopa inwestycji w gospodarce pozostaje niezależna od podziału dochodów budżetowych pomiędzy konsumpcję i inwestycje (od stopy inwestycji budżetowych s_B). Oznacza to, że każda próba podniesienia przez państwo społecznej stopy inwestycji poprzez zwiększenie procentowej części dochodów budżetowych przeznaczanej na inwestycje budżetowe (patrz równanie (3.58a)) wywoła odpowiednie obniżenie stóp inwestycji prywatnych (patrz (3.59a)), w takim stopniu, że społeczne stopy inwestycji nie ulegną zmianie. Zwiększone inwestycje sektora budżetowego wypierają inwestycje prywatne poprzez obniżenie krańcowej produktywności kapitału w gospodarce (rynkowej ceny kapitału q), lub, inaczej mówiąc, wywołują przesunięcie dochodów sektora prywatnego w kierunku konsumpcji, poprzez obniżenie jej krańcowego kosztu alternatywnego. W konsekwencji (w przeciwieństwie do rezultatów analizy w punkcie 3.1), polityka fiskalna jest nieskuteczna w oddziaływaniu na długookresową ścieżkę wzrostu gospodarczego (poziomy zmiennych *njep* w stanie stacjonarnym) i poziom dobrobytu społecznego.

Sformułowane wnioski są słuszne pod warunkiem, że konsumpcja publiczna w takim samym stopniu wpływa na użyteczność gospodarstw domowych, jak konsumpcja prywatna (w funkcjonale celu gospodarstwa domowego ujęta jest całość konsumpcji, bez względu na źródło pochodzenia). Założenie takie wydaje się mało prawdopodobne. Z tego względu przyjmiemy teraz bardziej realistyczne, choć również skrajne, założenie, że gospodarstwa domowe podejmują decyzje o podziale dochodów do dyspozycji (dochodów po opodatkowaniu) na bieżącą konsumpcję i inwestycje w sposób zapewniający maksymalizację międzyokresowej użyteczności konsumpcji, finansowanej wyłącznie z własnych środków. Zakładamy zatem, że optymalizacja w przypadku typowego gospodarstwa domowego dotyczy wyłącznie czasowego rozkładu prywatnej konsumpcji $\overline{c}_P$, nie zaś konsumpcji społecznej $\overline{c} = \overline{c}_P + \overline{c}_B$ (włącznie z konsumpcją sektora budżetowego). Pytania, na które chcemy odpowiedziedź, są następujące:

- czy stopa inwestycji społecznych w gospodarce będzie nadal określona przez (3.75), pozostając tym samym niezależna od podziału dochodów budżetowych pomiędzy konsumpcję i inwestycje budżetowe,
- czy, przy założeniu, że opodatkowaniu podlegają wyłącznie dochody z pracy ($\tau_q = 0, 0 \le \tau_w \le 1$), stopa inwestycji społecznych w równowadze konkurencyjnej maksymalizuje dobrobyt społeczny?

Po odpowiednim przeformułowaniu funkcjonału celu, zadanie optymalizacyjne typowego gospodarstwa domowego ma postać następującą:

$$\int_0^\infty \frac{\overline{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \xrightarrow{\overline{c}_P} \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m-n>0, \tag{3.77}$$

$$\dot{\overline{k}}_P(t)+(n+m)\overline{k}_P(t)+\overline{c}_P(t) = (1-\tau_w(t))\overline{w}(t)+(1-\tau_q(t))q(t)\overline{k}_P(t),$$

$$\overline{k}_P(0)>0, \qquad \overline{k}_P(t), \overline{c}_P(t) \ge 0. \tag{3.78}$$

Zmienną sterującą jest $\overline{c}_P(t)$, zaś zmienną stanu - $\overline{k}_P(t)$.

Hamiltonian wartości bieżącej jest postaci:

$$H_C(t) = \frac{\overline{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta(t)\Big[(1-\tau_w(t))\overline{w}(t)+(1-\tau_q(t))q(t)\overline{k}_P(t)-(n+m)\overline{k}_P(t)-\overline{c}_P(t)\Big].$$

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej, $\bar{c}_P(t) > 0$, oraz zmiennej stanu, $\bar{k}_P(t) > 0$, warunki konieczne zasady maksimum mają postać następującą:

$$\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}_P(t)} = \bar{c}_P(t)^{-\gamma} - \theta(t) = 0\,, \tag{3.79}$$

$$\dot{\bar{k}}_P(t) = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \theta(t)} = -\bar{c}_P(t) + (1-\tau_w(t))\bar{w}(t) + \big((1-\tau_q(t))q(t) - (n+m)\big)\bar{k}_P(t)\,, \tag{3.80}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{k}_P(t)} + \theta(t)\big(\rho - n - (1-\gamma)m\big) = -\theta(t)\Big(\big((1-\tau_q)q(t) - (n+m)\big)\Big), \tag{3.81}$$

oraz warunki transwersalności:

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} H_C\, e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0\,. \tag{3.82}$$

Z warunku (3.79) wynika, że dla każdej chwili t spełnione jest następujące równanie:

$$\theta(t) = \bar{c}_P(t)^{-\gamma}.$$

Korzystając z tego równania oraz $\dot{\theta}(t) = -\gamma \bar{c}_P(t)^{-\gamma-1}\dot{\bar{c}}_P(t)$, warunek (3.81) możemy zapisać w postaci:

$$\dot{\bar{c}}_P(t) = \frac{1}{\gamma}\bar{c}_P(t)\Big((1-\tau_q(t))q(t) - (m+\rho-(1-\gamma)m)\Big). \tag{3.83}$$

Ostatecznie, konieczne warunki optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (3.80), (3.81) wraz z warunkami transwersalności (3.82), przy warunku początkowym i ograniczeniach (3.78). Rozwiązanie spełniające te warunki, dla danych ścieżek $\bar{w}(t), q(t), \tau_w(t), \tau_q(t), \bar{c}_B(t)$, stanowi optymalny plan konsumpcji i oszczędności gospodarstwa domowego (patrz definicja 3.3).

Uwzględniając bilans dochodów i wydatków sektora budżetowego (3.60) i równania (3.61), charakteryzujące zachowania przedsiębiorstw oraz przyjmując założenie o międzyokresowej równowadze dynamicznej w gospodarce, otrzymujemy kompletny model gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym.

Ponieważ $\bar{c}(t) = \bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)$ oraz $\dot{\bar{c}}(t) = \dot{\bar{c}}_P(t) + \dot{\bar{c}}_B(t)$, to równania dynamiki społecznej konsumpcji i społecznych inwestycji przyjmują teraz następującą postać:

$$\dot{\bar{c}}(t) - \dot{\bar{c}}_B(t) = \frac{1}{\gamma}\big(\bar{c}(t) - \bar{c}_B(t)\big)\Big((1-\tau_q(t))\big(f'(\bar{k}(t)) - \delta\big) - (m+\rho-(1-\gamma)m)\Big),$$

$$\dot{\bar{k}}(t) = f(\bar{k}(t)) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t).$$

Załóżmy teraz, że $\tau_q(t) = \tau_q$ oraz $\bar{c}_B(t) = \bar{c}_B$ (czyli $\dot{\bar{c}}_B(t) = 0$). W stanie stacjonarnym, w którym $\bar{c}_P = \bar{c} - \bar{c}_B > 0$, spełnione są równania[32]:

$$f'(\bar{k}) = \frac{\delta(1-\tau_q) + \rho + \gamma m}{1-\tau_q},$$

$$\bar{c} = f(\bar{k}) - (n+m+\delta)\bar{k},$$

takie same, jak równania (3.73) - (3.74) w poprzednio rozważanym modelu.

Tym samym, otrzymujemy również te same wartości zmiennych $\bar{k}$, $\bar{c}$ w stanie stacjonarnym, $\bar{k}_e^{**}, \bar{c}_e^{**}$, oraz tę samą formułę (3.75) określającą stałą (w stanie stacjonarnym) długookresową stopę inwestycji społecznych.

Różnica w stosunku do rozważanego poprzednio modelu, w którym konsumpcja finansowana przez sektor budżetowy wpływała na poziom społecznego dobrobytu w taki sam sposób, jak konsumpcja finansowana z dochodów do dyspozycji gospodarstw domowych, jest jednak zasadnicza. O ile w poprzednim modelu, w szczególnym przypadku zerowej stopy opodatkowania dochodów z kapitału, rozwiązanie wynikające z równowagi konkurencyjnej maksymalizowało społeczny dobrobyt, równoważność ta nie zachodzi w analizowanym teraz modelu. Inaczej mówiąc, rozwiązanie wynikające z równowagi konkurencyjnej nie pokrywa się teraz z rozwiązaniem problemu społecznego planisty, także przy $\tau_q = 0$.

Zadanie społecznego planisty ma teraz postać następującą:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \xrightarrow{\bar{c}_P,\, \bar{c}_B} \max, \qquad \rho - (1-\gamma)m - n > 0, \tag{3.84}$$

$$\dot{\bar{k}}(t) = f(\bar{k}(t)) - \bar{c}_P(t) - \bar{c}_B(t) - (n+m+\delta)\bar{k}(t),$$

$$\bar{k}(0) > 0, \qquad \bar{k}(t), \bar{c}_P(t), \bar{c}_B(t) \geq 0,$$

przy czym zmiennymi sterującymi są zarówno konsumpcja prywatna $\bar{c}_P(t)$, jak i konsumpcja budżetowa $\bar{c}_B(t)$, gdyż obie te zmienne wpływają niezależnie na wartość hamiltonianu wartości bieżącej:

[32] Drugi możliwy stan stacjonarny to punkt, w którym $\bar{c}_P(t) = \bar{c}(t) - \bar{c}_B(t) = 0$. Stopa inwestycji społecznych wynika wówczas z danego podziału dochodów sektora budżetowego pomiędzy konsumpcję i inwestycje. Por. poprzedni przypis.

$$H_C(t)=\frac{\bar{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta(t)\left[f(\bar{k}(t))-\bar{c}_P(t)-\bar{c}_B(t)-(n+m+\delta)\bar{k}(t)\right]. \qquad (3.85)$$

Inaczej mówiąc, w przeciwieństwie do modelu analizowanego poprzednio, na wartość hamiltonianu wpływa nie tylko wartość społecznych wydatków konsumpcyjnych, ale również struktura tych wydatków (w podziale na konsumpcję gospodarstw domowych i sektora budżetowego).

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej, $\bar{c}_P(t)>0$, dwa pierwsze warunki konieczne optymalności, odpowiadające zmiennym sterującym $\bar{c}_P(t)$ i $\bar{c}_B(t)$, przyjmują następującą postać[33]:

$$\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}_P(t)}=\bar{c}_P(t)^{-\gamma}-\theta(t)=0\,, \qquad (3.86)$$

$$\bar{c}_B(t)\geq 0, \qquad \frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}_B(t)}=-\theta(t)\geq 0, \qquad \bar{c}_B(t)\frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}_B(t)}=0\,, \qquad (3.87)$$

Pozostałe warunki są tożsame z warunkami (3.21) - (3.24) w zadaniu (3.16) - (3.18) (patrz punkt 3.3).

Z układu warunków koniecznych (3.86) - (3.87) wynika, że w rozwiązaniu optymalnym spełnione są równania:

$$\theta(t)=\bar{c}_P(t)^{-\gamma}>0, \qquad \bar{c}_B(t)=0\,.$$

Oznacza to, że planista społeczny, maksymalizujący społeczną międzyokresową funkcję użyteczności, daną przez (3.84), w rozwiązaniu optymalnym ustali zerowy poziom konsumpcji finansowanej z dochodów sektora budżetowego. Ponieważ stopy opodatkowania dochodów gospodarstw domowych nie mają wpływu na wartość

[33] Ściśle rzecz biorąc, że względu na warunki nieujemności dla zmiennych sterujących, przyjmowane zarówno w tym, jak i w poprzednio rozważanych zadaniach optymalizacyjnych, wszystkie warunki konieczne optymalności dla zmiennych sterujących powinny być zapisywane w sposób analogiczny, jak w (3.87). Ponieważ jednak założenia (3.13) o funkcji chwilowej użyteczności gwarantują nieujemny poziom konsumpcji *njep* (wykluczają wartość brzegową zmiennej sterującej) w rozwiązaniu optymalnym, warunki te redukują się do równań takich, jak w (3.86). Zauważmy ponadto, że ze względu na warunki nieujemności dla zmiennych stanu (kapitału *njep*), warunki konieczne optymalności powinny przyjmować postać warunków optymalności Kuhna – Tuckera, sformułowanych w kategoriach funkcji Lagrange'a. Ponieważ w rozwiązaniu sformułowanych problemów optymalizacyjnych nie poszukiwaliśmy optymalnych trajektorii zmiennych i ograniczaliśmy się do analizy stanu stacjonarnego, w sformułowaniach warunków koniecznych optymalności warunki nieujemności były pomijane. Odgrywały one natomiast istotną rolę w analizie stabilności stanu stacjonarnego (Zob. dowód Twierdzenia 3.3). Przykład rozwiązania zadania optymalizacji dynamicznej z ograniczeniami na zmienne stanu i zmienne sterujące, w którym warunki konieczne optymalności zapisane zostały w kategoriach funkcji Lagrange'a, można znaleźć w punkcie 5.2 tej pracy.

hamiltonianu (3.85), zarówno poziomy tych stóp, jak i wynikająca z nich struktura finansowania inwestycji społecznych mogą być ustalone w dowolny sposób.

Z przeprowadzonej analizy wynika zatem ważny wniosek.

Wniosek 3.5. Jeśli gospodarstwa domowe maksymalizują międzyokresową funkcję użyteczności konsumpcji finansowanej wyłącznie z własnych dochodów do dyspozycji, to funkcjonowanie sektora budżetowego w gospodarce prowadzi do rozwiązania suboptymalnego z punktu widzenia dobrobytu społecznego, nawet wówczas, gdy stopy opodatkowania dochodów z kapitału są zerowe, a sektor budżetowy finansuje swoją działalność wyłącznie z własnych dochodów z akumulacji kapitału i/lub opodatkowania dochodów gospodarstw domowych uzyskiwanych za pracę.

Przedstawione modele gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym stanowią jedynie drobny wkład autora do tej obszernej i wciąż otwartej na dalsze analizy problematyki[34]. Jednocześnie, zdaniem autora, rozpatrywane tutaj problemy uzmysławiają ten aspekt pionierskich dokonań Solowa, który w podręcznikach do makroekonomii bądź najnowszych publikacjach z zakresu teorii wzrostu gospodarczego nie dość bywa podkreślany, pozostając w cieniu krytyki nadmiernych uproszczeń przyjętych przez Solowa w zaproponowanym przez niego modelu wzrostu gospodarczego. Podkreślmy przy tej okazji raz jeszcze, że z perspektywy czasu, istotą dokonania Solowa jest nie tylko zaprezentowanie mechanizmu wzrostu gospodarczego gwarantującego, w opozycji do keynesowskich modeli wzrostu, osiąganie przez gospodarkę ścieżki wzrostu równomiernego (na czym Solow sam skoncentrował uwagę w swoim artykule z 1956), lecz także, a nawet przede wszystkim, pokazanie, w jaki sposób, przyjąwszy pewne upraszczające założenia, można stosować (abstrakcyjną w swojej genezie) teorię równowagi ogólnej i wykorzystywać ją do opisu funkcjonowania całej gospodarki oraz formułowania na tej podstawie istotnych wniosków[35]. W tym sensie, cała współczesna teoria głównego nurtu makroekonomii, oparta na podejściu od strony równowagi ogólnej, bazuje na tym, co jako pierwszy zaproponował Solow.

[34] Analiza ta jest kontynuowana w rozdziale siódmym pracy (punkt 7.5).

[35] Por. wypowiedź P. Romera, cytowaną pod koniec rozdziału pierwszego pracy.

Rozdział czwarty

Wzrost równomierny a pracoefektywnościowa tendencja postępu technicznego w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego

Wprowadzenie

W poprzednich rozdziałach pracy, w analizowanych modelach wzrostu gospodarczego, przyjmowaliśmy bez uzasadnienia tzw. neutralny w sensie Harroda (czysto pracoefektywnościowy) typ postępu technicznego. W tym rozdziale przyjrzymy się dokładniej ekonomicznej treści tego założenia i jego uzasadnieniu.

4.1. Klasyfikacja tendencji postępu technicznego

Funkcję produkcji, spełniającą typowe neoklasyczne założenia i uwzględniającą postęp techniczny, można zapisać w postaci następującej:

$$Y(t)=F(K(t), L(t), t), \qquad F_t = \frac{\partial F}{\partial t} > 0\,. \tag{4.1}$$

Przy założeniu o stałych efektach skali produkcji względem kapitału i pracy możliwe jest przejście do tzw. postaci intensywnej funkcji produkcji (zapisanej w kategoriach *p.c.*)[1]:

$$y(t) = f(k(t), t), \qquad f_t = \frac{\partial f}{\partial t} > 0\,, \tag{4.2}$$

gdzie $y = Y/L$, $k = K/L$ oraz $f(k, t) = F(k,1, t)$.

Egzogeniczny charakter postępu technicznego wyrażony jest tutaj poprzez dodanie do argumentów funkcji produkcji zmiennej czasu. Zakłada się tym samym, że w różnych momentach czasu z tych samych nakładów pracy i kapitału można uzyskać różne wielkości produkcji. Z tego względu funkcja (4.1) nazywana jest również dynamiczną

[1] Por. rozdział pierwszy, punkt 1.2.

funkcją produkcji. W graficznym ujęciu tego rodzaju postęp techniczny interpretuje się często jako ciągłe przesunięcia w czasie statycznej funkcji produkcji $Y(t)=F(K(t),L(t))$ w górę wzdłuż tej osi układu współrzędnych, na której mierzony jest produkt, bądź alternatywnie, jako przesunięcia izokwant produkcji w kierunku początku układu współrzędnych, na którego osiach mierzone są nakłady czynników wytwórczych. W zależności od charakteru (własności) tego przesunięcia, rozróżnia się różne rodzaje tendencji postępu technicznego.

W literaturze ekonomicznej funkcjonują trzy różne ujęcia analityczne tendencji postępu technicznego i tym samym trzy różne typy jego neutralności. Cechą wspólną wszystkich tych koncepcji jest to, że jako neutralny określa się taki postęp techniczny, który zachowuje pewne relacje pomiędzy określonymi wielkościami ekonomicznymi. Z punktu widzenia teorii wzrostu gospodarczego, posługującej się matematycznymi modelami wzrostu, w których miejsce centralne zajmuje zawsze makroekonomiczna funkcja produkcji, najistotniejsze jest to, że każdy z przedstawionych poniżej typów neutralności znajduje odmienny wyraz w formalnym zapisie funkcji produkcji.

W ujęciu Hicksa podstawę wyodrębnienia odmiennych tendencji postępu technicznego stanowi kierunek zmian krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał:

$$\sigma_{L/K} = F_L / F_K, \qquad \text{gdzie } F_L = \partial F / \partial L,\ F_K = \partial F / \partial K \tag{4.3}$$

przy założeniu, że stała pozostaje relacja kapitału do pracy $k = K / L$ [2].

Definicja 4.1. W klasyfikacji Hicksa postęp techniczny określa się jako:

a. neutralny,

b. kapitałooszczędny (pracochłonny),

c. pracooszczędny (kapitałochłonny),

jeżeli przy stałej relacji kapitału do pracy $k = K / L$ krańcowa stopa substytucji pracy przez kapitał $\sigma_{L/K}$:

a. nie ulega zmianie,

b. rośnie,

c. maleje[3].

---

[2] Hicks J. R., *The Theory of Wages*, MacMillan, London 1963, s. 107.

[3] W przedsiębiorstwie maksymalizującym zysk relacja kapitału do pracy jest taka, że stosunek krańcowej produktywności danego czynnika produkcji do jego ceny rynkowej jest taki sam dla wszystkich zatrudnianych czynników. Jeśli zatem na skutek postępu technicznego nastąpi wzrost (spadek) krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał przy danej relacji *K*/*L*, to przy niezmienionych rynkowych cenach czynników przedsiębiorstwo zmniejszy (zwiększy) stosunek zatrudnienia kapitału do pracy.

Korzystając z (4.2) można przedstawić F_K i F_L jako funkcje k:

$$F_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial\left(f(k,t)L\right)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial K} = L\frac{\partial f(k,t)}{\partial k}\frac{1}{L} = f_k(k,t), \tag{4.4}$$

$$F_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial\left(f(k,t)L\right)}{\partial L} = f(k,t) + L\frac{\partial f(k,t)}{\partial k}\left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k,t) - kf_k(k,t). \tag{4.5}$$

Podstawiając (4.4) i (4.5) do (4.3), otrzymujemy:

$$\sigma_{L/K} = \frac{f\left(k(t),t\right)}{f_k\left(k(t),t\right)} - k(t) \tag{4.6}$$

Z (4.6) wynika, że $\sigma_{L/K}$ jest funkcją k i t, co podkreślamy zapisem: $\sigma_{L/K} = \sigma_{L/K}\left(k(t),t\right)$. Oznaczmy przez e_σ elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem $k = K/L$:

$$e_\sigma = e_\sigma\left(k(t),t\right) = \frac{k}{\sigma_{L/K}}\frac{\partial\sigma_{L/K}\left(k(t),t\right)}{\partial k}.$$

Różniczkując równanie (4.6) względem czasu i dzieląc obustronnie przez $\sigma_{L/K}$, po kilku prostych przekształceniach mamy:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} = e_\sigma \overset{\circ}{k} + \overset{\circ}{m}, \tag{4.7}$$

gdzie $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} = \frac{1}{\sigma_{L/K}}\frac{d\sigma_{L/K}\left(k(t),t\right)}{dt}$ określa (całkowitą) stopę wzrostu krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał, zaś $\overset{\circ}{m} = \frac{1}{\sigma_{L/K}}\frac{\partial\sigma_{L/K}\left(k(t),t\right)}{\partial t}$ określa stopę wzrostu krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał przy danej relacji kapitału do pracy. Pierwszy człon prawej strony formuły (4.7) określa zatem tę część stopy wzrostu krańcowej stopy substytucji $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K}$, która wynika ze wzrostu relacji kapitału do pracy, drugi zaś - tę, która jest skutkiem zmiany technologicznej. W ten sposób wśród przyczyn zmian krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał wyodrębnia się wpływ zmian relacji kapitału do pracy od wpływu egzogenicznego postępu technicznego.

Nietrudno zauważyć, że znak $\overset{\circ}{m}$ określa charakter tendencji postępu technicznego w sensie Hicksa. Jeśli bowiem $\overset{\circ}{m} = 0$, $\overset{\circ}{m} > 0$, $\overset{\circ}{m} < 0$, to, przy stałym k, zachodzi, odpowiednio, $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} = 0$, $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} > 0$, $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} < 0$, czyli zgodnie definicją 4.1, postęp techniczny jest, odpowiednio, neutralny, kapitałooszczędny, pracooszczędny.

Przy standardowych neoklasycznych założeniach odnośnie funkcji produkcji, krańcowa stopą substytucji pracy przez kapitał $F_{L/K}$ jest rosnącą funkcją $k = K / L$ (czyli $e_{\sigma} > 0$), co jest wyrazem założenia, że w miarę postępu substytucji pracy przez kapitał, proces ten jest coraz trudniejszy, tzn. wymaga coraz większych nakładów kapitału w zamian za rezygnację z kolejnych jednostek czynnika pracy. Ze względu na wzajemnie jednoznaczny charakter relacji pomiędzy $\sigma_{L/K}$ a stosunkiem *K/L*, równoważnym do podanego wyżej sformułowaniem kryterium klasyfikacji postępu technicznego wg Hicksa jest takie, w którym kierunek podanej implikacji przebiega w przeciwną stronę. Postęp techniczny ma zatem charakter kapitałooszczędny, pracooszczędny bądź neutralny, zależnie od tego, czy, przy stałej wartości $\sigma_{L/K}$, relacja *K/L*, odpowiednio, maleje, rośnie czy pozostaje bez zmian.

Głównym celem klasyfikacji postępu technicznego zaproponowanej przez Hicksa miało być wyjaśnienie za jej pomocą jednego ze stylizowanych faktów wzrostu gospodarczego: utrzymywania się na względnie stałym poziomie udziałów wynagrodzeń poszczególnych czynników produkcji w wytwarzanym produkcie. Zasadniczym punktem zaproponowanego przez Hicksa teoretycznego uzasadnienia tej obserwowanej tendencji historycznej jest teza o dominacji w odbywającym się postępie techniczno - organizacyjnym innowacji o pracooszczędnym charakterze.

Zgodnie z wywodem Hicksa, ciągła akumulacja kapitału (a ściślej rzecz ujmując – szybszy wzrost zasobów kapitału w porównaniu z zasobami pracy), wywołująca wzrost relacji kapitału do pracy ($\overset{\circ}{k} > 0$), przyczynia się do wzrostu względnej jednostkowej ceny pracy w stosunku do ceny kapitału[4]. To z kolei indukuje tendencję do wdrażania przez przedsiębiorców innowacji głownie o pracooszczędnym charakterze[5]. Zdaniem Hicksa, oba te procesy dają skutki wzajemnie się rekompensujące z punktu widzenia relacji udziałów wynagrodzeń czynników wytwórczych w produkcie. W przytoczonej tutaj argumentacji Hicksa istotną rolę spełnia przyjmowane w niej *implicite* założenie,

[4] Założenie, że kapitał przyrasta szybciej niż zatrudnienie siły roboczej, choć zgodne z obserwacją empiryczną, z teoretycznego punktu widzenia jest w przedstawionej tutaj argumentacji Hicksa przyjmowane całkowicie arbitralnie.

[5] Celem uzupełnienia dodajmy jeszcze, że oprócz innowacji indukowanych przez zmiany w relatywnych cenach czynników wytwórczych, Hicks wyróżniał jeszcze innowacje autonomiczne (związane z autonomicznym rozwojem wiedzy naukowej i technicznej), nie wykazujące żadnej historycznej tendencji do oszczędzania któregokolwiek z czynników. Ze względu na głównie pracooszczędny charakter tych pierwszych i losowy rozkład tych drugich, oba typy innowacji wzięte łącznie powinny wykazywać, zdaniem Hicksa, tendencję pracooszczędną. Zob. J. R. Hicks, *op. cit.*, s. 123-4.

że elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem technicznego uzbrojenia pracy (*K/L*) jest większa od jeden.

Przy neoklasycznym założeniu, że kapitał i praca wynagradzane są zgodnie z ich produktami krańcowymi, dla zagwarantowania stałości względnego udziału wynagrodzeń obu czynników w produkcie $F_L L / F_K K$ (równego ilorazowi $\sigma_{L/K} = F_L / F_K$ i k = *K/L*) musi zachodzić: $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} = \overset{\circ}{k}$. Z równania (4.7) wynika, że pracooszczędna tendencja postępu technicznego ($\overset{\circ}{m} < 0$) może pozostawać zgodna z równością stóp wzrostu krańcowej stopy substytucji $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K}$ oraz relacji kapitału do pracy $\overset{\circ}{k}$ tylko wtedy, gdy zakłada się, że $e_\sigma > 1$. Podstawiając w równaniu (4.7) za $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K}$ i $\overset{\circ}{k}$ tę samą stopę wzrostu *g*>0, wnioskujemy: $\overset{\circ}{m} = g(1 - e_\sigma) < 0 \iff e_\sigma > 1$.

Główną przesłanką podejmowanej w literaturze krytyki Hicksowskiej idei wpływu zmian cen czynników wytwórczych na tendencje postępu technicznego jest interpretacja tego wpływu jako założenia behawioralnego, określającego zachowania i motywacje przedsiębiorców, podejmujących decyzje o wprowadzaniu innowacji. Podważając realistyczność tego założenia, wskazuje się, iż rzeczywiste motywy przedsiębiorców dotyczą raczej bezpośrednio minimalizacji łącznego kosztu zastosowania wszystkich czynników produkcji, nie zaś kształtowania się relacji cen poszczególnych z nich. Zgodnie z tym podejściem, przedsiębiorcy decydują się w każdym momencie na wdrożenie takiej innowacji, która w maksymalnym stopniu ogranicza jednostkowe koszty produkcji, niekoniecznie przy tym oszczędzającej ten czynnik produkcji, którego względna cena jednostkowa rośnie[6]. Założenie to stanowi punkt wyjścia koncepcji indukowanego (co do tendencji) postępu technicznego opartej na krzywej możliwości innowacyjnych, którą przedstawimy w punkcie 4.3.

Wykazano, że Hicksowska idea neutralności postępu technicznego jest równoważna z formalnym ujęciem tego postępu w neoklasycznej funkcji produkcji jako potęgującego w tym samym stopniu pracę i kapitał (w równym stopniu praco- i kapitałoefektywnościowego)[7]:

---

[6] Zob. C. Kennedy, *Induced Bias In Innovation and the Theory of Distribution*, The Economic Journal, vol. 74, September 1964, s. 541 – 547.

[7] Dowód tej równoważności można znaleźć np. w: H. Uzawa, T. Watanabe, *A Note on the Classification of Technical Inventions*, Technical Report No. 85, Contract No. 225 (50), Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University 1960.

$$Y(t) = F\left(B(t)K, A(t)L\right), \tag{4.8}$$

Zgodnie z formułą (4.8) postęp techniczny w równym stopniu praco- i kapitałoefektywnościowy pozwala na wytwarzanie tej samej ilości produkcji przy malejących proporcjonalnie nakładach obu czynników produkcji.

Przy założeniu stałych przychodów względem skali produkcji funkcję produkcji (4.8) można również zapisać w postaci:

$$Y(t) = A(t)F(K, L)\,. \tag{4.9}$$

Nietrudno pokazać, że funkcja (4.9) rzeczywiście spełnia definicję neutralności podaną przez Hicksa. Funkcję tę można przedstawić w postaci intensywnej:

$$y(t) = A(t)\,f(k)\,. \tag{4.10}$$

gdzie $y = Y/L$, $k = K/L$ oraz $f(k) = F(k,1)$. Korzystając z (4.10), można przedstawić F_K i F_L jako funkcje $k=K/L$:

$$F_K = A(t)\,f\,'(k), \qquad F_L = A(t)\left(f(k) - kf\,'(k)\right). \tag{4.11}$$

Podstawiając (4.11) do (4.1), otrzymujemy:

$$\sigma_{L/K} = \frac{f(k) - kf\,'(k)}{f\,'(k)}\,. \tag{4.12}$$

Ze wzoru (4.12) wynika, że jeżeli stosunek kapitału do pracy nie ulega zmianie, krańcowa stopa substytucji obu czynników produkcji pozostaje stała, zatem odbywający się postęp techniczny nie ma wpływu na wartość tej stopy.

Alternatywnymi względem koncepcji Hicksa klasyfikacjami tendencji postępu technicznego są klasyfikacje R. Harroda oraz R. Solowa.

W koncepcji Harroda kryterium określenia tendencji postępu technicznego stanowi kierunek zmian relacji kapitału do produktu, przy założeniu, że krańcowa produktywność kapitału (stopa zysku z kapitału) pozostaje stała[8].

Definicja 4.2. W klasyfikacji Harroda postęp techniczny określa się jako:

a. neutralny,

b. kapitałooszczędny (pracochłonny),

c. kapitałochłonny (pracooszczędny),

jeżeli przy stałej krańcowej produktywności kapitału F_K kapitałochłonność produkcji $v = K/Y$:

[8] Zob. R. F. Harrod, *Towards a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy*, London 1948, s. 100.

a. nie ulega zmianie,

b. maleje,

c. rośnie.

Ze względu na wzajemnie jednoznaczny charakter relacji między kapitałochłonnością produkcji a krańcową produktywnością kapitału (przy standardowych neoklasycznych założeniach odnośnie funkcji produkcji, kapitałochłonność produkcji jest malejącą funkcją krańcowej produktywności kapitału), kryterium klasyfikacji Harroda można sformułować w równoważny do przedstawionego w definicji 4.2 sposób, biorąc za podstawę rozróżnienia tendencji postępu technicznego kierunek zmian krańcowej produktywności kapitału przy założeniu stałej kapitałochłonności produkcji. Postęp techniczny ma zatem charakter neutralny, kapitałooszczędny (pracochłonny) bądź kapitałochłonny (pracooszczędny), jeśli przy stałej relacji kapitału do produktu krańcowa produktywność kapitału, odpowiednio, pozostaje bez zmian, maleje, rośnie.

Neutralność postępu technicznego w sensie Harroda znajduje wyraz w ujęciu tego postępu w funkcji produkcji jako potęgującego wyłącznie pracę (czysto pracoefektywnościowego)[9]:

$$Y(t) = F\left(K, A(t)L\right). \tag{4.13}$$

Przypominając interpretację podaną w rozdziale pierwszym, czysto pracoefektywnościowy postęp techniczny oznacza, że w momencie t_1 można otrzymać tę samą wielkość produktu co w momencie t_0 używając takich samych nakładów kapitału połączonych z $(A(t_1)/A(t_0))$ razy mniejszym nakładem pracy (por. punkt 1.1.3.). Przy założeniu stałych efektów skali produkcji względem kapitału i pracy funkcję tę można przedstawić w postaci intensywnej: $\bar{y} = f(\bar{k})$, gdzie $\bar{y}$ i $\bar{k}$ oznaczają, odpowiednio, produkt i kapitał *njep*. W rozdziale pierwszym pokazaliśmy, że zachodzi następująca zależność: $F_K = \partial Y / \partial K = f'(\bar{k})$. Dla zapewnienia stałej krańcowej produktywności kapitału potrzeba zatem, aby stałe było $\bar{k}$, co implikuje z kolei stały poziom $\bar{y}$. Ponieważ stosunek $\bar{k}/\bar{y}$ jest tożsamy ze stosunkiem *K/Y*, to otrzymujemy stałość współczynnika kapitałowego. Wynika stąd, że funkcja (4.13) spełnia definicję neutralności postępu technicznego podaną przez Harroda.

[9] Graficzny dowód tej równoważności przeprowadziła jako pierwsza J. Robinson, dowód analityczny podał H. Uzawa, zob. J. Robinson, *The Classification of Inventions*, Review of Economic Studies, Vol. 5, February 1938, s. 139 – 142, H. Uzawa, *Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium*, Review of Economic Studies, Vol. 28, No. 2, February 1961, s. 117 – 124.

Trzecią klasyfikację tendencji postępu technicznego, w pewnym sensie symetryczną do koncepcji Harroda, zaproponował R. Solow. W ujęciu Solowa klasyfikację tendencji postępu technicznego przeprowadza się w oparciu o kierunek zmian przeciętnej produktywności pracy (*Y/L*), przy założeniu stałej krańcowej produktywności pracy (stawki płac)[10].

Definicja 4.3. W klasyfikacji Solowa postęp techniczny określa się jako:

a. neutralny,

b. pracochłonny (kapitałooszczędny),

c. pracooszczędny (kapitałochłonny),

jeżeli przy stałej krańcowej produktywności pracy F_L przeciętna produktywność pracy Y/L:

a. nie ulega zmianie,

b. maleje,

c. rośnie.

Analogicznie jak w przypadku klasyfikacji Harroda, ze względu na wzajemnie jednoznaczny charakter relacji pomiędzy przeciętną i krańcową produktywnością pracy (przy standardowych neoklasycznych założeniach odnośnie funkcji produkcji, obie zmieniają się w tym samym kierunku), kryterium klasyfikacji Solowa można sformułować w równoważny do przedstawionego wyżej sposób. Postęp techniczny ma zatem charakter pracochłonny (kapitałooszczędny), pracooszczędny (kapitałochłonny) bądź neutralny, jeśli przy stałej przeciętnej produktywności pracy krańcowa produktywność pracy, odpowiednio, pozostaje bez zmian, rośnie, maleje.

Neutralność w rozumieniu Solowa jest równoważna z ujęciem postępu technicznego w funkcji produkcji jako potęgującego wyłącznie kapitał (czysto kapitałoefektywnościowego)[11]:

$$Y(t) = F\left(B(t)K, L\right), \tag{4.14}$$

Zgodnie z formułą (4.14) czysto kapitałoefektywnościowy postęp techniczny oznacza, że w momencie t_1 można otrzymać tę samą wielkość produktu co w momencie t_0

[10] Zob. R. M. Solow, *Technical Progress, Capital Formation and Economic Growth*, American Economic Review, vol. 52, 1962, s. 76-86.

[11] Dowód tej równoważności przebiega analogicznie jak wspomniany w przypisie 10 dowód Uzawy, w którym wystarczy zamienić miejscami kapitał *K* i pracę *L* (ze względu na wspomnianą symetrię pomiędzy koncepcjami neutralności postępu technicznego w sensie Harroda i Solowa).

używając takich samych nakładów pracy połączonych z ($A(t_1)/A(t_0)$) razy mniejszym nakładem kapitału. Funkcję produkcji (4.14), przy założeniu stałych korzyści skali względem K i L, można zapisać w postaci następującej:

$$\tilde{y} = g(\tilde{l}), \tag{4.15}$$

gdzie $\tilde{y} = Y/BK$, $\tilde{l} = L/BK$. Ponieważ:

$$F_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial (AB\tilde{y})}{\partial \tilde{l}} \frac{\partial \tilde{l}}{\partial L} = BKg'(\tilde{l}) \frac{1}{BK} = g'(\tilde{l}),$$

to dla zapewnienia stałej krańcowej produktywności pracy potrzeba, aby stałe było $\tilde{l}$, co oznacza z kolei (zgodnie z (4.15)) stały poziom $\tilde{y}$. Ponieważ stosunek $\tilde{y}/\tilde{l}$ jest tożsamy ze stosunkiem Y/L to wynika stąd, że funkcja (4.14) spełnia definicję neutralności postępu technicznego podaną przez Solowa.

4.2. Pracoefektywnościowa tendencja postępu technicznego jako konieczny warunek wzrostu równomiernego

Wspólną cechą trzech scharakteryzowanych w poprzednim punkcie klasyfikacji postępu technicznego jest to, że w każdym przypadku neutralny postęp techniczny zachowuje stałą elastyczność substytucji pracy przez kapitał:

$$\varepsilon_{L/K} = \frac{F_L L}{F_K K}, \tag{4.16}$$

a tym samym – przy założeniu że kapitał i praca wynagradzane są zgodnie z ich produktami krańcowymi – stały względny udział obu czynników w wytwarzanym produkcie, pod warunkiem, że na stałym poziomie pozostaje jedna z relacji: K/L, K/Y, Y/L (lub alternatywnie - jedna z wielkości: $\sigma_{K/L}$, F_K, F_L), odpowiednio, dla neutralności w sensie Hicksa, Harroda i Solowa.

Przed przystąpieniem do wyjaśnienia tej kwestii, zwracamy uwagę na warunkowy charakter wszystkich trzech definicji neutralności (praco- lub kapitałooszczędności) lub, inaczej mówiąc, na to, iż z logicznego punktu widzenia mają one charakter implikacji. W każdym bowiem przypadku jako neutralny definiuje się postęp techniczny, który zachowuje pewną wielkość na stałym poziomie, przy założeniu, że pewna inna wielkość pozostaje stała. Taki sposób definiowania tendencji postępu technicznego jest, zdaniem autora, naturalną konsekwencją przyjmowanego powszechnie w neoklasycznej teorii wzrostu założenia o egzogenicznym charakterze tego postępu. Innymi słowy, wynika on z faktu, że z formalnego punktu widzenia postęp techniczny prowadzi do wzrostu produktu dla każdej kombinacji nakładów czynników wytwórczych. W ujęciu graficznym, w układzie współrzędnych, w którym wzdłuż poszczególnych osi mierzone są nakłady czynników produkcji oraz wielkość produktu, mamy do czynienia z przesunięciami w górę, wzdłuż osi produktu, statycznej funkcji produkcji $Y(t)=F(K(t);L(t))$ w całym jej przebiegu, a nie jedynie z przesunięciami pojedynczych punktów, charakteryzujących określone stany gospodarki. Stąd, neutralny postęp techniczny, w każdej ze scharakteryzowanych koncepcji, zachowuje jedynie pewne relacje pomiędzy określonymi wielkościami (charakterystykami) ekonomicznymi, nie zaś stale poziomy tych wielkości[12].

---

[12] W klasycznej już pracy Fiedora (zob. B. Fiedor, *Neoklasyczna teoria postępu technicznego: próba systematyzacji i krytycznej analizy*, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1986), do której odwołują się wszyscy niemal polscy autorzy piszący na temat interesujących nas tutaj zagadnień, wielokrotnie podkreśla się (np. na s. 74 – 75), że każdy ze scharakteryzowanych przez nas typów neutralności postępu technicznego implikuje jednostkową elastyczność substytucji między pracą a kapitałem. Odnosząc się do wspomnianej pracy, zwróćmy najpierw uwagę na różnice terminologiczne.

Fiedor ma prawdopodobnie na myśli to, co zgodnie z terminologią przyjętą w tej pracy określilibyśmy jako elastyczność technicznego uzbrojenia pracy względem krańcowej stopy substytucji czynników produkcji, czyli $\frac{\sigma_{L/K}}{k}\frac{\partial k}{\partial \sigma_{L/K}}$. Taka definicja elastyczności substytucji czynników pochodzi od Hicksa (zob. J. R. Hicks, *op.cit.*, s. 289). W pracy stosujemy bardziej współczesną i, zdaniem autora, bardziej czytelną terminologię, rozróżniającą pomiędzy elastycznością substytucji czynników (pracy przez kapitał), zdefiniowaną tak, jak w (4.16), oraz elastycznością krańcowej stopy substytucji czynników (pracy przez kapitał) względem technicznego uzbrojenia pracy: $e_\sigma = \frac{k}{\sigma_{L/K}}\frac{\partial \sigma_{L/K}(k,t)}{\partial k}$ (lub alternatywnie – elastycznością technicznego uzbrojenia pracy względem krańcowej stopy substytucji czynników produkcji). Por. np. E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, wyd. 2 poszerz., Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2004.

Nawet jednak, jeśli uwzględnić domniemane różnice terminologiczne, teza Fiedora pozostaje nadal nieprawdziwa. Zauważmy, że implikuje ona m. in. to, iż w warunkach neutralności postępu technicznego proces produkcji musiałby być z konieczności opisywany przez funkcję produkcji Cobba – Douglasa (odpowiadającą właśnie jednostkowej wartości wskaźnika e_σ), co pozostaje w oczywistej sprzeczności z jednym z głównych założeń niniejszej pracy. Z tego powodu powinniśmy nieco dokładniej wyjaśnić tę kwestię.

Rozpatrzymy dla przykładu tę kwestię w przypadku neutralności Hicksa. Gdyby samo założenie o hicksowskiej neutralności postępu technicznego implikowało stałą wartość wskaźnika $\varepsilon_{L/K} = \frac{F_L}{F_K}\cdot\frac{L}{K}$, to istotnie wartość e_σ musiałaby być stale równa 1 - z (4.16) wynika bowiem, iż $\sigma_{L/K}$ byłoby wówczas liniową funkcją $k = K/L$. Faktycznie jednak dla zapewnienia stałości $\varepsilon_{L/K}$ potrzebne jest jeszcze założenie o stałym poziomie k (lub alternatywnie - stałej wartości $\sigma_{L/K}$). Inaczej rzecz ujmując, postęp techniczny neutralny w rozumieniu Hicksa nie powoduje zmian wartości $\varepsilon_{L/K}$ przy danym poziomie k (lub alternatywnie – przy danym poziomie $\sigma_{L/K}$), przy czym dla każdego poziomu k ($\sigma_{L/K}$), wartość $\varepsilon_{L/K}$ może być inna. Analogicznie, postęp techniczny neutralny w sensie Harroda zachowuje stałą

Wracając do formuły (4.16) - w przypadku neutralności postępu technicznego w sensie Hicksa stała wartość wskaźnika elastyczności substytucji pracy przez kapitał $\varepsilon_{L/K}$, przy danym poziomie k=K/L (lub alternatywnie – przy danym poziomie $\sigma_{L/K}$), wynika bezpośrednio z samej definicji tej neutralności i definicji wskaźnika $\varepsilon_{L/K}$. Postęp techniczny neutralny w rozumieniu Harroda implikuje niezmienność udziału kapitału w produkcie ($F_K \cdot K/Y$), przy danym poziomie K/Y (lub alternatywnie, przy danym poziomie F_K), a zatem również pośrednio – niezmienność udziału pracy w produkcie ($F_L \cdot L/Y$) i wzajemnej relacji obu tych udziałów[13]. W przypadku neutralności w ujęciu Solowa rozumowanie przebiega analogicznie, z tym, że bezpośrednio dotyczy udziału pracy w produkcie ($F_L \cdot L/Y$).

Ogólny schemat wnioskowania prowadzącego do przeformułowania oryginalnych definicji neutralności (oraz proco- i kapitałoefektywności) postępu technicznego ma formę tezy logicznej rachunku zdań: $((p \to q) \wedge (p \wedge q \to z)) \to (p \to z)$, gdzie implikacja $(p \to q)$ pełni rolę oryginalnej definicji kapitałooszczędnego, pracooszczędnego lub neutralnego postępu technicznego (w rozumieniu Hicksa, Harroda bądź Solowa), zaś w zdaniu „*z*” stwierdzamy, że relacja udziałów wynagrodzeń kapitału i pracy w produkcie, odpowiednio, maleje, rośnie lub pozostaje bez zmian.

Przy założeniu stałych przychodów względem skali produkcji, każdą z implikacji, definiujących określony rodzaj neutralności (oraz kapitało – lub pracooszczędności) postępu technicznego możemy zatem formułować w ten sposób, że stały poziom odpowiedniej relacji: *K/L*, *K/Y*, *L/Y*, lub alternatywnie, jednej z wielkości: $\sigma_{L/K}$, F_K, F_L, gwarantuje niezmienność (w przypadku postępu kapitałoszczędnego – spadek, zaś w przypadku procooszczędnego - wzrost) relacji udziałów kapitału i pracy w produkcie[14].

---

wartość $\varepsilon_{L/K}$ przy danym poziomie *K/Y* (lub alternatywnie – przy danym poziomie F_K), zaś neutralny w rozumieniu Solowa – przy danym poziomie *L/Y* (lub alternatywnie – przy danym poziomie F_L).

[13] Przy założeniu stałych przychodów względem skali produkcji, przy którym suma wynagrodzeń wszystkich czynników produkcji wyczerpuje wartość produktu.

[14] W przypadku rosnących lub malejących efektów skali, reprezentowanych przez funkcję produkcji dodatnio jednorodną stopnia θ, czyli spełniającą zależność: $F(\lambda K; \lambda L) = \lambda^{\theta} F(K, L)$, gdzie $\lambda > 0$, $\theta > 0$, (gdzie $0 < \theta < 1$ w przypadku malejących efektów skali, zaś $\theta > 1$ w przypadku rosnących efektów skali), niezmienność dotyczy wskaźnika elastyczności substytucji obu czynników, zdefiniowanego w (4.16), ale nie relacji udziałów ich wynagrodzeń w produkcie. Nietrudno dowieść, że w takim ogólnym przypadku zachodzi $F_K \cdot K/Y + F_L \cdot L/Y = \theta$. Jeśli jednak $\theta \neq 1$, to produktów krańcowych kapitału i pracy nie

Możliwość takiego sformułowania definicji wszystkich trzech typów neutralności postępu technicznego pozwala w prosty sposób ustalić dwie istotne kwestie.

Po pierwsze, okazuje się, iż jeden z przedstawionych typów neutralności postępu technicznego stanowi warunek konieczny równomiernego wzrostu gospodarczego (w węższym sensie). Przypominamy, że przez wzrost równomierny w neoklasycznej teorii wzrostu rozumie się taki proces wzrostu, który zachowuje stałą relację kapitału do produktu oraz stałe procentowe udziały poszczególnych nakładów w produkcie[15]. Jeśli zatem $K/Y = const.$ oraz $F_K K / F_L L = const.$, to zachodzi implikacja: $K/Y \to F_K K / F_L L$, definiująca neutralność postępu technicznego w ujęciu Harroda. Spostrzeżenie to ukazuje kluczową rolę założenia o takim właśnie charakterze postępu technicznego w neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego, której jądro stanowi koncepcja wzrostu równomiernego. Odwracając to rozumowanie, można także stwierdzić, że na rzecz przekonania o neutralnym w sensie Harroda (czysto pracoefektywnościowym) charakterze zachodzących w rzeczywiści gospodarczej zmian technologicznych, świadczą pośrednio stylizowane fakty wzrostu gospodarczego (przedstawione w punkcie 2.1), z którymi ściśle koresponduje teoretyczna koncepcja wzrostu równomiernego. Otwarta pozostaje natomiast kwestia teoretycznego wyjaśnienia tendencji do występowania tego rodzaju postępu technicznego.

Zauważmy ponadto, że neutralność postępu technicznego w sensie Harroda nie stanowi natomiast warunku koniecznego dla występowania wzrostu równomiernego w szerszym sensie (z pominięciem warunku stałości względnych udziałów kapitału i pracy w produkcie). Jeśli jednak ograniczymy się wyłącznie do koncepcji postępu technicznego zwiększającego efektywność czynników - potęgującego pracę i/lub kapitał[16] (co w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego jest rozwiązaniem typowym), to możliwość wzrostu równomiernego także w szerszym sensie warunkowana jest przez czysto pracoefektywnościowy (neutralny w sensie Harroda) charakter postępu technicznego[17].

---

można traktować jako wynagrodzeń jednostkowych. Tym samym, wskaźników elastyczności produktu względem kapitału i pracy nie można traktować jako udziałów tych czynników w produkcie.

[15] Rozróżnienie definicji wzrostu równomiernego w szerszym i węższym sensie przeprowadzone zostało w rozdziale pierwszym, punkcie 1.2 (Uwaga 1.1)

[16] Zob. formułę (4.13) w punkcie 4.1.

[17] Prosty dowód tego faktu można znaleźć np. w: R. M. Solow, *Growth Theory, An Exposition*, Oxford University Press, New York, Oxford 2000, s. 33 – 34 lub R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw – Hill Inc., New York 1995, s. 54.

Drugie spostrzeżenie, wynikające z alternatywnego sformułowania definicji neutralności postępu technicznego, dotyczy funkcji produkcji charakteryzującej się z założenia stałymi elastycznościami produktu względem poszczególnych czynników wytwórczych (przy założeniu o stałych efektach skali oznaczającymi również stałe udziały wynagrodzeń tych czynników w wytwarzanym produkcie), czyli także - stałą elastycznością substytucji pracy przez kapitał (stałą relacją udziałów wynagrodzeń czynników w produkcie), zdefiniowaną w (4.16). Przyjęcie takiego założenia implikuje, że spełnione są definicje wszystkich trzech przedstawionych typów neutralności postępu technicznego. Formalnie, schemat wnioskowania opiera się w tym przypadku na tezie logicznej rachunku zdań: $q \to \left(p \to q\right)$, przy czym w zdaniu „*q*" stwierdzamy, że stała jest elastyczność substytucji pracy przez kapitał, a zdanie „*p*" stanowi poprzednik odpowiedniej implikacji, definiującej postęp techniczny neutralny w sensie Hicksa, Harroda lub Solowa. Funkcja produkcji tego rodzaju, uwzględniająca postęp techniczny, znana powszechnie pod nazwą funkcji Cobba–Douglasa, ma postać następującą[18]:

$$Y(t) = A_0 e^{mt} K^{\alpha} L^{\beta}\,, \qquad \alpha, \beta = const. > 0\,. \tag{4.17}$$

Funkcję (4.17) możemy także zapisać na trzy alternatywne sposoby:

$$Y(t) = (KB_0 e^{m_{HI}t})^{\alpha} (LB_0 e^{m_{HI}t})^{\beta} = K^{\alpha} (LC_0 e^{m_{HA}t})^{\beta} = (KD_0 e^{m_S t})^{\alpha} L^{\beta}\,,$$

przy czym: $m_{HI} = m/(\alpha+\beta)$, $m_{HA} = m/\beta$, $m_S = m/\alpha$ oraz $B_0 = (A_0)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$, $C_0 = (A_0)^{\frac{1}{\beta}}$ oraz $D_0 = (A_0)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Niezależnie zatem od tego, którą zmienną (kapitał, pracę, czy obie) mnożymy przez zmienną $A(t)$ reprezentującą postęp techniczny, wykazuje on cechę neutralności w każdym z trzech przedstawionych ujęć. Dlatego właśnie w modelach wzrostu gospodarczego, w których funkcja produkcji jest typu Cobba – Douglasa, możliwy jest

---

[18] Funkcję produkcji (4.17) wyprowadza się następująco. Różniczkowanie zupełne (4.2) względem czasu i obustronne podzielenie przez Y prowadzi do równania: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\cdot\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\cdot\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{1}{Y}$. Po dokonaniu podstawień: $\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y} = \alpha$, $\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y} = \beta$, $\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{1}{Y} = m$, scałkowaniu tego równania i opuszczeniu logarytmów otrzymujemy (4.17), przy czym elementy stałe wynikające z całkowania ujmujemy łącznie jako A_0.

wzrost równomierny, bez względu na sposób ujęcia postępu technicznego w formule analitycznej tej funkcji[19].

4.3. Koncepcja indukowanego postępu technicznego – krzywa możliwości innowacyjnych

Sprowadzenie koncepcji neutralności postępu technicznego w ujęciach Hicksa, Harroda i Solowa do, odpowiednio, czystej pracoefektywności, kapitałoefektywności oraz w równym stopniu praco – i kapitałoefektywności tego postępu, sugeruje możliwość uogólnienia samej koncepcji czynnikoefektywności postępu technicznego, którego wyrazem jest następująca postać funkcji produkcji:

$$Y(t) = F\left(B(t)K(t), A(t)L(t)\right), \tag{4.18}$$

przy czym funkcje produkcji (4.8), (4.13) i (4.14) stanowią przypadki szczególne funkcji (4.18). Funkcja (4.18) jest jednorodna stopnia jeden względem $B(t)K$ i $A(t)L$, co jest równoznaczne z założeniem o stałych korzyściach skali produkcji.

Uogólnienie to stanowi punkt wyjścia koncepcji indukowanego (co do tendencji) postępu technicznego, opartej na krzywej możliwości innowacyjnych[20].

---

[19] W artykule z 1956 r. R. Solow wprowadził, jako jedno z rozszerzeń podstawowej struktury swojego modelu wzrostu gospodarczego, nieucieleśniony postęp techniczny, zapisując funkcję produkcji w ogólnej postaci: $Y = A(t)F(L,K)$. Ten rodzaj tendencji postępu technicznego - potęgującego w równym stopniu kapitał i pracę (czyli neutralnego w sensie Hicksa) - nie jest jednak w stanie zapewnić asymptotycznej zbieżności systemu gospodarczego do ścieżki wzrostu równomiernego. Sprawa wygląda nieco inaczej dla szczególnego przypadku funkcji Cobba – Douglasa: $Y = A_0 e^{gt} K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, do którego ostatecznie ogranicza się Solow, przechodząc do rozwiązania modelu. Tym razem Solow z kolei się pomylił, wyprowadzając wniosek, iż stopy wzrostu kapitału i produktu zmierzają asymptotycznie do odmiennych poziomów, odpowiednio, $\dot{K}/K = n + \frac{g}{1-\alpha}$ i $\dot{Y}/Y = n + \alpha\frac{g}{1-\alpha}$, tak, iż relacja *K/Y* rośnie ostatecznie według stopy *g*. Innymi słowy, wzrost gospodarczy w stanie stacjonarnym nie jest wzrostem równomiernym. Zob. R. M. Solow, *A Contribution To The Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956, s. 85 - 86.

W rzeczywistości dynamika modelu z funkcją produkcji $Y = A_0 e^{gt} K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ niewiele różni się od tej, jaką przedstawiliśmy w rozdziale pierwszym dla modelu wzrostu gospodarczego z neoklasyczną funkcją produkcji i harrodowsko – neutralnym postępem technicznym. Wynika to właśnie z przedstawionej równoważności trzech typów neutralności postępu technicznego dla przypadku funkcji produkcji Cobba – Douglasa. W przypadku rozważanym przez Solowa gospodarka osiąga asymptotycznie ścieżkę wzrostu równomiernego, na której zmienne *K* i *Y* rosną według wspólnej stałej stopy: $\dot{K}/K = \dot{Y}/Y = n + \frac{g}{1-\alpha}$, a relacja *K/Y* pozostaje stała.

[20] Teorię indukowanego postępu technicznego opartą na krzywej możliwości innowacyjnych sformułował C. Kennedy (zob. C. Kennedy, *op. cit.*). Do rozwoju tej teorii przyczynili się następnie P. Samuelson (zob. P. A. Samuelson, *A Theory of Induced Innovations Along Kennedy – Weizsacker Lines*, Review of

Krzywa ta jest zbiorem Pareto – optymalnych kombinacji stóp wzrostu zmiennych $A(t)$ i $B(t)$, charakteryzujących stopień, odpowiednio, praco – i kapitałoefektywności innowacji, dostępnych przedsiębiorcom w danym okresie. Pareto – optymalny charakter tych kombinacji stóp wzrostu $\overset{\circ}{A} = \dot{A}/A$ i $\overset{\circ}{B} = \dot{B}/B$ oznacza, że nie da się osiągnąć wzrostu $\overset{\circ}{A}$ bez jakiegoś ograniczenia $\overset{\circ}{B}$ (i odwrotnie). Zgodnie z wcześniejszą interpretacją, dokonaną przy okazji charakterystyki alternatywnych koncepcji neutralności postępu technicznego w kategoriach praco – i / lub kapitałoefektywności tego postępu, stopy $\overset{\circ}{A}$ i $\overset{\circ}{B}$ możemy traktować jako procentowe oszczędności zużycia ilości pracy i kapitału, potrzebnych do wytworzenia danej (jednostkowej) ilości produkcji, zaś przy stałych wynagrodzeniach jednostkowych pracy i kapitału, F_L i F_K – również stopy ograniczenia kosztów tego zużycia.

Kryterium wyboru dla przedsiębiorstwa spośród alternatywnych usprawnień produkcyjnych stanowi minimalizacja łącznych jednostkowych kosztów produkcji. Izokwanta funkcji kryterium w układzie współrzędnych $\overset{\circ}{B} \times \overset{\circ}{A}$ ma zatem kształt linii prostej opisanej równaniem: $\lambda = \alpha \overset{\circ}{B} + (1-\alpha)\overset{\circ}{A}$, gdzie $\alpha = F_K \cdot K/Y$ i $(1-\alpha) = F_L \cdot L/Y$ oznaczają elastyczności produktu względem kapitału i pracy, równe przy założeniu stałych korzyści skali udziałom wynagrodzeń, odpowiednio, kapitału i pracy w produkcie. Minimalizacja kosztów produkcji (maksymalizacja wartości λ) następuje poprzez wybór spośród dostępnych kombinacji stóp wzrostu ($\overset{\circ}{A}; \overset{\circ}{B}$), takiej kombinacji, która leży na linii maksymalnie oddalonej od początku układu współrzędnych. Ograniczenie stanowi, uwarunkowana czysto technologicznie, krzywa możliwości innowacyjnych. Ma ona kształt analogiczny do typowej krzywej transformacji, czyli wklęsły w stosunku do początku układu współrzędnych. Oznacza to, że w przestrzeni kapitało – i pracoefektywności innowacji obowiązuje prawo rosnącego krańcowego kosztu alternatywnego – zwiększanie oszczędności zużycia pracy o kolejne punkty procentowe ogranicza oszczędność zużycia kapitału o coraz

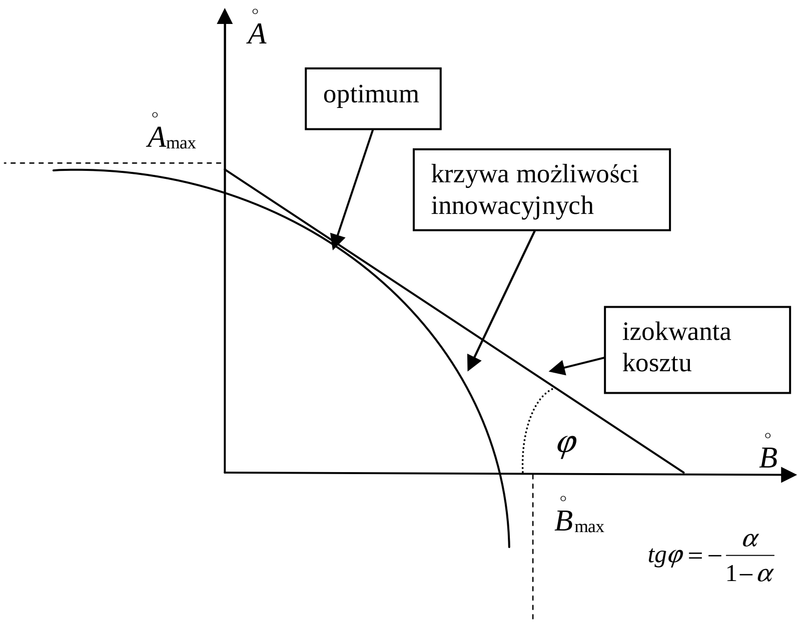
---

Economics and Statistics, 47, 1965, s. 343 - 356), C. von Weizsacker (zob. C. C. von Weizsacker, *Tentative Notes on a Two Sector Model with Induced Technical Progress*, Review of Economic Studies, Vol. 33, 1966, s. 245 – 251) oraz E. Drandakis i E. Phelps (zob. E. M. Drandakis, E. S. Phelps, *A Model of Induced Invention, Growth and Distribution*, The Economic Journal, vol. 76, 1966, s. 823 – 840). W sprawie uogólnienia na model wielosektorowy, zob. C. Kennedy, *A Generalization of the Theory of Induced Bias in Technical Progress*, The Economic Journal, vol. 83, 1973, s. 48 – 57.

większą liczbę punktów procentowych. Opisaną sytuację decyzyjną przedstawia rysunek 4.1.

Rysunek 4.1

Optymalizacja stopnia praco- i kapitałoefektywności innowacji



źródło: E. M. Drandakis, E. S. Phelps, *op. cit.*, s. 830

Formalne własności krzywej możliwości innowacyjnych można zapisać następująco:

$$\mathring{A} = g(\mathring{B}), \qquad g'(\mathring{B}) < 0,\; g''(\mathring{B}) < 0, \tag{4.19}$$

$$\lim_{\mathring{B} \to \mathring{B}_{max} > 0} \mathring{A} = -\infty, \quad \lim_{\mathring{B} \to -\infty} \mathring{A} = \mathring{A}_{max} > 0. \tag{4.20}$$

Optymalna wartość $\mathring{B}$ jest dana przez punkt styczności krzywej możliwości innowacyjnych i jednej z izokwant funkcji kryterium. Warunek optymalizacji można wyrazić za pomocą następującego równania:

$$g'(\mathring{B}) = -\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{4.21}$$

Równanie (4.21) definiuje funkcję uwikłaną optymalnej wartości $\mathring{B}$ w zależności od udziału kapitału w produkcie, $\mathring{B}(\alpha)$. Z (4.19) i (4.21) wynika, że wdrażane przez przedsiębiorców innowacje są tym bardziej pracoefektywnościowe (tym mniej kapitałoefektywnościowe), im większy jest udział pracy w produkcie w porównaniu z udziałem kapitału (im mniejsze α). Formalnie można to stwierdzić obliczając pochodne optymalnych wartości $\overset{\circ}{A}$ i $\overset{\circ}{B}$ względem α. Różniczkując równanie (4.21) względem α i korzystając z (4.19), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{B}'(\alpha) = -\frac{1}{(1-\alpha)^2 g''(\overset{\circ}{B})} > 0, \\ &\overset{\circ}{A}'(\alpha) = g'(\overset{\circ}{B})\,\overset{\circ}{B}'(\alpha) < 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

dla $0 < \alpha < 1$. Na podstawie (4.20) i (4.22) wnioskujemy także:

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha\to 0} \overset{\circ}{A}(\alpha) = \overset{\circ}{A}_{\max}, \quad \lim_{\alpha\to 1} \overset{\circ}{A}(\alpha) = -\infty, \\ &\lim_{\alpha\to 0} \overset{\circ}{B}(\alpha) = -\infty, \quad \lim_{\alpha\to 1} \overset{\circ}{B}(\alpha) = \overset{\circ}{B}_{\max}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Można zatem powiedzieć, że określona tendencja postępu technicznego jest indukowana przez względny udział wynagrodzeń czynników produkcji w wytwarzanym produkcie.

4.4. Endogeniczne ujęcie tendencji postępu technicznego w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego

Model indukowanego postępu technicznego, omawiany w poprzednim punkcie, może być wykorzystany do teoretycznego uzasadnienia tezy Hicksa o pracooszczędnej tendencji postępu technicznego w gospodarce. W tym celu należy zdynamizować ten model poprzez potraktowanie elastyczności produktu względem kapitału α jako funkcji czasu i zbadanie jej dynamiki[21].

[21] Przedstawiony w tym punkcie pracy model wzrostu gospodarczego wykorzystujący koncepcję krzywej możliwości innowacyjnych sformułowaną przez Kennedy'ego (zob. C. Kennedy, *op. cit.*), oparty jest na modelu Drandakisa i Phelpsa (zob. E. M. Drandakis, E. S. Phelps, *op. cit.*). W równaniu akumulacji kapitału uwzględniamy stopę deprecjacji kapitału. Z powodu wprowadzenia tej modyfikacji badamy w modelu dynamikę współczynnika kapitałowego $v = K/Y$ zamiast dynamiki stopy wzrostu kapitału. Zgodnie z przyjętą w tym rozdziale konwencją w modelu posługujemy się wskaźnikiem elastyczności krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem technicznego uzbrojenia pracy $e_\sigma = \frac{k}{\sigma_{L/K}} \frac{\partial \sigma_{L/K}(k,t)}{\partial k}$, zamiast wskaźnika elastyczności technicznego uzbrojenia pracy względem krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał $\frac{\sigma_{L/K}}{k} \frac{\partial k}{\partial \sigma_{L/K}}$, nazywanego w cytowanym artykule – za Hicksem – elastycznością substytucji. Por. przypis 12.

Zakładamy zatem, że agregatowa funkcja produkcji dana jest przez (4.18), a czynnikoefektywność postępu technicznego w gospodarce warunkowana jest przez mechanizm indukowanych zmian technologicznych, dany przez równania (4.19) - (4.22) i opisany w punkcie 4.2. Oznacza to, że stopień praco- i kapitałoefektywności postępu technicznego zależy od udziału kapitału w produkcie, czyli $\overset{\circ}{A}(\alpha)$ i $\overset{\circ}{B}(\alpha)$.

Oznaczmy, jak poprzednio, symbolem $\overset{\circ}{\alpha}$ stopę wzrostu $\alpha(t)$, a symbolem e_σ elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał $\sigma_{L/K}$ względem technicznego uzbrojenia pracy, $e_\sigma = \frac{k}{\sigma_{L/K}} \frac{\partial \sigma_{L/K}}{\partial k}$[22].

Udowodnimy następujący lemat.

Lemat 4.1. Jeżeli funkcja produkcji $Y(t) = f(B(t)K(t), A(t)L(t))$ jest jednorodna stopnia pierwszego, to stopa wzrostu elastyczności produktu względem kapitału spełnia równanie:

$$\overset{\circ}{\alpha} = (1-\alpha(t))(1-e_\sigma)(\overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{L} + \overset{\circ}{B} - \overset{\circ}{A}).$$

Dowód. Dla funkcji produkcji jednorodnej stopnia pierwszego zachodzi:

$$\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} = \frac{F_K K(t)}{F_L L(t)} = \frac{k(t)}{\sigma_{L/K}(t)}.$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu względem czasu powyższego równania, otrzymujemy, że stopa wzrostu α wynosi:

$$\overset{\circ}{\alpha} = (1-\alpha(t))\left(\overset{\circ}{k} - \overset{\circ}{\sigma}_{L/K}\right). \tag{4.24}$$

Uwzględniając równanie $\overset{\circ}{\sigma}_{L/K} = e_\sigma \overset{\circ}{k} + \overset{\circ}{m}$ (zob. (4.7)), dostajemy:

$$\overset{\circ}{\alpha} = (1-\alpha(t))\left((1-e_\sigma)\overset{\circ}{k} - \overset{\circ}{m}\right), \tag{4.25}$$

gdzie $\overset{\circ}{m} = \frac{1}{\sigma_{L/K}} \frac{\partial \sigma_{L/K}}{\partial t}$ przedstawia stopę zmian krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał przy danej relacji kapitału do pracy.

---

[22] Ponieważ w dalszej części wnioskowania nie jest istotne, czy e_σ jest parametrem, czy zmienna czasu, będziemy traktować tę wielkość jako stałą.

Ze względu na założenie, że funkcja produkcji (4.18) jest jednorodna stopnia pierwszego, można zapisać ją w postaci intensywnej $\bar{y} = f(\bar{k})$, gdzie $\bar{k} = \frac{B(t)K}{A(t)L}$ oznacza stosunek wielkości efektywnego kapitału do efektywnej pracy, zaś $\bar{y} = \frac{B(t)Y}{A(t)L}$.

Wprowadzając oznaczenie $C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$, możemy napisać $\bar{k} = \frac{K}{C(t)L}$ oraz $\bar{y} = \frac{Y}{C(t)L}$.

Krańcowe produktywności kapitału i pracy, F_K i F_L, możemy teraz przedstawić jako funkcje $\bar{k}$:

$$
\begin{aligned}
F_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial\left(C(t)Lf(\bar{k})\right)}{\partial \bar{k}}\frac{\partial \bar{k}}{\partial K} = C(t)Lf'(\bar{k})\frac{1}{C(t)L} = f'(\bar{k}), \\
F_L &= \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial\left(C(t)Lf(\bar{k})\right)}{\partial\left(C(t)L\right)}\frac{\partial(C(t)L)}{\partial L} = f(\bar{k})C(t) + C(t)Lf'(\bar{k})\frac{\partial \bar{k}}{\partial\left(C(t)L\right)}C(t) = \\
&= C(t)\left(f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k})\right).
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Podstawiając (4.26) do wzoru definiującego krańcową stopę substytucji pracy przez kapitał $\sigma_{L/K} = F_L / F_K$ (zob. (4.3)), otrzymujemy:

$$\sigma_{L/K}(t) = \frac{C(t)f(\bar{k})}{f_{\bar{k}}} - C(t)\bar{k}. \tag{4.27}$$

Elastyczność tej stopy względem technicznego uzbrojenia pracy spełnia zatem równanie:

$$e_\sigma = \frac{k}{\sigma_{L/K}}\frac{\partial \sigma_{L/K}}{\partial k} = \frac{k}{\sigma_{L/K}}\left(\frac{(f_{\bar{k}})^2 - f(\bar{k})f_{\bar{k}\bar{k}}}{(f_{\bar{k}})^2} - 1\right) = -\frac{k}{\sigma_{L/K}}\frac{f(\bar{k})f_{\bar{k}\bar{k}}}{(f_{\bar{k}})^2}. \tag{4.28}$$

Stopę zmian $\mathring{m}$ krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał wynikających z samych tylko zmian innowacyjnych (przy założeniu stałej relacji kapitału do pracy), policzymy natomiast w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\mathring{m} &= \frac{1}{\sigma_{L/K}}\frac{\partial \sigma_{L/K}}{\partial t} = \frac{1}{M}\frac{\left(\dot{C}f(\bar{k}) - Cf_{\bar{k}}kC^{-2}\dot{C}\right)f_{\bar{k}} - Cf(\bar{k})f_{\bar{k}\bar{k}}kC^{-2}\dot{C}}{(f_{\bar{k}})^2} = \\
&= \frac{\left(Cf(\bar{k}) - C\bar{k}f_{\bar{k}}\right)f_{\bar{k}}}{M(f_{\bar{k}})^2}\mathring{C} - \frac{kf(\bar{k})f_{\bar{k}\bar{k}}}{M(f_{\bar{k}})^2}\mathring{C}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Wobec (4.27) i (4.28), równanie (4.29) redukuje się do prostej postaci:

$$\overset{\circ}{m} = (1 - e_\sigma)\overset{\circ}{C} \quad , \tag{4.30}$$

gdzie $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B}$.

Podstawiając (4.30) do (4.25) i uwzględniając, że $\overset{\circ}{k} = \overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{L}$, otrzymujemy:

$$\overset{\circ}{\alpha} = (1 - \alpha(t))(1 - e_\sigma)(\overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{L} + \overset{\circ}{B} - \overset{\circ}{A}). \tag{4.31}$$

■

Załóżmy teraz, że równania dynamiki pracy i kapitału mają postać następującą:

$$\begin{aligned} &\dot{L} = nL, \qquad && L(0) > 0 \\ &\dot{K} = sY - \delta K, && K(0) > 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

gdzie n jest stałą (proporcjonalną) stopą wzrostu zasobów pracy (liczby ludności), zaś s i δ oznaczają, odpowiednio, stałą stopę inwestycji w gospodarce i stałą stopę deprecjacji kapitału.

Korzystając z (4.32), definicji współczynnika kapitałochłonności produkcji $v = K/Y$, równania $\overset{\circ}{K} = \dot{K}/K$ oraz faktu, że $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}(\alpha)$ i $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}(\alpha)$, równanie (4.31) przekształcamy do następującej postaci:

$$\overset{\circ}{\alpha} = (1 - \alpha(t))(1 - e_\sigma)\left(\frac{s}{v(t)} - \delta + \overset{\circ}{B}(\alpha(t)) - \overset{\circ}{A}(\alpha(t)) - n\right). \tag{4.33}$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu względem czasu równania produktu (4.18) oraz kilku elementarnych przekształceniach otrzymujemy wzór na stopę wzrostu produktu:

$$\overset{\circ}{Y} = \alpha(t)(\overset{\circ}{K} + \overset{\circ}{B}) + (1 - \alpha(t))(\overset{\circ}{L} + \overset{\circ}{A}). \tag{4.34}$$

Jednocześnie, z definicji współczynnika kapitałochłonności $v = K/Y$ wynika, że jego stopa wzrostu $\overset{\circ}{v} = \dot{v}/v$, spełnia równanie:

$$\overset{\circ}{v} = \overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{Y}. \tag{4.35}$$

Podstawiając (4.35) do (4.34) i korzystając z równań (4.32), definicji $\overset{\circ}{K} = \dot{K}/K$ i $v = K/Y$ oraz faktu, że $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}(\alpha)$ i $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}(\alpha)$, otrzymujemy ostatecznie następujące równanie, określające dynamikę współczynnika kapitałochłonności v:

$$\overset{\circ}{v} = (1 - \alpha(t))\left(\frac{s}{v(t)} - \delta - n - \overset{\circ}{A}(\alpha(t))\right) - \alpha(t)\overset{\circ}{B}(\alpha(t)). \tag{4.36}$$

Układ równań (4.33), (4.36) określa dynamikę elastyczności produktu względem kapitału i pracy (udziałów kapitału i pracy w produkcie) α i $(1-\alpha)$, oraz dynamikę współczynnika kapitałochłonności *v*. Rozwiązanie stacjonarne układu równań (4.33), (4.36) otrzymujemy, przyrównując prawe strony tych równań do zera. Poziomy współczynnika kapitałochłonności oraz udziału kapitału w produkcie w stanie stacjonarnym, v^*, α^*, spełniają układ równań:

$$\frac{s}{v}-\delta = \overset{\circ}{A}(\alpha) - \overset{\circ}{B}(\alpha) + n\,, \tag{4.37}$$

$$\frac{s}{v}-\delta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\overset{\circ}{B}(\alpha) + \overset{\circ}{A}(\alpha) + n\,. \tag{4.38}$$

Porównując prawe strony (4.37) i (4.38), otrzymujemy:

$$\overset{\circ}{B}(\alpha^*) = 0\,. \tag{4.39}$$

Równanie (4.39) determinuje optymalną wartość α^*. Z równania (4.37) (lub (4.38)) wyznaczamy także optymalną wartość v^*:

$$v^* = \frac{s}{g(0)+n+\delta}\,. \tag{4.40}$$

gdzie $g(0) = g(\overset{\circ}{B}(\alpha^*))$, (zob. (4.19)).

Z (4.39) oraz z faktu, że $\overset{\circ}{A} = g(0) > 0$ (na podstawie własności (4.19)- (4.20) krzywej możliwości innowacyjnych) płynie ważny wniosek, że w stanie stacjonarnym postęp techniczny ma charakter czysto pracoefektywnościowy (neutralny w sensie Harroda).

Z (4.22) i (4.23) wynika, że punkt równowagi długookresowej $0<\alpha^*<1$, $v^*>0$ istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie.

Twierdzenie 4.1. *Jeżeli* $e_\sigma > 1$, *to stan równowagi* (α^*, v^*) *modelu* (4.18) – (4.22), (4.32) *jest globalnie, asymptotycznie stabilny*.

Dowód. Globalną stabilność punktu równowagi możemy zbadać posługując się diagramem fazowym. Równania krzywych podziału: $\overset{\circ}{\alpha} = 0$, $\overset{\circ}{v} = 0$ są dane przez, odpowiednio, (4.37) i (4.38). Równania te zapiszemy teraz w postaci, odpowiednio:

$$\frac{s}{v}-\delta = \phi_1(\alpha)\,, \qquad \frac{s}{v}-\delta = \phi_2(\alpha)\,.$$

Z (4.22) i (4.37) wynika, że $\phi_1'(\alpha) = \mathring{A}'(\alpha) - \mathring{B}'(\alpha) < 0$, czyli krzywa $\phi_1(\alpha)$ jest malejąca. Z (4.23) wynika także: $\lim_{\alpha \to 0} \phi_1(\alpha) = \infty$, $\lim_{\alpha \to 1} \phi_1(\alpha) = -\infty$.

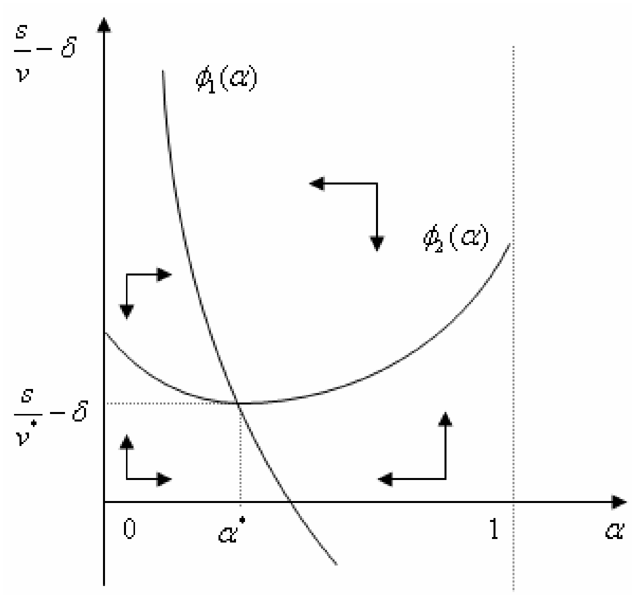
Z (4.38) wyznaczamy: $\phi_2'(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot \mathring{B}(\alpha) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \mathring{B}'(\alpha) + \mathring{A}'(\alpha)$. Ponieważ na podstawie (4.19) i (4.21) mamy: $\mathring{A}'(\alpha) = g'(\mathring{B})\,\mathring{B}'(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathring{B}'(\alpha)$, to $\phi_2'(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot \mathring{B}(\alpha)$. Stąd oraz z (4.22) i (4.39) wynika, że dla $\alpha < \alpha^*$, $\phi_2'(\alpha) < 0$, czyli krzywa $\phi_2(\alpha)$ jest malejąca, zaś dla $\alpha > \alpha^*$, $\phi_2'(\alpha) > 0$, czyli krzywa $\phi_2(\alpha)$ jest rosnąca. Dla $\alpha = \alpha^*$, $\phi_2'(\alpha) = 0$ i krzywa osiąga wartość minimum. Podstawiając $\alpha = \alpha^*$ do (4.38) i korzystając z (4.39), otrzymujemy: $\min \phi_2 = \phi_2(\alpha^*) = \frac{s}{v^*} - \delta = \mathring{A}(\alpha^*) + n > 0$.

Obliczając na koniec różnicę: $\phi_2(\alpha) - \phi_1(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \mathring{B}(\alpha)$, na podstawie (4.22) i (4.39) stwierdzamy, że dla $\alpha < \alpha^*$, zachodzi $\phi_2(\alpha) < \phi_1(\alpha)$, zaś dla $\alpha > \alpha^*$, zachodzi $\phi_2(\alpha) > \phi_1(\alpha)$.

Portret fazowy systemu przedstawiamy na rysunku 4.2.

Rysunek 4.2

Portret fazowy



źródło: opracowanie własne

Na rysunku 4.2 zaznaczono strzałki wskazujące kierunki ruchu zmiennych α i $\frac{s}{v}-\delta$, gdy system znajduje się w dowolnym punkcie. Przyjęto założenie – analogicznie jak w wywodzie Hicksa - że $e_\sigma > 1$. Z równania (4.33) wynika wówczas, że dla $\frac{s}{v}-\delta > \phi_1(\alpha)$, zachodzi $\overset{\circ}{\alpha} < 0$, czyli strzałki powyżej krzywej $\phi_1(\alpha)$ są skierowane w lewo, zaś dla $\frac{s}{v}-\delta < \phi_1(\alpha)$, zachodzi $\overset{\circ}{\alpha} > 0$, czyli strzałki poniżej krzywej $\phi_1(\alpha)$ są skierowane w prawo. Z równania (4.36) wynika, że dla $\frac{s}{v}-\delta > \phi_2(\alpha)$, zachodzi $\overset{\circ}{v} > 0$, czyli wartość wyrażenia $\frac{s}{v}-\delta$ maleje. Dla $\frac{s}{v}-\delta < \phi_2(\alpha)$, zachodzi $\overset{\circ}{v} < 0$, czyli wartość wyrażenia $\frac{s}{v}-\delta$ rośnie. Dlatego strzałki powyżej krzywej $\phi_2(\alpha)$ są skierowane w dół, zaś poniżej tej krzywej – w górę.

Z analizy diagramu fazowego wynika, że stan długookresowej równowagi dynamicznej (α^*, v^*) jest globalnie asymptotycznie stabilny[23].

■

[23] Zauważmy, że przy $e_\sigma < 1$, strzałki powyżej krzywej $\phi_1(\alpha)$ byłyby skierowane w prawo, a poniżej tej krzywej – w lewo. Punkt równowagi długookresowej byłby wówczas globalnie niestabilny.

W stanie stacjonarnym modelu gospodarka funkcjonuje na ścieżce wzrostu równomiernego. Podstawiając $g(0)=m$ do (4.40), otrzymujemy znaną zależność, charakteryzującą gospodarkę na tej ścieżce[24]:

$$\frac{1}{v^*}=\frac{Y}{K}=\frac{n+m+\delta}{s}.$$

Stała wartość wskaźnika v oznacza, że: $\overset{\circ}{K}=\overset{\circ}{Y}$. Dokonując podstawień: $\overset{\circ}{B}=0$, $\overset{\circ}{A}=g(0)=m$ oraz $\overset{\circ}{K}=\overset{\circ}{Y}$ w (4.34), otrzymujemy:

$$\overset{\circ}{K}=\overset{\circ}{Y}=n+m,$$

czyli kapitał i produkt rosną wykładniczo z naturalną stopą wzrostu. Z (4.27) wnioskujemy także, że w stanie równowagi długookresowej stopa zysku z kapitału (równa krańcowej produktywności kapitału) jest stała, zaś jednostkowe wynagrodzenie pracy (równe krańcowej produktywności pracy) rośnie według stopy postępu technicznego *m*. Stałe udziały wynagrodzeń kapitału i pracy w wartości produktu dopełniają listy charakterystyk wzrostu równomiernego.

Znaczenie przedstawionego modelu z punktu widzenia wcześniejszych rozważań jest następujące.

Po pierwsze, zauważmy, że przy przyjętym założeniu $e_\sigma>1$, z (4.25) wynika, że dla $\overset{\circ}{A}>0$, $\overset{\circ}{B}=0$, zachodzi $\overset{\circ}{m}<0$. Oznacza to, że postęp techniczny jest praco-oszczędny w sensie Hicksa. W tym zakresie przewaga przedstawionego modelu nad dużo prostszą argumentacją Hicksa nie sprowadza się jedynie do samego założenia wyjściowego o motywacjach decyzyjnych przedsiębiorstw, warunkujących określone wybory innowacyjne. W szczególności zwróćmy uwagę na fakt, że z przeprowadzonego wnioskowania wynikają zarówno określona tendencja postępu technicznego, jak i długookresowa tendencja do utrzymywania się na stałym poziomie względnych udziałów kapitału i pracy w produkcie ($\overset{\circ}{\alpha}=0$), podczas gdy w argumentacji Hicksa teoretyczna konieczność współwystępowania obu tych tendencji ma jedynie charakter relacji warunkowej (tzn. założenie występowania jednej z nich warunkuje istnienie drugiej).

Po drugie, zwracamy uwagę, że stanie stacjonarnym postęp techniczny jest czysto praco-efektywnościowy (neutralny w sensie Harroda). Uzyskaliśmy tym samym drugi

[24] Por. równanie (1.39) w rozdziale pierwszym pracy.

merytoryczny argument, uzasadniający przyjmowane w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego założenie o takim właśnie charakterze postępu technicznego. Szczególnego podkreślenia wymaga fakt, że przedstawiony tutaj model można traktować jako pewne uogólnienie neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, analizowanego w pierwszym i drugim rozdziale pracy, polegające właśnie na endogenicznym ujęciu założonej w tamtym modelu neutralnej w sensie Harroda tendencji postępu technicznego, stanowiącej konieczny warunek wzrostu równomiernego. Zwracamy przy tym uwagę, że w analizowanym modelu postęp techniczny jest neutralny w sensie Harroda dopiero na ścieżce wzrostu równomiernego, nie musi mieć natomiast takiego charakteru poza tą ścieżką.

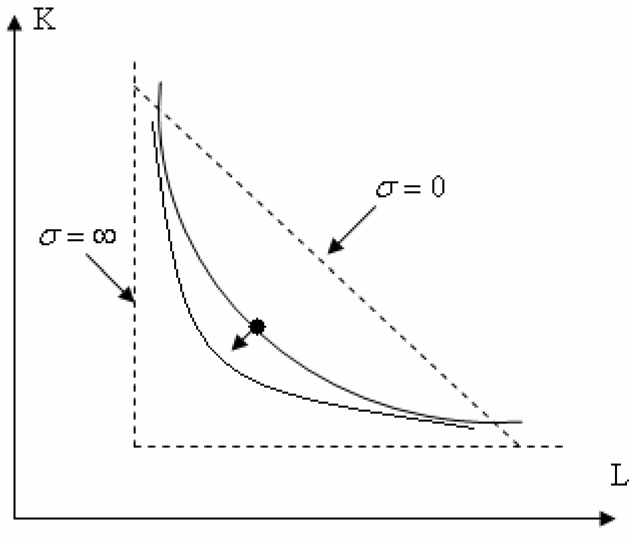
Po trzecie, w świetle przedstawionej analizy, w której istotną rolę spełnia założenie o większej od jedności elastyczności krańcowej stopy substytucji względem technicznego uzbrojenia pracy ($e_\sigma > 1$), głębszego znaczenia nabiera rezygnacja z posługiwania się w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego funkcją produkcji Cobba – Douglasa (o szczególnej, jednostkowej elastyczności krańcowej stopy substytucji względem technicznego uzbrojenia pracy) na rzecz ogólniejszej postaci tej funkcji.

Założenie to można wesprzeć posługując się tzw. „hipotezą o lokalnym poszukiwaniu”[25]. Zgodnie z tym poglądem innowacje technologiczne i organizacyjne przeprowadzane są w przedsiębiorstwach zwykle „w sąsiedztwie” technik już wykorzystywanych i polegają najczęściej na ich modyfikacjach i usprawnieniach. Ponieważ procesy produkcji mogą być – w kategoriach ilościowych – ogólnie scharakteryzowane za pomocą dowolnych dwóch z następujących relacji: *K/L*, *K/Y*, *L/Y*, ilościowy aspekt tej hipotezy znajduje odzwierciedlenie w takich przesunięciach (w kierunku początku układu współrzędnych $L/Y \times K/Y$) jednostkowych izokwant produkcji, które odbywają się przede wszystkim w okolicach punktów oznaczających aktualnie stosowaną technikę produkcji.

[25] Autorami koncepcji “lokalnego poszukiwania” są A. Atkinson i J. Stiglitz. Zob. A. B. Atkinson, J. E. Stiglitz, *A New View of Technological Change*, Economic Journal, vol. 79; 1969, s. 573 – 578.

Rysunek 4.3

Hipoteza o lokalnym poszukiwaniu



źródło: opracowanie własne

Takie stopniowe odkształcanie jednostkowych izokwant produkcji, polegające na zwiększaniu ich wypukłości, powoduje wzrost wrażliwości krańcowej stopy substytucji na zmiany technicznego uzbrojenia pracy (czyli wzrost e_σ)[26].

Ujmując rzecz od drugiej strony, można to także wyrazić w ten sposób, że zmiany relacji jednostkowych wynagrodzeń czynników produkcji wywoływać będą coraz słabszą reakcję w postaci zastępowania jednego (względnie drożejącego) czynnika produkcji przez drugi (co oznacza spadek elastyczności zmian technicznego uzbrojenia pracy względem relacji cen pracy i kapitału).

[26] Przypominamy, że w skrajnych przypadkach: liniowej funkcji produkcji (doskonała substytucja czynników produkcji) oraz funkcji produkcji Koopmansa – Leontiefa (brak substytucji czynników) elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem technicznego uzbrojenia pracy jest, odpowiednio, zerowa i nieskończenie duża.

Rozdział piąty

Kapitał ludzki jako czynnik wzrostu gospodarczego

Wprowadzenie

W rozdziale drugim, w punktach 2.2 i 2.3 rozpatrzyliśmy ograniczenia eksplanacyjne podstawowego neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego w zakresie zróżnicowania poziomów zamożności między krajami oraz w wyjaśnianiu obserwowanej złożoności procesów konwergencji bądź dywergencji tych poziomów w skali ogólnoświatowej. W punkcie 2.4 wskazaliśmy z kolei na istotną ułomność tego modelu w analizie źródeł wzrostu gospodarczego, polegającą na przypisaniu zasadniczej części wzrostu produktu *p.c.* enigmatycznej „reszcie", determinowanej przez bliżej nieokreślone zmiany jakościowe, określane wspólnym mianem postępu techniczno – organizacyjnego bądź też po prostu przyrostem „wiedzy".

Wiele z najbardziej istotnych, zdaniem autora, prób przezwyciężenia wspomnianych ograniczeń, podejmowanych w tzw. nowej teorii wzrostu gospodarczego, na fali renesansu badań teoretycznych nad wzrostem gospodarczym pod koniec ubiegłego stulecia, opiera się na przekonaniu, iż proces akumulacji kapitału jest dla wzrostu gospodarczego o wiele ważniejszy, niż to wynika z modelu Solowa.

Podstawową - choć przyznać trzeba, nie jedyną - przesłanką takiego poglądu jest z kolei szersze ujęcie kategorii kapitału, polegające na włączaniu do jego zasobów - oprócz kapitału fizycznego - również tego, co najczęściej określa się mianem kapitału ludzkiego. W tym punkcie swojego rozwoju teoria wzrostu gospodarczego odwołuje się do argumentacji i ustaleń wypracowanych w ramach, stworzonej przez T. Schulza i G. Beckera w latach 60 – tych i 70 – tych XX wieku, teorii kapitału ludzkiego[1].

Rozwój koncepcji kapitału ludzkiego oraz jej zastosowanie w wielu dziedzinach ekonomii, w tym w teorii wzrostu gospodarczego, zdaje się wychodzić naprzeciw postulatowi metodologicznemu J. von Neumanna, który porównując zasady tworzenia teorii w fizyce i ekonomii, zwrócił uwagę na fundamentalne dla rozwoju nauki

[1] Zob. G. C. Becker, *Human Capital*, National Bureau of Economic Research, New York 1975; T. W. Schultz, *Investment in Human Capital*, The Free Press, New York, 1976.

znaczenie kreowania i definiowania nowych kategorii. Zdaniem tego uczonego, potencjalny postęp w ekonomii nie będzie hamowany ani przez niemożliwość eksperymentów, ani też brak danych. Znaczącym elementem, którego brakuje nauce ekonomii jest natomiast definiowanie kategorii[2].

5.1. Rozwój koncepcji kapitału ludzkiego

Przed przystąpieniem do analizy modeli wzrostu gospodarczego uwzględniających kapitał ludzki, poświęcimy nieco uwagi samemu pojęciu kapitału ludzkiego i procesowi jego akumulacji.

Chociaż przedstawiciele nowej teorii wzrostu gospodarczego odwołują się bezpośrednio do rezultatów uzyskanych w ramach teorii kapitału ludzkiego, stworzonej przez T. Schulza i G. Beckera w pierwszej połowie lat 70 – tych ubiegłego wieku, to samo pojęcie kapitału ludzkiego było nieobce ekonomii w zasadzie od momentu jej narodzin. Jednocześnie trzeba przyznać, że rozważania na ten temat stanowiły zawsze tylko poboczny wątek analiz niektórych spośród wielkich twórców ekonomii, nigdy nie tworząc jakiegoś spójnego, kompleksowego systemu. Co więcej, samo traktowanie kapitału ludzkiego jako kategorii ekonomicznej było przez długi czas dość powszechnie kwestionowane, tak ze względów teoretycznych, jak i praktycznych. Dla przykładu, jeszcze w wydanej w 1947 roku książce „*Wstęp do ekonomiki*” wybitnego polskiego ekonomisty E. Taylora czytamy: „*Substratem zjawisk gospodarczych, wynikających z możliwości gospodarowania danymi przedmiotami, oraz częścią dochodu, a przez to przedmiotem właściwym badań ekonomiki, mogą być tylko dobra zewnętrzne w stosunku do człowieka gospodarującego. Dobra wewnętrzne, tj. właściwości gospodarza, wpływają na sposób gospodarowania i na dochód jego indywidualny i społeczny, ale są czynnikami życia gospodarczego, a nie jego elementami. (…) Właściwości osobiste gospodarza w bardzo dużej mierze nie są zależne od jego woli ani od nakładu czasu i kosztów, w tym celu poświęconych, nie mogą więc być rezultatem jego gospodarowania, (…) nie mogą być odkładane do późniejszych użytków. Nawet z*

[2] Por. R. E. Kalman, *Identifiability and Problems of Model Selection in Econometrics*, The 4th World Congress of the Econometric Society, Aix-en-Provence, August 30, 1980, revised version, January 1981 (materiał powielony), za: M. Koralewski, *Analiza semantyczna funkcji produkcji*, Ekonomista, 1996, nr 5, s. 605 – 621.

punktu widzenia społeczeństwa, wziętego jako pewna całość, właściwości gospodarzy nie są zależne ściśle od jego wysiłków i nakładów na to skierowanych. Dlatego nie mamy zjawisk społecznych gospodarowania w znaczeniu ekonomicznym przy tzw. dobrach wewnętrznych gospodarzy. Musimy je przyjmować za dane niezależne układu gospodarczego."[3] Jak zobaczymy dalej, zdania te stanowią niemalże literalną negację przesłanek, z których wychodzi współczesna teoria kapitału ludzkiego.

Z tych powodów na pewno nie jest zbytnią przesadą przyznawanie teorii kapitału ludzkiego Beckera i Schulza przymiotów nowatorstwa i oryginalności. Marc Blaug w swoich próbach zastosowania metodologii I. Lakatosa do historii rozwoju myśli ekonomicznej, przyznał nawet tej teorii status samodzielnego naukowego programu badawczego, podkreślając rozległy zakres jej zastosowań i kreowanych przez nią możliwości badawczych we wszystkich prawie dyscyplinach ekonomii[4]. W tym kontekście współczesna teoria wzrostu gospodarczego stanowi jeden z przykładów niezliczonych zastosowań teorii kapitału ludzkiego i jeszcze jeden dowód na jej eksplanacyjną żywotność.

Zanim jednak przejdziemy do prezentacji niektórych aspektów tej teorii, istotnych z naszego punktu widzenia, poświęcimy nieco uwagi wspomnianej wcześniejszej tradycji ujmowania interesującego nas tu zagadnienia, celem ugruntowania naszych zasadniczych rozważań. Przyjętym zwyczajem jest odwoływanie się przez większość piszących na jakikolwiek temat ekonomiczny do Adama Smitha. Pójdziemy za tym przykładem.

Smith zaliczał, na równi z maszynami, urządzeniami, budynkami, itp., takie przymioty człowieka, jak zdolności, wiedzę, zdrowie i energię do kapitału trwałego, na który *„(…) składają się cztery główne pozycje, w tym pożyteczne umiejętności nabyte przez członków społeczeństwa. By nabyć takie kwalifikacje, człowiek musi przez czas kształcenia, nauk lub terminowania otrzymywać środki utrzymania, co zawsze jest rzeczywistym wydatkiem, który jest kapitałem trwałym jakby zawartym w danym człowieku. Te umiejętności są częścią jego majątku, jednocześnie częścią majątku tego społeczeństwa, do którego człowiek ten należy."*[5] Smith wymienia koszty zdobycia

---

[3] E. Taylor, *Wstęp do ekonomiki*, Wydawnictwo Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań 2004.

[4] Zob. M. Blaug, *Metodologia ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s.303 – 321.

[5] A. Smith, *Bogactwo narodów. Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, PWN, Warszawa 1954, tom I, s. 345 – 348.

umiejętności wykonywania różnego rodzaju zajęć jako jedną z głównych przyczyn zróżnicowania względnych płac. *„Należy oczekiwać, że praca, którą wykonywać się uczy zwróci mu oprócz zwykłej płacy za zwykłą pracę także wszystkie wydatki wyłożone na wykształcenie wraz ze zwykłymi co najmniej zyskami od równie wielkiego kapitału."*[6] Z przytoczonych cytatów dość jasno wynika, że Smith próbował umieścić kapitał ludzki i kapitał rzeczowy na wspólnej płaszczyźnie i, co za tym idzie, sugerował, że koszty edukacji i podnoszenia kwalifikacji zawodowych powinno się traktować jako inwestycje w przyszłe możliwości zarobkowania, czyli analogicznie do inwestycji w kapitał rzeczowy, co umożliwia porównywanie ich efektywności. W drugim cytacie mamy także wskazówkę, jak należałoby przeprowadzać rachunek udziału wynagrodzeń pracy i kapitału ludzkiego w dochodzie.

Jednocześnie, stwierdzić należy, że przedstawione poglądy Smitha w kwestii kapitału ludzkiego wydają się niespójne z jego znanym odróżnieniem pracy produkcyjnej i nieprodukcyjnej. Smith bowiem *„(...) chcąc wyrazić, że ekonomika zajmuje się tylko materialnymi środkami zaspokajania potrzeb, a uznając zarazem, że dochód indywidualny składa się z zaspokajania potrzeb tak materialnych, jak i niematerialnych, (…) nadał dwuznaczną nazwę „produkcyjnych", tj. „powiększających wartość przedmiotu" swego, zajęciom, połączonym z gospodarczymi zjawiskami, stanowiącymi przedmiot ekonomiki. Uznał on więc za produkcyjne tylko zajęcia, produkujące materialne środki zaspokajania potrzeb, a nieprodukcyjnymi nazwał zajęcia, dostarczające niematerialnych środków zaspokajania potrzeb. W konsekwencji produkcyjne zajęcia utożsamił z produkującymi dobra, mogące stanowić przedmiot „akumulacji kapitału", gdyż te tylko uznał za bogactwo społeczne. Jako kryterium zaś tego rozróżnienia wprowadził narzucający się tu, ściśle związany z materialnością dóbr kapitałowych, moment trwałości wytwarzanych rzeczy, wskutek czego praca wytwarzająca przedmioty ginące z chwilą ich wytworzenia, jak usługi służącej, sędziego, lekarza, urzędnika itp., zaliczona została przez niego do zajęć nieprodukcyjnych, bo nie produkujących bogactwa, zamiast do zajęć nie wytwarzających dóbr materialnych, względnie do zajęć pozagospodarczych."*[7]

Zdaniem S. R. Domańskiego, stanowisko Smitha wytyczyło w dalszej historii rozwoju ekonomii jeden z dwóch głównych nurtów rozważań nad kapitałem ludzkim, w

---

[6] Tamże.

[7] E. Taylor, *op. cit.*, s. 255.

którym wyraźnie oddziela się tenże kapitał zawarty w człowieku od samego człowieka[8]. Drugi nurt, wywodzący się od Wiliama Petty'ego[9], utożsamia pojęcie kapitału ludzkiego z samym człowiekiem, widzianym przez pryzmat jego wartości ekonomicznej, czyli zdolności do generowania dochodu. Poza dystynkcjami natury terminologicznej, oba nurty sugerują również dwa alternatywne podejścia do szacowania wartości kapitału ludzkiego, odpowiednio: na podstawie wydatków powiększających zasoby kapitału ludzkiego oraz w oparciu o zdyskontowane przewidywane dochody z pracy. Poza tą klasyfikacją Domański umieszcza J. B. Say'a, wg którego w człowieku zawarty jest specyficzny rodzaj kapitału – kapitał niematerialny (zasadniczo różny od kapitału trwałego ze względu na to, iż nie może być przedmiotem wymiany), którego wartość można szacować tylko na podstawie dożywotniego dochodu, otrzymywanego przez właściciela[10]. Tym tropem podąża potem szkoła historyczna, a głównie F. List, który wyraźnie podkreśla znaczenie niematerialnego składnika kapitału narodowego w postaci nagromadzonej historycznie wiedzy i umiejętności w wytwarzaniu narodowego bogactwa.

Wreszcie na końcu tego przeglądu wspomnieć należy A. Marshalla, który *„chociaż (…) zgadzał się, że oszacowania kapitałowej wartości człowieka mogą być użyteczne, to jednak generalnie odrzucał tę koncepcję jako nierealistyczną, ponieważ ludzkie istoty nie są przedmiotem rynkowej wymiany"*[11]. Zwracając uwagę na nieistnienie „rynku kapitałowego dla pracy" oraz fakt, że robotnika nie da się oddzielić od wykonywanej przez niego „usługi pracy" (*„robotnik (…) sam pozostaje swoją własnością; ci, którzy ponoszą koszty wychowania i wykształcenia go, wezmą bardzo niewiele z ceny, którą on otrzyma za swoje usługi"*[12]), Marshall podważa zasadność sugestii Smitha, aby proces kształcenia i szkolenia zawodowego pracowników traktować jako inwestycje, analogicznie do kreacji kapitału fizycznego. Ciekawym spostrzeżeniem Marshallla było to, że przy szkoleniu pracowników dokonywanym z inicjatywy pracodawców, czyli tzw. nauce „przy warsztacie" występują takie korzyści, których pracodawcom nigdy nie

---

[8] Jako głównego reprezentanta tego nurtu w historii myśli ekonomicznej Domański uznaje J. S. Milla. Zob. S. R. Domański, *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa 1993, s. 33 – 35.

[9] Według Domańskiego, reprezentowany następnie m. in. przez tzw. ekonomistów wulgarnych: J. R. McCullocha i W. N. Seniora, przedstawicieli szkoły matematycznej: L. Walrasa i V. Pareto, a także J. S. Nicholsona, I. Fishera i J. H. von Thunena. Zob. tamże, s. 32.

[10] Tamże, s. 36 – 38.

[11] Tamże, s. 40.

[12] A. Marshall, *Zasady ekonomiki*, księga VI, rozdział 4, §2, cyt. za: M. Blaug, *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa 2000, s. 426.

udaje się w pełni zawłaszczyć. Jest to zatem przykład na istnienie korzyści zewnętrznych z akumulacji kapitału (ludzkiego), co stanowi jedną z kluczowych kwestii we współczesnej teorii wzrostu gospodarczego. Ze względu na przygniatający wpływ Marshallla na dalszy rozwój ekonomii, jego też najczęściej obarcza się winą za usunięcie na przeszło pół wieku z obszaru zainteresowań ekonomii kwestii związanych z kategorią kapitału ludzkiego.

My jednak skłonni jesteśmy widzieć przyczyny osłabienia zainteresowania koncepcją kapitału ludzkiego w znacznie szerszym historycznym kontekście, zarówno gospodarczym, jak i teoretycznym. Po pierwsze zatem, doświadczenia wielkiej depresji z lat 1928 – 33, a następnie hiperinflacji w wielu rozwiniętych gospodarkach przestawiły myślenie ekonomistów na poszukiwanie źródeł zawodności i niestabilności mechanizmu cenowego oraz problematykę cyklu koniunkturalnego, czyli krótko - i średniookresowy horyzont patrzenia na gospodarkę. W tym aspekcie, historia koncepcji kapitału ludzkiego przypomina losy teorii wzrostu gospodarczego[13]. Jako drugi powód, całkiem niezależny od pierwszego i czysto metodologicznej natury, można wskazać postępującą formalizację głównego nurtu ekonomii, opracowującą, co naturalne, w pierwszej kolejności zagadnienia w dotychczasowym rozwoju teorii podstawowe, najczęściej dyskutowane oraz te, które względnie łatwo matematycznemu opracowaniu się poddawały. Zagadnienie kapitału ludzkiego z pewnością do takich nie należało. Poza tym musiało wydawać się niezwykle trudno poddawalne empirycznej operacjonalizacji, która również zaczęła odgrywać istotne kryterium tego, czym w ogóle w ekonomii warto się zajmować[14].

Podsumowując rozważania dotyczące historii interesującego nas zagadnienia możemy stwierdzić, że podstawową przesłanką traktowania bądź to samego człowieka, bądź też tylko określonych jego przymiotów, jako pewnego rodzaju kapitału, jest ich wartościotwórczy charakter. Koncepcja kapitału ludzkiego nawiązuje do tego rozumienia pojęcia „kapitał", funkcjonującego w zachodniej myśli ekonomicznej, gdzie definiuje się je jako kategorię posiadającą właściwość świadczenia usług. Koncepcja ta uwypukla zazwyczaj ignorowany przez ekonomistów fakt, że zasoby ludzkie wykazują, oprócz aspektu ilościowego, tradycyjnie ujmowanego kategorią homogenicznej „pracy"

[13] O niewielkim zainteresowaniu ekonomistów w XIX i pierwszej połowie XX wieku czynnikami długofalowego wzrostu gospodarczego pisaliśmy we Wstępie.

[14] Wielu historyków myśli ekonomicznej określiło obie te tendencje jako zapominanie tradycji ojca ekonomii A. Smitha.

lub „siły roboczej", także cechy jakościowe, decydujące w dużej mierze o różnicach w wydajności i poziomach wynagrodzeń.
Jednocześnie przymiotnik „ludzki" podkreśla zasadniczo odmienny charakter tej kategorii kapitału od kapitału rzeczowego, polegający właśnie na tym, że jest on ściśle związany z człowiekiem, tak, że nie można go od konkretnego człowieka oddzielić.

Wydaje się jednak, że dużo bardziej istotnym uzasadnieniem omawianej koncepcji, bez którego byłaby ona pozbawiona jakiejkolwiek empirycznej treści, jest rozpoznanie faktu, że zasób kapitału ludzkiego, ucieleśniony w danym człowieku czy społeczeństwie, nie jest raz na zawsze określony przez wyposażenie genetyczne (wrodzone talenty, zdolności, siły witalne, itp.), ale może być rozwijany i pomnażany dzięki przeznaczaniu rzadkich zasobów (środków pieniężnych, czasu, sił fizycznych) na edukację, szkolenia zawodowe, ochronę zdrowia, itd., przy czym decyzje dotyczące wykorzystania zasobów na te cele mają w dużym stopniu charakter ekonomicznej kalkulacji. Ponieważ kalkulacja ta dotyczy rezygnacji z bieżącej konsumpcji, bezpośrednio (czas wolny, wydatki konsumpcyjne) lub pośrednio (czas przeznaczany na pracę i uzyskiwanie bieżących dochodów), na rzecz zwiększenia przyszłych dochodów i konsumpcji, wykazuje wiele cech podobnych do decyzji o inwestowaniu w kapitał rzeczowy. Stąd zwykło się mówić o inwestowaniu w człowieka (w kapitał ludzki) a proces kumulacji efektów tych inwestycji określać mianem akumulacji kapitału ludzkiego.

Ten kluczowy aspekt koncepcji kapitału ludzkiego musiał poczekać na swoje rozwinięcie do lat 70 – tych ubiegłego stulecia, co stanowiło, zdaniem autora, o dużej oryginalności i doniosłości teorii stworzonej przez Beckera i Schulza. Właśnie przyjęcie perspektywy patrzenia na wiele decyzji gospodarstw domowych jak na decyzje inwestycyjne, zamiast jak (tradycyjnie) na wybory konsumpcyjne, wyzwoliło znaczny ładunek eksplanacyjny koncepcji kapitału ludzkiego. Zastosowanie tradycyjnych neoklasycznych narzędzi rachunku ekonomicznego i optymalizacji do takich obszarów jak edukacja, szkolenia zawodowe, ochrona zdrowia, aktywność na rynku pracy, migracje zawodowe, a nawet małżeństwo, rodzina i planowanie posiadania potomstwa, rzuciło wiele światła na te dziedziny życia człowieka, które dotąd bądź nie interesowały ekonomistów w ogóle, bądź też niewiele ciekawego przy pomocy rozumowania ekonomicznego dało się o nich powiedzieć i dlatego pozostawiano je socjologom. Właśnie owo przeniesienie metod rozumowania, stworzonych na potrzeby analizy procesu akumulacji kapitału fizycznego, na grunt nowo powstałego obszaru badań pozwala widzieć teorię kapitału ludzkiego jako składową część ogólniejszej, rozszerzonej teorii kapitału, składającego się z dwóch klas: kapitału fizycznego i ludzkiego. Zauważmy, że powszechna akceptacja tej całościowej koncepcji kapitału musiałaby pociągać za sobą istotne konsekwencje natury statystycznej, na przykład związane z rachunkiem dochodu narodowego. Wiele z pozycji wydatków traktowanych zgodnie z tradycyjną klasyfikacją rachunkowości społecznej jako konsumpcyjne, musiano by teraz klasyfikować jako inwestycje, co automatycznie zwiększałoby wartości obliczanych stóp oszczędności i inwestycji.

Tym sposobem przeszliśmy do charakterystyki ostatniego etapu w (niezbyt bogatej) historii koncepcji kapitału ludzkiego, tym razem występującej już w postaci w pełni dojrzałej teorii, a może nawet całego kompleksu teorii, tworzących, jak twierdzi M. Blaug, oddzielny naukowy program badawczy. „Twardym rdzeniem" tego programu byłaby *„idea, że ludzie na różne sposoby wydają na siebie pieniądze, mając na uwadze nie tylko swe bieżące przyjemności, lecz również przyszłe zyski o charakterze pieniężnym i pozapieniężnym. (...) Wszystkie te zjawiska (...) mogą być traktowane raczej jako inwestycje niż konsumpcja. (...) Upodabnia je do siebie (...) fakt, że podejmujący decyzję, (...) patrzy w przyszłość, tam właśnie szukając uzasadnienia dla swych obecnych działań"*[15]. W „pasie ochronnym" natomiast mieściłyby się szczegółowe teorie – zastosowania owej podstawowej idei do analizy różnorodnych zjawisk, w obszarach, których przykłady podaliśmy wyżej.

S. R. Domański sugeruje z kolei, że ze względu na zakres i wagę pytań, na które teoretycy kapitału ludzkiego mają szanse i ambicje udzielić odpowiedzi, kategoria kapitału ludzkiego może pretendować do miana „czynnika syntetyzującego zjawiska gospodarcze". Wśród tych pytań dominują takie, które są istotne z punktu widzenia naszych rozważań nad wzrostem gospodarczym: *„dlaczego industrializacja okazuje się niewystarczającą strategią rozwojową; dlaczego dochód rośnie prędzej niż dostępne zasoby ziemi, godzin pracy, zasób środków rzeczowych; dlaczego rosną płace realne. Gotowa odpowiedź, jaką ma pod ręką tradycyjny teoretyk wzrostu, że wszystko to dzieje się dlatego, ponieważ rośnie produktywność i występuje postęp techniczny, jest dla nich* [tzn. rzeczników koncepcji kapitału ludzkiego – przyp. aut.] *niewystarczająca, gdyż zaraz pytają dlaczego?, i co to właściwie jest i skąd się bierze postęp techniczny.* (...) *dlaczego kraje słabo rozwinięte mają trudności z absorpcją nowej techniki i dlaczego*

[15] M. Blaug, *Metodologia …*, *op. cit.*, s. 304 – 305.

powszechnie okazało się, że nie potrafią efektywnie spożytkować ogromnych i łatwych kredytów finansujących inwestycje w majątek trwały (...).*"*[16] Jak nietrudno zauważyć, jest to zestaw pytań podobny do tego, z jakim kończyliśmy naszą analizę modelu Solowa.

Domański przytacza słowa Beckera i Schultza z ich głównych prac[17], z których wyraźnie wynika, że impulsem do podjęcia i rozwijania badań nad koncepcją kapitału ludzkiego były dla nich nierozwiązane kwestie teorii wzrostu gospodarczego, sprowadzające się w dużej mierze do problemu tzw. „reszty Solowa"[18]. Kapitał ludzki miałby być tym dodatkowym, pomijanym w dotychczasowych formułach czynnikiem wzrostu gospodarczego, wypełniającym tajemniczą „resztę" konkretną empiryczną treścią. Można zatem powiedzieć, że twórcy teorii kapitału ludzkiego zaciągnęli w swoim czasie dług u teoretyków wzrostu gospodarczego, w sensie zaczerpnięcia inspiracji do podjęcia własnych badań, który to dług spłacili następnie z nawiązką, oferując rozwinięte mikroekonomiczne zaplecze dla nowej teorii wzrostu. Teoretycy wzrostu od teorii kapitału ludzkiego przejęli nie tylko samą kategorię nowego czynnika produkcji, ale również założenie o optymalizacyjnych decyzjach racjonalnych podmiotów ekonomicznych dokonujących akumulacji tego kapitału. Takie właśnie wzajemne relacje pomiędzy obiema dziedzinami badawczymi, zdeterminowały także w pewnym stopniu układ tej pracy.

Kategoria kapitału ludzkiego funkcjonująca w teorii stworzonej przez Beckera i Schulza, nawiązuje do interpretacji nadanej jej przez A. Smitha, zgodnie z którą kapitał ludzki to coś, co dopiero gromadzi się w ciągu życia człowieka i dodaje do człowieka jako takiego. Ta definicja z pewnością lepiej współbrzmi z szczególnie silnie współcześnie eksponowanym inwestycyjnym aspektem koncepcji kapitału ludzkiego, aniżeli definicja charakterystyczna dla drugiego wyróżnionego przez nas nurtu. Taka interpretacja sugeruje też zachowanie w analizach czynników wzrostu gospodarczego tradycyjnej kategorii pracy (siły roboczej), jako wyrażającej ilościowy aspekt udziału zasobów ludzkich w tworzeniu dochodu, w odróżnieniu od kategorii kapitału ludzkiego, reprezentującej aspekt jakościowy[19]. „(...) *zasób kapitału ludzkiego może być mniejszy*

---

[16] S. R. Domański, *op. cit.*, s. 14.

[17] Tamże, s. 14 – 15.

[18] Problem „reszty Solowa" scharakteryzowany został w punkcie 2.4 pracy.

[19] Z takim właśnie sposobem ujęcia kapitału ludzkiego mamy *explicite* do czynienia w rozszerzonym neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego, omawianym w rozdziale szóstym.

lub większy niezależnie, albo w dużym stopniu niezależnie, od potencjału demograficznego społeczeństwa [a więc również zasobu siły roboczej – przyp. aut.]. *Kapitał ludzki nie zmienia się zatem dokładnie tak, jak liczba ludności i nie można powiedzieć, by był z góry dany przez genetyczne cechy populacji, która jest od urodzenia mniej lub bardziej utalentowana czy zdrowa. Idąc tym tropem, można sobie wyobrazić – choćby to miało brzmieć paradoksalnie – kraj liczebnie słaby, który posiada potężny zasób kapitału ludzkiego i kraj wielomilionowy, którego zasoby kapitału ludzkiego są niewielkie*”[20].

W przeciwieństwie do tego utożsamianie desygnatu pojęcia kapitału ludzkiego z samym człowiekiem, zdaje się prowadzić logicznie do uczynienia szeroko rozumianego kapitału jedynym czynnikiem produkcji, czyli do eliminacji z listy czynników kategorii pracy[21].

Nie jest naszym zamiarem omawianie ani historycznego rozwoju teorii kapitału ludzkiego, ani poszczególnych jej zastosowań w różnych obszarach ekonomii i rezultatów uzyskanych w analizach różnorodnych zjawisk. Zajmiemy się jedynie tymi kwestiami, które są istotne z punktu widzenia zastosowań koncepcji kapitału ludzkiego w badaniach nad wzrostem gospodarczym.

5.2. Akumulacja kapitału ludzkiego na poziomie mikroekonomicznym

Z istoty koncepcji kapitału ludzkiego wynika, że w podstawowym wymiarze problem akumulacji tego kapitału przypomina problem akumulacji kapitału rzeczowego i sprowadza się do decyzji pojedynczych podmiotów gospodarczych o rezygnacji z bieżących pożytków na rzecz zwiększenia pożytków w przyszłości, przy czym wybory te podejmowane są w oparciu o tradycyjnie pojmowany rachunek efektywności.

Zagadnienie akumulacji kapitału ludzkiego w skali mikro w ujęciu modelowym odwzorowane jest przez zadanie maksymalizacji przez indywidualny podmiot decyzyjny, dokonujący „inwestycji w siebie”, określonego funkcjonału celu, wyrażającego preferencje podmiotu co do rozkładu pożytków w czasie. W najprostszym

[20] S. R. Domański, *op. cit.*, s. 17.

[21] Ekonomistami stosującymi dawniej tego typu podejście kierowały głównie względy natury perswazyjno - ideologicznej. Szacownie ekonomicznej wartości członków społeczeństwa służyło często demonstrowaniu potęgi narodu i uświadamianiu ogromu rzeczywistych kosztów prowadzenia wojen, poprzez dodawanie do bezpośrednich strat materialnych również ekonomicznej wartości strat w ludziach.

ujęciu, rolę funkcjonału celu odgrywać może suma zdyskontowanych dochodów, otrzymywanych w całym okresie aktywności zawodowej dzięki pracy zarobkowej z udziałem zakumulowanego w danej osobie kapitału ludzkiego. Formalna postać tego typu funkcjonału celu jest następująca:

$$PV\widehat{Y} = \int_{0}^{T} \widehat{Y}_t e^{-\mu t} dt, \tag{5.1}$$

gdzie $\widehat{Y}_t$ oznacza rzeczywiste dochody otrzymywane w okresie *t*, μ jest stałą stopą dyskonta, zaś *T* - górną granicą okresu zarobkowania.

W modelu Haley'a[22] jedynym kosztem tworzenia kapitału ludzkiego (i jednocześnie miarą wielkości „inwestycji w siebie" I_t) są stracone zarobki, które osoba mogłaby otrzymać, gdyby nie dokonywała „inwestycji w siebie", lecz cały ucieleśniony w niej zasób kapitału ludzkiego przeznaczyła na działalność zarobkową. Jeżeli przez Y_t oznaczymy łączne możliwe do uzyskania w okresie *t* dochody (tzw. ogólną zdolność zarobkowania), to możemy napisać:

$$I_t = Y_t - \widehat{Y}_t. \tag{5.2}$$

Wprowadzając parametr $\alpha_t \in [0,1]$, który informuje, jaka względna część ogólnej zdolności zarobkowania w okresie *t* zostaje utracona w związku z inwestowaniem w kapitał ludzki i może być nazwany stopą tych inwestycji, mamy:

$$I_t = \alpha_t Y_t, \tag{5.3}$$

zaś uwzględniając (5.2), także:

$$\widehat{Y}_t = (1 - \alpha_t) Y_t. \tag{5.4}$$

Aby powiązać wysokość zarobków z przeszłymi sumami poświęcanymi na rozwój i podnoszenie zdolności zarobkowania, Haley wprowadza do modelu kategorię zasobu kapitału ludzkiego, H_t, ucieleśnionego w danej jednostce, od którego wielkości uzależnia jej zdolność zarobkową:

$$Y_t = rH_t, \tag{5.5}$$

gdzie *r* symbolizuje stałą w czasie stawkę renty, jaką w jednostce czasu może przynieść „właścicielowi" jednostka kapitału ludzkiego z tytułu jej wynajęcia na rynku pracy. Otwartą pozostaje kwestia, czy nie należałoby raczej założyć stałego wzrostu stawki

---

[22] W. J. Haley, *Human Capital. The Choice Between Investments and Income*, The American Economic Review, 1973, vol. 63, no. 5, December, s. 929 – 944.

renty w czasie z tytułu sekularnego wzrostu gospodarczego. Założona stopa wzrostu renty g odzwierciedlałaby wówczas tę część wzrostu zarobków jednostki, która nie wynika bezpośrednio z ponoszonych przez nią nakładów na formowanie kapitału ludzkiego, lecz jest przejawem ogólnego wzrostu płac w gospodarce na skutek autonomicznego postępu techniczno – organizacyjnego[23]. Dopuszczamy tutaj taką możliwość[24]. Zamiast równania (5.5) przyjmujemy zatem:

$$Y_t = r_0 e^{gt} H_t \,. \tag{5.6}$$

Podstawiając (5.6) do (5.3), otrzymujemy:

$$I_t = \alpha_t r_0 e^{gt} H_t = r_0 e^{gt} \widetilde{H}_t \,, \tag{5.7}$$

gdzie $\widetilde{H}_t = \alpha_t H_t$. W interpretacji Haleya jednostka dzieli w każdym okresie dostępny jej zasób kapitału ludzkiego pomiędzy dalszą jego akumulację oraz działalność zarobkową. $\widetilde{H}_t$ oznacza zatem tę część zasobu, która stanowi nakład w procesie produkcji kolejnych jednostek kapitału ludzkiego. Proces ten odbywa się zgodnie z założoną funkcją produkcji:

$$f(\widetilde{H}_t) = \beta(\widetilde{H}_t)^b \,, \tag{5.8}$$

w której parametr β charakteryzuje indywidualną zdolność do wytwarzania nowych jednostek kapitału ludzkiego, zaś $b \in (0,1)$ oznacza elastyczność produkcji kapitału ludzkiego względem nakładu tego kapitału, uczestniczącego w procesie jego pomnażania.

Zmianę zasobu kapitału ludzkiego w okresie t opisuje równanie:

$$\frac{dH_t}{dt} = f(\widetilde{H}_t) - \delta H_t \,, \tag{5.9}$$

gdzie δ jest współczynnikiem deprecjacji kapitału ludzkiego.

Przesłanką takiej specyfikacji modelu jest podstawowe dla teorii kapitału ludzkiego założenie, że różnice w wysokości zarobków wynikają z różnic w poziomie wiedzy,

[23] Takie rozwiązanie znajdujemy w modelu akumulacji kapitału ludzkiego S. Rosena, zob. S. Rosen, *A Theory of Life Earnings*, Journal of Political Economy, 1976, vol. 84, s. 45 – 67.

Rozstrzygnięcia zasadności założenia o sekularnym wzroście płac wynikającym z autonomicznego postępu technicznego można dokonać wyłącznie na poziomie makroekonomicznym. Dwa odmienne stanowiska w tej kwestii reprezentują modele wzrostu gospodarczego, analizowane w dalszej części pracy, tzn. model Lucasa (punkt 5.3) oraz rozszerzony o akumulację kapitału ludzkiego neoklasyczny model wzrostu (rozdział szósty).

[24] Tym bardziej, że założenie to, jak się przekonamy, nie ma wpływu na jakościowy charakter rozwiązania.

umiejętności, kwalifikacji, nabytych drogą „inwestowania w siebie”[25]. Na pierwszy rzut oka wydawać się może, że, ponieważ model opisuje sytuację decyzyjną pojedynczego podmiotu, to nie ma większego znaczenia fakt, iż zależność pomiędzy nakładami na tworzenie kapitału ludzkiego a uzyskiwanymi efektami w postaci zwiększonych dochodów będzie się różnić w każdym indywidualnym przypadku, na przykład na skutek mniejszych lub większych wrodzonych zdolności, talentów, itp. Jeśli jednak model ma odzwierciedlać rzeczywiste motywacje i decyzje gospodarujących swoim czasem i dobrami podmiotów, to powinny być one w stanie taką zależność szacować, a nie jest to możliwe inaczej, jak na podstawie obserwacji innych gospodarujących jednostek, bo przecież dzisiejsze „inwestycje w siebie” będą przynosić efekty dopiero w przyszłości. Jeśli w modelu ogniwo pośrednie między nakładami a efektami (dochodami) ma stanowić tworzony i wykorzystywany następnie w działalności zarobkowej zasób kapitału ludzkiego, to problem ten sprowadza się albo do różnic w wartościach parametrów (bądź ewentualnie również samej postaci analitycznej) indywidualnych funkcji produkcji kapitału ludzkiego, albo alternatywnie – do różnic w wysokości renty, jaką w rozważanej jednostce czasu może przynieść właścicielowi jednostka kapitału ludzkiego z tytułu wynajęcia jej na rynku pracy[26].

Ponadto, jako niefortunny należy ocenić przedstawiony przez Haley’a opis sytuacji decyzyjnej podmiotu, w tym punkcie, w którym mówi on o podziale samego zasobu kapitału ludzkiego pomiędzy alternatywne zastosowania. Właściwością odróżniającą kapitał ludzki od innych rodzajów kapitału (rzeczowego, finansowego) jest właśnie to, że nie może być on porcjowany przez jego właściciela i w ten sposób rozdzielany między różne zastosowania, lecz zawsze towarzyszy w całości swojemu nosicielowi w każdej jego działalności. Dany podmiot może zatem angażować swój kapitał ludzki w różne zastosowania, dokonując jego podziału nie w sensie fizycznym, lecz czasowym, pomiędzy poszczególne typy aktywności[27]. Zgodnie z tym ujęciem, α_t we wzorze (5.7) można interpretować jako ułamek czasu, jaki rozważana osoba przeznacza w okresie *t* na inwestycje w siebie.

[25] Ewentualnie również zdrowia czy ogólnej kondycji psycho - fizycznej, choć istniejące w literaturze modele ograniczają się zwykle do akumulacji kapitału edukacyjnego.

[26] Wtedy zakładamy, że jednostki kapitału ludzkiego ucieleśnione w różnych podmiotach odznaczają się różną zdolnością do generowania dochodów.

[27] Taką interpretację przedstawił Y. Ben – Porath. Zob. Y. Ben – Porath, *The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings*, Journal of Political Economy, 75, 1967, s. 352 – 365.

Zgodnie z równaniem (5.9), na dynamikę kapitału ludzkiego oprócz procesu jego pomnażania składa się również proces jego deprecjacji, odbywający się u Haley'a według stałej stopy δ. Proces deprecjacji kapitału ludzkiego może odzwierciedlać dwa zjawiska – po pierwsze, starzenie się zasobu kapitału ludzkiego związane nieuchronnie ze starzeniem się samego człowieka (zapominanie uprzednio nabytej wiedzy, osłabienie zdolności do przyswajania nowej, itp.), które możemy nazwać deprecjacją fizyczną tego kapitału, po drugie - deprecjację moralną, polegającą na częściowym starzeniu się wiedzy i umiejętności zdobytych w przeszłości, związanym z dokonującym się wciąż postępem naukowo – technicznym.

W tak skonstruowanym modelu optymalizacyjnym jednostka staje przed wyborem, do jakiego stopnia w każdym momencie swojego życia (a ściślej – okresu aktywności zawodowej) angażować się w bieżącą działalność zarobkową, do jakiego zaś – w dalsze pomnażanie swojej wiedzy i umiejętności, w celu powiększenia dochodów uzyskiwanych w przyszłości, lecz kosztem dochodów bieżących. Zagadnienie sprowadza się zatem do ustalenia optymalnych wartości współczynnika α_t w każdym okresie.

Formalnie problem ten rozwiążemy posługując się metodami dynamicznej optymalizacji, w szczególności korzystając z zasady maksimum Pontriagina[28]. Odpowiednie zadanie optymalizacyjne ma postać następującą:

$$\int_0^T r_0(H_t - \widetilde{H}_t)e^{-\rho t}dt \xrightarrow{\widetilde{H}_t} \max, \tag{5.10}$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} &\frac{dH_t}{dt} = \beta(\widetilde{H}_t)^b - \delta H_t, \\ &H_0 > 0, \\ &0 \leq \widetilde{H}_t \leq H_t, \end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie ρ pod całką w funkcji celu oznacza stopę dyskonta netto, czyli stopę dyskontową pomniejszoną o stopę sekularnego wzrostu płac, $\rho = \mu - g$. Dla zapewnienia zbieżności tej całki musimy założyć $\rho > 0$.

W zadaniu tym H_t pełni rolę zmiennej stanu. Rolę zmiennej sterującej przypisujemy zmiennej $\widetilde{H}_t$.

---

[28] Haley nie prezentuje w swoim artykule sposobu rozwiązania modelu. Podane rozwiązanie problemu Haley uzasadnia w sposób heurystyczny.

Hamiltonian w tym problemie ma postać:

$$V = r_0(H_t - \widetilde{H}_t)e^{-\rho t} + \psi_t\left(\beta(\widetilde{H}_t)^b - \delta H_t\right).$$

Optymalnie ustalona w rozwiązaniu problemu wartość zmiennej pomocniczej Lagrange'a ψ_t w chwili *t* mierzy cenę dualną dla związanej z nią zmiennej stanu H_t[29]. Aby uprościć procedurę rozwiązywania zadania, w którym w funkcji celu występuje czynnik dyskontujący, można posłużyć się tzw. hamiltonianem wartości bieżącej V_C, spełniającym zależność: $V_C = Ve^{\rho t}$. Zatem:

$$V_C = r_0(H_t - \widetilde{H}_t) + m_t\left(\beta(\widetilde{H}_t)^b - \delta H_t\right),$$

gdzie $m_t = \psi_t e^{\rho t}$. Ze względu na warunek $\widetilde{H}_t - H_t \le 0$, formułujemy odpowiednią funkcję Lagrange'a:

$$L = V + \lambda_t(H_t - \widetilde{H}_t),$$

w której λ_t jest mnożnikiem Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a wartości bieżącej ma postać następującą:

$$L_C = V_C + n_t(H_t - \widetilde{H}_t),$$

gdzie $n_t = \lambda_t e^{\rho t}$. Rozwiązanie zadania spełnia poniższy układ zależności:

$$\frac{\partial L_C}{\partial \widetilde{H}_t} = \left[-r_0 + mb\beta(\widetilde{H}_t)^{b-1} - n\right] \le 0, \quad \widetilde{H}_t \ge 0, \quad \widetilde{H}_t\frac{\partial L_C}{\partial \widetilde{H}_t} = 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial L_C}{\partial n} = H_t - \widetilde{H}_t \ge 0, \quad n \ge 0, \quad n\frac{\partial L_C}{\partial n} = 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{dH_t}{dt} = \frac{\partial L_C}{\partial m} = \beta(\widetilde{H}_t)^b - \delta H_t, \tag{5.14}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial L_C}{\partial H_t} + \rho m = -r_0 - n + m(\delta + \rho), \tag{5.15}$$

$$m_T e^{-\rho T} = 0.\text{[30]} \tag{5.16}$$

Jeśli założymy, że $H_t > \widetilde{H}_t$, wtedy na mocy (5.13), $n = 0$. Równanie (5.15) upraszcza się do:

[29] Dokładną ekonomiczną interpretację tej zmiennej podamy w dalszej części tego punktu.

[30] Treść ekonomiczna tzw. warunku tranwersalności (5.16) stanie się jasna, gdy podamy interpretację zmiennej m_t.

$$\frac{dm}{dt} = -r_0 + m(\delta + \rho) . \qquad (5.17)$$

Uwzględniając $m_T = 0$, rozwiązanie równania (5.17) ma postać:

$$m_t = -\frac{r_0}{\delta + \rho} e^{(\delta+\rho)(t-T)} + \frac{r_0}{\delta + \rho} = \frac{r_0}{\delta + \rho}\left(1 - e^{(\delta+\rho)(t-T)}\right). \qquad (5.18)$$

Jednocześnie zakładając $\widetilde{H}_t > 0$, z (5.12) otrzymujemy:

$$r_0 = m_t b \beta (\widetilde{H}_t)^{(b-1)} . \qquad (5.19)$$

Nietrudno zrozumieć ekonomiczny sens reguły optymalizacji zawartej w równaniu (5.19). Zgodnie ze standardowym neoklasycznym rachunkiem efektywności, jednostka dokonująca w każdej chwili wyboru optymalnej wielkości nakładu kapitału ludzkiego w procesie „produkcji" tego kapitału, porównuje krańcowy koszt tego nakładu (mierzony wartością dochodu utraconego w wyniku odciągnięcia go od bieżącej działalności zarobkowej) z wartością efektu dochodowego, jaki przyniesie krańcowa jednostka nakładu użyta w procesie „produkcji" kapitału ludzkiego[31]. Z lewej strony równania (5.19) mamy bowiem stałą w czasie stawkę renty r_0, stanowiącej krańcowy koszt alternatywny (koszt utraconych korzyści) zastosowania kapitału ludzkiego w procesie produkcji kapitału ludzkiego, z prawej zaś - krańcową produktywność nakładu kapitału ludzkiego używanego w produkcji kapitału ludzkiego (pochodna funkcji (5.8) względem $\widetilde{H}_t$), przemnożoną przez wartość bieżącą (tzn. obliczoną na moment *t*) ceny dualnej jednostki kapitału ludzkiego w chwili *t*. Z (5.18) wynika, że wartość bieżąca ceny dualnej jednostki kapitału ludzkiego, m_t, jest niczym innym, jak sumą zdyskontowanych na moment *t* dochodów, jakie do końca okresu zarobkowania

[31] Rewers przedstawionego rozumowania, stanowi rozumowanie Ben–Poratha, prowadzące bezpośrednio do formuły określającej wielkość produkcji kapitału ludzkiego w każdym momencie okresu optymalizacji, z której można następnie uzyskać (przez zastosowanie funkcji odwrotnej do funkcji produkcji) formułę na ścieżkę zmian nakładów kapitału ludzkiego w produkcji tegoż kapitału, $\widetilde{H}_t$. Zgodnie z tym podejściem, optymalna wielkość produkcji kapitału ludzkiego to taka wielkość, przy której koszt krańcowy tej produkcji (mierzony straconymi zarobkami w wyniku zaangażowania kapitału ludzkiego w produkcję krańcowej jednostki kapitału ludzkiego, zamiast w bieżącą działalność zarobkową) zrównuje się z wartością wyprodukowanej krańcowej jednostki kapitału ludzkiego (odpowiadającą sumie zdyskontowanych dochodów, jakie będzie można dzięki niej uzyskać w przyszłości).

Oba bliźniacze podejścia, które określić można, odpowiednio, jako rachunek efektywności nakładów oraz rachunek opłacalności produkcji, powinny prowadzić do tych samych rezultatów, a odmienność wyników uzyskanych przez Ben–Poratha bierze się stąd, że nie uwzględnia on stopy deprecjacji, zakłada inną (bardziej rozbudowaną) funkcję produkcji kapitału ludzkiego (w której oprócz nakładu czasu zaangażowania kapitału ludzkiego występują również nakłady rzeczowe) oraz wydłuża horyzont optymalizacji do oczekiwanego końca życia jednostki. Zob. Y. Ben–Porath, *op. cit.*

pozwoli uzyskać nowo wytworzona (w momencie *t*) jednostka kapitału ludzkiego (z uwzględnieniem deprecjacji tego kapitału w czasie). Zachodzi bowiem:

$$\int_{i=t}^{T} r_0 e^{-(\delta+\rho)(i-t)} = \frac{r_0}{\delta+\rho}\left(1-e^{(\delta+\rho)(t-T)}\right).$$

Podstawiając (5.18) do (5.19), możemy wyznaczyć optymalną ścieżkę $\widetilde{H}_t$:

$$\widetilde{H}_t^* = \left[\frac{\delta+\rho}{b\beta\left(1-e^{(\delta+\rho)(t-T)}\right)}\right]^{\frac{1}{b-1}} = \left(\frac{b\beta}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-b}}\left(1-e^{(\delta+\rho)(t-T)}\right)^{\frac{1}{1-b}}. \tag{5.20}$$

Zauważmy jednak, że ścieżkę zmian $\widetilde{H}_t^*$ w (5.20) uzyskaliśmy przy założeniu, że: $H_t > \widetilde{H}_t$. Jeśli początkowy zasób kapitału ludzkiego $H(0) = H_0$ jest niższy od poziomu $\widetilde{H}_0^*$, wyznaczonego z (5.20) dla t = 0, to ze względu na warunek (5.13) musimy przyjąć: $H_t = \widetilde{H}_t$, zarówno dla t = 0, jak i w pewnym (prawostronnym) otoczeniu punktu początkowego (z uwagi na ciągłość obu funkcji: H_t i $\widetilde{H}_t^*$). Wówczas dla $t \in \langle 0;\tau)$, gdzie $0 < \tau \le T$, zmienna $\widetilde{H}_t$ nie kształtuje się zgodnie z (5.20) i musimy znaleźć jej trajektorię, zakładając, że $H_t = \widetilde{H}_t$. Podstawiając $\widetilde{H}_t$ w miejsce H_t w (5.14), mamy:

$$\frac{d\widetilde{H}_t}{dt} = \frac{\partial L_C}{\partial m} = \beta(\widetilde{H}_t)^b - \delta\widetilde{H}_t. \tag{5.21}$$

Dzieląc obustronnie (5.21) przez $(\widetilde{H}_t)^b$, a następnie korzystając z podstawienia: $x_t = (\widetilde{H}_t)^{b-1}$, dostajemy:

$$\frac{dx_t}{dt} = -(1-b)\delta x_t + (1-b)\beta.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$x_t = \left(x_0 - \frac{\beta}{\delta}\right)e^{-(1-b)\delta t} + \frac{\beta}{\delta}.$$

Powracając do $\widetilde{H}_t$, otrzymujemy ścieżkę zmian tej zmiennej dla $t \in \langle 0;\tau)$:

$$\widetilde{H}_t^{**} = H_t^{**} = \left[\left((\widetilde{H}_0)^{1-b} - \frac{\beta}{\delta}\right)e^{-(1-b)\delta t} + \frac{\beta}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-b}}. \tag{5.22}$$

Moment τ możemy wyznaczyć, przyrównując prawe strony (5.20) i (5.22), w których za *t* wstawiamy τ.

Znając ścieżkę $\widetilde{H}_t^*$, możemy teraz określić zachowanie H_t na przedziale $\left(\tau, T\right\rangle$. Rozwiązując równanie (5.14) z warunkiem początkowym $H_\tau^* = H^{**}(\tau)$ (ze względu na ciągłość ścieżki H_t), otrzymujemy:

$$H_t^* = e^{-\delta(t-\tau)} \left(H^{**}(\tau) + \beta \int_\tau^t \left(\widetilde{H}(\theta) \right)^b e^{\delta(\theta-\tau)} d\theta \right). \tag{5.23}$$

Ponieważ zależy nam głównie na jakościowej ocenie rozwiązania zadania, przyjmujemy za Haleyem wartość współczynnika *b* elastyczności produkcji kapitału ludzkiego względem nakładu tegoż kapitału na poziomie 0,5, co znacznie uprości procedurę wyznaczenia ścieżki H_t^*. Podstawiając (5.20) do (5.23), przy *b* = 0,5, dostajemy:

$$H_t^* = e^{-\delta(t-\tau)} \left(H^{**}(\tau) + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2}{\delta + \rho} \right) \int_\tau^t \left(1 - e^{(\delta+\rho)(\theta-T)} \right) e^{\delta(\theta-\tau)} d\theta \right),$$

czyli:

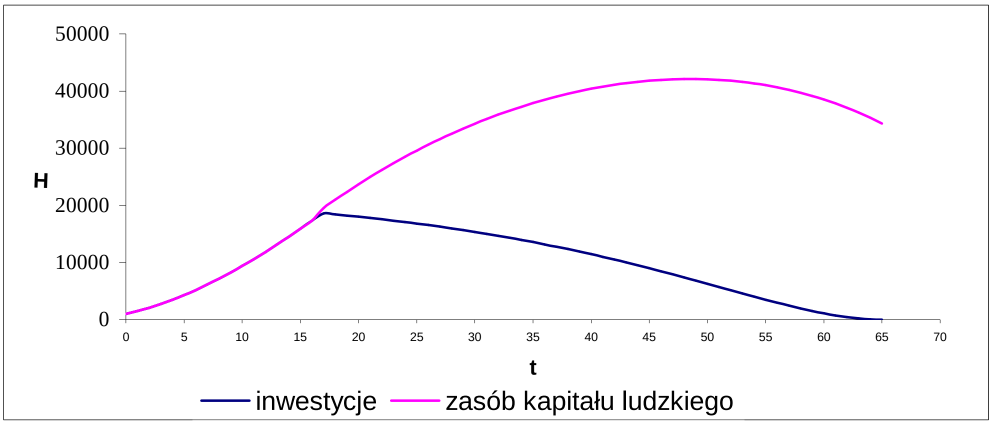
$$\begin{aligned} H_t^* &= H^{**}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2}{\delta+\rho} \right) \left(\frac{1}{\delta} \left(e^{\delta(t-\tau)} - 1 \right) - \frac{1}{2\delta+\rho} e^{-(\delta+\rho)T - \delta\tau} \left(e^{(2\delta+\rho)t} - e^{(2\delta+\rho)\tau} \right) \right) e^{-\delta(t-\tau)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Znając ścieżki H_t i $\widetilde{H}_t$ łatwo znaleźć trajektorie wszystkich pozostałych zmiennych występujących w modelu, w szczególności stopy inwestycji w kapitał ludzki (równej ilorazowi $\widetilde{H}_t$ przez H_t) oraz dochodów otrzymywanych z pracy zarobkowej (równej iloczynowi różnicy $H_t - \widetilde{H}_t$ i stawki renty $r_0 e^{gt}$). Przykładowe trajektorie zmiennych H_t (zasób kapitału ludzkiego) i $\widetilde{H}_t$ (inwestycje w kapitał ludzki) oraz α_t (stopa inwestycji) prezentujemy na rysunkach 5.1 i 5.2[32]. W przeprowadzonej przez autora analizie symulacyjnej założono następujące wartości parametrów: $\rho = 0,02$, $T = 65$, $\beta = 15$, $b = 0,5$, $\delta = 0,03$, $H_0 = 1000$.

[32] Wykresy te wykonano na podstawie symulacji przeprowadzonych przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel. Moment τ wyznaczono korzystając z aplikacji Solver.

Rysunek 5.1

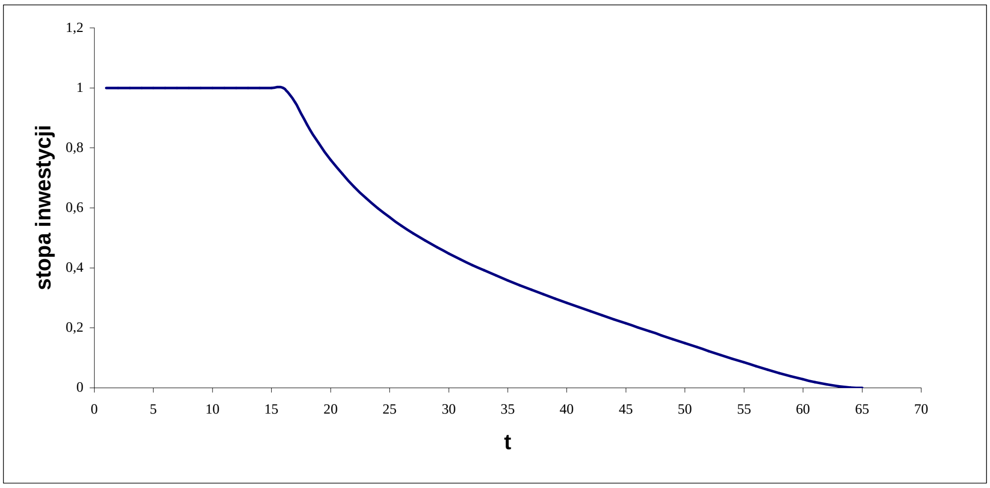
Optymalna akumulacja kapitału ludzkiego



źródło: obliczenia własne w oparciu o symulacje przeprowadzone przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel

Rysunek 5.2

Optymalna stopa inwestycji w kapitał ludzki



źródło: obliczenia własne w oparciu o symulacje przeprowadzone przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel

Przedstawimy pokrótce najważniejsze własności otrzymanego rozwiązania, zilustrowanego na rysunkach 5.1 i 5.2.

1. Przez pewien początkowy okres jednostka przeznacza dostępne zasoby kapitału ludzkiego wyłącznie na dalszą jego akumulację. Na tym etapie ujawnia się ograniczenie zasobowe polegające na tym, że cały zakumulowany zasób kapitału ludzkiego nie

wystarcza do osiągnięcia takiej jego wielkości produkcji, jaka wynika z rachunku optymalizacyjnego[33].

Ten okres wyłącznej specjalizacji w powiększaniu zasobów kapitału ludzkiego interpretuje się zwykle jako przypadający na lata formalnej nauki szkolnej. Zauważmy jednak, że w takiej sytuacji powinno się raczej obserwować gwałtowny spadek (a zatem nieciągłość) stopy inwestycji α_t w punkcie τ, zamiast ciągłego przejścia z poziomu 1 do fazy spadkowej, uzyskanego w modelu. Jak argumentuje Halley, takie aprioryczne utożsamienie momentu wejścia jednostki na rynek pracy z momentem zakończenia jej formalnej edukacji wydaje się, w ogólnym przypadku, założeniem nadmiernie upraszczającym obraz faktycznych wyborów dokonywanych przez podmioty. *„Jednostka, która nie uznaje dalszej specjalizacji za zachowanie optymalne* [w świetle kryterium maksymalizacji zdyskontowanej sumy jej całożyciowych zarobków – przyp. aut.], *nawet jeśli uczęszcza jeszcze do szkoły, poszukuje takiej pracy, która jest w stanie pogodzić jej aktywność inwestycyjną* [we własne zasoby kapitału ludzkiego – przyp. aut.] *z zarabianiem pieniędzy. Pytanie, które się pojawia dotyczy tego, w jakiej sytuacji jednostki będą skracać okres specjalizacji, zgłaszając swoje uczestnictwo w sile roboczej*” (tłum. aut.)[34].

Można pokazać[35], że długość okresu wyłącznej akumulacji kapitału ludzkiego zależy negatywnie od początkowego zasobu kapitału ludzkiego H_0, stopy dyskonta μ oraz stopy deprecjacji δ, zaś pozytywnie od stopy sekularnego wzrostu płac g oraz parametru β, charakteryzującego indywidualną zdolność do produkcji kapitału ludzkiego. Pamiętając o formalnej przyczynie, dla której w modelu pojawia się faza

[33] Czyli takiej, jaka wynikałaby z rozwiązania zadania maksymalizacji sumy całożyciowych zdyskontowanych dochodów do dyspozycji bez warunku ograniczającego $H_t \geq \widetilde{H}_t$.

[34] W. Haley, *op. cit.*, s. 942. Odnosząc się natomiast do wcześniejszych badań Johnsona (zob. T. Johnson, *Returns from Investment In Human Capital,* American Economic Review, September 1970, vol. 60, s. 546 – 560) Haley stwierdza: *„Johnson bez żadnego teoretycznego powodu zakładał nieciągłość ścieżki α_t w chwili τ. Założenie to stanowiło po prostu rezultat badań empirycznych, sprawiając, ze jego model lepiej pasował do danych, niż w przypadku ciągłej ścieżki α_t (…). Ten empiryczny test może być jednak iluzją, wynikającą z faktu, że użycie momentu zakończenia formalnej edukacji szkolnej jako τ jest niewłaściwe. Prawdopodobnie moment τ występuje w cyklu życiowym jednostek zasadniczo wcześniej niż moment zakończenia ich formalnej edukacji i użycie tego ostatniego zamiast prawdziwego τ odpowiada za nieciągłość* [uzyskiwanej ścieżki α_t - przyp. tłum.]” (tłum. aut.). Zob. W. Haley, *op. cit.*, s. 939.

[35] Formalnie, poprzez policzenie pochodnych cząstkowych wyrażenia na τ względem poszczególnych parametrów i ustalenie ich znaku. Ponieważ nie wyprowadziliśmy analitycznej formuły określającej moment τ, poprzestajemy na wnioskowaniu bardziej intuicyjnym.

specjalizacji, nietrudno wywnioskować, że im większy jest początkowy zasób kapitału ludzkiego H_0 [36], tym szybciej przestaje działać ograniczenie zasobowe i jednostka może „inwestować w siebie" zgodnie z regułą optymalizacji daną przez równanie (5.19). Wyższe $\rho = \mu - g$ (lub wyższe δ) oznacza niższą wartość bieżącą ceny dualnej kapitału ludzkiego, m_t, w każdej chwili *t*, a przez to – niższe optymalne wielkości nakładów kapitału ludzkiego w produkcji tegoż kapitału, $\widetilde{H}_t^*$, każdej chwili *t*[37]. W konsekwencji, wyznaczone zgodnie z regułą optymalizacji (5.19) wielkości nakładów $\widetilde{H}_t^*$ są dla „inwestującego w siebie" podmiotu wcześniej osiągalne, co oznacza skrócenie okresu specjalizacji. Pozytywny wpływ β na τ nie jest tak oczywisty, jak wpływ pozostałych parametrów, ze względu na fakt, iż wzrost β wywołuje jednocześnie podniesienie w górę ścieżek $\widetilde{H}_t^*$ (danej przez (5.20)) i H_t^{**} (zgodnie z (5.22)). Wyniki licznych symulacji przeprowadzonych przez autora dla różnych zestawów parametrów wskazały jednak jednoznacznie na pozytywną zależność między β i τ.

Z przedstawionych zależności wynika, że najdłuższymi okresami specjalizacji w pomnażaniu własnego kapitału ludzkiego powinny cechować się osoby bardzo zdolne (wysokie β i niskie δ), urodzone w rodzinach ubogich i niewykształconych (niskie H_0) oraz kierujące się w swoich wyborach ekonomicznych perspektywą długookresową i skłonne do bieżących poświęceń na rzecz przyszłych pomnożonych efektów (niskie ρ)[38].

2. Od momentu rozpoczęcia pracy zarobkowej jednostka dzieli dostępny zasób kapitału ludzkiego (nakład czasu) pomiędzy tę działalność a proces dalszej akumulacji kapitału

---

[36] Przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, a zatem przy danej ścieżce $\widetilde{H}_t^*$, która – jak wynika z (5.20) – nie zależy od H_0.

[37] Spadek wartości m_t wymusza wyższą wartość $\widetilde{H}_t^*$, dla zachowania równości pomiędzy krańcowym efektem dochodowym inwestycji w kapitał ludzki a krańcowym kosztem tych inwestycji, wyrażonym przez stałą stawkę renty r_0 – zgodnie z równaniem (5.19).

[38] Zauważmy jeszcze, że w modelu nie uwzględnia się rzeczywistych prywatnych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego (w postaci wydatków na książki i inne pomoce naukowe oraz opłat za naukę), co z pewnością nie pozostaje bez wpływu na uzyskane wnioski. Ponadto, w modelu zakłada się implicite możliwość dowolnego rozłożenia w czasie przez jednostkę jej funduszu całożyciowych dochodów, tak, że jedynym kryterium optymalizacji jest zsumowana wartość tych dochodów policzona na dowolny moment w czasie. Innymi słowy, przyjmuje się zerową wartość kosztów transakcyjnych związanych np. z pożyczaniem pieniędzy, które w praktyce mogą być nawet nieskończenie duże (uzyskanie kredytu przez jednostkę w okresie bezzarodkowym może okazać się wręcz niemożliwe).

ludzkiego. W miarę upływu czasu maleją części zasobu kapitału ludzkiego przeznaczane na akumulację[39], ze względu na malejące krańcowe efekty tych inwestycji, wynikające z kolei ze skracania się czasu, w którym dane inwestycje będą przynosić dochody. Jeszcze przez jakiś czas zasób kapitału ludzkiego wciąż rośnie, nawet pomimo spadku nakładów na jego tworzenie, aż do momentu, kiedy (rosnąca) masa deprecjacji zniweluje efekt przyrostu zasobu z tytułu (coraz mniejszej) jego produkcji.

3. Nietrudno ustalić[40], że część zasobu kapitału ludzkiego, przeznaczana do produkcji kolejnych jednostek tego kapitału (a tym samym również rozmiary tej produkcji) w okresie zarobkowym jest tym wyższa, im wyższą wartość przyjmuje współczynnik β oraz im dłuższy jest horyzont optymalizacji, natomiast maleje ze wzrostem stopy dyskonta netto i stopy deprecjacji. Optymalna ścieżka inwestycji w kapitał ludzki nie zależy natomiast od jego poziomu wyjściowego.

Szczególnie prostą wersję rozwiązania problemu optymalizacyjnego otrzymujemy w przypadku liniowej funkcji produkcji kapitału ludzkiego (czyli o jednostkowej wartości wskaźnika elastyczności *b* w formule (5.8)). Odpowiednie zadanie sterowania optymalnego ma wtedy następującą postać[41]:

$$\int_0^T r_0(1-\alpha_t)H_t e^{-\rho t}dt \xrightarrow{\alpha_t} \max, \tag{5.25}$$

przy warunkach:

$$\frac{dH_t}{dt} = (\beta\alpha_t - \delta)H_t, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} &H_0 > 0, \\ &\alpha_t \in \langle 0,1 \rangle, \end{aligned} \tag{5.27}$$

gdzie jako zmiennej sterującej używamy tym razem stopy inwestycji α_t [42].

---

[39] Na podstawie (5.20) łatwo sprawdzić, że $\frac{d\widetilde{H}_t^*}{dt} < 0$.

[40] Można policzyć odpowiednie pochodne cząstkowe wyrażenia (5.20) na $\widetilde{H}_t^*$ i oszacować ich znaki.

[41] Haley nie rozpatruje tej wersji problemu. Sformułowanie zadania i wskazanie analogii ze sposobem ujęcia akumulacji kapitału ludzkiego w modelu Lucasa jest pomysłem autora.

[42] Oczywiście, problem można rozwiązać posługując się, jak poprzednio, zmienną $\widetilde{H}_t$ jako zmienną sterującą. Uzasadnieniem wyboru stopy inwestycji α_t jest możliwość przeprowadzenia bezpośredniej analogii pomiędzy analizowaną teraz wersją modelu a charakterystyką procesu akumulacji kapitału ludzkiego w makroekonomicznym modelu wzrostu gospodarczego Lucasa, analizowanym w punktach 5.3 - 5.5.

Posługując się hamiltonianem wartości bieżącej:

$$V_C = r_0(1-\alpha_t)H_t + m_t(\beta\alpha_t - \delta)H_t\,,$$

który jest liniową funkcją zmiennej sterującej α_t, oraz korzystając z faktu, że:

$$\frac{\partial V_C}{\partial \alpha_t} = (-r_0 + m_t\beta)H_t\,, \tag{5.28}$$

otrzymujemy następujący układ warunków wyznaczających rozwiązanie zadania[43]:

$$\begin{aligned} m_t > \frac{r_0}{\beta} \quad &\rightarrow \quad \alpha_t^* = 1, \\ m_t < \frac{r_0}{\beta} \quad &\rightarrow \quad \alpha_t^* = 0, \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\frac{dH_t}{dt} = \frac{\partial V_C}{\partial m} = (\beta\alpha_t - \delta)H_t\,, \tag{5.30}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial V_C}{\partial H_t} + \rho m = -r_0(1-\alpha_t) - m_t(\beta\alpha_t - \delta - \rho), \tag{5.31}$$

$$H_0 > 0\,, \tag{5.32}$$

$$m_T e^{-\rho T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_T = 0\,^{44}, \tag{5.33}$$

gdzie α_t^* oznacza optymalną wartość stopy inwestycji α_t w momencie *t*.

Ponieważ: $m_T = 0 < \frac{r_0}{\beta}$, to $\alpha_T = 0$. Z uwagi na ciągłość zmiennej dualnej m_t, wnioskujemy, iż $m_t < \frac{r_0}{\beta}$ dla pewnego przedziału $t \in \left(\tau; T\right\rangle$. Podstawiając $\alpha_t^* = 0$ do (5.31), dostajemy:

$$\frac{dm}{dt} = -r_0 + m_t(\delta + \rho)\,.$$

Rozwiązując to równanie z warunkiem końcowym $m(T) = 0$, otrzymujemy:

$$m_t = -\frac{r_0}{\delta+\rho}e^{(\delta+\rho)(t-T)} + \frac{r_0}{\delta+\rho}\,.$$

---

[43] W przypadku, gdy hamiltonian jest liniową funkcją zmiennej sterującej , której wartości ograniczone są do pewnego zamkniętego przedziału liczbowego, otrzymuje się rozwiązanie typu *bang – bang*. Z (5.28) wynika, że hamiltonian jest maksymalizowany przy najwyższej możliwej wartości α_t (czyli $\alpha_t = 1$), jeżeli $\frac{\partial V_C}{\partial \alpha_t} > 0$, zaś przy najniższej możliwej wartości α_t (czyli $\alpha_t = 0$), wtedy, gdy $\frac{\partial V_C}{\partial \alpha_t} < 0$. Stąd dostajemy układ implikacji (5.29).

[44] Równoważność wynika z założenia, iż moment końcowy horyzontu optymalizacji *T* przyjmuje skończoną wartość.

Przy założeniu, że $\beta-\delta-\rho>0$, moment przełączenia τ możemy wyznaczyć korzystając z równania[45]:

$$m_\tau=\frac{r_0}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{r_0}{\delta+\rho}e^{(\delta+\rho)(\tau-T)}+\frac{r_0}{\delta+\rho}=\frac{r_0}{\beta}\ , \tag{5.34}$$

$$\tau=T-\frac{1}{\delta+\rho}\ln\frac{\beta}{\beta-\delta-\rho}\,. \tag{5.35}$$

Ponieważ:

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=\tau}=-r_0(1-\alpha_\tau)-\frac{r_0}{\beta}\left(\beta\alpha_\tau-\delta-\rho\right)=-r_0+\frac{r_0}{\beta}(\delta+\rho)<0\,,$$

to – z uwagi na ciągłość m_t - istnieje dokładnie jeden taki moment τ, że $m_\tau=\frac{r_0}{\beta}$.

Wynika z tego także, że dla $t\in\left\langle 0,\tau\right)$, zachodzi $m_t>\frac{r_0}{\beta}$, czyli $\alpha_t^*=1$. Oznacza to, iż przez pewien okres życia podmioty oddają się wyłącznie pomnażaniu swojego kapitału ludzkiego, od momentu τ zaś poświęcają cały swój czas i zasoby kapitału ludzkiego na pracę zarobkową[46]. Jednocześnie z (5.35) wynika, że faza akumulacji kapitału ludzkiego jest tym dłuższa, im większa jest efektywność netto kapitału ludzkiego w procesie jego samopomnażania (czyli im większa jest różnica $\beta-\delta$) w porównaniu ze stopą dyskonta netto.

Z równania (5.30) z warunkiem początkowym (5.32) wyznaczamy ścieżkę zmian kapitału ludzkiego:

$$H_t^*=\begin{cases} H_0e^{(\beta-\delta)t} & dla\ t\in\left\langle 0,\tau\right), \\ H_\tau e^{-\delta t} & dla\ t\in\left(\tau,T\right\rangle. \end{cases}$$

Zasoby kapitału ludzkiego najpierw rosną wykładniczo ze stałą stopą $\beta-\delta$, a następnie maleją wykładniczo ze stopą równą stopie deprecjacji δ. Zwróćmy uwagę, że w połączeniu z założoną stałą stawką renty implikowałoby to malejące z tą samą stopą dochody z pracy zarobkowej, co trudno byłoby uzasadnić empirycznie. Ponieważ jednak dopuszczamy wzrost płac w gospodarce na skutek autonomicznego postępu

---

[45] Jeśli $\beta-\delta-\rho\le 0$, równanie (5.34) nie posiada rozwiązania, co oznacza, że $\alpha_t=0$ dla każdego $t\in\left\langle 1,T\right)$.

[46] Zauważmy, że $\tau>0 \Leftrightarrow T>\frac{1}{\delta+\rho}\ln\frac{\beta}{\beta-\delta-\rho}$. Zatem w przypadku, gdy $T\le\frac{1}{\delta+\rho}\ln\frac{\beta}{\beta-\delta-\rho}$, faza inwestowania w kapitał ludzki w ogóle nie występuje.

techniczno – organizacyjnego, to kształtowanie się zarobków jednostki w drugiej fazie zależy od relacji pomiędzy stopą deprecjacji i stopą sekularnego wzrostu wynagrodzeń g.

W prosty sposób możemy wyznaczyć średnią optymalną stopę zmian zasobów kapitału ludzkiego dla całego okresu optymalizacji:

$$\overline{\sigma}_{H_T^*}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{dH_t}{dt}\frac{1}{H_t}dt=\frac{1}{T}\left(\int_0^\tau(\beta-\delta)dt+\int_\tau^T(-\delta)dt\right)=\frac{\tau}{T}\beta-\delta=$$
$$=\left(1-\frac{1}{T(\delta+\rho)}\ln\frac{\beta}{\beta-\delta-\rho}\right)\beta-\delta,$$

gdzie podstawiając za τ skorzystaliśmy z (5.35). Analogicznie możemy obliczyć średnią w całym horyzoncie optymalizacji stopę inwestycji (udział czasu przeznaczany na produkcję kapitału ludzkiego):

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{T}\int_0^T\alpha_t dt=\frac{1}{T}\left(\int_0^\tau 1dt+\int_\tau^T 0dt\right)=\tau/T=1-\frac{1}{T(\delta+\rho)}\ln\frac{\beta}{\beta-\delta-\rho}.$$

Podstawowe znaczenie tych (i innych) mikroekonomicznych analiz z punktu widzenia teorii wzrostu gospodarczego bardzo trafnie ujmuje R. Lucas: *„(…) human capital is simply an unobservable magnitude or force, with certain assumed properties, that I have postulated in order to account for some observed features of aggregative behavior. If these features of behavior were all of the observable consequences of the idea of human capital, then I think it would make little difference if we simply re-named this force, say, the Protestant ethic or the Spirit of History or just 'factor X'. After all, we can no more directly measure the amount of human capital a society has, or the rate at which it is growing, than we can measure the degree to which a society is imbued with the Protestant ethic.*

But this is not all we know about human capital. This same force, admittedly unobservable, has also been used to account for a vast number of phenomena involving the way people allocate their time, the way individuals' earnings evolve over then lifetimes, aspects of the formation, maintenance and dissolution of relationships within families, firms and other organizations, and so on. The idea of human capital may have seemed ethereal when it was first introduced - at least, it did to me - but after two decades of research applications of human capital theory we have learned to 'see' it in a wide variety of phenomena, just as meteorology has taught us to 'see' the advent of a worm front in a bank of clouds or 'feel' it in the mugginess of the air. (…)

The fact that the postulates of both human and physical capital have many observable implications outside the contexts of aggregate models is important in specific, quantitative ways, in addition to simply giving aggregative theorists a sense of having 'microeconomic foundations'"[47].

Z czysto technicznego punktu widzenia, znaczenie mikroekonomicznych modeli akumulacji kapitału ludzkiego dla teorii wzrostu gospodarczego polega natomiast przede wszystkim na dostarczeniu narzędzi formalnego opisu procesu inwestowania w kapitał ludzki, stanowiącego wynik zachowań optymalizacyjnych racjonalnych indywidualnych podmiotów ekonomicznych. Model wzrostu gospodarczego Lucasa, będący przedmiotem rozważań w kolejnych trzech punktach tego rozdziału, w sposobie ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego odwołuje się bezpośrednio do tej analizowanej przez nas wersji modelu Halley'a, w której założyliśmy liniową funkcję produkcji kapitału ludzkiego.

5.3. Akumulacja kapitału ludzkiego w skali makroekonomicznej w modelu wzrostu endogenicznego Lucasa

W modelu wzrostu gospodarczego Lucasa rozważana jest gospodarka, w której produkt $Y(t)$ wytwarzany jest zgodnie z agregatową funkcją produkcji[48]:

$$Y(t) = ah(t)^{\beta} K(t)^{\alpha} \left[u(t)h(t)L(t)\right]^{1-\alpha}, \tag{5.36}$$

gdzie $h(t)$ oznacza przeciętny w całej gospodarce zasób kapitału ludzkiego ucieleśniony w pojedynczym pracowniku, a $u(t)$ - przeciętny udział czasu poświęcanego przez podmioty na pracę bezpośrednio produkcyjną w ogólnym funduszu czasu pracy (pozostały czas poświęcany jest na tworzenie kapitału ludzkiego). Zmienne $K(t)$ i $L(t)$ oznaczają, odpowiednio, zasoby kapitału rzeczowego i siły roboczej.

Sens ekonomiczny podwójnego ujęcia kapitału ludzkiego w agregatowej funkcji produkcji wyjaśnimy, wyprowadzając postać tej funkcji z mikroekonomicznych funkcji

[47] R. E. Lucas, Jr., *On The Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics, vol. 22, July 1988, s. 35 – 36.

[48] Por. tamże, s. 17 – 27, oraz R. E. Lucas, Jr., *Lectures on Economic Growth*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 2002, s. 35–46.

produkcji[49]. Załóżmy, że w gospodarce funkcjonuje n przedsiębiorstw. Produkt w i–tym przedsiębiorstwie powstaje zgodnie z równaniem:

$$Y_i(t) = ah(t)^{\beta} K_i(t)^{\alpha} \left[u_i(t)h_i(t)L_i(t)\right]^{1-\alpha}, \tag{5.37}$$

w którym $h(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i(t)L_i(t)\right) / L(t)$ oznacza przeciętny, w skali całej gospodarki, poziom kapitału ludzkiego, przypadający na jednego zatrudnionego, a człon funkcji produkcji związany z tą zmienną ($h(t)^{\beta}$) reprezentuje pozytywne efekty zewnętrzne akumulacji kapitału ludzkiego, rozchodzące się po całej gospodarce i niemożliwe do przejęcia w całości przez żadną pojedynczą firmę. Iloczyn $u_i h_i L_i$ możemy interpretować jako ilość efektywnej pracy wykorzystywaną w i–tym przedsiębiorstwie. Po obustronnym podzieleniu (5.37) przez $u_i h_i L_i$, otrzymujemy postać intensywną funkcji produkcji (w kategoriach *njep*):

$$\overline{y}_i(t) = ah(t)^{\beta} \overline{k}_i(t)^{\alpha},$$

gdzie $\overline{y}_i = \frac{Y_i}{u_i h_i L_i}$, $\overline{k}_i = \frac{K_i}{u_i h_i L_i}$ oznaczają, odpowiednio, produkt i kapitał rzeczowy *njep* (w i-tym przedsiębiorstwie).

Ponieważ w gospodarce konkurencyjnej mamy ten sam poziom stopy zysku (równej krańcowej produktywności kapitału rzeczowego) w całej gospodarce, to dla każdego i musimy również przyjąć jednakowy poziom $\overline{k}_i = \overline{k} = \sum_{i=1}^{n} K_i / \sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i$ [50]. Oczywiście, wtedy również $\overline{y}_i(t) = \overline{y}(t)$. Umożliwia to agregację wszystkich pojedynczych funkcji produkcji dla otrzymania funkcji produkcji globalnej:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i u_i h_i L_i = \overline{y} \sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i = ah^{\beta} \overline{k}^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i = \\ &= ah^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i\right)^{1-\alpha} = ah^{\beta} K^{\alpha} \left(uhL\right)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

[49] Przedstawiony tutaj sposób wyprowadzenia agregatowej funkcji produkcji z mikroekonomicznych funkcji produkcji jest pomysłem autora.

[50] Ponieważ $\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = \frac{\partial\left(ah^{\beta} \overline{k}_i^{\alpha} u_i h_i L_i\right)}{\partial \overline{k}_i} \cdot \frac{\partial \overline{k}_i}{\partial K_i} = \alpha ah^{\beta} \overline{k}_i^{\alpha-1} u_i h_i L_i \cdot \frac{1}{u_i h_i L_i} = \alpha ah^{\beta} \overline{k}_i^{\alpha-1}$, to różnice w stopach zysku z kapitału w przedsiębiorstwach mogą wynikać wyłącznie z różnic w poziomach $\overline{k}_i$.

W ostatnim kroku (5.38) skorzystaliśmy z równania: $\sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i L_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \sum_{i=1}^{n} L_i = uhL$, gdzie: $u = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i h_i L_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{n} h_i L_i \right)$ oznacza przeciętny (w skali gospodarki) udział czasu poświęcany na działalność w sferze produkcyjnej, $\sum_{i=1}^{n} L_i = L$ oraz $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$.

Zauważmy, że zaprezentowany tutaj sposób agregacji nie wymaga przyjmowania założeń o jednakowych nakładach kapitału rzeczowego i pracy, a także przeciętnego zasobu kapitału ludzkiego i udziału czasu przeznaczanego przez podmioty na działalność zarobkową w odniesieniu do wszystkich przedsiębiorstw.

Teoretyczne przesłanki wprowadzenia do modelu efektów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego wyjaśnia Lucas w następujący sposób: *„If it were easy to classify most external productivity effects as either global in scope or as so localized as to be internalizable at the level of the family or the firm, then I think a model that incorporated internal human capital effects only plus other effects treated as exogenous technical change would be adequate. (…) But we know from ordinary experience that there are group interactions that are central to individual productivity and that involve groups larger than the immediate family and smaller than the human race as a whole. Most of what we know we learn from other people. We pay tuition to a few of these teachers, (…) but most of it we get for free"*[51]. Lucas wyraża przekonanie, że efekty zewnętrzne stanowią ten aspekt problemu akumulacji kapitału ludzkiego, który odróżnia wyraźnie perspektywę makroekonomiczną, przyjmowaną w teorii wzrostu gospodarczego, od ujęcia mikroekonomicznego, do którego ograniczał się w zasadzie cały dotychczasowy rozwój teorii kapitału ludzkiego, koncentrujący się na „efektach wewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego" i na „inwestycjach w siebie", z których przychody w postaci wzrostu zdolności zarobkowania przypadają osobie inwestującej[52].

[51] Tamże, s. 37 -38.

[52] Tamże., s. 36. Z drugiej strony P. Romer podkreśla *„(…) jak ważne jest rozróżnienie między kapitałem ludzkim a ideami – są to odmienne rodzaje dóbr gospodarczych. Kapitał ludzki ma taki sam charakter jak kapitał albo ziemia – jest to zwykłe dobro prywatne. Co do tego zgadzam się z G. Beckerem. Myślę, że wiele twierdzeń dotyczących efektów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego jest błędnych."* Zob. B. Snowdon, H. R. Vane, *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*, Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 2003, s. 411.

W późniejszym tekście Lucasa znajdujemy natomiast bardziej instrumentalne uzasadnienie potrzeby uwzględnienia efektów zewnętrznych z kapitału ludzkiego w agregatowej funkcji produkcji[53].

Zgodnie z analizą przeprowadzoną w rozdziale drugim, z neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego wynikają niewyobrażalnie duże różnice w poziomach krańcowej produktywności kapitału (stopach zysku), implikowane przez obserwowane w rzeczywistości rozpiętości dochodów *p.c.* między krajami. Co więcej, przy tego rzędu zróżnicowaniu stóp zysku powinno się obserwować masowe przepływy kapitału z krajów bogatych do biednych i w zasadzie brak jakichkolwiek inwestycji w tych pierwszych[54]. Poszukując odpowiedzi na pytanie postawione w tytule swojego artykułu, Lucas rozważa różnice w poziomach kapitału ludzkiego na pracownika jako potencjalny czynnik redukujący wspomniane przewidywane zróżnicowanie krańcowej produktywności kapitału rzeczowego. Zgodnie z wywodem Lucasa, jeśli zasoby pracy mierzyć będziemy w jednostkach efektywności (tzn. uwzględniając efekty inwestycji w kapitał ludzki), to możemy spodziewać się znacznie mniejszych różnic w krańcowej produktywności kapitału, niż wtedy, gdy zasoby pracy mierzymy po prostu w jednostkach fizycznych, abstrahując od zróżnicowania ich „jakości". Problem z tego rodzaju wnioskowaniem polega jednak na tym, że niwelowaniu potencjalnych różnic między krajami w stopach zysku z kapitału rzeczowego towarzyszy jednoczesne zmniejszanie się przewidywanych rozpiętości w poziomach dochodów osób o tym samym poziomie wykształcenia (kapitału ludzkiego) – w skrajnym przypadku, gdyby okazało się, że zastąpienie kategorii pracy w jednostkach fizycznych, kategorią pracy w jednostkach efektywności eliminuje całkowicie przewidywane różnice w stopach zysku z kapitału rzeczowego, powinniśmy oczekiwać także równych stawek płac dla pracowników o tym samym zasobie ucieleśnionego w nich kapitału ludzkiego[55]. Inaczej

---

[53] R. E. Lucas, Jr., Why *Doesn't Capital Flow From Rich To Poor Countries?*, American Economic Review, 1990, May, s. 92 – 96.

[54] Przykład podany przez Lucasa odwołuje się do danych zaczerpniętych ze studiów R. Summersa i A. Hestona (zob. R. Summers, A. Heston, *A New Set of International Comparisons of Real Product and Price Levels: Estimates for 130 Countries, 1950 – 1985*, Review of Income and Wealth, March 1988, 34, s. 1 – 25, szczeg. Table 3, s. 18 – 21) o 15 - krotnej różnicy w poziomie produktu *p.c.* między Indiami i USA, która, zgodnie z formułą (2.22), postaci $\frac{dy}{dk} = \alpha B^{-1} y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, i przy $\alpha = 0,4$ (średnia dla Indii i USA), implikuje aż 58 – krotną różnicę w krańcowej produktywności kapitału.

[55] W tym punkcie wnioskowania Lucas przyjmuje *implicite*, że funkcja produkcji ma postać: $Y = K^{\alpha}(uhL)^{1-\alpha}$. Funkcji tej odpowiada postać intensywna $\overline{y} = \overline{k}^{\alpha}$, gdzie $\overline{k} = K / uhL$ i $\overline{y} = Y / uhL$.

rzecz ujmując, *„(…) gdyby nie istniały żadne ekonomiczne motywy dla przepływów kapitału, nie istniałyby również żadne motywy dla przepływów siły roboczej. Tymczasem obserwujemy przecież imigrację z krajów biednych do krajów bogatych na najwyższym dopuszczalnym poziomie (i powyżej). Nie chcemy zatem rozwiązywać zagadki braku przepływów kapitału za pomocą teorii, która przewiduje jednocześnie, wbrew dowodom dostarczanym przez miliony Meksykańczyków, że meksykański pracownik może zarobić tyle samo w USA, co i w Meksyku”* (tłum. aut.)[56]. Sedno problemu postawionego przez Lucasa zawiera się zatem w pytaniu: jak wyjaśnić brak znaczących przepływów kapitału rzeczowego między krajami, przy jednoczesnej tendencji do imigracji zarobkowej z krajów biednych do krajów bogatych?

W tym kontekście, uwzględnienie efektów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego stanowi sposób na zniwelowanie przewidywanych różnic w stopach zysku, przy jednoczesnym teoretycznym uzasadnieniu istniejących różnic w wysokości wynagrodzeń za pracę[57].

Równania dynamiki zasobów produkcyjnych w modelu Lucasa są dane przez:

$$\frac{dK(t)}{dt} = Y(t) - c(t)L(t) - \delta K(t), \tag{5.39}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sigma\left[1 - u(t)\right]h(t), \tag{5.40}$$

Produkt krańcowy kapitału rzeczowego wyraża się wtedy wzorem: $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}} = \alpha \bar{y}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, czyli dla zapewnienia równych poziomów produktu krańcowego kapitału potrzeba jednakowych poziomów $\bar{y}$ (i $\bar{k}$). Wtedy jednak otrzymujemy również jednakowe poziomy płacy *njep* $\bar{w}$, zgodnie z równaniem: $\bar{w} = \frac{\partial Y}{\partial(uhL)} = (1-\alpha)\bar{k}^{\alpha} = (1-\alpha)\bar{y}$.

Na podstawie danych zaczerpniętych ze studium A. Krueger (zob. A. O. Krueger, *Factor Endowments and Per Capita Income Differences Among Countries*, Economic Journal, September 1968, no. 78, s. 641-59, szczególnie: Table III, s. 653), Lucas estymuje produktywność przeciętnego pracownika amerykańskiego jako pięciokrotnie wyższą niż w przypadku przeciętnego pracownika indyjskiego. Daje to trzykrotnie większy poziom produktu *njep* w USA niż w Indiach i redukuje różnicę w poziomach produktu marginalnego kapitału z 54 – krotnej do 5 – krotnej (patrz poprzedni przypis).

[56] R. E. Lucas, Jr., *op. cit.*, s. 93

[57] W przypadku funkcji produkcji (5.36), produkt marginalny kapitału rzeczowego można wyrazić w następującej postaci: $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} (\bar{y})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} h^{\frac{\beta}{\alpha}}$, gdzie $\bar{y} = Y/uhL$. Wynika stąd, że kraje bogate nie muszą osiągać znacząco niższych stóp zysku nawet przy wyższych poziomach $\bar{y}$, jeśli tylko dysponują odpowiednio wyższymi zasobami kapitału ludzkiego (właśnie dzięki efektom zewnętrznym), zapewniając jednocześnie wyższe stawki płac dla pracowników przy każdym danym poziomie kwalifikacji i wykształcenia.

$$\frac{dL(t)}{dt} = nL(t), \tag{5.41}$$

gdzie $c(t)$ oznacza konsumpcję *p.c.* w gospodarce, δ oznacza stopę deprecjacji kapitału rzeczowego, σ jest parametrem, wyrażającym maksymalną stopę wzrostu kapitału ludzkiego, osiągalną w sytuacji, gdy podmioty cały swój czas przeznaczają na „inwestowanie w siebie", zaś n oznacza stałą stopę wzrostu siły roboczej (równą stopie przyrostu naturalnego).

Podobnie jak w rozdziale trzecim (punkty 3.3, 3.4) przyjmujemy, że preferencje podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie odzwierciedlone są przez funkcjonał celu:

$$\int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt,$$

gdzie $\rho > 0$ oznacza stopę dyskonta konsumpcji, a γ jest parametrem określającym tempo spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji.

Problem znalezienia optymalnych (tzn. maksymalizujących dobrobyt społeczny) trajektorii $Y(t)$, $c(t)$, $K(t)$, $h(t)$, $u(t)$ sprowadza się do rozwiązania następującego zadania sterowania optymalnego[58]:

$$\int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt \xrightarrow{c(t),\ u(t)} \max, \tag{5.42}$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = ah(t)^{\beta} K(t)^{\alpha} \left[u(t)h(t)L(t)\right]^{1-\alpha} - c(t)L(t) - \delta K(t), \tag{5.43}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sigma\left(1-u(t)\right)h(t), \tag{5.44}$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = nL(t), \tag{5.45}$$

$$K(0) = K_0, \quad h(0) = h_0, \quad L(0) = L_0, \tag{5.46}$$

$$c(t) \geq 0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \tag{5.47}$$

w którym równanie dynamiki kapitału rzeczowego (5.43) uzyskujemy podstawiając za *Y(t)* w (5.39) prawą stronę (5.36).

---

[58] Por. R. E. Lucas, Jr., *On The Mechanics…*, *op. cit.*, s. 17- 27. Niewielkie różnice w uzyskanych przez autora formułach stóp wzrostu poszczególnych zmiennych oraz stopy inwestycji w kapitał ludzki na ścieżce wzrostu równomiernego, w stosunku do oryginalnej pracy Lucasa, wynikają z nieco odmiennego sformułowania funkcjonału celu (u Lucasa funkcja chwilowej użyteczności pod całką preferencji pomnożona jest dodatkowo przez rosnącą wykładniczo w czasie liczbę ludności w gospodarce). O możliwych różnicach w sformułowaniach funkcjonału celu wspominaliśmy w punkcie 3.3.

W zadaniu (5.42) - (5.47) zmienne $c(t)$ i $u(t)$ pełnią role zmiennych sterujących, zaś $K(t)$ i $h(t)$ - zmiennych stanu.

Zwróćmy uwagę, iż struktura modelu Lucasa nawiązuje do mikroekonomicznego modelu akumulacji kapitału ludzkiego, przedstawionego w poprzednim punkcie tego rozdziału, w szczególności tej jego wersji, w której zakłada się liniową funkcją produkcji kapitału ludzkiego. Podobnie jak w tamtym modelu, parametrem decyzyjnym podlegającym optymalizacji jest podział czasu przez podmioty między działalność zarobkową i tworzenie kapitału ludzkiego. Równanie dynamiki (5.44) stanowi powtórzenie (5.26), z pominięciem procesu deprecjacji[59].

Hamiltonian wartości bieżącej dla tego zadania ma postać następującą:

$$H_C(t) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta_1\left(au^{1-\alpha}h^{1-\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} - cL - \delta K\right) + \theta_2\sigma(1-u)h,$$

gdzie θ_1 i θ_2 są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej.

Warunki konieczne zasady maksimum Pontriagina są następujące:

$$\frac{\partial H_C}{\partial c} = c^{-\gamma} - \theta_1 L = 0, \tag{5.48}$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial u} = \theta_1(1-\alpha)au^{-\alpha}h^{1-\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} - \theta_2\sigma h = 0, \tag{5.49}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial H_C}{\partial\theta_1} = au^{1-\alpha}h^{1-\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} - cL - \delta K, \tag{5.50}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial H_C}{\partial\theta_2} = \sigma(1-u)h, \tag{5.51}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{\partial H_C}{\partial K} + \rho\theta_1 = -\theta_1\left(\alpha au^{1-\alpha}h^{1-\alpha+\beta}K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \delta\right) + \rho\theta_1, \tag{5.52}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial H_C}{\partial h} + \rho\theta_2 = -\theta_1(1-\alpha+\beta)au^{1-\alpha}h^{-\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} - \theta_2\sigma(1-u) + \rho\theta_2. \tag{5.53}$$

zaś warunki transwersalności:

$$\lim_{t\to\infty}\theta_1(t)e^{-\rho t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\theta_2(t)e^{-\rho t} = 0. \tag{5.54}$$

Z (5.48) mamy: $\theta_1 = c^{-\gamma}L^{-1}$. Po obustronnym zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu względem czasu, otrzymujemy:

[59] Z tego typu ujęciem procesu akumulacji kapitału ludzkiego w skali makro, w modelu wzrostu gospodarczego, wiążą się jednakże, zdaniem autora, istotne problemy teoretyczne, które analizujemy w dalszej części tego rozdziału. Patrz punkt 5.5.

$$\frac{d\theta_1}{dt}\frac{1}{\theta_1} = -\gamma\frac{dc}{dt}\frac{1}{c} - n, \tag{5.55}$$

Jednocześnie, po obustronnym podzieleniu (5.52) przez θ_1, dostajemy:

$$\frac{d\theta_1}{dt}\frac{1}{\theta_1} = -\alpha a u^{1-\alpha} h^{1-\alpha+\beta} K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} + \delta + \rho. \tag{5.56}$$

Przyrównując prawe strony (5.55) i (5.56), mamy:

$$\alpha a u^{1-\alpha} h^{1-\alpha+\beta} k^{\alpha-1} = \rho + \gamma\frac{dc}{dt}\frac{1}{c} + n + \delta \tag{5.57}$$

Analogicznie, z (5.49) mamy:

$$\theta_2 = \theta_1\sigma^{-1}(1-\alpha) a u^{-\alpha} h^{-\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{5.58}$$

Wynikiem obustronnego logarytmowania i różniczkowania względem czasu (z uwzględnieniem (5.45)) jest:

$$\frac{d\theta_2}{dt}\frac{1}{\theta_2} = \frac{d\theta_1}{dt}\frac{1}{\theta_1} - \alpha\frac{du}{dt}\frac{1}{u} + (-\alpha+\beta)\frac{dh}{dt}\frac{1}{h} + \alpha\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + n,$$

zaś po uwzględnieniu (5.55):

$$\frac{d\theta_2}{dt}\frac{1}{\theta_2} = -\gamma\frac{dc}{dt}\frac{1}{c} - \alpha\frac{du}{dt}\frac{1}{u} + (-\alpha+\beta)\frac{dh}{dt}\frac{1}{h} + \alpha\frac{dk}{dt}\frac{1}{k}. \tag{5.59}$$

Jednocześnie, dzieląc (5.53) obustronnie przez θ_2, dostajemy:

$$\frac{d\theta_2}{dt}\frac{1}{\theta_2} = -\frac{\theta_1}{\theta_2}(1-\alpha+\beta) a u^{1-\alpha} h^{-\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{1-\alpha} - \sigma(1-u) + \rho,$$

zaś po uwzględnieniu (5.58):

$$\frac{d\theta_2}{dt}\frac{1}{\theta_2} = -\frac{(1-\alpha+\beta)}{1-\alpha}\sigma u - \sigma(1-u) + \rho. \tag{5.60}$$

Przyrównując prawe strony (5.59) i (5.60), możemy napisać równanie:

$$-\frac{(1-\alpha+\beta)}{1-\alpha}\sigma u - \sigma(1-u) + \rho = -\gamma\frac{dc}{dt}\frac{1}{c} - \alpha\frac{du}{dt}\frac{1}{u} + (-\alpha+\beta)\frac{dh}{dt}\frac{1}{h} + \alpha\frac{dk}{dt}\frac{1}{k}. \tag{5.61}$$

Na koniec dzielimy równanie (5.50) obustronnie przez K i korzystając z faktu, że $\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} = \frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + n$, zapisujemy to równanie w kategoriach zmiennych *p.c.*:

$$\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} = a u^{1-\alpha} h^{1-\alpha+\beta} k^{\alpha-1} - c k^{-1} - \delta - n. \tag{5.62}$$

Układ równań różniczkowych (5.51), (5.57), (5.61) i (5.62), z warunkami początkowymi (5.46) i warunkami transwersalności (5.54), określa optymalne trajektorie zmiennych stanu *k(t) i h(t)* oraz zmiennych sterujących *c(t) i u(t)*.

Postępując za Lucasem, ograniczamy się do znalezienia własności rozwiązania optymalnego na ścieżce wzrostu równomiernego. Przyjmujemy zatem, że stopy wzrostu obu rodzajów kapitału i konsumpcji są stałe. Wzrost kapitału ludzkiego ze stałą stopą oznacza, że $u(t) = u = const.$, czyli podział czasu na pracę bezpośrednio produkcyjną oraz tworzenie kapitału ludzkiego też jest stały.

Łącząc (5.57) i (5.62), otrzymujemy:

$$\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + ck^{-1} = \frac{\rho + \gamma \frac{dc}{dt}\frac{1}{c} + (1-\alpha)(n+\delta)}{\alpha}. \tag{5.63}$$

Załóżmy, że stała stopa wzrostu konsumpcji *p.c.* wynosi g. Z równania (5.63) wynika, że dla zapewnienia stałej stopy wzrostu kapitału rzeczowego *p.c.* musi zachodzić: $ck^{-1} = const.$, czyli $\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} = \frac{dc}{dt}\frac{1}{c} = g$. Uwzględniając to równanie oraz podstawiając $\frac{du}{dt}\frac{1}{u} = 0$ i $\frac{dh}{dt}\frac{1}{h} = \sigma(1-u)$ do (5.61), po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$u = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\rho - (\alpha - \gamma)g}{\sigma(1-\alpha+\beta)} - \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{5.64}$$

Podobnie, przy tych samych założeniach, logarytmujemy obustronnie i różniczkujemy względem czasu równanie (5.57) w celu otrzymania drugiego równania wiążącego stałe u i g.

$$g = \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\sigma(1-u) \tag{5.65}$$

Z (5.64) i (5.65) znajdujemy optymalne wartości u i g:

$$u^* = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)} - 1\right), \tag{5.66}$$

$$g^* = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\sigma - \rho\right). \tag{5.67}$$

Przypomnijmy, że stopa g jest optymalną stopą wzrostu kapitału rzeczowego i konsumpcji *p.c.* na ścieżce wzrostu równomiernego. Z definicji ścieżki wzrostu równomiernego wynika, że z tą samą stopą musi rosnąć także produkt *p.c.*, $y = Y/L$. Logarytmując i różniczkując względem czasu obie strony równania (5.36) oraz uwzględniając zależności: $\frac{dK}{dt}\frac{1}{K}=\frac{dk}{dt}\frac{1}{k}+n$, $\frac{dY}{dt}\frac{1}{Y}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{y}+n$, dostajemy: $\frac{dy}{dt}\frac{1}{y}=(1-\alpha+\beta)\frac{dh}{dt}\frac{1}{h}+\alpha\frac{dk}{dt}\frac{1}{k}+(1-\alpha)\frac{du}{dt}\frac{1}{u}$.

Korzystając z równań $\frac{dh}{dt}\frac{1}{h}=\sigma(1-u)$, $\frac{dk}{dt}\frac{1}{k}=g$ oraz podstawiając za u prawą stronę (5.64) nietrudno wykazać, że $\frac{dy}{dt}\frac{1}{y}=g$.

Stopa wzrostu kapitału ludzkiego, wyznaczona na podstawie (5.51) i (5.66), wyraża się wzorem:

$$\overset{\circ}{h}^{*}=\frac{1}{\gamma}\left(\sigma-\rho\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}\right)=\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}g^{*}. \tag{5.68}$$

Zauważmy, że równania (5.66) – (5.68) mają sens ekonomiczny tylko wtedy, gdy optymalna wartość u spełnia warunek $0<u\leq 1$. Podstawiając za u prawą stronę (5.66), otrzymujemy następujące ograniczenia dla parametrów modelu:

$$u^{*}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma>1-\frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)}, \tag{5.69}$$

$$u^{*}\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho\leq\sigma\frac{(1-\alpha+\beta)}{(1-\alpha)}. \tag{5.70}$$

Pierwszy warunek oznacza, że tempo spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji (a tym samym skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie) musi być odpowiednio wysokie. Przy γ dążącym do najniższej dopuszczalnej wartości, optymalna strategia inwestowania w kapitał ludzki polega na przeznaczaniu całego czasu na produkcję kolejnych jednostek tego kapitału i odkładaniu dochodowych (a przez to – konsumpcyjnych) efektów tych inwestycji w nieskończoność. Zgodnie z (5.65), skutkuje to najwyższą możliwą stopą wzrostu równomiernego.

Warunek (5.70) określa z kolei górną granicę dla stopy dyskonta konsumpcji. Przy skrajnie wysokiej stopie dyskonta, optymalne zachowanie podmiotów polega na zaprzestaniu „inwestowania w siebie" i angażowaniu kapitału ludzkiego wyłącznie w działalność bezpośrednio produkcyjną. Stopa wzrostu produktu *p.c.* spada wówczas do zera.

W uzupełnieniu listy charakterystyk wzrostu równomiernego znalezionych przez Lucasa wyznaczymy jeszcze optymalną (na ścieżce wzrostu równomiernego) stopę inwestycji w kapitał rzeczowy. Z definicji, stopa inwestycji spełnia równanie: $\frac{dK}{dt} = sY - \delta K$. Korzystając ponadto z zależności: $\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} = \frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + n$, (5.39), (5.63) oraz $\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} = \frac{dc}{dt}\frac{1}{c} = g$, wyprowadzamy:

$$s = \frac{\frac{dK}{dt}}{\frac{dK}{dt} + cL} = \frac{\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + n}{\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} + n + ck^{-1}} = \frac{\alpha\left(g+n\right)}{\rho + \gamma g + (1-\alpha)\delta + n}. \tag{5.71}$$

Podstawiając teraz w miejsce g prawą stronę (5.67), po uproszczeniu otrzymujemy:

$$s^* = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{(1-\alpha+\beta)\sigma + (1-\alpha)\gamma n - (1-\alpha)\rho}{(1-\alpha+\beta)\sigma + (1-\alpha)n + (1-\alpha)^2\delta}.$$

Podsumowując tę część prezentacji modelu Lucasa zwracamy uwagę na fakt, że stopy wzrostu wszystkich podstawowych wielkości ekonomicznych, w tym produktu *p.c.* (a ponadto obie stopy inwestycji: w kapitał rzeczowy i ludzki) są wyznaczane wewnątrz modelu i zależne do parametrów „technologicznych" funkcji produkcji (agregatowej funkcji produkcji oraz funkcji „produkcji" kapitału ludzkiego) oraz preferencji podmiotów odnośnie rozkładu konsumpcji w czasie (reprezentowanych przez parametry ρ i γ). Z tego względu model Lucasa zaliczany jest w literaturze do tzw. modeli wzrostu endogenicznego.

Istotną cechą modelu Lucasa jest to, że ze względu na występowanie efektów zewnętrznych z kapitału ludzkiego, rozwiązanie maksymalizujące społeczny dobrobyt nie może zostać osiągnięte w wyniku zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów mikroekonomicznych. Inaczej zatem niż w przypadku modelu analizowanego w rozdziale trzecim, rozwiązanie zagadnienia „społecznego planisty" nie pokrywa się z rozwiązaniem w kategoriach równowagi rynkowej (określanym przez Lucasa „rozwiązaniem równowagowym").

Podejmując indywidualne decyzje o alokacji czasu pomiędzy działalność zarobkową i akumulację kapitału ludzkiego, podmioty nie biorą pod uwagę wpływu tych decyzji na zmianę przeciętnego poziomu kapitału ludzkiego i jego oddziaływania na produktywność czynników wytwórczych w całej gospodarce, ponieważ *„żadna indywidualna decyzja dotycząca akumulacji* [kapitału ludzkiego – przyp. aut.] *nie może mieć liczącego się wpływu na* h_a [przeciętny poziom kapitału ludzkiego – przyp. aut.]"[60]

[60] R. E. Lucas, Jr., *op. cit.*, s. 18.

oraz, dodajmy, efekty te rozchodzą się po całej gospodarce i nie mogą być w całości przywłaszczone. W celu wyróżnienia efektów zewnętrznych kapitału ludzkiego, pomijanych przez racjonalne podmioty ekonomiczne w ich decyzjach optymalizacyjnych, Lucas zapisuje funkcję produkcji (5.36) w następujący sposób:

$$Y(t) = ah_a(t)^{\beta} K(t)^{\alpha} \left[u(t)h(t)L(t)\right]^{1-\alpha} .$$

Z formalnego punktu widzenia, zadanie optymalizacyjne tzw. typowego podmiotu ekonomicznego jest tożsame z przedstawionym wyżej „problemem centralnego planisty”, z tą jednakże różnicą, że ścieżkę zmian $h_a(t)$ przyjmuje się jako daną (wyznaczoną egzogenicznie). System gospodarczy jest w równowadze, kiedy rzeczywista ścieżka zmian $h(t)$ – stanowiąca rozwiązanie problemu – pokrywa się z oczekiwaną i zakładaną przez podmioty ścieżką $h_a(t)$ [61].

Nietrudno zauważyć, że spośród warunków optymalizacji (5.48) - (5.54) zmianie ulega jedynie (5.53):

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial h} + \rho\theta_2 = -\theta_1(1-\alpha)au^{1-\alpha}h^{-\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} - \theta_2\sigma\left(1-u\right) + \rho\theta_2 . \qquad (5.72)$$

Jeśli $\beta = 0$, czyli nie występują efekty zewnętrzne akumulacji kapitału ludzkiego, to równania (5.53) i (5.72) są identyczne.

W konsekwencji zamiast (5.64) mamy:

$$u = \frac{(\alpha-\gamma)g - \rho + \sigma}{(-\alpha+\beta)\sigma} + 1 . \qquad (5.73)$$

Drugie równanie wiążące stałe u i g, czyli (5.65), pozostaje bez zmian. Rozwiązując układ równań (5.65), (5.73) wyznaczamy „równowagową” stopę wzrostu produktu, kapitału rzeczowego i konsumpcji (w kategoriach *p.c.*) na ścieżce wzrostu równomiernego:

$$g_e = \frac{(1-\alpha+\beta)(\sigma-\rho)}{(1-\alpha+\beta)\gamma-\beta} , \qquad (5.74)$$

oraz stałą u, określającą podział czasu na pracę bezpośrednio produkcyjną i tworzenie kapitału ludzkiego:

$$u_e = 1 - \frac{(1-\alpha)(\sigma-\rho)}{\sigma\left((1-\alpha+\beta)\gamma-\beta\right)} . \qquad (5.75)$$

Stopa wzrostu kapitału ludzkiego, wyznaczona analogicznie jak (5.68), wyraża się wzorem:

---

[61] Por. tamże, s. 20. Zob. także przypis 27 w trzecim rozdziale pracy.

$$\overset{\circ}{h}_e = \frac{(1-\alpha)(\sigma-\rho)}{(1-\alpha+\beta)\gamma-\beta} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta} g_e \,. \tag{5.76}$$

Podstawiając prawą stronę (5.74) w miejsce g w (5.71) można także uzyskać wzór na stopę inwestycji w kapitał rzeczowy[62].

W uzupełnieniu do wywodów Lucasa zauważmy, że rozwiązanie modelu w kategoriach równowagi rynkowej pozwala również na sformułowanie wniosków dotyczących kształtowania się wynagrodzeń czynników produkcji. Stała stopa zysku z kapitału rzeczowego na ścieżce wzrostu równomiernego wynika bezpośrednio z równania (5.57). Nietrudno zauważyć, że lewa strona tego równania odpowiada produktowi marginalnemu kapitału rzeczowego, zaś wartość prawej strony pozostaje stała przy stałej wartości $\frac{dc}{dt}\frac{1}{c} = g_e$. Produkt marginalny pracy wyraża się wzorem:

$$w = \partial Y / \partial L = (1-\alpha) a h(t)^{\beta} k(t)^{\alpha} \left[u(t)h(t)\right]^{1-\alpha}, \tag{5.77}$$

Zapisując to równanie w kategoriach stóp wzrostu i korzystając z (5.65), otrzymujemy:

$$\frac{dw}{dt}\frac{1}{w} = (1-\alpha+\beta)\frac{dh}{dt}\frac{1}{h} + \alpha\frac{dk}{dt}\frac{1}{k} = \left((1-\alpha+\beta) + \alpha\frac{(1-\alpha+\beta)}{(1-\alpha)}\right)\sigma(1-u) =$$
$$= \frac{(1-\alpha+\beta)}{(1-\alpha)}\sigma(1-u) = g,$$

czyli wynagrodzenia pracowników na ścieżce wzrostu równomiernego rosną w tempie wzrostu produktu *p.c.*.

Na koniec, podobnie jak w przypadku rozwiązania optymalnego, ustalimy dopuszczalne obszary zmienności dla parametrów modelu, rozpatrując warunek: $0 < u \le 1$. Podstawiając za u prawą stronę (5.75) i analizując otrzymane nierówności stwierdzamy, że rozwiązanie „równowagowe” modelu istnieje w trzech sytuacjach:

1) gdy $0 \le \rho < \sigma$ i $\gamma > 1 - \frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)}$, czyli przy względnie niskiej stopie dyskonta konsumpcji i względnie wysokim tempie spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji (względnie dużej skłonności podmiotów do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie); z równania (5.75) wynika wówczas, że przy wyższej stopie dyskonta ρ lub wyższym γ podmioty przeznaczają więcej czasu na

[62] Ponieważ uzyskana w ten sposób formuła jest skomplikowana i mało czytelna, nie będziemy jej tutaj przedstawiać.

działalność zarobkową, co przekłada się na niższą stopę wzrostu kapitału ludzkiego i niższą stopę wzrostu równomiernego *g*;

2) gdy $\sigma < \rho < \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\sigma$ i $0 < \gamma < 1 - \frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)}$; w tym przypadku, z równania (5.75) wynika, wraz ze wzrostem stopy dyskonta ρ lub parametru γ podmioty przeznaczają mniej czasu na działalność zarobkową, co implikuje wyższą stopę wzrostu kapitału ludzkiego i wyższą stopę wzrostu równomiernego *g*;

3) gdy $\rho = \sigma$, dla dowolnego $\gamma > 0$; w tej sytuacji, na ścieżce wzrostu równomiernego podmioty angażują się wyłącznie w działalność zarobkową, co oznacza zaprzestanie akumulacji kapitału ludzkiego i wzrostu produktu *p.c.*.

Chcąc dokonać porównania rozwiązania optymalnego z rozwiązaniem wynikającym z zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów ekonomicznych musimy ograniczyć się do takich przedziałów zmienności parametrów, które gwarantują jednoczesne istnienie obu tych rozwiązań. Jak wynika z zestawienia warunków (5.69)-(5.70) z przedstawionymi przed chwilą warunkami dla równowagi konkurencyjnej, sytuacja taka zachodzi w przypadku, gdy:

$$0 \le \rho < \sigma, \qquad \gamma > 1 - \frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)}.$$

Przy tych ograniczeniach, porównanie (5.66) z (5.75) prowadzi do wniosku, że $u^* < u_e$, czyli zaangażowanie kapitału ludzkiego w bezpośrednią działalność produkcyjną w równowadze jest zbyt duże, w porównaniu z optymalnym zaangażowaniem maksymalizującym społeczny dobrobyt. Przekłada się to na niższą od optymalnej stopę wzrostu zasobów kapitału ludzkiego w gospodarce i stopę równomiernego wzrostu kapitału rzeczowego, produktu i konsumpcji.

5.4. Walory eksplanacyjne modelu Lucasa

Przystępując do charakterystyki eksplanacyjnych walorów modelu Lucasa zauważmy najpierw, że przedstawione w poprzednim punkcie rozwiązanie dotyczy ścieżki wzrostu równomiernego. W świetle wniosków sformułowanych w rozdziale drugim (punkt 2.1), jest zatem oczywiste, że podstawowe własności tego rozwiązania są zgodne z długookresowymi tendencjami empirycznymi podanymi przez Kaldora, określanymi mianem „stylizowanych faktów" teorii wzrostu gospodarczego. Przypomnijmy, że chodzi tu o stabilność stóp wzrostu produkcji, wydajności pracy i kapitału na zatrudnionego, brak systematycznego trendu zmian w relacji kapitału do produktu, stosunku inwestycji brutto do produktu (stopy inwestycji) i stopy zysku, rosnący trend zmian płac realnych oraz względnie stabilny udział kapitału i pracy w produkcie.

Zasadnicza rozbieżność między przedstawionym tutaj modelem wzrostu gospodarczego a modelem neoklasycznym, analizowanym w rozdziałach pierwszym i drugim, dotyczy natomiast wniosków odnośnie procesów konwergencji.

Po pierwsze, ze względu na endogeniczne ujęcie długookresowej stopy wzrostu gospodarczego, trwałe różnice w poziomach tej stopy można „tłumaczyć" poprzez różnice w preferencjach podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie. Jeśli zatem społeczeństwa krajów biedniejszych w swoich decyzjach alokacyjnych cechują się perspektywą bardziej krótkookresową niż społeczeństwa krajów bogatszych (wyższe wartości stopy dyskontowej i współczynnika awersji do ryzyka), to istnieje możliwość, że na trwałe będą rozwijać się wolniej, zwiększając dystans w stosunku do tych ostatnich.

Co więcej, w przypadku, gdy stopy wzrostu gospodarczego na ścieżkach wzrostu równomiernego są równe, gospodarki różniące się w punkcie wyjścia zasobami kapitału rzeczowego i ludzkiego nie muszą zbiegać do tego samego „stanu ustalonego", nadrabiając zaległości w okresie przejściowym, nawet w sytuacji, gdy z punktu widzenia modelu są identyczne (tzn. opisuje je ten sam układ podstawowych parametrów strukturalnych). W modelu Lucasa nie funkcjonuje zatem ów podstawowy dla neoklasycznej teorii wzrostu mechanizm zbieżności, z jakim spotkaliśmy się w rozdziale drugim tej pracy, stanowiący podstawę warunkowej wersji hipotezy konwergencji.

Logarytmując obustronnie równanie (5.57) i podstawiając stałe – na ścieżce wzrostu równomiernego – wartości $\frac{dc}{dt}\frac{1}{c}$ i u, po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$lnk = -\frac{1}{1-\alpha} ln \frac{\rho + \gamma g_e + n + \delta}{\alpha a (u_e)^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} lnh \, . \tag{5.78}$$

Ponieważ na ścieżce wzrostu równomiernego stopy wzrostu zmiennych $k(t)$, $h(t)$ są stałe, to w skali logarytmicznej ścieżki wzrostu tych zmiennych są liniowymi funkcjami czasu:

$$
\begin{aligned}
ln\big(k(t)\big) &= ln\big(k_0 \exp(g_e t)\big) = lnk_0 + g_e t,\\
ln\big(h(t)\big) &= ln\left(h_0 \exp(\overset{\circ}{h}_e\, t)\right) = lnh_0 + \overset{\circ}{h}_e\, t.
\end{aligned} \tag{5.79}
$$

Stałe $k_0 = k(0)$, $k_0 = k(0)$ determinują „położenie" długookresowych ścieżek wzrostu zmiennych $k(t)$ i $h(t)$, a tym samym ścieżki wzrostu $y(t)$:

$$ln\big(y(t)\big) = ln\big(y_0 \exp(g_e t)\big) = \ln y_0 + g_e t,$$

gdzie $y_0 = au_e^{1-\alpha} h_0^{1-\alpha+\beta} k_0^{\alpha}$.

Wstawiając (5.79) do (5.78) i upraszczając, otrzymujemy:

$$lnk_0 = -\frac{1}{1-\alpha} ln \frac{\rho + \gamma g_e + n + \delta}{\alpha a (u_e)^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} lnh_0, \tag{5.80}$$

czyli w skali logarytmicznej stała określająca „położenie" długookresowej ścieżki $k(t)$ jest rosnąca funkcją liniową stałej determinującej „położenie" ścieżki $h(t)$. Oznacza to, że zamiast pojedynczej ścieżki wzrostu równomiernego, do której zmierzają wszystkie gospodarki scharakteryzowane przez dany układ parametrów strukturalnych modelu, otrzymujemy cały zbiór par możliwych wartości stałych k_0 i h_0, a tym samym różnych ścieżek równomiernego wzrostu produktu *p.c.*, $y(t)$, do których, jak można się spodziewać, zmierzają gospodarki startujące z różnych wyjściowych poziomów kapitału rzeczowego i ludzkiego. W ten sposób gospodarka posiadająca w punkcie wyjścia mniejsze zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego, pozostanie permanentnie biedniejsza od gospodarki początkowo lepiej w te zasoby wyposażonej[63].

Jednocześnie, ten sam poziom produktu krańcowego kapitału rzeczowego (stopy zysku z kapitału) dla obu gospodarek na ich, oddalonych od siebie, ścieżkach wzrostu równomiernego[64] powoduje, że brak jest ekonomicznych bodźców do przepływów kapitału indukujących wyrównywanie się poziomów zamożności. Oddziałuje natomiast silna presja na imigrację siły roboczej z krajów biedniejszych do bardziej zamożnych, ze względu na różnice zarobków dla pracowników o danym poziomie umiejętności i wykształcenia (czyli dysponujących określonej wielkości zasobem kapitału ludzkiego). Produkt marginalny pracy mierzonej w jednostkach efektywności (utożsamiany z wynagrodzeniem jednostki efektywnej pracy) wyraża się wzorem:

[63] Zauważmy jeszcze, że stała odległość ścieżek wzrostu w skali logarytmicznej oznacza rosnącą odległość w wartościach absolutnych.

[64] Przypominamy, że wartość ta określona jest przez równanie (5.57), a zatem dla wszystkich par (k_0, h_0), spełniających to równanie, jest taka sama.

$$\overline{w} = \partial Y / \partial(uhL) = (1-\alpha)ah(t)^{\beta} k(t)^{\alpha} \left[u(t)h(t)\right]^{-\alpha} . \tag{5.81}$$

Logarytmując obustronnie to równanie, podstawiając $u(t) = u_e$ oraz korzystając z (5.79), a następnie z (5.80), po kilku przekształceniach otrzymujemy następujące równanie opisujące kształtowanie się płacy *njep* na ścieżce wzrostu równomiernego:

$$ln\overline{w}(t) = b + \frac{\beta}{1-\alpha} lnh_0 + \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} g_e t , \tag{5.82}$$

gdzie: $b = ln\left(\rho + \gamma g + n + \delta\right) + ln(1-\alpha) - ln\alpha - lnu - \frac{1}{1-\alpha} ln \frac{\left(\rho + \gamma g + n + \delta\right)}{\left(\alpha a u^{1-\alpha}\right)}$.

Z równania (5.82) wynika, że ścieżka wzrostu $\overline{w}(t)$ jest - przy założeniu występowania efektów zewnętrznych z akumulacji kapitału ludzkiego ($\beta > 0$) – tym wyżej położona, im wyżej położona jest ścieżka wzrostu $h(t)$. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami oznacza to, że spośród dwu identycznych (w sensie wszystkich cech identyfikowanych przez model) gospodarek, różniących się wyłącznie wyjściowymi zasobami kapitału rzeczowego i ludzkiego, zarobki pracowników o danym poziomie *h* będą na trwałe wyższe w tej z nich, która startuje z lepszej pozycji[65].

Jedynym sposobem na dogonienie przez kraje biedniejsze krajów lepiej rozwiniętych jest osiągnięcie przez te pierwsze wyższej długookresowej stopy wzrostu gospodarczego, co – w świetle wcześniejszych rozważań – może wymagać wyrzeczeń ze strony społeczeństw tych krajów, odzwierciedlonych w modelu poprzez zmiany preferencji w kierunku obniżenia wartości parametrów ρ i γ[66].

[65] Dla ścisłości zwróćmy jeszcze uwagę, że przy braku efektów zewnętrznych z kapitału ludzkiego, różnice w poziomach wynagrodzeń *njep* ($\overline{w}$) wykazują tendencję to niwelacji, choć – zgodnie z równaniem (5.77) - przeciętne wynagrodzenia w krajach bardziej zasobnych w punkcie wyjścia w kapitał rzeczowy i ludzki nadal pozostają wyższe.

[66] Mamy tu na myśli sytuację, gdy $0 \leq \rho < \sigma$ i $\gamma > 1 - \frac{\rho(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha+\beta)}$. Wówczas przy niższej stopie dyskonta ρ lub niższym γ podmioty przeznaczają mniej czasu na bieżącą działalność zarobkową, co przekłada się na wyższą stopę wzrostu kapitału ludzkiego i wyższą stopę wzrostu równomiernego g_e.

5.5. Krytyka modelu Lucasa

Najbardziej istotna własność modelu wzrostu gospodarczego Lucasa, odróżniająca ten model od standardowego podejścia neoklasycznego, przedstawionego w rozdziałach pierwszym i drugim, polega na endogenicznym ujęciu długookresowych stóp wzrostu wszystkich podstawowych wielkości ekonomicznych, w tym stopy wzrostu produktu *p.c.*. Ta zasadnicza własność modelu zostaje osiągnięta dzięki jednemu, prostemu w gruncie rzeczy zabiegowi, polegającemu na zastąpieniu w podstawowym neoklasycznym modelu wzrostu Solowa zmiennej $A(t)$, której wzrost jest dany egzogenicznie i nie podlega żadnej ekonomicznej determinacji, przez zmienną $h(t)$, której stopa wzrostu jest wynikiem decyzji optymalizacyjnych podmiotów ekonomicznych[67]. Zabieg ten można postrzegać jako utożsamienie „postępu technicznego" z akumulacją kapitału ludzkiego, jednak to, co jest naprawdę istotne z punktu widzenia możliwości eksplanacyjnych modelu, to właśnie różnice w merytorycznej treści obu zmiennych. Dopóki bowiem stopa wzrostu zmiennej $A(t)$ przyjmowana jest w modelu jako dana z zewnątrz, dopóty istnieje naturalna tendencja do interpretowania tej zmiennej jako abstrakcyjnej „wiedzy" o metodach wytwarzania i organizacji procesów produkcyjnych, mającej charakter dobra publicznego, z którego korzystają nieodpłatnie (bez ponoszenia dodatkowych nakładów) i w równym stopniu wszystkie podmioty. Nie ma zatem również przesłanek do zakładania różnic w poziomach tej zmiennej pomiędzy krajami. W przeciwieństwie do tego, kapitał ludzki to wiedza[68] przyswojona i ucieleśniona w konkretnych ludzkich jednostkach, zdobycie której wymaga ponoszenia określonych nakładów, czyli rezygnacji z bieżących korzyści materialnych na rzecz zwiększonych profitów w przyszłości. Możliwe są zatem różnice zarówno w poziomach, jak i stopach wzrostu tej zmiennej pomiędzy różnymi społeczeństwami, w zależności od stopnia owej rezygnacji. Tym sposobem, proces akumulacji kapitału ludzkiego w modelu Lucasa pełni zarówno rolę mechanizmu

[67] Efekty zewnętrzne akumulacji kapitału ludzkiego nie grają tutaj żadnej roli i z tego punktu widzenia stanowią w modelu element dodatkowy, odpowiadający – zgodnie z wcześniejszymi wywodami - za rozbieżność pomiędzy optymalną i konkurencyjną równowagą dynamiczną systemu gospodarczego oraz utrzymywanie się trwałych różnic w poziomach wynagrodzeń dla pracowników o tym poziomie kwalifikacji (kapitału ludzkiego). Jednocześnie, ze względu na przyjętą przez Lucasa postać agregatowej funkcji produkcji (funkcja typu Cobba – Douglasa), „postęp techniczny", reprezentowany tutaj przez przyrost przeciętnego poziomu kapitału ludzkiego ucieleśnionego w pracownikach, zachowuje cechę neutralności w sensie Harroda, umożliwiając funkcjonowanie gospodarki na ścieżce wzrostu równomiernego (patrz rozdział czwarty, punkt 4.2).

[68] Za Lucasem ograniczamy się do rozważania kapitału edukacyjnego.

indukującego długookresowy wzrost gospodarczy, jak i czynnika wyjaśniającego utrzymywanie się lub pogłębiane różnic w poziomach zamożności między krajami.

Choć na pierwszy rzut oka rozumowanie to pozostaje bez zarzutu, przy bliższym wglądzie ujawnia dwa problemy. Problemy te związane są ściśle ze sposobem ujęcia w modelu Lucasa procesu akumulacji kapitału ludzkiego.

Prezentując założenia modelu zwracaliśmy uwagę na analogię między „funkcją produkcji" kapitału ludzkiego przyjmowaną przez Lucasa a sposobem ujęcia tego procesu w modelu mikroekonomicznym, analizowanym w punkcie 5.2. Pierwsza wątpliwość wiąże się z pytaniem, na jakiej podstawie takie przeniesienie sposobu ujęcia akumulacji kapitału ludzkiego z poziomu mikro na poziom makro jest możliwe. Powiedzmy od razu, że istota problemu, który chcemy tutaj postawić, zasadza się na różnicy pomiędzy kapitałem ludzkim i rzeczowym - na którą zwracaliśmy już uwagę w tym rozdziale - polegającej na ucieleśnianiu się kapitału ludzkiego w konkretnych ludzkich jednostkach i wynikającej stąd niemożności transferu zasobów tego kapitału z pokolenia na pokolenie. Założenia upraszczające, które przyjmujemy dalej dla łatwiejszego uchwycenia sedna sprawy, nie mają żadnego wpływu na zasadność wniosku końcowego.

Załóżmy, że gospodarka w danej chwili składa się z podmiotów (w różnym wieku) akumulujących kapitał ludzki zgodnie z modelem typu Halley'a i charakteryzujących się tymi samymi wartościami H_0, T oraz parametrów „funkcji produkcji" (5.8)[69]. Dla każdego z tych podmiotów możemy wyznaczyć średni poziom ucieleśnionego w nich zasobu kapitału ludzkiego na przestrzeni całego życia (okresu optymalizacji), który – przy założeniu, że strukturę demograficzną społeczeństwa charakteryzuje rozkład jednostajny na przedziale $\langle 0, T \rangle$ – stanowi jednocześnie średni poziom kapitału ludzkiego $h(t)$ w całej gospodarce. Nietrudno zauważyć, że wymiana pokoleń pozostawia ów średni zasób kapitału ludzkiego na stałym poziomie, o ile tylko struktura demograficzna nie ulega zmianie.

W tej sytuacji, jedynym sposobem na zapewnienie ciągłego przyrostu przeciętnych zasobów kapitału ludzkiego w danej gospodarce jest założenie, że zasoby te (lub przynajmniej jakaś ich część) są w jakiś sposób z pokolenia na pokolenie

[69] Z punktu widzenia rozważanego teraz problemu kwestia przyjęcia przez Lucasa szczególnej (liniowej) postaci funkcji produkcji kapitału ludzkiego oraz zerowego współczynnika deprecjacji δ nie ma żadnego znaczenia. Kwestia ta jest natomiast kluczowa w dalszej części przeprowadzonej w tym punkcie krytyki modelu Lucasa.

transferowane, analogicznie, jak transferowane są zasoby kapitału rzeczowego. W kategoriach modelu Halley'a, początkowy zasób kapitału ludzkiego H_0 członków nowych generacji musiałby zatem zależeć od poziomu tego kapitału, osiągniętego przez generacje poprzednie.

Problem drugi jest bardziej technicznej natury i dotyczy przyjętej przez Lucasa postaci funkcji „produkcji" kapitału ludzkiego. Ponieważ akumulacja kapitału ludzkiego jest w modelu wyłącznym motorem długofalowego wzrostu produktu *per capita*, dla jego zagwarantowania stopa wzrostu kapitału ludzkiego nie może maleć wraz ze zwiększaniem się poziomu tego kapitału. Inaczej mówiąc, w funkcji produkcji kapitału ludzkiego, zapisanej w bardziej ogólnej, niż w modelu Lucasa, postaci (por. równanie (5.8) w modelu Haley'a):

$$\dot{h} = \sigma\left((1-u)h\right)^{b},$$

musimy wykluczyć malejące przychody z tego kapitału (b < 1). W istocie, jedynie liniowa postać tej funkcji (b = 1), założona w modelu Lucasa, pozwala na uzyskanie tych wszystkich istotnych własności rozwiązania tego modelu, dzięki którym może być on rozważany jako realna alternatywa dla standardowego podejścia neoklasycznego (opartego na malejących przychodach i egzogenicznym postępie technicznym) w poszukiwaniu mechanizmu długofalowego wzrostu gospodarczego.

Odnośnie owego „krytycznego" założenia o liniowości funkcji produkcji kapitału ludzkiego można jednakże wysunąć podobne zarzuty, jakie formułuje się czasem pod adresem tych endogenicznych modeli wzrostu, w których arbitralnie odrzucane jest założenie o malejących przychodach z kapitału (rozumianego tradycyjnie jako kapitał rzeczowy, bądź szerzej – jako zestaw wszystkich czynników produkcji podlegających akumulacji). Ze względu na zasadniczą zmianę jakościowego charakteru rozwiązania w przypadku najmniejszego chociażby odchylenia od liniowości, modelom tym zarzuca się ekstremalną „nieodporność" (*un–robustness*) i neguje się je, słusznie zresztą, jako całkowicie niewiarygodne na gruncie teoretycznym[70]. Podobną argumentację możemy również zastosować do modelu Lucasa, na poziomie funkcji produkcji kapitału ludzkiego. W prosty sposób można pokazać, że o ile sytuacja, gdy b < 1, uniemożliwia permanentny wzrost kapitału ludzkiego i produktu *p.c.*, o tyle jakiekolwiek odchylenie

[70] Zob. R. M. Solow, *Perspectives on Growth Theory*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 49 – 51 oraz P. M. Romer, *The Origins of Endogenous Growth*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 17 – 18.

b od poziomu 1 w górę generuje wybuchowe zachowanie się systemu, tak, że kapitał ludzki i produkt *p.c.* osiągają w skończonym czasie nieskończone wartości. Zakładając $b > 1$ oraz dowolną stałą wartość parametru u z przedziału (0;1) i rozwiązując równanie różniczkowe: $\dot{h} = \sigma\left((1-u)h\right)^b$ (jako równanie o zmiennych rozdzielonych), otrzymujemy:

$$\int_{t_0}^{t} \sigma(1-u)^b \, d\tau = \int_{h(t_0)}^{h(t)} x^{-b} dx \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = \left(\frac{1}{h_0^{1-b} - (b-1)\sigma(1-u)^b (t-t_0)} \right)^{\frac{1}{b-1}},$$

gdzie $h_0 = h(t_0)$. Otrzymujemy zatem:

$$h(t) \to \infty \qquad \text{przy} \qquad t \to t_0 + \left((b-1)\sigma(1-u)^b h_0^{b-1}\right)^{-1} < \infty .$$

Dla założonej przez Lucasa funkcji produkcji Cobba – Douglasa, $h(t) \to \infty$ implikuje $y(t) \to \infty$, oczywiście pod warunkiem, że $K(t), L(t), u(t) > 0$.

Parafrazując Solowa[71], można powiedzieć, iż niezwykle trudno jest uwierzyć w to, że Natura wyposażyła nas w „funkcję produkcji” kapitału ludzkiego o tak szczególnym, liniowym charakterze, gwarantującym ludzkości nieustanny równomierny przyrost materialnego dobrobytu. Wydaje się oczywiste, że tak silne i „wszechmocne” założenie wymaga bardzo przekonującego usprawiedliwienia, aby można było je traktować inaczej, jak tylko matematyczną sztuczkę[72].

W kolejnym rozdziale pracy analizujemy alternatywny sposób włączenia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w mechanizm wzrostu gospodarczego, odporny na sformułowane tutaj zarzuty.

---

[71] Por. tamże.

[72] Niestety, w przypadku wielu (większości?) modeli wzrostu endogenicznego tego typu założenie stanowi kluczowy element ich struktury matematycznej, gwarantujący pożądane rezultaty. Por. R. M. Solow, *Reflections on Growth Theory*, s. 10, w: P. Aghion, S. N. Durlauf (red.), *Handbook of Economic Growth*, Volume 1A, Elsevier, North Holland, 2005

Rozdział szósty

Rozszerzenie modelu neoklasycznego o akumulację kapitału ludzkiego

Wprowadzenie

Znaczenie teoretyczne modelu wzrostu gospodarczego przedstawionego w tym rozdziale pracy[1] należy odczytywać w dwóch kontekstach: po pierwsze, w odniesieniu do wskazanych w rozdziale drugim ograniczeń eksplanacyjnych podstawowej wersji modelu neoklasycznego, po drugie zaś, w nawiązaniu do przeprowadzonej w ostatnim punkcie rozdziału piątego krytycznej argumentacji odnośnie sposobu ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w modelu wzrostu endogenicznego R. Lucasa. W tym drugim kontekście analizowany tutaj model można postrzegać jako drugi człon alternatywy w dyskusji nad znaczeniem procesu akumulacji kapitału ludzkiego we wzroście gospodarczym, którą można streścić w pytaniu: *growth effect* czy *level effect*?

6.1. Prezentacja modelu

Prezentowany model stanowi naturalne rozszerzenie podstawowej wersji neoklasycznego modelu wzrostu z rozdziału pierwszego o akumulację kapitału ludzkiego. Kapitał ludzki traktowany jest tutaj jako trzeci czynnik produkcji, obok kapitału rzeczowego i siły roboczej, podlegający tak jak one prawu malejących przychodów. Nakład kapitału ludzkiego pojawia jako dodatkowa zmienna (H) w agregatowej funkcji produkcji, która wykazuje stałe efekty skali dla trzech czynników

---

[1] Model wzrostu gospodarczego, będący podstawą analiz przeprowadzanych w tym rozdziale, stanowi teoretyczne rozwinięcie idei zarysowanej przez N. G. Mankiwa, D. Romera i N. Weila w artykule z 1992 r. Zob. N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *A Contribution To The Empirics Of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, 1992, May, s. 407 – 437.

Zgodnie z podejściem przyjętym przez nas w pierwszych czterech rozdziałach pracy, wykorzystujemy ogólną postać neoklasycznej funkcji produkcji, zamiast oryginalnie założonej przez wymienionych wyżej autorów funkcji Cobba–Douglasa.

produkcji. Zmienną oznaczoną symbolem (*L*) interpretujemy teraz jako nakład pracy surowej, nie uwzględniającej rezultatów inwestycji w kapitał ludzki. Podobnie jak w modelu Solowa, w równaniu strumienia produktu (*Y*) występuje także zmienna (*A*), odzwierciedlająca dostępny w gospodarce poziom technologii (zasób wiedzy naukowo – technicznej). Poziom tej zmiennej wpływa na produktywność pozostałych czynników produkcji, a jej zmiany w czasie utożsamiamy z postępem techniczno - organizacyjnym. Zakładamy, że postęp techniczny jest neutralny w sensie Harroda.

Agregatowa funkcja produkcji ma zatem następującą postać:

$$Y = F(K, H, AL) = F(K, H, \overline{L}), \tag{6.1}$$

gdzie: $\overline{L} = AL$ oznacza nakłady pracy w jednostkach efektywności.

O funkcji produkcji (6.1) zakładamy, że:

W1. jest ciągła, (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna i wklęsła,

W2. zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt: $F(0,0,0) = 0$.

W3. charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi produktywnościami krańcowymi wszystkich trzech czynników wytwórczych: $F_K, F_H, F_L > 0$ i $F_{KK}, F_{HH}, F_{LL} < 0$,

W4. krańcowa produktywność każdego czynnika rośnie przy wzroście zatrudnienia innego czynnika: $F_{KL}, F_{HL}, F_{KH} > 0$,

W5. wykazuje stałe korzyści skali produkcji: $F(cK, cH, cAL) = cF(K, H, AL)$,

W6. spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{X \to 0} F_X = \infty$, $\lim_{X \to \infty} F_X = 0$, gdzie: $X \in \{K, H, L\}$.

Nietrudno zauważyć, że są to założenia analogiczne do tych, jakie przyjmowaliśmy w przypadku podstawowej wersji modelu neoklasycznego w rozdziale pierwszym, rozszerzone teraz na trzy czynniki produkcji.

Korzystając z założenia o stałych korzyściach skali, funkcję produkcji (6.1) możemy przedstawić w postaci intensywnej, w kategoriach na jednostkę efektywnej pracy (*njep)*. Podstawiając $c = (AL)^{-1}$, mamy

$$F\left(K(AL)^{-1}, H(AL)^{-1}, 1\right) = (AL)^{-1} F(K, H, AL).$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\overline{k} = \frac{K}{AL}, \quad \overline{h} = \frac{H}{AL}, \quad \overline{y} = \frac{Y}{AL}, \tag{6.2}$$

dla, odpowiednio, kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego i produktu *njep* oraz: $F(\overline{k}, \overline{h}, 1) = f(\overline{k}, \overline{h})$, otrzymujemy:

$$\bar{y} = f(\bar{k}, \bar{h}). \tag{6.3}$$

Lemat 6.1. Dla funkcji produkcji (6.1), przy założeniach W.1 - W.6, zachodzi:

W7. $\quad Y = F(0,0,\bar{L}) = F(K,0,0) = F(0,H,0) = 0$,

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\lim_{X\to\infty} Y/X = 0$, dla $X \in \{K, H, L\}$.

Jeśli $\lim_{X\to\infty} Y = a < \infty$, to $\lim_{X\to\infty} Y/X = \lim_{X\to\infty} a/X = 0$. Jeśli zaś $\lim_{X\to\infty} Y = \infty$, to na podstawie reguły de L'Hospitala i W6, zachodzi $\lim_{X\to\infty} Y/X = \lim_{X\to\infty} F_X = 0$.

Na podstawie W5, mamy $0 = \lim_{K\to\infty} Y/K = \lim_{K\to\infty} F(1, H/K, \bar{L}/K) = F(1,0,0)$, czyli $F(K,0,0) = K \cdot F(1,0,0) = 0$ dla dowolnego $K < \infty$.

W analogiczny sposób wnioskujemy, że $F(0,H,0) = 0$ i $F(0,0,\bar{L}) = 0$, dla $H, \bar{L} < \infty$.

■

Twierdzenie 6.1. Przy założeniach W1 - W6 o funkcji produkcji (6.1), funkcja (6.3) ma następujące własności:

w1. charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi krańcowymi produktywnościami kapitału rzeczowego i ludzkiego njep: $f_{\bar{k}} > 0$, $f_{\bar{h}} > 0$, $f_{\bar{k}\bar{k}} < 0$, $f_{\bar{h}\bar{h}} < 0$,

w2. spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{\bar{k}\to 0} f_{\bar{k}} = \lim_{\bar{h}\to 0} f_{\bar{h}} = \infty$, $\lim_{\bar{k}\to\infty} f_{\bar{k}} = \lim_{\bar{h}\to\infty} f_{\bar{h}} = 0$,

w3. zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt: $f(0,0) = 0$,

w4. jest silnie wklęsła.

Dowód. Ponieważ:

$$f_{\bar{k}} = \frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{k}} = \frac{1}{\bar{L}} F_K \frac{\partial K}{\partial \bar{k}} = F_K, \qquad f_{\bar{h}} = \frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{\bar{L}} F_H \frac{\partial H}{\partial \bar{h}} = F_H,$$
$$f_{\bar{k}\bar{k}} = \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial \bar{k}} = \frac{\partial F_K}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \bar{k}} = \bar{L}F_{KK}, \qquad f_{\bar{h}\bar{h}} = \bar{L}F_{HH}, \qquad f_{\bar{k}\bar{h}} = f_{\bar{h}\bar{k}} = \bar{L}F_{KH} = \bar{L}F_{HK}, \tag{6.4}$$

to z własności W3, W6 wynikają własności w1, w2.

Na podstawie Lematu 6.1 wnioskujemy, że $f(0,0) = F(0,0,1) = 0$, czyli zachodzi w3.

Zwracamy uwagę, że założenie W.1 o wklęsłości funkcji produkcji (6.1) gwarantuje jedynie wklęsłość funkcji (6.3). Z założenia o wklęsłości funkcji (6.1) mamy:

$$F_{KK}F_{HH} - (F_{KH})^2 \geq 0.$$

Stąd oraz z (6.4) wynika zatem nieujemna wartość wyznacznika hesjanu (macierzy drugich pochodnych cząstkowych) funkcji (6.3):

$$f_{\bar{k}\bar{k}} f_{\bar{h}\bar{h}} - (f_{\bar{k}\bar{h}})^2 \geq 0 .$$

Dopiero uwzględnienie (uzasadnionego ekonomicznie) warunku W4, wyklucza zerową wartość tego wyznacznika i wymusza silną wklęsłość funkcji produkcji w postaci intensywnej.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że: $F_{KK} F_{HH} - (F_{KH})^2 = 0$. Z twierdzenia Eulera dla funkcji jednorodnej stopnia 1 mamy:

$$F_K K + F_H H + F_L L = F .$$

Ponieważ równanie to zachodzi dla wszystkich $K, H, \overline{L} > 0$, to możemy dokonać obustronnego różniczkowania względem *K*, a następnie względem *H*. Po skróceniu tożsamych wyrażeń, otrzymujemy odpowiednio:

$$F_{KK} K + F_{HK} H + F_{LK} L = 0$$
$$F_{KH} K + F_{HH} H + F_{LH} L = 0$$

Dzieląc pierwsze z tych równań obustronnie przez F_{HK}, a drugie – przez F_{HH}, dostajemy:

$$\begin{aligned} &\frac{F_{KK}}{F_{HK}} K + H + \frac{F_{LK}}{F_{HK}} L = 0, \\ &\frac{F_{KH}}{F_{HH}} K + H + \frac{F_{LH}}{F_{HH}} L = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Z założenia dowodu nie wprost mamy: $\frac{F_{KK}}{F_{KH}} = \frac{F_{KH}}{F_{HH}}$. Stąd oraz z (6.5) wnioskujemy, że:

$\frac{F_{LK}}{F_{HK}} = \frac{F_{LH}}{F_{HH}}$, co ze względu na założenia W3, W4 o znakach pochodnych cząstkowych prowadzi do sprzeczności. Zatem $F_{KK} F_{HH} - (F_{KH})^2 > 0$, czyli funkcja $f(\bar{k}; \bar{h})$ jest silnie wklęsła.

■

Twierdzenie 6.2. Przy założeniach W1 - W6, dla funkcji produkcji (6.1) zachodzi:

W8. $\lim_{X \to \infty} F(K, H, \overline{L}) = \infty$, dla $X \in \{K, H, \overline{L}\}$,

zaś dla funkcji produkcji (6.3), zachodzi:

w5. $\lim_{x \to \infty} f(\bar{k}, \bar{h}) = \infty$, dla $x \in \{\bar{k}, \bar{h}\}$.

Dowód. Na podstawie W5, zachodzi równość: $F(K,H,\bar{L}) = \bar{L} f(\bar{k},\bar{h}) = K \cdot \dfrac{f(\bar{k},\bar{h})}{\bar{k}}$.

Jeśli $K,H < \infty$, to $\lim\limits_{\bar{L}\to\infty} F(K,H,\bar{L}) = K \cdot \lim\limits_{\bar{k},\bar{h}\to 0} f(\bar{k},\bar{h})/\bar{k}$. Ponieważ z w3 wynika, że $\lim\limits_{\bar{k},\bar{h}\to 0} f(\bar{k},\bar{h}) = f(0,0) = 0$, to korzystając z reguły de L'Hospitala i w3, mamy:

$$\lim_{\bar{L}\to\infty} F(K,H,\bar{L}) = K \cdot \lim_{\bar{k}\to 0} f_{\bar{k}} = \infty .$$

W analogiczny sposób dowodzimy, że $\lim\limits_{K\to\infty} F(K,H,\bar{L}) = \infty$ oraz $\lim\limits_{H\to\infty} F(K,H,\bar{L}) = \infty$.

Zatem spełniona jest własność W8. Na tej podstawie wnioskujemy, że:

$\lim\limits_{\bar{k}\to\infty} f(\bar{k},\bar{h}) = \lim\limits_{\bar{k}\to\infty} F(\bar{k},\bar{h},1) = \infty$ i podobnie $\lim\limits_{\bar{h}\to\infty} f(\bar{k},\bar{h}) = \infty$, czyli zachodzi w5.

■

Podobnie jak w modelu Solowa, stałe korzyści skali agregatowej funkcji produkcji są wyrazem założenia o doskonałej konkurencji. Maksymalizując zyski, przedsiębiorstwa najmują usługi pracy, kapitału rzeczowego i ludzkiego do momentu zrównania się krańcowych produktywności poszczególnych czynników produkcji z rynkowymi cenami tych czynników. W równowadze długookresowej przedsiębiorstwa osiągają zerowe zyski czyste, funkcjonując na poziomie minimum swoich długookresowych krzywych przeciętnego kosztu produkcji[2]. Suma wynagrodzeń za usługi kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego i pracy wyczerpuje zatem wartość produkcji każdej firmy. Oznacza to, że sumując produkcję oraz nakłady czynników wytwórczych wszystkich przedsiębiorstw, możemy dla każdego momentu *t* napisać równanie:

$$Y(t) = q_K(t)K(t) + q_H H(t) + \bar{w}(t)\bar{L}(t), \tag{6.6}$$

gdzie *Y*, *K*, *H*, $\bar{L}$ oznaczają globalne wielkości produkcji i nakładów, zaś q_K, q_K i $\bar{w}$ rynkowe ceny, odpowiednio, kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego i efektywnej pracy. Z przyjętych założeń o funkcjonowaniu gospodarki wynika, że dla każdego momentu *t* spełnione są także warunki maksymalizacji zysku:

---

[2] Zob. np. H. R. Varian, *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, 7th edition, W. W. Norton & Company, 2005, s. 403 – 408.

Przypominamy, że przymiotnik „długookresowy" użyty jest tutaj w takim znaczeniu, w jakim używany jest w analizie mikroekonomicznej, gdzie przez długi okres rozumie się taki okres, w którym wszystkie czynniki (koszty) produkcji firmy można traktować jako czynniki (koszty) zmienne. W dalszej części tego rozdziału rozróżniamy pojęcia: „równowaga długookresowa" (w sensie mikroekonomicznym) oraz „dynamiczna równowaga długookresowa" (w sensie makroekonomicznym), oznaczająca stan stacjonarny gospodarki, w którym zachowane są pewne relacje strukturalne pomiędzy wielkościami ekonomicznymi.

$$F_K = q_K(t), \qquad F_K = q_K(t), \qquad F_{\overline{L}} = \overline{w}(t). \tag{6.7}$$

Z (6.6) i (6.7) oraz na podstawie twierdzenia Eulera wnioskujemy, że agregatowa funkcja produkcji musi być dodatnio jednorodna stopnia 1, czyli gospodarka funkcjonuje przy zerowych korzyściach skali produkcji.

Rynki pracy, kapitału rzeczowego i ludzkiego są permanentnie zrównoważone. Równania (6.7) określają globalny popyt na usługi poszczególnych czynników. Dalsze założenia przyjęte w modelu określają kształtowanie się globalnej podaży tych czynników.

Przyjmujemy, że zasoby pracy L rosną wykładniczo ze stałą stopą n (utożsamianą ze stopą przyrostu naturalnego). Zakładamy również, że postęp techniczno – organizacyjny odbywa się ze stałą, egzogenicznie daną stopą m (nazywaną dalej stopą egzogenicznego postępu technicznego):

$$\dot{L} = nL, \quad \dot{A} = mA. \tag{6.8}$$

W konsekwencji zasoby tzw. efektywnej pracy $\overline{L} = AL$ rosną ze stopą $n + m$. Wynikające stąd równanie $\overline{L} = \overline{L}_0 e^{(n+m)t}$ traktujemy jako równanie (doskonale nieelastycznej) podaży zasobów efektywnej pracy w momencie t.

Globalną podaż kapitału rzeczowego i ludzkiego w momencie t utożsamiamy z globalnymi zasobami odpowiednich rodzajów kapitału, wynikającymi z dotychczasowych inwestycji netto. Poziom inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki w gospodarce wynika z oszczędności, oznaczających nieskonsumowaną część produktu (dochodu).

Równania dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego mają następującą postać:

$$\dot{K} = s_K Y - \delta_K K, \tag{6.9}$$

$$\dot{H} = s_H Y - \delta_H H, \tag{6.10}$$

gdzie s_K i δ_K oznaczają, odpowiednio, stopy inwestycji i deprecjacji dla kapitału rzeczowego, zaś s_H i δ_H - analogiczne stopy dla kapitału ludzkiego[3], przy czym: $s_K, s_H, \delta_K, \delta_H \in (0,1)$ oraz $s_K + s_H \in (0,1)$.

[3] Deprecjację kapitału ludzkiego w skali makro należy wiązać w pierwszej kolejności z permanentnym procesem wycofywania z działalności produkcyjnej zasobów tego kapitału ucieleśnionych w najstarszych członkach społeczeństwa. Wespół ze starzeniem się zasobu kapitału ludzkiego związanym nieuchronnie ze starzeniem się samego człowieka (zapominanie uprzednio nabytej wiedzy, osłabienie zdolności do przyswajania nowej, itp.), proces ten możemy nazwać deprecjacją fizyczną kapitału ludzkiego. Ponadto,

Uwaga 6.1. W kontekście rozważań nad akumulacją kapitału ludzkiego w poprzednim rozdziale pracy, warto zwrócić uwagę na założenie zawarte implicite w równaniu (6.10). Równanie to implikuje, że w modelu przyjmuje się de facto tę samą postać „funkcji produkcji” dla kapitału ludzkiego, co dla pozostałych dóbr (konsumpcyjnych i inwestycyjnych). Ponadto, jeśli dużą część ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego stanowią utracone dochody osób, poświęcających swój czas i wysiłek na naukę i doskonalenie zawodowe[4], to ściśle rzecz biorąc zmienna Y w równaniu (6.10) i w całym modelu oznacza hipotetyczny produkt, łącznie z wartością owych utraconych dochodów, nie zaś realny PKB ujmowany w statystykach międzynarodowych.

W skrajnym przypadku, gdy utracone dochody stanowią całość ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego, mierzalny produkt wytwarzany na rynku, Y^m, stanowi $(1-s_H)$–tą część hipotetycznego produktu Y. Stopa „mierzalnych” inwestycji w kapitał rzeczowy wynosi wtedy $s_K^m = s_K/(1-s_H)$.

Matematyczny model wzrostu gospodarczego rozpatrywany w tym punkcie pracy dany jest zatem przez układ równań (6.1), (6.7) - (6.10), postaci:

$$
\begin{aligned}
&Y(t) = F(K(t), H(t), \overline{L}(t)), && \overline{L}(t) = A(t)L(t), \\
&Y(t) = q_K(t)K(t) + q_H H(t) + \overline{w}(t)\overline{L}(t), && \\
&q_K(t) = F_K, \qquad q_H(t) = F_H, && \overline{w}(t) = F_{\overline{L}}, \\
&\dot{L}(t)/L(t) = n, && \dot{A}(t)/A(t) = m, \\
&\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), && \dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta_H H(t).
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Z definicji (6.3) zmiennych $\overline{k}$ i $\overline{h}$ wynika, że: $K = \overline{k}AL,\ H = \overline{h}AL$. Zróżniczkowanie tych równań względem czasu i podstawienie otrzymanych wzorów (po uwzględnieniu (6.8)) do równań (6.9) i (6.10) daje, po kilku prostych przekształceniach, równania dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*:

$$\dot{\overline{k}} = s_K f(\overline{k}, \overline{h}) - (n + m + \delta_K)\overline{k}, \tag{6.12}$$

$$\dot{\overline{h}} = s_H f(\overline{k}, \overline{h}) - (n + m + \delta_H)\overline{h}. \tag{6.13}$$

możemy mówić o deprecjacji moralnej, polegającej na częściowym starzeniu się wiedzy i umiejętności zdobytych w przeszłości, związanym z odbywającym się postępem naukowo – technicznym.

[4] A także inne formy aktywności podnoszące jej przyszłą zdolność zarobkową, choć dla uproszczenia – podobnie jak w poprzednim rozdziale - ograniczamy się tutaj do rozważania kapitału edukacyjnego.

Stanem stacjonarnym (stanem dynamicznej równowagi długookresowej) modelu są takie, szczególne poziomy kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$, dla których zachodzi $\dot{\bar{k}} = \dot{\bar{h}} = 0$. Oznacza to, że jeżeli gospodarka osiągnie te wartości, to nie będą one podlegały już dalszym zmianom. Jak wynika z (6.12) - (6.13), stan stacjonarny stanowią takie wartości $\bar{k}_e, \bar{h}_e > 0$, zmiennych $\bar{k}$, $\bar{h}$, dla których spełniony jest układ równań:

$$\frac{f(\bar{k},\bar{h})}{\bar{k}} = \frac{n+m+\delta_K}{s_K}, \tag{6.14}$$

$$\frac{f(\bar{k},\bar{h})}{\bar{h}} = \frac{n+m+\delta_H}{s_H}. \tag{6.15}$$

Przyjęte w założeniach modelu warunki Inady gwarantują istnienie funkcji uwikłanych $\bar{k}(\bar{h})$ i $\bar{h}(\bar{k})$ w przestrzeni $R^+ \times R^+$, nadających równaniom, odpowiednio, (6.14) i (6.15), status tożsamości. Okazuje się jednak, że gwarantują one także istnienie wartości $\bar{k}_e, \bar{h}_e > 0$ zmiennych $\bar{k}$, $\bar{h}$, spełniających układ równań (6.14) - (6.15).

Twierdzenie 6.3. Przy założeniach W1- W6 o funkcji produkcji (6.1) istnieją dokładnie dwa stany stacjonarne modelu (6.11): punkty $(0,0)$ oraz $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, gdzie $\bar{k}_e, \bar{h}_e > 0$.

Dowód. Z (6.12) - (6.13) oraz Tw. 6.1, w3 wynika, że punkt $(0,0)$ jest stanem stacjonarnym modelu (6.11). Ponadto, z warunków Inady dla funkcji $f(\bar{k},\bar{h})$ (Tw. 6.1, w2) wynika, że dla każdego $\bar{h} > 0$ istnieje takie $\bar{k} > 0$, że spełnione jest równanie (6.14). Analogicznie, dla każdego $\bar{k} > 0$ istnieje takie $\bar{h} > 0$, że spełnione jest równanie (6.15). Aby oba te równania były spełnione równocześnie, musi zachodzić $\bar{h} = \frac{n+m+\delta_K}{n+m+\delta_H} \cdot \frac{s_H}{s_K} \cdot \bar{k}$. Podstawiając prawą stronę tego równania za $\bar{h}$ w dowolnym z równań układu (6.14) - (6.15), otrzymujemy:

$$f(\bar{k}, \frac{n+m+\delta_K}{n+m+\delta_H} \cdot \frac{s_H}{s_K} \bar{k}) = \frac{n+m+\delta_K}{s_K} \bar{k}.$$

Z warunków Inady dla $f(\bar{k},\bar{h})$ wynika, że przy dowolnych parametrach $s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H$ istnieje pojedyncza wartość $\bar{k}_e > 0$ zmiennej $\bar{k}$, dla której powyższe równanie jest spełnione.

■

Z (6.2) - (6.8) wynika, że w stanie stacjonarnym globalne zasoby obu rodzajów kapitału, *K*, *H*, oraz produkt, *Y*, rosną ze stopą *n* + *m*, określaną mianem naturalnej stopy wzrostu, zaś w ujęciu *p.c.* - ze stopą egzogenicznego postępu technicznego *m*. Proporcje pomiędzy produktem oraz kapitałem rzeczowym i ludzkim pozostają wówczas stałe.

Uwaga 6.2. Ponieważ na akumulację kapitału ludzkiego przeznaczana jest stała część produktu (lub, inaczej mówiąc, w produkcji kapitału ludzkiego, odbywającej zgodnie z funkcją produkcji (6.1), uczestniczą wszystkie czynniki produkcji), przyrost średniego (*p.c.*) zasobu kapitału ludzkiego z pokolenia na pokolenie jest zagwarantowany przez ciągły wzrost zamożności społeczeństwa, wynikający z kolei z założenia o egzogenicznm postępie techniczno - organizacyjnym. W przeciwieństwie do modelu Lucasa, przyrost ten nie wymaga sztucznego - z punktu widzenia tej szczególnej własności kapitału ludzkiego, jaką jest fakt jego ucieleśniania się w konkretnych ludzkich jednostkach - założenia o transferze zasobów kapitału ludzkiego pomiędzy pokoleniami. Sposób ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w analizowanym teraz modelu jest zatem odporny na krytykę przeprowadzoną w punkcie 5.5 pod adresem modelu endogenicznego wzrostu gospodarczego Lucasa.

Zgodnie z (6.7), ceny kapitału rzeczowego i ludzkiego oraz efektywnej pracy dane są przez ich krańcowe produktywności. Ponadto, na podstawie (6.4), mamy: $q_K = F_K = f_{\bar{k}}$, $q_H = F_H = f_{\bar{h}}$. W podobny sposób, jako funkcję $\bar{k}$ i $\bar{h}$, można także przedstawić cenę efektywnej pracy (stawkę płac *njep*):

$$\begin{aligned} \bar{w} = F_{\bar{L}} &= \frac{\partial\left(\bar{L} f(\bar{k},\bar{h})\right)}{\partial \bar{L}} = f(\bar{k},\bar{h}) + \bar{L}\left(f_{\bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{L}} + f_{\bar{h}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{L}} \right) = \\ &= f(\bar{k},\bar{h}) - (\bar{L} f_{\bar{k}} K \bar{L}^{-2} + f_{\bar{h}} H \bar{L}^{-2}) = f(\bar{k},\bar{h}) - \bar{k} f_{\bar{k}} - \bar{h} f_{\bar{h}}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Oznaczmy przez $w = F_L = F_{\bar{L}} \cdot \partial \bar{L} / \partial L = A\bar{w}$ stawkę płac za jednostkę pracy.

Z (6.6) i (6.16) oraz definicji zmiennych $\bar{y}$, $\bar{k}$, $\bar{h}$, $\bar{L}$ i *w* wynikają równości:

$$q_K K + q_H H + wL = Y \quad \Leftrightarrow \quad q_K K / Y + q_H H / Y + wL / Y = 1,$$

czyli całość wytworzonego produktu rozkłada się bez reszty na wynagrodzenia pracy oraz kapitału rzeczowego i ludzkiego, lub, inaczej mówiąc, udziały wynagrodzeń kapitału rzeczowego, $q_K K / Y = \bar{k} f_{\bar{k}} / f(\bar{k},\bar{h})$, kapitału ludzkiego, $q_H H / Y = \bar{h} f_{\bar{h}} / f(\bar{k},\bar{h})$ i pracy, $wL / Y = 1 - \bar{k} f_{\bar{k}} / f(\bar{k},\bar{h}) - \bar{h} f_{\bar{h}} / f(\bar{k},\bar{h})$, w produkcie sumują się do jedności. Należy zauważyć, że równania te stanowią jedynie inną formę założenia (6.6).

Uwaga 6.3. Przy założeniu, że całość ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego stanowią dochody utracone w wyniku odciągnięcia czynników od normalnej działalności zarobkowej, mierzalne jednostkowe wynagrodzenia kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego i pracy wynoszą odpowiednio: $q_K^m = \dfrac{\partial Y^m}{\partial K} = (1 - s_H)q_K$, $q_H^m = \dfrac{\partial Y^m}{\partial H} = (1 - s_H)q_H$ i $w^m = \dfrac{\partial Y^m}{\partial L} = (1 - s_H)w$. Oczywiście, policzone w ten sposób wynagrodzenia wszystkich trzech czynników wyczerpują bez reszty wartość mierzalnego produktu Y^m. Por. Uwaga 6.1.

Ponieważ w stanie stacjonarnym poziomy kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, $\overline{k}$ i $\overline{h}$, są stałe, stałe są również ceny obu rodzajów kapitału i efektywnej pracy. Stawka płac, $w = \overline{w}A = \overline{w}A_0 e^{mt}$, rośnie wtedy wykładniczo ze stopą postępu technicznego *m*.

Scharakteryzowane powyżej własności stanu stacjonarnego oznaczają, że gospodarka znajduje się na tzw. ścieżce wzrostu równomiernego (w węższym sensie)[5].

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że w analizowanym modelu wynagrodzenia otrzymywane przez pracowników składają się *de facto* z dwóch części: wynagrodzenia samej pracy (*L*) oraz kapitału ludzkiego (*H*). Ponieważ na ścieżce wzrostu równomiernego cena kapitału ludzkiego q_H jest stała, a zasoby kapitału ludzkiego *p.c.* (*h*) i stawka płac (*w*) rosną ze stałą stopą, równą stopie postępu techniczno – organizacyjnego *m*, łączne wynagrodzenia pracowników rosną także ze stałą stopą *m*.

[5] W sprawie definicyjnego rozróżnienia pomiędzy wzrostem równomiernym w węższym i szerszym sensie, zob. punkt 1.2 (Uwaga 1.1).

6.2. Stabilność długookresowej równowagi dynamicznej

Ponieważ dynamikę systemu opisuje układ nieliniowych równań różniczkowych (6.12) - (6.13) oraz nie założyliśmy żadnej konkretnej postaci funkcji produkcji, w analityczny sposób możemy zbadać jedynie lokalną asymptotyczną stabilność długookresowej równowagi dynamicznej tego systemu.

Procedura polega na linearyzacji układu równań (6.12) - (6.13) za pomocą rozwinięcia Taylora wokół punktu równowagi i sprawdzaniu globalnej asymptotycznej stabilności odpowiedniego układu liniowego, na podstawie której wnioskuje się następnie o lokalnej asymptotycznej stabilności równowagi w układzie wyjściowym. Ostatecznie, postępowanie sprowadza się do zbadania znaków pierwiastków charakterystycznych tzw. macierzy Jakobiego, wyznaczonej dla współrzędnych punktu równowagi.

Twierdzenie 6.4. Stan stacjonarny $\bar{k}_e, \bar{h}_e > 0$, spełniający układ równań (6.14) - (6.15), jest lokalnie asymptotycznie stabilnym stanem długookresowej równowagi dynamicznej modelu (6.11) i ma charakter stabilnego węzła.

Dowód. Macierz Jakobiego, otrzymana na podstawie (6.12) i (6.13), ma postać:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{k}} & \frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{h}} \\ \frac{\partial \dot{\bar{h}}}{\partial \bar{k}} & \frac{\partial \dot{\bar{h}}}{\partial \bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_K f_{\bar{k}} - (n+m+\delta_K) & s_K f_{\bar{h}} \\ s_H f_{\bar{k}} & s_H f_{\bar{h}} - (n+m+\delta_H) \end{bmatrix},$$

zaś jej wartość dla współrzędnych punktu równowagi $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, scharakteryzowanego przez układ równań (6.14) - (6.15), wynosi:

$$J(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = \begin{bmatrix} s_K f_{\bar{k}}^* - (n+m+\delta_K) & s_K f_{\bar{h}}^* \\ s_H f_{\bar{k}}^* & s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H) \end{bmatrix}, \tag{6.17}$$

gdzie $f_{\bar{k}}^* = f_{\bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $f_{\bar{h}}^* = f_{\bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczają stałe poziomy krańcowych produktywności kapitału rzeczowego i ludzkiego w stanie stacjonarnym.

Oznaczmy przez:

$$\alpha(\bar{k}, \bar{h}) = \frac{f_{\bar{k}} \bar{k}}{f(\bar{k}, \bar{h})} = \frac{F_K K}{Y}, \qquad \beta(\bar{k}, \bar{h}) = \frac{f_{\bar{h}} \bar{h}}{f(\bar{k}, \bar{h})} = \frac{F_H H}{Y}, \tag{6.18}$$

wskaźniki elastyczności produktu względem kapitału, odpowiednio, rzeczowego i ludzkiego. Przez $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczmy stałe wartości tych wskaźników na danej ścieżce wzrostu równomiernego.

Korzystając z tych oznaczeń oraz z zależności (6.14) - (6.15) obowiązujących w stanie stacjonarnym, (6.17) możemy po kilku przekształceniach przepisać w postaci:

$$J(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = \begin{bmatrix} (\alpha - 1)(n + m + \delta_K) & \frac{s_K}{s_H}\beta(n + m + \delta_H) \\ \frac{s_H}{s_K}\alpha(n + m + \delta_K) & (\beta - 1)(n + m + \delta_H) \end{bmatrix}.$$

Korzystając z faktu, że iloczyn wartości własnych z_i macierzy kwadratowej stopnia drugiego równy jest wartości jej wyznacznika, zaś suma wartości własnych – jej śladowi, znajdujemy:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \det J(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = (1 - \alpha - \beta)(n + m + \delta_K)(n + m + \delta_H), \\ z_1 + z_2 &= trJ(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = (\alpha - 1)(n + m + \delta_K) + (\beta - 1)(n + m + \delta_H). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Z założenia o dodatniej krańcowej produktywności wszystkich czynników produkcji oraz (6.6), (6.7) wynika, że:

$$\alpha(\bar{k}, \bar{h}),\ \beta(\bar{k}, \bar{h}) > 0,\ \alpha(\bar{k}, \bar{h}) + \beta(\bar{k}, \bar{h}) < 1. \tag{6.20}$$

Na podstawie (6.19) otrzymujemy zatem: $z_1 z_2 > 0$ oraz $z_1 + z_2 < 0$, co świadczy o tym, że oba pierwiastki charakterystyczne są ujemne (bądź mają ujemne części rzeczywiste, w przypadku, gdy są zespolone). Zgodnie z twierdzeniem Lapunowa, stan równowagi wyjściowego układu równań różniczkowych jest (przynajmniej) lokalnie asymptotycznie stabilny.

Obliczając następnie wyróżnik równania charakterystycznego macierzy $J(\bar{k}_e; \bar{h}_e)$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(trJ(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\right)^2 - 4\det J(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = (\alpha - 1)^2(n + m + \delta_K)^2 + (\beta - 1)^2(n + m + \delta_H)^2 \\ &\quad - 2(1 - \alpha\beta - \alpha - \beta)(n + m + \delta_K)(n + m + \delta_H), \end{aligned}$$

nietrudno ustalić, że spełniona jest nierówność:

$$\Delta > \left((\alpha - 1)(n + m + \delta_K) - (\beta - 1)(n + m + \delta_H)\right)^2 \geq 0,$$

czyli pierwiastki charakterystyczne macierzy $J(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ są liczbami rzeczywistymi, a punkt równowagi ma charakter stabilnego węzła (a nie stabilnego ogniska).

■

Rozpatrzymy teraz problem globalnej asymptotycznej stabilności długookresowej równowagi dynamicznej posługując się tzw. diagramem fazowym.

Oznaczmy przez $\bar{h} = g_1(\bar{k})$, $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ krzywe podziału w przestrzeni $\bar{k} \times \bar{h}$, przy których zachodzi, odpowiednio $\dot{\bar{k}} = 0$, $\dot{\bar{h}} = 0$, odpowiadające równaniom, odpowiednio, (6.14) i (6.15). Przed przystąpieniem do analizy dynamiki systemu (6.11), scharakteryzowanej przez równania (6.12) i (6.13), wykażemy najpierw pewne własności linii podziału na diagramie fazowym.

O nachyleniu krzywych podziału możemy wnioskować, analizując wartości wskaźników elastyczności $\varepsilon = \dfrac{d\bar{h}}{d\bar{k}} \dfrac{\bar{k}}{\bar{h}}$ dla tych krzywych, $\varepsilon(g_1)$ i $\varepsilon(g_2)$.

Lemat 6.2. Linie podziału $\bar{h} = g_1(\bar{k})$, $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ są funkcjami rosnącymi. Ponadto $\varepsilon(g_1) > 1$ oraz $\varepsilon(g_2) < 1$.

Dowód. Przyrównując do zera prawe strony równań (6.12) i (6.13) i różniczkując otrzymane w ten sposób równania względem $\bar{k}$ i $\bar{h}$, otrzymujemy odpowiednio:

$$s_K (f_{\bar{k}} d\bar{k} + f_{\bar{h}} d\bar{h}) - (n + m + \delta_K) d\bar{k} = 0, \qquad s_H (f_{\bar{k}} d\bar{k} + f_{\bar{h}} d\bar{h}) - (n + m + \delta_H) d\bar{h} = 0,$$

a następnie po przekształceniach:

$$g_1'(\bar{k}) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{k}} = \frac{(n + m + \delta_K) - s_K f_{\bar{k}}}{s_K f_{\bar{h}}}, \qquad g_2'(\bar{k}) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{k}} = \frac{s_H f_{\bar{k}}}{(n + m + \delta_H) - s_H f_{\bar{h}}}, \tag{6.21}$$

Ponieważ przy $\dot{\bar{k}} = 0$ zachodzi (6.14), zaś przy $\dot{\bar{h}} = 0$ - (6.15), możemy skorzystać z tych zależności dokonując podstawień w (6.21). Korzystając dodatkowo z oznaczeń wprowadzonych w (6.18), otrzymujemy odpowiednio:

$$\varepsilon(g_1) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{k}} \frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \frac{1 - \alpha(\bar{k}, \bar{h})}{\beta(\bar{k}, \bar{h})}, \qquad \varepsilon(g_2) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{k}} \frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \frac{\alpha(\bar{k}, \bar{h})}{1 - \beta(\bar{k}, \bar{h})}. \tag{6.22}$$

Z uwagi na (6.20) wnioskujemy, że elastyczności (6.22) dla obu krzywych podziału są dodatnie (czyli obie linie podziału są pozytywnie nachylone względem osi $0\bar{k}$), przy czym $\varepsilon(g_1) > 1$ oraz $\varepsilon(g_2) < 1$.

■

Lemat 6.3. Linia podziału $\bar{h} = g_1(\bar{k})$ jest funkcją silnie wypukłą, a linia podziału $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ - silnie wklęsłą.

Dowód. Weźmy dwa dowolne punkty $(\bar{k}_1, \bar{h}_1)$ i $(\bar{k}_2, \bar{h}_2)$ znajdujące się na linii podziału $\bar{h} = g_1(\bar{k})$ i oznaczmy stosunek $\bar{k}_2 / \bar{k}_1$ przez λ. Z uwagi na stały poziom produktu przeciętnego kapitału rzeczowego, wynikający z (6.14), musi zachodzić: $f(\bar{k}_2, \bar{h}_2) = \lambda f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)$. Dla dowolnej kombinacji liniowej tych punktów: $(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta) = \theta(\bar{k}_1, \bar{h}_1) + (1-\theta)(\bar{k}_2, \bar{h}_2)$, gdzie $\theta \in (0;1)$, ze względu na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k}, \bar{h})$ (zob. Tw. 6.1, własność w4), zachodzi:

$$f(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta) > \theta f(\bar{k}_1, \bar{h}_1) + (1-\theta) f(\bar{k}_2, \bar{h}_2) = \left(\theta + (1-\theta)\lambda\right) f(\bar{k}_1, \bar{h}_1), \tag{6.23}$$

skąd wynika z kolei, że:

$$\frac{f(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta)}{\bar{k}_\theta} > \frac{\left(\theta + (1-\theta)\lambda\right) f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)}{\left(\theta + (1-\theta)\lambda\right) \bar{k}_1} > \frac{f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)}{\bar{k}_1}.$$

Z uwagi na dodatnią wartość pochodnej cząstkowej $f_{\bar{h}}$ (zob. Tw. 6.1, własność w1), punkt $(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta)$ znajduje się ponad linią podziału $\bar{h} = g_1(\bar{k})$ w przestrzeni $\bar{k} \times \bar{h}$, czyli:

$$\bar{h}_\theta > g_1(\bar{k}_\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta g_1(\bar{k}_1) + (1-\theta) g_1\left(\bar{k}_2\right) > g_1\left(\theta \bar{k}_1 + (1-\theta)\bar{k}_2\right),$$

co oznacza, że funkcja $\bar{h} = g_1(\bar{k})$ jest silnie wypukła.

Podobnie, wybierając dowolne dwa punkty $(\bar{k}_1, \bar{h}_1)$ i $(\bar{k}_2, \bar{h}_2)$ znajdujące się na linii podziału $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ i oznaczając stosunek $\bar{h}_2 / \bar{h}_1$ przez λ, wnioskujemy najpierw, iż z uwagi na stałą wartość produktu przeciętnego kapitału ludzkiego, daną przez (6.15), musi zachodzić: $f(\bar{k}_2, \bar{h}_2) = \lambda f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)$. Dla dowolnej kombinacji liniowej tych punktów: $(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta) = \theta(\bar{k}_1, \bar{h}_1) + \left(1-\theta\right)(\bar{k}_2, \bar{h}_2)$, gdzie $\theta \in \left(0;1\right)$, ze względu na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k}, \bar{h})$, zachodzi ponownie nierówność (6.23), skąd wynika z kolei, że:

$$\frac{f(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta)}{\bar{h}_\theta} > \frac{\left(\theta + (1-\theta)\lambda\right) f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)}{\left(\theta + (1-\theta)\lambda\right) \bar{h}_1} > \frac{f(\bar{k}_1, \bar{h}_1)}{\bar{h}_1}.$$

Z uwagi na dodatnią wartość $f_{\bar{k}}$ (zob. Tw. 6.1, własność w1), punkt $(\bar{k}_\theta, \bar{h}_\theta)$ znajduje się na prawo od linii podziału $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ w przestrzeni $\bar{k} \times \bar{h}$, czyli:

$$\bar{h}_\theta < g_2(\bar{k}_\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta g_2(\bar{k}_1) + (1-\theta) g_2(\bar{k}_2) < g_2\left(\theta \bar{k}_1 + (1-\theta)\bar{k}_2\right),$$

co oznacza, że funkcja $\bar{h} = g_2(\bar{k})$ jest silnie wklęsła.

■

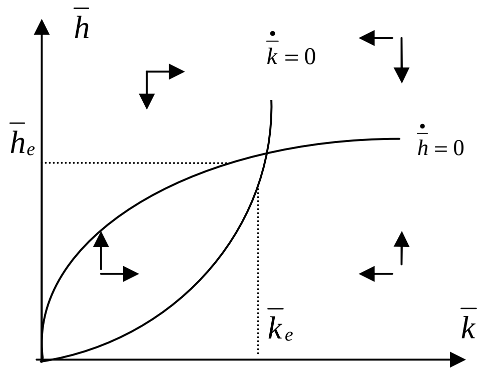
Twierdzenie 6.5. Przy założeniach W1–W6 o funkcji produkcji (6.1), stan stacjonarny $(\overline{k}_e;\overline{h}_e) \neq (0,0)$ modelu (6.11) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód. Portret fazowy systemu, zgodny z ustaleniami Twierdzenia 6.3 oraz Lematów 6.2 i 6.3, zaprezentowano na rysunku 6.1. Oprócz krzywych podziału zaznaczono także strzałki wskazujące kierunki ruchu zmiennych $\overline{k}$ i $\overline{h}$, gdy system opisany równaniami (6.12) - (6.13) znajduje się w dowolnym punkcie.

Z równania (6.12) wynika, że $\dot{\overline{k}}$ rośnie wraz ze wzrostem $\overline{h}$, dlatego strzałki poniżej krzywej $\dot{\overline{k}} = 0$ skierowane są w lewo ($\dot{\overline{k}} < 0$), zaś powyżej - w prawo ($\dot{\overline{k}} > 0$). Ponieważ z równania (6.13) wynika, że $\dot{\overline{h}}$ rośnie wraz ze wzrostem $\overline{k}$, to strzałki na lewo od krzywej $\dot{\overline{h}} = 0$ skierowane są w dół ($\dot{\overline{h}} < 0$), zaś na prawo - w górę ($\dot{\overline{h}} > 0$).

Rysunek 6.1

Stabilność ścieżki wzrostu równomiernego



źródło: opracowanie własne

Z analizy diagramu fazowego wynika, że niezależnie od wyjściowych poziomów $\overline{k}$ i $\overline{h}$), gospodarka zmierza w kierunku punktu przecięcia krzywych podziału, czyli w stronę stanu stacjonarnego $\overline{k}_e, \overline{h}_e > 0$.

■

6.3. Rozszerzony model neoklasyczny a fakty empiryczne dotyczące wzrostu gospodarczego

Podobnie jak w przypadku podstawowej wersji neoklasycznego modelu wzrostu, zasadnicze charakterystyki dotyczące zachowania się gospodarki na ścieżce wzrostu równomiernego, wynikające z modelu rozszerzonego o akumulację kapitału ludzkiego, korespondują ze „stylizowanymi faktami” wzrostu gospodarczego, analizowanymi w rozdziale drugim[6]. Udoskonalenie eksplanacyjnych walorów modelu, uzyskane dzięki uwzględnieniu akumulacji kapitału ludzkiego, dotyczy natomiast jego implikacji ilościowych w zakresie:

1) wpływu poszczególnych parametrów na poziom produktu na ścieżce wzrostu równomiernego,
2) przewidywanych różnic w zasobności gospodarek w kapitał rzeczowy i w jego krańcowej produktywności (stopie zysku z kapitału), implikowanych przez obserwowane zróżnicowanie w poziomach produktu *p.c.* między krajami,
3) wynikającej stąd siły bodźców do przepływu kapitału między krajami, warunkującego ogólnoświatowe procesy konwergencji,
4) tempa niwelowania różnic w poziomach produktu *p.c.* między krajami w ramach identyfikowanego przez model mechanizmu konwergencji warunkowej.

Rozpatrzymy te kwestie szczegółowo.

Ad.1) Analogicznie jak w modelu Solowa, stopy inwestycji (tym razem zarówno w kapitał rzeczowy, jak i ludzki) decydują o poziomie produktu *njep* w stanie stacjonarnym, czyli o położeniu długookresowej ścieżki wzrostu równomiernego, nie mają natomiast wpływu na długookresową stopę wzrostu równomiernego.

Analizę wpływu poszczególnych parametrów modelu (w tym stóp inwestycji) na poziom produktu *njep* w stanie stacjonarnym można przeprowadzić, wykorzystując metody statyki porównawczej.

Układ równań (6.14) - (6.15), który teraz zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} F^1(\bar{k}_e, \bar{h}_e, s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad s_K f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n + m + \delta_K)\bar{k}_e = 0, \\ F^2(\bar{k}_e, \bar{h}_e, s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad s_H f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n + m + \delta_H)\bar{h}_e = 0, \end{aligned} \tag{6.24}$$

wyznacza funkcje uwikłane:

---

[6] Zob. rozdział drugi, punkt 2.1.

$$\bar{k}_e = f^1(s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H), \quad \bar{h}_e = f^2(s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H).$$

Zgodnie z twierdzeniem o funkcji uwikłanej, warunkiem wystarczającym istnienia tych funkcji w otoczeniu punktu $(s_K^0, s_H^0, n^0, m^0, \delta_K^O, \delta_H^O)$ jest istnienie ciągłych pochodnych cząstkowych funkcji F^1 i F^2 względem wszystkich zmiennych $\bar{k}_e, \bar{h}_e, s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H$ oraz:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial \bar{k}_e} & \dfrac{\partial F^1}{\partial \bar{h}_e} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial \bar{k}_e} & \dfrac{\partial F^2}{\partial \bar{h}_e} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} s_K f_{\bar{k}}^* - (n+m+\delta_K) & s_K f_{\bar{h}}^* \\ s_H f_{\bar{k}}^* & s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H) \end{vmatrix} \neq 0$$

dla punktu $(\bar{k}_e^0, \bar{h}_e^0, s_K^0, s_H^0, n^0, m^0, \delta_K^O, \delta_H^O)$ spełniającego układ równań (6.24). Ponadto, funkcje f^1 i f^1 są wówczas ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych $s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H$. Ponieważ w (6.19) wykazaliśmy już, że interesujący nas tutaj wyznacznik ma wartość ujemną dla dowolnego punktu $\left(\bar{k}_e, \bar{h}_e, s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H\right)$ spełniającego układ równań (6.24), ma zatem sens mówienie o funkcjach uwikłanych $\bar{k}_e = f^1(s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H)$, $\bar{h}_e = f^2(s_K, s_H, n, m, \delta_K, \delta_H)$ i ich pochodnych cząstkowych. Z tych ostatnich będziemy korzystać w dalszej części analizy.

Kierunek oraz siłę oddziaływania stóp inwestycji na poziom produktu, przy założeniu, że gospodarka znajduje się na ścieżce wzrostu równomiernego, można ocenić za pomocą następujących wskaźników elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem s_K i s_H, odpowiednio[7]:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{\bar{y}_e}, \qquad \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{\bar{y}_e}. \tag{6.25}$$

Twierdzenie 6.6. Wskaźniki elastyczności (6.25) wyrażają się wzorami:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}, \tag{6.26}$$

[7] Przy założeniu, że gospodarka znajduje się na ścieżce wzrostu równomiernego, czyli $Y = \bar{L}\bar{y}_e$ zachodzi bowiem $\frac{\partial Y}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{Y} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{\bar{y}_e}$ oraz $\frac{\partial Y}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{Y} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{\bar{y}_e}$.

$$\varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}. \tag{6.27}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oraz $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Dowód. Ponieważ, zgodnie z (6.3), $\bar{y}_e$ jest funkcją $\bar{k}_e$ i $\bar{h}_e$, wzór na elastyczność $\bar{y}_e$ względem s_K możemy przepisać w postaci:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \left(f_{\bar{k}}^* \frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s_K} + f_{\bar{h}}^* \frac{\partial \bar{h}_e}{\partial s_K} \right) \cdot \frac{s_K}{f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)}. \tag{6.28}$$

gdzie, jak wyżej, $f_{\bar{k}}^* = f_{\bar{k}}(\bar{k}_e; \bar{h}_e)$ oraz $f_{\bar{h}}^* = f_{\bar{h}}(\bar{k}_e; \bar{h}_e)$. W następnym kroku ze wzoru (6.28) eliminujemy wyrażenia $\partial \bar{k}_e / \partial s_K$ i $\partial \bar{h}_e / \partial s_H$. W tym celu różniczkujemy równania (6.24) względem s_K, otrzymując odpowiednio:

$$\begin{aligned} &s_K \left(f_{\bar{k}}^* \frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s_K} + f_{\bar{h}}^* \frac{\partial \bar{h}_e}{\partial s_K} \right) + f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = (n+m+\delta_K) \frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s_K}, \\ &s_H \left(f_{\bar{k}}^* \frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s_K} + f_{\bar{h}}^* \frac{\partial \bar{h}_e}{\partial s_K} \right) = (n+m+\delta_H) \frac{\partial \bar{h}_e}{\partial s_K}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Rozwiązując układ równań (6.29), wyznaczamy:

$$\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial s_K} = \frac{f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\left(s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H)\right)}{s_K f_{\bar{k}}^* (n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left(s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H)\right)},$$

$$\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial s_K} = \frac{-s_H f_{\bar{k}}^* f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)}{s_K f_{\bar{k}}^* (n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left(s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H)\right)}.$$

Po podstawieniu tych wzorów do (6.28) i uproszczeniu otrzymujemy:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \frac{-s_K f_{\bar{k}}^* (n+m+\delta_H)}{s_K f_{\bar{k}}^* (n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left(s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta_H)\right)}. \tag{6.30}$$

Wykorzystując równania (6.14) - (6.15), charakteryzujące stan stacjonarny, (6.30) można przekształcić do następującej postaci:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \frac{f_{\bar{k}}^* \bar{k}_e}{f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - f_{\bar{k}}^* \bar{k}_e - f_{\bar{h}}^* \bar{h}_e}.$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony tego równania przez $f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i stosując oznaczenia wprowadzone w (6.18), otrzymujemy ostatecznie (6.26):
W analogiczny sposób uzyskujemy formułę (6.27).

■

Przypomnijmy, że ponieważ zakładaliśmy neoklasyczny sposób wynagradzania czynników produkcji według ich krańcowych produktywności, to stałe (na ścieżce wzrostu równomiernego) wskaźniki elastyczności α i β odpowiadają udziałom wynagrodzeń kapitału, odpowiednio, rzeczowego i ludzkiego w produkcie. Empiryczny szacunek tych udziałów pozwala na wyznaczenie, implikowanej przez model, siły wpływu zmian stóp inwestycji w poszczególne rodzaje kapitału (a także pozostałych parametrów) na produkt na ścieżce wzrostu równomiernego. Empiryczne oszacowanie tych wielkości nie jest jednak możliwe w sposób tak bezpośredni, jak ma to miejsce w sytuacji, gdy posługujemy się dwuczynnikową funkcją produkcji, kiedy to produkt rozkłada się pomiędzy wynagrodzenia pracy i kapitału rzeczowego. W przypadku kapitału ludzkiego, jego wynagrodzenie należy wydzielić z tej części produktu, która w ujęciu dwuczynnikowym w całości przypada pracy. Możliwym sposobem szacunku udziału kapitału ludzkiego w produkcie jest porównanie płac robotników niewykwalifikowanych (mających odzwierciedlać wkład samej pracy) ze średnim poziomem płac wszystkich pracowników (odzwierciedlających łączny wkład czynnika pracy i kapitału ludzkiego). Jeżeli przyjmiemy, że płace robotników niewykwalifikowanych kształtują się między 1/3 a 1/2 średniej płacy, to wynika stąd, że przychody z kapitału ludzkiego stanowią od 1/2 do 2/3 ogółu wynagrodzeń dla siły roboczej, czyli: $\frac{1}{2}(1-\alpha) < \beta < \frac{2}{3}(1-\alpha)$. Przy $\alpha = \frac{1}{3}$, szacujemy, że: $\frac{1}{3} < \beta < \frac{4}{9}$ [8].

W tej sytuacji, wpływ nie tylko łącznej stopy inwestycji (w oba rodzaje kapitału), ale również, co intuicyjnie mniej oczywiste, samej stopy inwestycji w kapitał rzeczowy, na poziom długookresowej ścieżki wzrostu gospodarczego, staje się dużo większy, niż wynika to z modelu Solowa. Przy $\alpha = 1/3$ oraz $\beta = 1/3$ elastyczność produktu względem stopy oszczędności w kapitał rzeczowy wynosi teraz 1 (przy $\beta > 1/3$ elastyczność ta jest jeszcze wyższa). Przy tym samym założeniu o udziale kapitału rzeczowego w produkcie, uwzględnienie akumulacji kapitału ludzkiego powoduje co najmniej dwukrotny wzrost elastyczności produktu względem stopy inwestycji w kapitał rzeczowy. Jest tak dlatego, iż wzrost stopy inwestycji w kapitał rzeczowy prowadzi teraz nie tylko do wzrostu zasobu tego kapitału, lecz również podnosi poziom kapitału ludzkiego (poziom $\bar{h}$ w stanie stacjonarnym). To zaś, poprzez funkcję produkcji, przekłada się na większy niż w modelu Solowa wzrost produktu w warunkach wzrostu

[8] Za: N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *op. cit.*, s. 417.

równomiernego. Różnice w stopach inwestycji w kapitał rzeczowy implikują teraz dwukrotnie większe różnice w produkcie na ścieżce wzrostu równomiernego, niż miało to miejsce w przypadku modelu z dwuczynnikową funkcją produkcji.

Dla określenia wpływu pozostałych parametrów na produkt na ścieżce wzrostu równomiernego możemy posłużyć analogicznymi wskaźnikami elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem tych parametrów.

Twierdzenie 6.7. Elastyczność produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stopy przyrostu naturalnego wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_{n}^{\bar{y}_e} = -\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\cdot\frac{n}{n+m+\delta_K} - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\cdot\frac{n}{n+m+\delta_H}. \tag{6.31}$$

Dowód. Wyznaczymy najpierw formuły na elastyczność $\bar{y}_e$ względem $(n+m+\delta_K)$ oraz względem $(n+m+\delta_H)$. Z definicji elastyczności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+m+\delta_K}^{\bar{y}_e} &= \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial(n+m+\delta_K)}\frac{n+m+\delta_K}{\bar{y}_e}. = \\ &= \left(f_{\bar{k}}^{*}\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} + f_{\bar{h}}^{*}\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} \right)\cdot\frac{n+m+\delta_K}{f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)}\end{aligned} \tag{6.32}$$

Odpowiednikami równań (6.29), są:

$$\begin{aligned} s_K\left(f_{\bar{k}}^{*}\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} + f_{\bar{h}}^{*}\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} \right) &= \bar{k}_e + (n+m+\delta_K)\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta_K)}, \\ s_H\left(f_{\bar{k}}^{*}\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} + f_{\bar{h}}^{*}\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} \right) &= (n+m+\delta_H)\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial(n+m+\delta_K)}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Rozwiązując układ równań (6.33), wyznaczamy:

$$\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} = \frac{\bar{k}_e\left(s_H f_{\bar{h}}^{*} - (n+m+\delta_H)\right)}{s_K f_{\bar{k}}^{*}(n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left[s_H f_{\bar{h}}^{*} - (n+m+\delta_H)\right]}.$$

$$\frac{\partial \bar{h}_e}{\partial(n+m+\delta_K)} = \frac{-\bar{k}_e s_H f_{\bar{k}}^{*}}{s_K f_{\bar{k}}^{*}(n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left[s_H f_{\bar{h}}^{*} - (n+m+\delta_H)\right]}.$$

Po podstawieniu tych wzorów do (6.32) i uproszczeniu otrzymujemy:

$$\varepsilon_{n+m+\delta_K}^{\bar{y}_e} = \frac{\bar{k}_e f_{\bar{k}}^{*}(n+m+\delta_H)(n+m+\delta_K)}{\left[s_K f_{\bar{k}}^{*}(n+m+\delta_H) + (n+m+\delta_K)\left(s_H f_{\bar{h}}^{*} - (n+m+\delta_H)\right)\right] f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)} \tag{6.34}$$

Korzystając z równań (6.14), (6.15), (6.34) przekształcamy do postaci:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta_K} = -\frac{f^{*}_{\bar{k}}\bar{k}_e}{f(\bar{k}_e,\bar{h}_e) - f^{*}_{\bar{k}}\bar{k}_e - f^{*}_{\bar{h}}\bar{h}_e}.$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony tego równania przez $f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$ i stosując oznaczenia wprowadzone w (6.18), zapisujemy ostatecznie:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta_K} = -\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}. \tag{6.35}$$

W podobny sposób znajdujemy formułę na elastyczność $\bar{y}_e$ względem $(n+m+\delta_H)$:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta_H} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}, \tag{6.36}$$

Wskaźnik elastyczności $\bar{y}_e$ względem *n* policzymy teraz w sposób następujący:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial n} * \frac{n}{\bar{y}_e} = \left(\frac{\partial \bar{y}_e}{\partial (n+m+\delta_K)} \frac{\partial (n+m+\delta_K)}{\partial n} + \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial (n+m+\delta_H)} \frac{\partial (n+m+\delta_H)}{\partial n} \right) \frac{n}{\bar{y}_e} =$$

$$= \frac{n}{n+m+\delta_K}\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta_K} + \frac{n}{n+m+\delta_H}\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta_H}$$

Podstawiając (6.35) i (6.36) do ostatniej formuły, otrzymujemy ostatecznie (6.31)[9].

■

Przyjmując jak wcześniej α = 1/3, β = 1/3 oraz zakładając dodatkowo $\delta_K = \delta_H = \delta$, uzyskujemy $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{n+m+\delta} = -2\frac{n}{n+m+\delta}$, co daje wynik czterokrotnie większy niż w modelu Solowa.

W kontekście wniosków, jakie wyprowadziliśmy w rozdziale drugim, w wyniku analizy modelu Solowa, zwiększenie siły zależności pomiędzy stopą inwestycji oraz stopą przyrostu liczby ludności a poziomem produktu, w obliczu wyników badań empirycznych[10], świadczy na korzyść walorów eksplanacyjnych modelu rozszerzonego

---

[9] W analogiczny sposób można też uzyskać formuły na elastyczność $\bar{y}_e$ względem stopy postępu technicznego *m* oraz względem wskaźników deprecjacji δ_K i δ_H.

[10] Zob. punkt 2.2 w drugim rozdziale tej pracy. W drugim etapie swojej analizy Mankiw, Romer i Weil uwzględniają w równaniu regresji stopy inwestycji w kapitał ludzki, za których miarę przyjmują frakcje ludności w wieku produkcyjnym uczęszczające do szkół średnich. Poddawane estymacji równanie regresji oparte na równaniu charakteryzującym ścieżki wzrostu równomiernego w modelu z funkcją produkcji Cobba–Douglasa: $Y = K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}$ ma teraz postać:

$$\ln y = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln s_K + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln s_H - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(n+m+\delta\right) + a + \varepsilon \cdot$$

Sposób wyprowadzenia tego równania sprowadza się do wyznaczenia wartości $\bar{k}_e$ i $\bar{h}_e$ spełniających $\dot{\bar{k}} = 0$ i $\dot{\bar{h}} = 0$, na podstawie (6.12) - (6.13), gdzie: $f(\bar{k};\bar{h}) = (\bar{k})^{\alpha}(\bar{h})^{\beta}$ oraz $\delta_K = \delta_H = \delta$, podstawienia z o kapitał ludzki, w porównaniu z podstawowym modelem neoklasycznym. Rozpiętości w akumulacji kapitału (stopach inwestycji), a także w stopach wzrostu liczby ludności znacznie lepiej tłumaczą teraz różnice w poziomach zamożności między krajami.

Uwaga 6.4. W sytuacji, gdy mierzalna część produktu wynosi $Y^m = (1-s_H)Y$ (patrz Uwaga 6.1), elastyczność mierzalnego produktu względem stopy s_H możemy policzyć w następujący sposób:

$$\varepsilon_{s_H}^{\bar{y}^m} = \frac{\partial \bar{y}^m}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{\bar{y}^m} = \frac{\partial\left((1-s_H)\bar{y}\right)}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{(1-s_H)\bar{y}} = \left(-\bar{y} + (1-s_H)\frac{\partial \bar{y}}{\partial s_H}\right) \cdot \frac{s_H}{(1-s_H)\bar{y}} = \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}} - \frac{s_H}{1-s_H}.$$

Dla niewielkich wartości stopy s_H wartość nowego wskaźnika elastyczności będzie nieznacznie niższa od wartości wskaźnika $\varepsilon_{s_H}^{\bar{y}}$. Nietrudno ustalić, że wzory na elastyczność mierzalnej części produktu względem stopy inwestycji w kapitał rzeczowy oraz względem stopy przyrostu naturalnego są takie same, jak wzory na, odpowiednio, $\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}}$ i $\varepsilon_{n}^{\bar{y}}$.

W oparciu o uzyskane formuły na elastyczność produktu względem poszczególnych parametrów modelu możemy również wyznaczać wzory na „elastyczność substytucji” między dwoma wybranymi parametrami, określające procentowe zmiany jednego z nich, przy 1 - procentowej zmianie drugiego, konieczne dla utrzymania $\bar{y}_e$ na stałym poziomie. Dla przykładu, względna zmiana s_H, równoważąca (w sensie wpływu na $\bar{y}_e$) 1 - procentowy spadek s_K, może być obliczana w następujący sposób:

$$\varepsilon_{s_K}^{s_H} = \frac{\partial s_H}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{s_H} = \varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} / \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ad.2) i 3) Uwzględnienie akumulacji kapitału ludzkiego osłabia siłę wniosków, wynikających z neoklasycznego modelu wzrostu, świadczących na rzecz bezwarunkowej wersji hipotezy konwergencji.

---

prawej strony $\bar{y} = (\bar{k})^{\alpha}(\bar{h})^{\beta}$ oraz obustronnego zlogarytmowania i uporządkowania uzyskanego równania.
Taka modyfikacja nie tylko zwiększa dopasowanie równania regresji do danych empirycznych (w przypadku pierwszych dwóch prób R^2 wzrasta do prawie 80%), ale również obniża oszacowania wartości parametrów, tak, że zbliżają się one do tych, wynikających z modelu teoretycznego. Ponadto ograniczenie nałożone na parametry (suma = 0) nie zostaje w żadnej z prób odrzucone, a implikowane wartości α i β (w pierwszych dwóch próbach) wynoszą około 1/3 i są silnie statystycznie istotne.

W przeciwieństwie do abstrakcyjnej wiedzy, kapitał ludzki jest dobrem w pełni wyłączalnym, nie można o nim zakładać, że łatwo podlega dyfuzji. Jeśli wyjaśnienie jakiejś części zróżnicowania poziomów dochodu *p.c.* między krajami przechodzi na różnice w zasobności tych krajów w kapitał ludzki, to obserwowane w rzeczywistości różnice w poziomach zamożności nie muszą wcale oznaczać niewiarygodnie dużych różnic w poziomach kapitału rzeczowego przypadającego na pracownika ani tym bardziej w krańcowej produktywności tego kapitału (stopie zysku)[11]. Słabną zatem bodźce do transferu kapitału rzeczowego do krajów biedniejszych. Bariery w transferze kapitału ludzkiego między krajami są natomiast w rzeczywistości o wiele większe, niż w przypadku kapitału rzeczowego.

Ad. 4) Możliwa jest co prawda konwergencja warunkowa, czyli wyrównywanie poziomów zamożności między krajami poprzez różnice w stopach wzrostu gospodarczego wynikające z tego, że różne gospodarki mogą znajdować się w różnym oddaleniu od wspólnego stanu stacjonarnego. Pomimo, iż rozszerzony a akumulację kapitału ludzkiego neoklasyczny model wzrostu gospodarczego identyfikuje ten sam, co do istoty, mechanizm zbieżności, leżący u podstaw warunkowej wersji hipotezy konwergencji, to jednak przewidywana szybkość niwelowania różnic w poziomach zamożności okazuje się znacznie mniejsza niż ta, wynikająca z podstawowej wersji modelu. Zmniejsza się bowiem tempo, z jakim gospodarka startująca z dowolnego miejsca zbliża się do stanu stacjonarnego.

Podobnie jak w punkcie 2.3, stosując liniowe aproksymacje zależności nieliniowych wokół punktu równowagi długookresowej, możemy wyznaczyć, a następnie oszacować ową szybkość zbieżności. Zakładamy ponownie $\delta_K = \delta_H = \delta$.

---

[11] Na prostym przykładzie rachunkowym można pokazać, że przy wyższym poziomie dochodu *p.c.* krańcowa produktywność kapitału rzeczowego może być nawet wyższa niż w kraju biedniejszym (mniej zasobnym w kapitał rzeczowy). Przyjmując funkcję produkcji Cobba–Douglasa: $Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}$, lub w kategoriach *p.c.*: $y = (A)^{1-\alpha-\beta} k^{\alpha} h^{\beta}$, krańcowa produktywność kapitału rzeczowego wyraża się wzorem: $\frac{\partial y}{\partial k} = \alpha (A)^{1-\alpha-\beta} k^{\alpha-1} h^{\beta} = \alpha \frac{y}{k}$. Przy pominięciu wszelkich różnic w poziomie wykorzystywanej technologii oraz $\alpha = \beta = 1/3$, dziesięciokrotnie wyższy produkt *p.c.* może wiązać się z takim samym poziomem *k* i tysiąckrotnie wyższym poziomem *h*, co daje dziesięciokrotnie wyższy produkt krańcowy kapitału rzeczowego.

Twierdzenie 6.8. W otoczeniu stanu stacjonarnego $\bar{y}_e = f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ modelu (6.11), zmiany produktu w czasie, przy założeniu, że $\delta_K = \delta_H = \delta$, odbywają się zgodnie z równaniem:

$$\bar{y}(t) - \bar{y}_e \approx e^{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)t}(\bar{y}(0) - \bar{y}_e), \tag{6.37}$$

gdzie $\bar{y}(0)$ oznacza początkową wartość $\bar{y}(t)$ oraz $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Dowód. Przybliżając liniowo szeregiem Taylora zależności $\dot{\bar{k}}$ oraz $\dot{\bar{h}}$ od $\bar{k}$ i $\bar{h}$, wyrażone w równaniach (6.12) - (6.13), w otoczeniu punktu $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, mamy:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}} &\approx \dot{\bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) + \frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \cdot (\bar{k} - \bar{k}_e) + \frac{\partial \dot{\bar{k}}}{\partial \bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \cdot (\bar{h} - \bar{h}_e), \\ \dot{\bar{h}} &\approx \dot{\bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) + \frac{\partial \dot{\bar{h}}}{\partial \bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \cdot (\bar{k} - \bar{k}_e) + \frac{\partial \dot{\bar{h}}}{\partial \bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \cdot (\bar{h} - \bar{h}_e), \end{aligned} \tag{6.38}$$

przy czym: $\dot{\bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = 0$ i $\dot{\bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e) = 0$.

Biorąc elementy macierzy (6.17) jako wartości pochodnych cząstkowych występujących po prawej stronie równań (6.38), otrzymujemy:

$$\dot{\bar{k}} \approx \left(s_K f_{\bar{k}}^* - (n+m+\delta)\right)(\bar{k} - \bar{k}_e) + s_K f_{\bar{h}}^* (\bar{h} - \bar{h}_e), \tag{6.39}$$

$$\dot{\bar{h}} \approx s_H f_{\bar{k}}^* (\bar{k} - \bar{k}_e) + \left(s_H f_{\bar{h}}^* - (n+m+\delta)\right)(\bar{h} - \bar{h}_e). \tag{6.40}$$

Jednocześnie stosując przybliżenia liniowe możemy zapisać alternatywnie:

$$\bar{y}_e \approx \bar{y} + f_{\bar{k}}(\bar{k}_e - \bar{k}) + f_{\bar{h}}(\bar{h}_e - \bar{h}). \tag{6.41}$$

$$\bar{y} \approx \bar{y}_e + f_{\bar{k}}^*(\bar{k} - \bar{k}_e) + f_{\bar{h}}^*(\bar{h} - \bar{h}_e). \tag{6.42}$$

Korzystając z (6.42), możemy podstawiać w miejsce $f_{\bar{h}}^*(\bar{h} - \bar{h}_e)$ w (6.39) oraz w miejsce $f_{\bar{k}}^*(\bar{k} - \bar{k}_e)$ w (6.40). Po dokonaniu podstawień i skróceniu wyrażeń o przeciwnych znakach, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}} &\approx -(n+m+\delta)(\bar{k} - \bar{k}_e) + s_K(\bar{y} - \bar{y}_e), \\ \dot{\bar{h}} &\approx s_H(\bar{y} - \bar{y}_e) - (n+m+\delta)(\bar{h} - \bar{h}_e). \end{aligned} \tag{6.43}$$

Jednocześnie, na podstawie (6.3), mamy:

$$\dot{\bar{y}} = f_{\bar{k}} \dot{\bar{k}} + f_{\bar{h}} \dot{\bar{h}}.$$

Podstawiając w miejsce $\dot{k}$ i $\dot{h}$ prawe strony równań(6.43), otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\dot{y} \approx (n+m+\delta)\Big(f_{\bar{k}}(\bar{k}_e - \bar{k}) + f_{\bar{h}}(\bar{h}_e - \bar{h})\Big) + (f_{\bar{k}} s_K + f_{\bar{h}} s_H)(\bar{y} - \bar{y}_e)\,,$$

zaś - korzystając z (6.41) - po kilku elementarnych przekształceniach dostajemy:

$$\dot{y} \approx -\Big((n+m+\delta) - f_{\bar{k}} s_K - f_{\bar{h}} s_H \Big)(\bar{y} - \bar{y}_e)\,. \tag{6.44}$$

Korzystając z równań (6.14), (6.15) oraz definicji wskaźników elastyczności (6.18), równanie (6.44) zapisujemy w następującej postaci:

$$\dot{y} \approx -\left(1 - \frac{f_{\bar{k}}}{f_{\bar{k}}^*}\alpha - \frac{f_{\bar{h}}}{f_{\bar{h}}^*}\beta \right)(n+m+\delta)(\bar{y} - \bar{y}_e)\,, \tag{6.45}$$

gdzie, jak wyżej, $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oraz $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Ponieważ przybliżając szeregiem Taylora w istocie przyjmowaliśmy założenie[12]: $f_{\bar{k}} \approx f_{\bar{k}}^*$ i $f_{\bar{h}} \approx f_{\bar{h}}^*$ dla punktów $(\bar{k}, \bar{h})$ z pewnego otoczenia $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, możemy skrócić wyrażenia ułamkowe w (6.45), otrzymując ostatecznie:

$$\dot{y} \approx -(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)(\bar{y} - \bar{y}_e)\,,$$

Rozwiązanie tego równania ma postać (6.37).

■

Tym samym wyrażenie: $-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)$ wyznacza stopę spadku różnicy $(\bar{y} - \bar{y}_e)$, czyli tempo zbieżności gospodarki do punktu równowagi długookresowej. Można je również utożsamiać z wynikającym z modelu tempem zachodzenia procesów konwergencji w grupie krajów, charakteryzujących się tym samym poziomem produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$.

Uwaga 6.5. Kontynuując wątek podjęty w Uwagach 6.1, 6.3, 6.4 zauważmy, że problem niemierzalności części produktu nie ma żadnego wpływu na szacunek tempa zbieżności. Łatwo się o tym przekonać, wyrażając równanie (6.37) w kategoriach mierzalnej części produktu poprzez podstawienie $\bar{y}^m/(1-s_H)$ w każdym miejscu za $\bar{y}$.

[12] Możemy się o tym przekonać porównując (6.41) z (6.42), po uprzednim obustronnym pomnożeniu jednego z tych równań przez (-1).

Przyjmując, jak dotąd $n+m+\delta=6\%$ rocznie oraz α = 1/3 i β = 1/3, otrzymujemy średnie tempo zbieżności na poziomie 2% rocznie, co stanowi wartość dwukrotnie mniejszą w porównaniu z szacunkiem wynikającym z modelu Solowa. Na przebycie połowy odległości od stanu stacjonarnego, gospodarce, startującej z dowolnego miejsca, potrzeba teraz około $-\frac{ln 0,5}{0,02} \approx \frac{0,69}{0,02} \approx 35$ lat. Szacunki te odpowiadają wartościom obserwowanym w przypadku zbieżności poziomów rozwoju stanów USA i regionów Europy Zachodniej[13].

6.4. Problem „reszty Solowa". W kierunku wzrostu endogenicznego

Nawiązując do rozważań w punkcie 2.4 zauważmy, że uwzględnienie w agregatowej funkcji produkcji kapitału ludzkiego oznacza redukcję niewyjaśnionej części produktu w równaniu dekompozycji Solowa, określanej mianem „reszty Solowa". Odpowiednikiem równania (2.26), postaci:

$$\dot{y}/y=\alpha(k)\cdot\dot{k}/k+\dot{A}/A,$$

jest teraz następujące równanie:

$$\dot{y}/y=\alpha(k,h)\cdot\dot{k}/k+\beta(k,h)\cdot\dot{h}/h+\dot{A}/A.$$

Wynika stąd, że w rachunku wzrostu gospodarczego „miara naszej niewiedzy", reprezentowana przez „postęp techniczno – organizacyjny" redukuje się o składnik $\beta(k,h)\cdot\dot{h}/h$.

Pomimo sformułowanych do tej pory argumentów na rzecz znaczącej poprawy zdolności eksplanacyjnych neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, osiągniętej dzięki uwzględnieniu w nim akumulacji kapitału ludzkiego, pozostaje faktem, że stopa wzrostu produktu *p.c.* na ścieżce wzrostu równomiernego - do której, zgodnie z Twierdzeniem 6.5, nieuchronnie zmierza gospodarka - jest w dalszym ciągu zdeterminowana przez stopę egzogenicznego postępu technicznego.

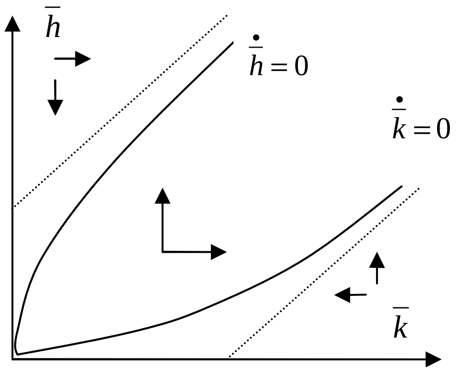
Na zakończenie tego rozdziału rozważmy hipotetyczny (graniczny) przypadek portretu fazowego, przedstawionego na rysunku 6.1.

---

[13] Zob. rozdział drugi, punkt 2.3.

Rysunek 6.2

Wzrost endogeniczny



źródło: opracowanie własne

Zgodnie z rysunkiem 6.2, stan stacjonarny nie istnieje, a zmienne $\bar{k}$ i $\bar{h}$, a tym samym również $\bar{y}$, zmierzają do nieskończoności. Oznacza to, że nawet w sytuacji, gdy nie zachodzi egzogeniczny postęp techniczny ($m=0$), w gospodarce ma miejsce permanentny wzrost gospodarczy (w kategoriach *p.c.*).

Z dowodu Twierdzenia 6.5 wynika, że jedynym założeniem w modelu, które wyklucza taką możliwość, jest warunek Inady: $\lim_{\bar{k}\to\infty} f_{\bar{k}} = \lim_{\bar{h}\to\infty} f_{\bar{h}} = 0$ [14]. Uchylając teraz to założenie, przypomnimy wzory na elastyczność $\bar{h}$ względem $\bar{k}$ dla krzywych podziału $\bar{h}=g_1(\bar{k})$ ($\dot{\bar{k}}=0$) i $\bar{h}=g_2(\bar{k})$ ($\dot{\bar{h}}=0$):

$$\varepsilon(g_1)=\frac{d\bar{h}}{d\bar{k}}\frac{\bar{k}}{\bar{h}}=\frac{1-\alpha(\bar{k},\bar{h})}{\beta(\bar{k},\bar{h})}, \qquad \varepsilon(g_2)=\frac{d\bar{h}}{d\bar{k}}\frac{\bar{k}}{\bar{h}}=\frac{\alpha(\bar{k},\bar{h})}{1-\beta(\bar{k},\bar{h})}. \tag{6.46}$$

Na podstawie rysunku 6.2 wnioskujemy, że w rozważanym teraz przypadku, ze względu na istnienie asymptot ukośnych dla obu krzywych podziału $\bar{h}=g_1(\bar{k})$ i $\bar{h}=g_2(\bar{k})$, wartości obu wskaźników elastyczności (6.46) dążą w granicy (dla $\bar{k}\to\infty$ i $\bar{h}\to\infty$) do jedności. Stąd oraz z (6.46) wynika z kolei, że zachodzi wówczas:

[14] Wynika to także ze wzorów (6.21), określających nachylenie krzywych podziału $\bar{h}=g_1(\bar{k})$ ($\dot{\bar{k}}=0$) i $\bar{h}=g_2(\bar{k})$ ($\dot{\bar{h}}=0$). Warunek Inady $\lim_{\bar{k}\to\infty} f_{\bar{k}} = \lim_{\bar{h}\to\infty} f_{\bar{h}} = 0$ gwarantuje bowiem, że zachodzą równania: $\lim_{\bar{k},\bar{h}\to\infty} g_1'(\bar{k})=\infty$ oraz $\lim_{\bar{k},\bar{h}\to\infty} g_2'(\bar{k})=0$, co wyklucza sytuację przedstawioną na rysunku 6.2.

$\lim\limits_{\bar{k},\bar{h}\to\infty} \alpha(\bar{k},\bar{h})+\beta(\bar{k},\bar{h}) \to 1^{-}$, czyli udział pracy L w produkcie, $1-\alpha(\bar{k},\bar{h})+\beta(\bar{k},\bar{h})$, maleje w granicy do zera.

O ile sytuację taką uznalibyśmy za nieprawdopodną w kategoriach modelu Solowa, w którym jedynym czynnikiem produkcji poza pracą jest kapitał rzeczowy, o tyle uwzględnienie akumulacji kapitału ludzkiego czyni z niej przynajmniej hipotezę, której *a priori* odrzucić nie możemy. Zauważmy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna ani ze „stylizowanymi faktami" wzrostu gospodarczego, przytoczonymi w rozdziale drugim, z których wynikają stałe w przybliżeniu udziały kapitału i pracy w produkcie[15], ani także z argumentami teoretycznymi rozważanymi w rozdziale czwartym, wspierającymi przekonanie o większej od jedności elastyczności krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał (rzeczowy) względem technicznego uzbrojenia pracy (relacji kapitału do pracy). Co więcej, ustalenia płynące ze strony programu badawczego związanego z teorią kapitału ludzkiego (o których wspominaliśmy w rozdziale piątym), wspierają zdroworozsądkowe przekonanie o rosnącym w miarę postępu materialnego i cywilizacyjnego społeczeństw względnym udziale wydatków determinujących zdolność zarobkową (produktywność) ich członków, i tym samym mających raczej charakter akumulacji szeroko pojętego kapitału, a nie „czystej" konsumpcji, zaspokajającej wyłącznie bieżące potrzeby. Konsekwentne przemyślenie idei stojących za założeniami przedstawionego w tym rozdziale modelu sugeruje również odpowiedź na pytanie, jak duży jest współcześnie udział pracy „surowej" w wynagrodzeniach otrzymywanych za pracę i jaka jest tendencja historyczna w tym zakresie. Zauważmy, że zgodnie z logiką tych założeń, przez pracę reprezentowaną przez zmienną L powinniśmy rozumieć dokładnie to samo, co mieli na myśli klasycy ekonomii, formułując „spiżowe prawo płac".

Powyższe uwagi wskazują jedynie pewien kierunek myślenia na temat źródeł długofalowego wzrostu gospodarczego. Teoretyczna praca w tym kierunku musiałaby polegać na powiązaniu (pozytywnym) elastyczności produktu względem kapitału ludzkiego, $\beta(\bar{k},\bar{h})$, z poziomem tego kapitału (ewentualnie również kapitału rzeczowego), lub, mówiąc ogólnie, na określeniu determinant większej od jedności elastyczności krańcowej stopy substytucji szeroko pojętego kapitału przez pracę L

[15] Na podstawie danych empirycznych odnośnie kształtowania się relatywnych udziałów wynagrodzeń pracy i kapitału w produkcie nie zweryfikowano jak dotąd ustaleń Kaldora w tym zakresie. Zob. np. B. Valdes, *Economic Growth. Theory, Empirics and Policy*, Edward Legar Publishing, Inc., Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA, 1999, s. 11 – 12.

względem poziomu tego kapitału „przypadającego na” bądź „ucieleśnionego w” pojedynczym pracowniku. Co więcej, charakter tej determinacji nie musi wynikać z przesłanek natury czysto technologicznej, lecz może mieć swoje pierwotne źródła w sekularnych zmianach w preferencjach społeczeństw co do rodzaju konsumowanych dóbr. O ile w przypadku kapitału rzeczowego idea taka mogła wydawać się ekonomistom w przeszłości mało wiarygodna, o tyle w przypadku kapitału ludzkiego wydaje się całkiem rozsądną hipotezą. Dane empiryczne mówiące o rosnącym udziale usług w strukturze produktu w rozwiniętych gospodarkach nie odzwierciedlają przecież wzrostu popytu na dobra wytwarzane przy dużym udziale pracy „surowej”, lecz właśnie kapitału ludzkiego. Wzrost przeciętnego poziomu kapitału ludzkiego w społeczeństwach przesuwa niewątpliwie strukturę konsumpcji w kierunku dóbr produkowanych przy relatywnie większym udziale tego kapitału („*H*-chłonnych”). Łącząc obie hipotezy, otrzymujemy powszechny w ekonomii mechanizm dodatniego sprzężenia zwrotnego.

Przedstawione tutaj hipotezy wskazują również na pewne możliwe punkty styczności pomiędzy teorią wzrostu a teorią rozwoju gospodarczego, konieczne dla odbudowania współpracy po trwającym od kilku dziesięcioleci rozłamie.

Rozdział siódmy

Możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w modelu z kapitałem ludzkim

7.1. Wrażliwość stanu stacjonarnego na zmiany wartości instrumentów polityki fiskalnej

Podobnie jak w przypadku modelu Solowa, model analizowany w rozdziale szóstym nie przewiduje możliwości oddziaływania państwa na stopę długofalowego wzrostu gospodarczego poprzez politykę fiskalną. Wynika to z faktu, że stopa wzrostu równomiernego nie zależy od stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, s_K, s_H. Z równań dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, postaci (zob. (6.12) - (6.13)):

$$\dot{\bar{k}} = s_K f(\bar{k}, \bar{h}) - (n + m + \delta_K)\bar{k}, \tag{7.1}$$

$$\dot{\bar{h}} = s_H f(\bar{k}, \bar{h}) - (n + m + \delta_H)\bar{h}. \tag{7.2}$$

wynika, że wzrost stóp inwestycji powoduje jedynie przejściowe podniesienie stopy wzrostu gospodarczego powyżej stopy naturalnej $n + m$ i wzrost produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$.

Załóżmy, że przy danych stopach s_K, s_H gospodarka znajduje się w stanie stacjonarnym $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$. Oznacza to, że spełnione są równania (zob. (6.14) - (6.15)):

$$0 = s_K f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n + m + \delta_K)\bar{k}_e, \tag{7.3}$$

$$0 = s_H f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n + m + \delta_H)\bar{h}_e. \tag{7.4}$$

Jeżeli zwiększymy teraz stopę inwestycji s_K do poziomu $s_K' > s_K$, z równania (7.1) otrzymamy $\dot{\bar{k}} > 0$. Wzrost $\bar{k}$ powyżej $\bar{k}_e$ oznacza, że zgodnie z równaniem (7.2) zachodzi również $\dot{\bar{h}} > 0$. Wielkości $\bar{k}$ i $\bar{h}$ rosną, zmierzając asymptotycznie do nowego stanu stacjonarnego $(\bar{k}_e', \bar{h}_e') > (\bar{k}_e, \bar{h}_e)$. Wzrost $\bar{k}$ i $\bar{h}$ oznacza oczywiście wzrost $\bar{y}$, zatem produkt Y w okresie przejścia od jednego do drugiego stanu stacjonarnego rośnie ze stopą wyższą od $n + m$. Analogiczne rozumowanie dotyczy zwiększenia stopy inwestycji s_H.

W tym jednakże ograniczonym zakresie siła potencjalnego oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy jest teraz zwielokrotniona ze względu na wyższą elastyczność produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stopy inwestycji w kapitał rzeczowy, $\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e}$, a zakres tego oddziaływania rozszerzony o możliwość publicznych inwestycji w kapitał ludzki.

Włączamy teraz do modelu państwo (sektor budżetowy), w sposób analogiczny, jak uczyniliśmy to w przypadku podstawowej wersji modelu neoklasycznego w rozdziale trzecim. Równania bilansujące dochody i wydatki sektora budżetowego i sektora prywatnego mają teraz postać następującą:

$$\tau Y = s_K^B \tau Y + s_H^B \tau Y + C^B,$$
$$(1-\tau)Y = s_K^P (1-\tau)Y + s_H^P (1-\tau)Y + C^P,$$

gdzie τ jest stopą redystrybucji dochodu przez budżet ($0 \le \tau \le 1$), s_K^B, s_H^B oznaczają stopy inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy, ludzki (przy czym $s_K^B, s_H^B \ge 0$, $s_K^B + s_H^B \le 1$), s_K^P, s_H^P - analogiczne stopy inwestycji prywatnych ($s_K^P, s_H^P \ge 0$, $s_K^P + s_H^P \le 1$), natomiast C^B i C^P – konsumpcję sektora budżetowego i prywatnego.

Łączne inwestycje obu sektorów w kapitał rzeczowy i ludzki wynoszą, odpowiednio, $s_K Y$ i $s_H Y$, gdzie:

$$s_K = \tau s_K^B + (1-\tau) s_K^P, \qquad s_H = \tau s_H^B + (1-\tau) s_H^P, \tag{7.5}$$

oznaczają społeczne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy, ludzki.

Na podstawie (7.5) oraz dodatnich elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, danych wzorami (zob. (6.26) - (6.27)):

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{\bar{y}_e} = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} > 0, \tag{7.6}$$

$$\varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{\bar{y}_e} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} > 0, \tag{7.7}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczają stałe poziomy elastyczności produktu względem kapitału, odpowiednio, rzeczowego i ludzkiego w stanie stacjonarnym (zob.

definicje (6.18)), wnioskujemy, że wzrost stóp inwestycji budżetowych, s_K^B, s_H^B, przyczynia się (*ceteris paribus*) do wzrostu produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\overline{y}_e$. Nieco inaczej jest w przypadku stopy redystrybucji, τ. Ponieważ elastyczność $\overline{y}_e$ względem τ spełnia równanie:

$$\varepsilon_{\tau}^{\overline{y}_e} = \frac{\partial \overline{y}_e}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{\overline{y}_e} = \frac{\partial \overline{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{\partial s_K}{\partial \tau} + \frac{\partial \overline{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{\partial s_H}{\partial \tau} = \frac{\tau(s_K^B - s_K^P)}{\tau s_K^B + (1-\tau)s_K^P} \varepsilon_{s_K}^{\overline{y}_e} + \frac{\tau(s_H^B - s_H^P)}{\tau s_H^B + (1-\tau)s_H^P} \varepsilon_{s_H}^{\overline{y}_e}, \qquad (7.8)$$

to odpowiedź na pytanie o wpływ stopy redystrybucji na poziom produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\overline{y}_e$, zależy od relacji pomiędzy stopami inwestycji prywatnych i budżetowych. Jak wynika z (7.8), jeżeli $s_K^B \geq s_K^P, s_H^B \geq s_H^P$ ($s_K^B \leq s_K^P, s_H^B \leq s_H^P$) oraz $s_K^B \neq s_K^P \vee s_H^B \neq s_H^P$, to wzrost τ prowadzi do wzrostu (spadku) $\overline{y}_e$. Rezultat ten w oczywisty sposób jest pochodną faktu, że wzrost społecznych stóp inwestycji zarówno w kapitał rzeczowy, jak i ludzki, wpływa pozytywnie na $\overline{y}_e$, zatem w sytuacji, gdy sektor budżetowy charakteryzuje się wyższą (niższą), w porównaniu z sektorem prywatnym, stopą inwestycji w jeden rodzaj kapitału i jednocześnie nie niższą (nie wyższą) – w drugi, wzrost stopy redystrybucji dochodu przez budżet podnosi (obniża) $\overline{y}_e$. Jeżeli stopy inwestycji budżetowych są równe odpowiednim stopom inwestycji prywatnych, $s_K^B = s_K^P$, $s_H^B = s_H^P$, podział produktu pomiędzy oba sektory nie wpływa na społeczne stopy inwestycji, a zatem również na $\overline{y}_e$. Natomiast w sytuacjach, gdy $s_K^B \geq s_K^P, s_H^B \leq s_H^P$ lub $s_K^B \leq s_K^P, s_H^B \geq s_H^P$, czyli gdy sektor budżetowy charakteryzuje się wyższą – w porównaniu z sektorem prywatnym – stopą inwestycji w jeden z rodzajów kapitału, zaś niższą – w drugi, istnieje stopa redystrybucji τ^* maksymalizująca stacjonarny poziom produktu *njep*, $\overline{y}_e$. Przyrównując lewą stronę (7.8) do zera i podstawiając za $\varepsilon_{s_K}^{\overline{y}_e}$ i $\varepsilon_{s_H}^{\overline{y}_e}$ prawe strony równań (7.6) - (7.7), po przekształceniach otrzymujemy:

$$\tau^* = \frac{1}{\alpha + \beta}\left(\beta \frac{s_K^P}{s_K^P - s_K^B} + \alpha \frac{s_H^P}{s_H^P - s_H^B}\right).$$

Na podstawie (7.8) nietrudno sprawdzić, że dla $0 < \tau < \tau^*$, zachodzi $\varepsilon_{\tau}^{\overline{y}_e} > 0$, czyli $\overline{y}_e$ rośnie wraz ze wzrostem τ, zaś dla $\tau^* < \tau < 1$, zachodzi $\varepsilon_{\tau}^{\overline{y}_e} < 0$, czyli $\overline{y}_e$ maleje wraz ze wzrostem τ.

7.2. „Złota reguła akumulacji” kapitału rzeczowego i ludzkiego

Analogicznie jak w przypadku podstawowej wersji modelu neoklasycznego (zob. punkt 3.1), wzrost produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$, wywołany wzrostem stóp inwestycji, nie oznacza automatycznie wzrostu konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{c}_e$. Innymi słowy, wzrost zamożności społeczeństwa, mierzonej poziomem produktu *p.c.*, nie musi się przenosić na wzrost dobrobytu społeczeństwa, mierzonego poziomem konsumpcji *p.c.*. Można wyznaczyć takie wartości społecznych stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, po przekroczeniu których dodatkowy produkt, pochodzący ze zwiększonych zasobów kapitału *njep*, nie wystarcza do utrzymania tych zasobów na wyższym poziomie, co powoduje spadek konsumpcji *njep*, a zatem pogorszenie dobrobytu społecznego, także w perspektywie długookresowej.

Jeśli wydatki na edukację, zdrowie itp. traktujemy jako inwestycje (w kapitał ludzki), to poziom właściwych wydatków konsumpcyjnych *njep* w gospodarce możemy określić wzorem:

$$\bar{c} = (1 - s_K - s_H)\, f(\bar{k}, \bar{h}). \tag{7.9}$$

Ze względu na (7.1) - (7.2), na ścieżce wzrostu równomiernego konsumpcja *njep*, $\bar{c}_e$, wyraża się wzorem:

$$\bar{c}_e = f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n + m + \delta_K)\bar{k}_e - (n + m + \delta_H)\bar{h}_e, \tag{7.10}$$

Twierdzenie 7.1. Stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, przy których konsumpcja *njep* w stanie stacjonarnym osiąga poziom maksymalny, dane są przez:

$$s_K^* = \alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \quad \wedge \quad s_H^* = \beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e), \tag{7.11}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczają, jak dotąd, stałe elastyczności produktu względem kapitału, odpowiednio, rzeczowego i ludzkiego w stanie stacjonarnym.

Dowód. Warunkiem koniecznym maksymalizacji $\bar{c}_e$ względem poziomów kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep* w stanie stacjonarnym jest:

$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial \bar{k}_e} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial \bar{h}_e} = 0. \tag{7.12}$$

Z (7.10) wynika, że funkcja $\bar{c}_e(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, jako suma silnie wklęsłej funkcji $f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i funkcji liniowej, jest funkcją silnie wklęsłą. W punkcie spełniającym warunek (7.12) istnieje zatem jednoznacznie określone globalne maksimum funkcji $\bar{c}_e(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Na podstawie (7.10), warunek (7.12) przyjmuje postać następującą:

$$f_{\bar{k}}^{*} = n + m + \delta_K \qquad \wedge \qquad f_{\bar{h}}^{*} = n + m + \delta_H \,, \tag{7.13}$$

gdzie $f_{\bar{k}}^{*} = f_{\bar{k}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $f_{\bar{h}}^{*} = f_{\bar{h}}(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczają stałe poziomy krańcowych produktywności kapitału rzeczowego i ludzkiego w stanie stacjonarnym.

Korzystając (7.3) i (7.4) oraz definicji elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego (zob. definicje (6.18)), mamy:

$$f_{\bar{k}}^{*} = \frac{n + m + \delta_K}{s_K} \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \quad \wedge \quad f_{\bar{h}}^{*} = \frac{n + m + \delta_H}{s_H} \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \,. \tag{7.14}$$

Z (7.13) i (7.14) otrzymujemy wzory (7.11) na optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki.

■

Analogicznie jak w modelu Solowa, zgodnie ze złotą regułą akumulacji Phelpsa optymalne, z punktu widzenia dobrobytu społecznego, stopy inwestycji są równe udziałom kapitału rzeczowego i ludzkiego w produkcie. Inaczej mówiąc, gospodarka osiąga najwyższą konsumpcję *njep* na ścieżce wzrostu równomiernego, jeżeli całość dochodów osiąganych przez dany rodzaj kapitału przeznacza się na jego akumulację. Ponieważ definicja kapitału jest teraz szersza, to, aby maksymalizować poziom konsumpcji na ścieżce wzrostu równomiernego, gospodarka powinna teraz znacznie większą procentową część produktu przeznaczać na inwestycje. Przy $\alpha = 1/3$ i $\beta = 1/3$ na czystą konsumpcję przypadać powinno zaledwie 1/3 produktu (w porównaniu z 2/3 produktu w modelu Solowa). Z uwagi na fakt, iż w rzeczywistych gospodarkach stopy inwestycji są znacznie niższe od tych wynikających ze „złotej reguły”[1], państwo może w znacznym stopniu pobudzać inwestycje bez ryzyka przeinwestowania, powodując tym samym przyspieszenie wzrostu gospodarczego w okresie przejścia gospodarki z jednej ścieżki wzrostu równomiernego na drugą, o wyższych poziomach produktu i konsumpcji *njep*.

Uwaga 7.1. Wnioski odnoszące się do optymalnych stóp inwestycji należy uściślić w związku z problemem niemierzalności części produktu (patrz Uwagi 6.1, 6.3, 6.4, 6.5 w rozdziale szóstym). W skrajnym przypadku, gdy całość ekonomicznych kosztów

[1] W sprawie stóp inwestycji w kapitał rzeczowy, zob. przypis 4 w rozdziale trzecim. Przekrojowa analiza stóp inwestycji w kapitał edukacyjny i zdrowotny w gospodarstwach domowych w Polsce znajduje się w B. Liberda, *Inwestycje w kapitał ludzki a stopa oszczędzania gospodarstw domowych w Polsce*, Ekonomista, nr 4, 2005, s. 429 – 447.

produkcji kapitału ludzkiego stanowią utracone dochody, optymalna, wynikająca ze złotej reguły akumulacji Phelpsa, stopa mierzalnych inwestycji w kapitał rzeczowy, wyraża się wzorem: $s_K^{m\ *} = \dfrac{\alpha}{1-\beta} > s_K^{\ *}$, gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$. Przy założonych wartościach parametrów $\alpha = \beta = 1/3$ daje to równomierny podział mierzalnego produktu pomiędzy konsumpcję i akumulację kapitału rzeczowego.

7.3. Optymalne stopy inwestycji publicznych w warunkach braku reakcji podmiotów prywatnych na zmiany w polityce fiskalnej

Załóżmy teraz, że dane są dowolnie ustalone stopy inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P oraz stopa redystrybucji τ. Znając optymalne społeczne stopy inwestycji, $s_K^{\ *}$, $s_H^{\ *}$, określone przez (7.11), w oparciu o równania (7.5) możemy wyznaczyć optymalne stopy inwestycji budżetowych, $s_K^{B\ *}$, $s_H^{B\ *}$:

$$s_K^{B\ *} = \frac{\alpha - s_K^P(1-\tau)}{\tau}, \qquad s_H^{B\ *} = \frac{\beta - s_H^P(1-\tau)}{\tau}. \tag{7.15}$$

Należy podkreślić, że równania (7.15) mają sens ekonomiczny tylko wtedy, gdy:

$$s_K^{B\ *},\, s_H^{B\ *} \geq 0, \qquad s_K^{B\ *} + s_H^{B\ *} \leq 1. \tag{7.16}$$

Jeżeli nie jest spełniony warunek (7.16), to w gospodarce o danych stopach inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P i stopie redystrybucji τ nie jest możliwa akumulacja kapitału zgodna ze ”złotą regułą” Phelpsa.

Zagadnienie wyznaczenia optymalnych stóp inwestycji budżetowych można sformułować w postaci następującego zadania warunkowej optymalizacji nieliniowej:

$$\begin{gathered} \bar{c}_e = \left(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P\right) f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \quad \xrightarrow{s_K^B,\, s_H^B} \quad \max \\ s_K^B, s_H^B \geq 0, \qquad s_K^B + s_H^B \leq 1. \end{gathered} \tag{7.17}$$

Funkcja celu problemu (7.17), sformułowana na podstawie (7.9) i (7.5), przedstawia konsumpcję *njep* w stanie stacjonarnym. Jej argumentami są stopy inwestycji budżetowych s_K^B, s_H^B. Jest to funkcja złożona, gdyż $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$ są też funkcjami s_K^B, s_H^B.

Warunki optymalności Kuhna – Tuckera mają postać[2]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial s_K^B} \le 0 \quad s_K^B \ge 0 \quad s_K^B \frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial s_H^B} \le 0 \quad s_H^B \ge 0 \quad s_H^B \frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - s_K^B - s_H^B \ge 0 \quad \lambda \ge 0 \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{aligned} \tag{7.18}$$

gdzie $L = L(s_K^B, s_H^B)$ oznacza funkcję Lagrange'a, daną wzorem:

$$L = \bar{c}_e(s_K^B, s_H^B) + (1 - s_K^B - s_H^B)\lambda,$$

zaś λ - mnożnik Lagrange'a.

Pochodne cząstkowe funkcji $L(s_K^B, s_H^B)$ względem s_K^B i s_H^B wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} - \lambda, \qquad \frac{\partial L}{\partial s_H^B} = \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\tau - \lambda. \tag{7.19}$$

Korzystając z (7.17) oraz równań (7.6) - (7.7), pochodne cząstkowe funkcji $\bar{c}_e(s_K^B, s_H^B)$ względem s_K^B i s_H^B można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} &= \left[\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \frac{\left(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P\right)}{\tau s_K^B + (1-\tau)s_K^P} - 1 \right] f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\tau, \\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} &= \left[\frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \frac{\left(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P\right)}{\tau s_H^B + (1-\tau)s_H^P} - 1 \right] f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\tau. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Schemat znajdowania rozwiązań zadania zamieszczono w tabeli 7.1.

[2] W sprawie rozwiązywania problemów optymalizacji nieliniowej zob. A.C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994, s. 714 – 751.

Tabela 7.1

Schemat znajdowania rozwiązań w zadaniu na optymalizację warunkową stóp inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy i ludzki

nr	Założenia o stopach $s_K^B,\ s_H^B$	Zredukowane warunki Kuhna - Tuckera	Ograniczenia na $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}, \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}$
1	$s_K^B = 0,\ s_H^B = 1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} \le 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0,\ \lambda \ge 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} \le \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}$, $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} \ge 0$
2	$s_K^B = 0,\ s_H^B = 0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} \le 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} \le 0,\ \lambda = 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} \le 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} \le 0$
3	$s_K^B = 1,\ s_H^B = 0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} \le 0,\ \lambda \ge 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} \ge 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} \le \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}$
4	$s_K^B > 0,\ s_H^B > 0,$ $s_K^B + s_H^B < 1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0,\ \lambda = 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} = 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} = 0$
5	$s_K^B > 0;\ s_H^B > 0,$ $s_K^B + s_H^B = 1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0,\ \lambda \ge 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} = \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} \ge 0$
6	$0 < s_K^B < 1,\ s_H^B = 0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} \le 0,\ \lambda = 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} = 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} \le 0$
7	$s_K^B = 0,\ 0 < s_H^B < 1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} \le 0$, $\frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0,\ \lambda = 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} \le 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B} = 0$

źródło: obliczenia własne

Przy różnych założeniach o stopach $s_K^B,\ s_H^B$ (pierwsza kolumna tabeli 7.1), warunki (7.18) redukują się do warunków przedstawionych w drugiej kolumnie tabeli 7.1. Stąd, uwzględniając (7.19), otrzymujemy warunki przedstawione w trzeciej kolumnie tabeli 7.1.

Z warunków w pierwszej i trzeciej kolumnie tabeli 7.1 oraz z równań (7.20) uzyskujemy ograniczenia na parametry zadania (obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych $s_K^P,\ s_H^P$) oraz - odpowiadające im - stopy inwestycji budżetowych $s_K^{B\ *}$, $s_H^{B\ *}$, spełniające warunki optymalności (7.18). Otrzymane wyniki przedstawione są w tabeli 7.2.

Tabela 7.2

Stopy inwestycji budżetowych spełniające warunki maksymalizacji konsumpcji njep w stanie stacjonarnym, odpowiadające danym stopom inwestycji prywatnych

	Stopy inwestycji budżetowych $s_K^B{}^*$, $s_H^B{}^*$	Obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P
1	$s_K^B{}^* = 0$, $s_H^B{}^* = 1$	$s_K^P \geq \frac{\tau + (1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, $s_K^P \leq \frac{1}{1-\tau} - \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{\tau + (1-\tau)s_H^P}{1-\tau}$
2	$s_K^B{}^* = 0$, $s_H^B{}^* = 0$	$s_K^P \geq \frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{1-\beta}$, $s_K^P \geq \frac{1}{1-\tau} - \frac{1-\alpha}{\beta} s_H^P$
3	$s_K^B{}^* = 1$, $s_H^B{}^* = 0$	$s_K^P \leq \frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{\tau}{1-\tau}$, $s_K^P \leq \frac{\alpha}{\beta} s_H^P - \frac{\tau}{1-\tau}$
4	$s_K^B{}^* = \frac{\alpha-(1-\tau)s_K^P}{\tau}$, $s_H^B{}^* = \frac{\beta-(1-\tau)s_H^P}{\tau}$	$s_K^P \leq \frac{\alpha}{1-\tau}$, $s_H^P \leq \frac{\beta}{1-\tau}$, $s_K^P \geq \frac{\alpha+\beta-\tau}{1-\tau} - s_H^P$
5	$s_K^B{}^* = \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \frac{\alpha s_H^P - \beta s_K^P}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $s_H^B{}^* = \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \frac{\beta s_K^P - \alpha s_H^P}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta} s_H^P - \frac{\tau}{1-\tau} \leq s_K^P \leq \frac{\tau + (1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, $s_K^P \leq \frac{\alpha+\beta-\tau}{1-\tau} - s_H^P$
6	$s_K^B{}^* = \frac{1-(1-\tau)s_H^P}{\tau} \cdot \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{1-\tau}{\tau} s_K^P$, $s_H^B{}^* = 0$	$s_H^P \geq \frac{\beta}{1-\tau}$, $s_K^P \geq \frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{\tau}{1-\tau}$, $s_K^P \leq \frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau} \cdot \frac{\alpha}{1-\beta}$
7	$s_K^B{}^* = 0$, $s_H^B{}^* = \frac{1-(1-\tau)s_K^P}{\tau} \cdot \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{1-\tau}{\tau} s_H^P$	$s_K^P \geq \frac{\alpha}{1-\tau}$, $s_K^P \geq -\frac{1-\alpha}{\beta}\left(\frac{\tau}{1-\tau} + s_H^P\right) + \frac{1}{1-\tau}$, $s_K^P \leq -\frac{1-\alpha}{\beta} s_H^P + \frac{1}{1-\tau}$

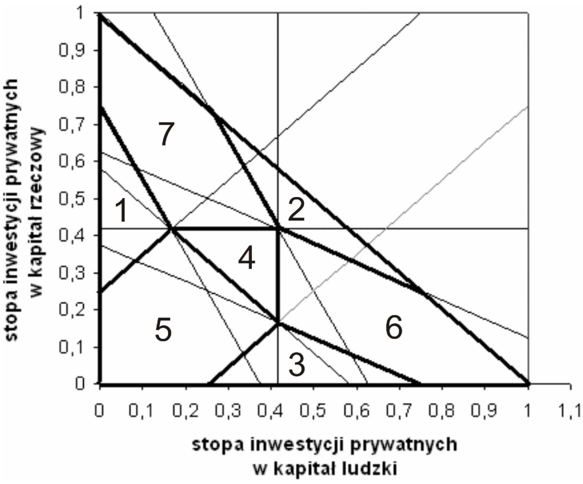
źródło: obliczenia własne

Na rysunku 7.1 przedstawiono graficzne prezentacje obszarów zmienności stóp inwestycji prywatnych z tabeli 7.2, otrzymanych dla przykładowych wartości parametrów α, β i τ. Na stopy inwestycji prywatnych nałożono dodatkowo ograniczenia: $s_K^P, s_H^P \geq 0$; $s_K^P + s_H^P \leq 1$.

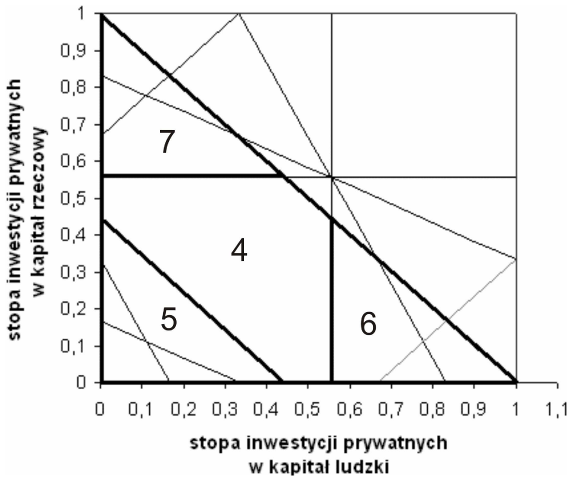
Rysunek 7.1

Obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P

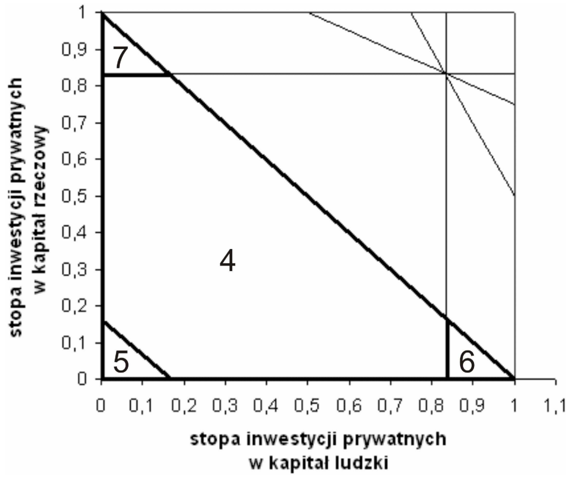
$\alpha = 1/3, \ \beta = 1/3, \ \iota = 0,2$



$\alpha = 1/3, \ \beta = 1/3, \ \iota = 0,4$



$\alpha = 1/3,\ \beta = 1/3,\ \iota = 0,6$



źródło: obliczenia własne w oparciu o symulacje przeprowadzone przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel

Kluczowym wnioskiem, wynikającym z analizy tabeli 7.2, jest spostrzeżenie, że sektor budżetowy ma możliwość zagwarantowania realizacji „złotej reguły akumulacji" - poprzez ustalenie odpowiednich stóp inwestycji budżetowych - jedynie wtedy, gdy stopy inwestycji prywatnych spełniają warunki w czwartym wierszu tabeli 7.2 (obszar 4 na rysunku 7.1). W szczególności, przy względnie niskich stopach inwestycji prywatnych w oba rodzaje kapitału (obszar 5), polityka inwestycyjna państwa nie jest w stanie wynieść gospodarki na ścieżkę wzrostu równomiernego o najwyższym możliwym poziomie społecznej konsumpcji.

Z przeprowadzonej analizy symulacyjnej (zob. rysunek 7.1) wynika ponadto, że szanse na realizację tego zadania są tym większe, im wyższa jest stopa redystrybucji dochodu przez budżet τ. Stawiając problem od drugiej strony, można zadać pytanie, przy jakich wartościach stopy redystrybucji osiągnięcie „złotych" poziomów społecznych stóp inwestycji dzięki odpowiedniej polityce inwestycyjnej państwa jest w ogóle możliwe. Nakładając ograniczenia (7.16) na stopy inwestycji budżetowych wyznaczone zgodnie z (7.15) oraz uwzględniając warunek $0 \le \tau \le 1$, wnioskujemy, że przy danych $\alpha, \beta, s_K^P, s_H^P$, ustalona przez państwo stopa redystrybucji powinna znajdować się w przedziale:

$$\frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P}\le\tau\le 1,\quad gdy\ s_K^P\le\alpha,\quad s_H^P\le\beta,$$
$$\max\left\{\frac{s_K^P-\alpha}{s_K^P},\frac{s_H^P-\beta}{s_H^P}\right\}\le\tau\le 1,\quad gdy\ s_K^P\ge\alpha,\quad s_H^P\ge\beta,$$
$$\max\left\{\frac{s_K^P-\alpha}{s_K^P},\frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P}\right\}\le\tau\le 1,\quad gdy\ s_K^P\ge\alpha,\quad s_H^P\le\beta,$$
$$\max\left\{\frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P},\frac{s_H^P-\beta}{s_H^P}\right\}\le\tau\le 1,\quad gdy\ s_K^P\le\alpha,\quad s_H^P\ge\beta.$$

Uwaga 7.2. Warto zasygnalizować również możliwość poszukiwania optymalnej stopy redystrybucji τ, przy danych, dowolnie ustalonych stopach inwestycji prywatnych i budżetowych. Problem warunkowej optymalizacji nieliniowej ma wtedy postać:

$$\max\ \bar{c}_e(\tau),\ \text{przy warunku}\ 0\le\tau\le 1,$$

gdzie funkcja $\bar{c}_e(\tau)$ jest postaci:

$$\bar{c}_e(\tau)=\left(1-\tau s_K^B-(1-\tau)s_K^P-\tau s_H^B-(1-\tau)s_H^P\right)f(\bar{k}_e(\tau),\bar{h}_e(\tau)).$$

Nietrudno wykazać, że stopa redystrybucji τ spełniająca warunki konieczne optymalności:

$$\frac{\partial L}{\partial\tau}\le 0\quad \tau\ge 0\quad \tau\frac{\partial L}{\partial\tau}=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=1-\tau\ge 0\quad \lambda\ge 0\quad \lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0,$$

gdzie $L=L(\tau)=\bar{c}_e(\tau)+(1-\tau)\lambda$ oznacza funkcję Lagrange'a, wyraża się wzorem:

$$\tau=\begin{cases}0 & gdy\ \ s_K^B\ge s_K^P\ge\alpha,\ s_H^B\ge s_H^P\ge\beta\ \vee\ s_K^B\le s_K^P\le\alpha,\ s_H^B\le s_H^P\le\beta\\ & \vee\ \ s_K^B\ge s_K^P\ge\alpha,\ s_H^B\le s_H^P\le\beta\ \vee\ s_K^B\le s_K^P\le\alpha,\ s_H^B\ge s_H^P\ge\beta,\\ 1 & gdy\ \ s_K^P\le s_K^B\le\alpha,\ s_H^P\le s_H^B\le\beta\ \vee\ s_K^P\ge s_K^B\ge\alpha,\ s_H^P\ge s_H^B\ge\beta\\ & \vee\ \ s_K^P\le s_K^B\le\alpha,\ s_H^P\ge s_H^B\ge\beta\ \vee\ s_K^P\ge s_K^B\ge\alpha,\ s_H^P\le s_H^B\le\beta,\\ dowolne & gdy\ \ s_K^B=s_K^P,\ s_H^B=s_H^P,\\ \tau^* & w\ pozostaych\ przypadkach,\end{cases}$$

przy czym τ^* jest pierwiastkiem równania:

$$\frac{\partial\bar{c}_e}{\partial\tau}=-\left(\frac{\partial s_K}{\partial\tau}+\frac{\partial s_H}{\partial\tau}\right)f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)+\left(1-s_K-s_H\right)\left(\frac{\partial f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)}{\partial s_K}\frac{\partial s_K}{\partial\tau}+\frac{\partial f(\bar{k}_e,\bar{h}_e)}{\partial s_H}\frac{\partial s_H}{\partial\tau}\right)=0.$$

Korzystając z równań (7.6) - (7.7), dostajemy:

$$-\frac{1}{1-s_K-s_H}\left(\frac{\partial s_K}{\partial\tau}+\frac{\partial s_H}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{1-\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{s_K}\frac{\partial s_K}{\partial\tau}+\frac{\beta}{s_H}\frac{\partial s_H}{\partial\tau}\right)=0,$$

Podstawiając prawe strony (7.5) w miejsce s_K i s_H oraz : $\frac{\partial s_K}{\partial \tau} = s_K^B - s_K^P$ i $\frac{\partial s_H}{\partial \tau} = s_H^B - s_H^P$,

otrzymujemy:

$$\frac{(s_K^P + s_H^P) - (s_K^B + s_H^B)}{1 - \tau(s_K^B + s_H^B) - (1-\tau)(s_K^P + s_H^P)} + \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha(s_K^B - s_K^P)}{\tau s_K^B + (1-\tau)s_K^P} + \frac{\beta(s_H^B - s_H^P)}{\tau s_H^B + (1-\tau)s_H^P} \right) = 0 .$$

Ponieważ znalezienie formuły określającej wartość τ spełniającą powyższe równanie jest niezwykle skomplikowane rachunkowo, a sama postać tej formuły mało czytelna pod względem analitycznym, nie będziemy jej tutaj przedstawiać. Zauważmy tylko, że, ponieważ po przekształceniach uzyskujemy równanie kwadratowe, w ogólnym przypadku otrzymamy dwa pierwiastki, które – o ile tylko spełniają warunek $0 \le \tau \le 1$ - należy poddać dalszym testom. Intuicyjnie, można przypuszczać, że τ^* jest tym wyższe, im niższy jest moduł różnicy pomiędzy stopą inwestycji budżetowych w dany rodzaj kapitału i udziałem wynagrodzenia tego kapitału w produkcie oraz im wyższy jest moduł różnicy pomiędzy stopą inwestycji prywatnych w dany rodzaj kapitału i udziałem wynagrodzenia tego kapitału w produkcie. Ustalenia te, zdaniem autora, są na tyle intuicyjnie zrozumiałe, że nie wymagają komentarza. Z tego też powodu rezygnujemy z pełnej formalnej analizy zagadnienia.

Oczywiście każde działanie państwa zmierzające do podniesienia społecznych stóp inwestycji w kapitał rzeczowy bądź ludzki wiąże się z koniecznością przejściowego ograniczenia społecznej konsumpcji. Przedział czasu, w którym konsumpcja pozostaje na poziomie niższym niż ten, który byłby osiągany, gdyby stopy inwestycji nie uległy zmianie, możemy nazwać „okresem wyrzeczeń". Zakładając, że w punkcie wyjścia (przed zmianą stóp inwestycji) gospodarka znajduje się na pewnej ścieżce wzrostu równomiernego oraz $\delta_K = \delta_H = \delta$, udowodnimy następujące twierdzenie[3].

Twierdzenie 7.2. Dla niewielkich zmian stóp inwestycji z poziomów s_K i s_H do s'_K i s'_H długość okresu wyrzeczeń τ $(0 < \tau < \infty)$ w przybliżeniu wyraża się wzorem:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(1 - \frac{s_K}{(1 - s'_K - s_H)\varepsilon_{s_K}^y} - \frac{s_H}{(1 - s_K - s'_H)\varepsilon_{s_H}^y}\right)}{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)}, \tag{7.21}$$

[3] Zob. bardziej szczegółowe wyjaśnienia w punkcie 3.2.

gdzie $\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e}$, $\varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e}$ oznaczają elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stóp inwestycji w kapitał rzeczowy, ludzki, oraz $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Dowód. Ponieważ z założenia konsumpcja stanowi stałą część produktu, to dynamikę konsumpcji *njep* w pobliżu stanu stacjonarnego $\bar{c}_e$ można opisać wzorem analogicznym do wzoru (6.37), opisującego dynamikę produktu *njep* w pobliżu stanu stacjonarnego $\bar{y}_e$. Zatem:

$$\bar{c}(t) - \bar{c}_e \approx e^{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)t}(\bar{c}(0) - \bar{c}_e), \tag{7.22}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Niech $\bar{c}_e$ oznacza konsumpcję *njep* w stanie stacjonarnym dla stóp inwestycji s_K, s_H, a $\bar{c}_e{}'$ - dla stóp inwestycji s'_K i s'_H. Ponadto, niech $\bar{c}'(0)$ oznacza konsumpcję *njep* natychmiast po wzroście stóp inwestycji. Z założenia $\bar{c}'(0) < \bar{c}_e < \bar{c}_e{}'$.

Na podstawie (7.22) długość okresu τ stanowi rozwiązanie **(**względem t**)** następującego równania:

$$\bar{c}_e - \bar{c}_e{}' \approx e^{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)t}\left(\bar{c}'(0) - \bar{c}_e{}'\right),$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e{}', \bar{h}_e{}')$, $\beta = \beta(\bar{k}_e{}', \bar{h}_e{}')$.

Przekształcając logarytmicznie to równanie oraz podstawiając $\bar{c}_e = (1 - s_K - s_H)\bar{y}_e$, $\bar{c}_e{}' = (1 - s'_K - s'_H)\bar{y}_e{}'$, oraz $\bar{c}'(0) = (1 - s'_K - s'_H)\bar{y}_e$, uzyskujemy:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(\dfrac{(s'_K - s_K) + (s'_H - s_H)}{(1 - s'_K - s'_H)(\bar{y}_e - \bar{y}_e{}')}\bar{y}_e + 1\right)}{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)}.$$

Korzystając z definicji elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, $\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e}, \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e}$ (zob. (7.6) - (7.7)), możemy w przybliżeniu, dla niewielkich zmian s_K i s_H, napisać formułę (7.21).

■

Dla: $\alpha = \beta = 1/3$ oraz (n + m + δ) = 0,06 rocznie, wzrost s_K z poziomu s_K = 0,2 do $s'_K = 0,22$ (przy s_H = s'_H = 0,2) wiąże się z okresem wyrzeczeń o długości około 21 lat. Dłuższy „okresu wyrzeczeń”, w porównaniu z podstawową wersją modelu neoklasycznego (18 lat, dla takiej samej zmiany s_K), wynika z wolniejszego tempa zbieżności gospodarki do ścieżki wzrostu równomiernego (zob. punkt 6.3).

Na koniec zwracamy uwagę, że przyjmowane w tym punkcie pracy założenie o stałych, egzogenicznie danych stopach inwestycji prywatnych, s_K^P, s_H^P, oznacza, że podmioty sektora prywatnego w ogóle nie reagują na zmiany stopy redystrybucji dochodu przez budżet i podział wydatków budżetowych na konsumpcję i inwestycje[4]. Założenie to uchylimy w dalszej części tego rozdziału.

7.4. Dynamiczna maksymalizacja społecznego dobrobytu - problem społecznego planisty

Pamiętamy z rozdziału trzeciego (punkt 3.3), że wnioski odnośnie optymalnej z punktu widzenia dobrobytu społecznego stopy oszczędności (inwestycji) w gospodarce ulegają modyfikacji wraz z uwzględnieniem *explicite* preferencji społecznych co do czasowej struktury konsumpcji. Procedura endogenizacji społecznej stopy oszczędności pozwala ponadto na ustalenie, jaka konkretnie funkcja dobrobytu społecznego jest maksymalizowana (przy jakich preferencjach reprezentatywnego podmiotu co do rozkładu konsumpcji w czasie maksymalizowany jest społeczny dobrobyt) w gospodarce, która startując z dowolnego poziomu kapitału i produktu *njep*, zmierza w kierunku ścieżki wzrostu równomiernego związanej ze „złotą regułą akumulacji” Phelpsa. W tym punkcie pracy przedstawiamy podobną analizę z uwzględnieniem akumulacji kapitału ludzkiego.

[4] Zauważmy ponadto, że przeprowadzona analiza wpływu państwa na wzrost gospodarczy abstrahuje od problemu potencjalnych różnic w efektywności inwestycji sektora prywatnego i publicznego, a także występowania pozytywnych efektów zewnętrznych inwestycji budżetowych (np. inwestycji infrastrukturalnych, wydatków na naukę i edukację, itp.). Ostatnie ograniczenie wynika przy tym z ograniczeń strukturalnych samego neoklasycznego modelu wzrostu, na gruncie którego problemy takie, jak efekty zewnętrzne inwestycji, nie mogą być w należyty sposób potraktowane. Perspektywa formalnego rozpatrzenia tego zagadnienia otwiera się dopiero w teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego. Reprezentatywnym w tej kwestii modelem jest model oddziaływania polityki fiskalnej na wzrost gospodarczy R. Barro, w którym całość wydatków rządowych została ujęta jako wywołująca pozytywne efekty zewnętrzne w gospodarce, oddziałujące na wzrost wydajności czynników produkcji zatrudnionych w przedsiębiorstwach. Zob. R. J. Barro, *Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth*, Journal of Political Economics, October 1990, s. 103 – 125.

Przyjmując te same założenia o preferencjach społecznych odnośnie rozkładu konsumpcji w czasie, jak w punkcie 3.3, zapisujemy odpowiednie zadanie sterowania optymalnego[5]:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \overset{\bar{c},\, s_K}{\rightarrow} \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m-n>0, \tag{7.23}$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{k}}(t) = s_K(t)\, f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t), \\ &\dot{\bar{h}}(t) = \left(1-s_K(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t), \\ &\bar{k}(0),\ \bar{h}(0)>0, \\ &\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t)\geq 0, \end{aligned} \tag{7.24}$$

przy czym dla zapewnienia zbieżności całki zakładamy $\rho-(1-\gamma)m-n>0$.

Równania dynamiki dla zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$ są powtórzeniem (7.1) - (7.2), przy czym w drugim równaniu skorzystaliśmy z zależności (7.9). Rolę zmiennych sterujących przypisujemy zmiennym $\bar{c}(t)$ i $s_K(t)$.

W zapisie warunków koniecznych optymalności uwzględnimy tym razem warunki Kuhna-Tuckera ze względu na warunki nieujemności dla zmiennych stanu (zob. przypis 33 w rozdziale trzecim). Formułujemy zatem funkcję Lagrange'a:

$$L(t) = H(t) + \eta_K(t)\bar{k}(t) + \eta_H(t)\bar{h}(t),$$

gdzie $\eta_K(t), \eta_H(t)$ to mnożniki Lagrange'a odpowiadające ograniczeniom, odpowiednio, $\bar{k}(t)\geq 0$, $\bar{h}(t)\geq 0$, zaś hamiltonian $H(t)$ jest postaci:

$$\begin{aligned} H(t) = \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} &+ \lambda_K(t)\left[s_K(t)\, f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t)\right] + \\ &+ \lambda_H(t)\left[\left(1-s_K(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\right], \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_K(t)$, $\lambda_H(t)$ są mnożnikami Lagrange'a odpowiadającymi poszczególnym równaniom (7.24) dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$. Po pomnożeniu funkcji Lagrange'a przez $e^{(\rho-(1-\gamma)m-n)t}$, otrzymujemy tzw. funkcję Lagrange'a wartości bieżącej:

[5] Przyjęcie w analizie konkretnej postaci funkcji użyteczności podyktowane zostało zamiarem uzyskania formuł określających optymalną stopę oszczędności (inwestycji) na ścieżce wzrostu równomiernego i możliwości ich porównania ze stopą wynikającą z reguły Phelpsa. Należy podkreślić, że wszystkie wnioski uzyskane w tym i kolejnym punkcie pracy pozostają prawdziwe przy założeniu dowolnej postaci funkcji użyteczności spełniającej ograniczenia (3.13) podane w rozdziale trzecim.

$$L_C(t) = H_C(t) + \psi_K(t)\bar{k}(t) + \psi_H(t)\bar{h}(t),$$

przy czym hamiltonian wartości bieżącej jest postaci:

$$\begin{aligned} H_C(t) = \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta_K(t)\Big[s_K(t) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t)\Big] + \\ + \theta_H(t)\Big[\left(1-s_K(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\Big], \end{aligned} \tag{7.25}$$

zaś $\psi_K(t) = \eta_K(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m-n)t}$, $\psi_H(t) = \eta_H(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m-n)t}$, $\theta_K(t) = \lambda_K(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m-n)t}$ i $\theta_H(t) = \lambda_H(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m-n)t}$ są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej $\bar{c}(t) > 0$, pierwszy warunek zasady maksimum, dotyczący maksymalizacji funkcji Lagrange'a w całym horyzoncie optymalizacji względem zmiennej sterującej $\bar{c}(t)$, ma postać następującą:

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} = \bar{c}(t)^{-\gamma} - \theta_H(t) = 0, \tag{7.26}$$

Ponieważ, ze względu na zależność (7.9), równania dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$ można zapisać w następujący sposób:

$$\dot{\bar{k}}(t) = \left(1-s_H(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t),$$

$$\dot{\bar{h}}(t) = s_H(t) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t),$$

to odpowiadający tak przekształconemu problemowi dynamicznej optymalizacji (gdzie zamiast $s_K(t)$ rolę drugiej zmiennej sterującej odgrywa $s_H(t)$) hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} H_C(t) = \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta_K(t)\Big[\left(1-s_H(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t)\Big] + \\ + \theta_H(t)\Big[s_H(t) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\Big], \end{aligned} \tag{7.25a}$$

zaś pierwszy warunek zasady maksimum przybiera postać następującą:

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} = \frac{\partial H_C(t)}{\partial \bar{c}(t)} = \bar{c}(t)^{-\gamma} - \theta_K(t) = 0. \tag{7.26a}$$

Z zestawienia (7.26) i (7.26a) wynika, że:

$$\theta_K(t) = \theta_H(t) = \bar{c}(t)^{-\gamma}, \tag{7.27}$$

Zgodnie ze standardową interpretacją mnożników Lagrange'a jako cen dualnych dla zmiennych stanu (kapitału rzeczowego i ludzkiego), $\theta_K(t)$ i $\theta_H(t)$ mierzą zmianę wartości całki preferencji, czyli „sumy chwilowej użyteczności konsumpcji" w całym przedziale optymalizacyjnym, wywołaną krańcową zmianą poziomu kapitału, odpowiednio, rzeczowego i ludzkiego, w chwili *t*. Zgodnie z regułą optymalizacyjną wyrażoną w równaniu (7.27), optymalnym poziomem konsumpcji w chwili *t* jest taki poziom, przy którym krańcowa użyteczność bieżącej konsumpcji, $\bar{c}(t)^{-\gamma}$, zrównuje się z krańcowymi kosztami alternatywnymi tej konsumpcji, w odniesieniu zarówno do kapitału rzeczowego, jak i ludzkiego.

Ponieważ równanie (7.27) zachodzi dla każdego momentu *t*, z (7.25) ((7.25a)) wynika, że s_K (s_H) nie wpływa na wartość hamiltonianu. Eliminuje to konieczność zapisywania warunku na maksymalizację hamiltonianu względem s_K (lub s_H).

Pozostałe warunki konieczne optymalności dla problemu (7.23) - (7.24) to warunki Kuhna - Tuckera:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_K(t)} = \bar{k}(t) \geq 0, \quad \psi_K(t) \geq 0, \quad \bar{k}(t)\psi_K(t) = 0, \\
&\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_H(t)} = \bar{h}(t) \geq 0, \quad \psi_H(t) \geq 0, \quad \bar{h}(t)\psi_H(t) = 0,
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

oraz równania dynamiki zmiennych stanu i mnożników Lagrange'a wartości bieżącej:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{k}}(t) = \frac{\partial L_C(t)}{\partial \theta_K(t)} = s_K(t)\, f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t), \\
&\dot{\bar{h}}(t) = \frac{\partial L_C(t)}{\partial \theta_H(t)} = \left(1-s_K(t)\right) f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t),
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta}_K(t) = -\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{k}(t)} + \theta_K(t)\left(\rho - n - (1-\gamma)m\right) = \\
&= -\theta_K(t)\left(s_K(t) f_{\bar{k}}(t) - (m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m)\right) - \theta_H(t)\left(1-s_K(t)\right) f_{\bar{k}}(t) + \psi_K(t), \\
&\dot{\theta}_H(t) = -\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{h}(t)} + \theta_H(t)\left(\rho - n - (1-\gamma)m\right) = \\
&= -\theta_H(t)\left(\left(1-s_K(t)\right) f_{\bar{h}}(t) - (m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m)\right) - \theta_K(t)s_K(t) f_{\bar{h}}(t) + \psi_H(t),
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

zaś warunki transwelsalności[6]:

[6] W sprawie warunków transwersalności zob. przypis 16 w rozdziale trzecim.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\lambda_K(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\theta_K(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0,\\
&\lim_{t\to\infty}\lambda_H(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\theta_H(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0,\\
&\lim_{t\to\infty}H(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}H_C(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t}=0.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Różniczkując równanie (7.27) względem czasu, mamy:

$$\dot{\theta}_K(t)=\dot{\theta}_H(t)=-\gamma\bar{c}(t)^{-\gamma-1}\dot{\bar{c}}(t)..$$

Korzystając z tego równania oraz (7.27), równania (7.30) przekształcamy do następującej postaci:

$$\dot{\bar{c}}(t)=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\Big(f_{\bar{k}}(t)-\big(m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m\big)\Big)+\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}\psi_K(t), \tag{7.32}$$

$$\dot{\bar{c}}(t)=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\Big(f_{\bar{h}}(t)-\big(m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m\big)\Big)+\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}\psi_H(t). \tag{7.33}$$

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej $\bar{c}(t)>0$, przyrównując do siebie prawe strony równań (7.32) i (7.33), po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\psi_K(t)-\psi_H(t)=\Big[\big(f_{\bar{h}}(t)-\delta_H\big)-\big(f_{\bar{k}}(t)-\delta_K\big)\Big]\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{7.34}$$

Z równania (7.34) oraz warunków optymalności Kuhna-Tuckera (7.28) wynikają następujące implikacje:

$$\begin{aligned}
&\big(f_{\bar{h}}(t)-\delta_H\big)>\big(f_{\bar{k}}(t)-\delta_K\big) \;\rightarrow\; \psi_K(t)>0 \;\rightarrow\; \bar{k}(t)=0,\\
&\big(f_{\bar{h}}(t)-\delta_H\big)<\big(f_{\bar{k}}(t)-\delta_K\big) \;\rightarrow\; \psi_H(t)>0 \;\rightarrow\; \bar{h}(t)=0,
\end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\bar{k}(t)>0\rightarrow\psi_K(t)=0,\qquad \bar{h}(t)>0\rightarrow\psi_H(t)=0. \tag{7.36}$$

Na podstawie (7.36) oraz równania (7.34) wnioskujemy, że dla $\bar{k}(t)>0$ i $\bar{h}(t)>0$, w rozwiązaniu optymalnym produkt krańcowy netto (produkt krańcowy pomniejszony o stopę deprecjacji) dla obu typów kapitału osiąga tę samą wartość.

Ostatecznie, konieczne warunki optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (7.29), (7.32) - (7.33) wraz z warunkami (7.35) - (7.36), warunkiem nieujemności $\bar{c}(t)\geq 0$ oraz warunkami transwersalności (7.31).

Twierdzenie 7.3. Funkcje $\bar{c}^{**}(t)$, $s_K^{**}(t)$, $\bar{k}^{**}(t)$ i $\bar{h}^{**}(t)$, spełniające warunki konieczne optymalności, są jedynym rozwiązaniem optymalnym zadania (7.23) - (7.24).

Dowód. Podstawiając prawą stronę (7.27) za $\theta_K(t)$ i $\theta_H(t)$ w (7.25), z uwagi na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k},\bar{h})$, możemy zauważyć, że tzw. zmaksymalizowany hamiltonian wartości bieżącej, zdefiniowany jako:

$$H_C^{**}\left(\theta_K(t),\theta_H(t),\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) = H_C\left(\theta_K(t),\theta_H(t),\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}^{**}(t),s_K^{**}(t)\right),$$

jest silnie wklęsłą funkcją zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$. Tym samym spełniony jest warunek wystarczający na to, aby rozwiązanie wynikające z zasady maksimum stanowiło jedyne rozwiązanie optymalne problemu (7.23) - (7.24)[7].

■

Ponieważ nie określiliśmy konkretnej postaci funkcji $f(\bar{k},\bar{h})$, nie możemy wyznaczyć w sposób analityczny optymalnych ścieżek poszczególnych zmiennych. Możemy jednak dokonać analizy jakościowej rozwiązania optymalnego.

Przyrównując prawe strony (7.29) oraz (7.32) - (7.33) do zera, otrzymujemy dwa alternatywne układy równań:

$$\begin{aligned} &s_K f(\bar{k},\bar{h}) = (n+m+\delta_K)\bar{k}, \\ &(1-s_K) f(\bar{k},\bar{h}) - \bar{c} = (n+m+\delta_H)\bar{h}, \end{aligned} \quad \wedge \quad \bar{c}=0 \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned} &s_K f(\bar{k},\bar{h}) = (n+m+\delta_K)\bar{k}, \\ &(1-s_K) f(\bar{k},\bar{h}) - \bar{c} = (n+m+\delta_H)\bar{h}, \end{aligned} \quad \wedge \quad \begin{aligned} &f_{\bar{k}} = m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m, \\ &f_{\bar{h}} = m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Czwórka $(\bar{k}_e,\bar{h}_e,\bar{c}_e,s_K)$ będąca rozwiązaniem układu równań (7.37) bądź (7.38), opisuje pewien stan stacjonarny gospodarki, co oznacza, że jeśli gospodarka znajdzie się w tym stanie, zmienne $\bar{k}$, $\bar{h}$, $\bar{c}$, s_K nie będą już podlegać dalszym zmianom.

Z rozwiązania układu równań (7.37) otrzymujemy:

- punkt $(0,0,0,s_K)$, gdzie s_K osiaga dowolną wartość (choć sens merytoryczny posiada tylko wartość zero),
- zbiór punktów $(\bar{k}_1,\bar{h}_1,0,s_K)$, gdzie para $\bar{k}_1,\bar{h}_1>0$ spełnia równanie:

$$f(\bar{k}_1,\bar{h}_1) = (n+m+\delta_K)\bar{k}_1 - (n+m+\delta_H)\bar{h}_1,$$

zaś s_K spełnia równanie $s_K f(\bar{k}_1,\bar{h}_1) = (n+m+\delta_K)\bar{k}_1$.

---

[7] W sprawie twierdzenia o warunku wystarczającym, zob. D. Leonard, N. Van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, twierdzenie 4.6.4.

Oznaczmy przez $\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}, s_K^{**} > 0$, gdzie $\overline{k}_e^{**} < \overline{k}_1$, $\overline{h}_e^{**} < \overline{h}_1$, stan stacjonarny (stan dynamicznej równowagi długookresowej), stanowiący rozwiązanie układu równań (7.38). Stanowi temu odpowiada ścieżka równomiernego wzrostu zmiennych w kategoriach bezwzględnych.

Twierdzenie 7.4. Stan stacjonarny ($\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}, s_K^{**} > 0$) jest globalnie asymptotycznie stabilny, tzn. dla dowolnego stanu początkowego $\overline{k}(0), \overline{h}(0) > 0$, funkcje $\overline{k}^{**}(t)$, $\overline{h}^{**}(t)$, $\overline{c}^{**}(t)$, $s_K^{**}(t)$, będące rozwiązaniem optymalnym zadania (7.23) - (7.24), z upływem czasu zmierzają do wartości w stanie stacjonarnym.

Dowód. Załóżmy, że funkcje $\overline{k}(t)$, $\overline{h}(t)$, $\overline{c}(t)$, $s_K(t)$ są rozwiązaniem optymalnym zadania (7.23) - (7.24) (dla uproszczenia zapisu pomijamy gwiazdki).

1. Pokażemy najpierw, że zachodzą równania:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{k}}(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} \dot{\overline{h}}(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} \dot{\overline{c}}(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \overline{k}(t) \neq \pm\infty, \ \lim_{t\to\infty} \overline{h}(t) \neq \pm\infty, \ \lim_{t\to\infty} \overline{c}(t) \neq \pm\infty.$$

Załóżmy, że tak nie jest, czyli:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{k}}(t) \neq 0 \ \text{lub} \ \lim_{t\to\infty} \dot{\overline{h}}(t) \neq 0 \ \text{lub} \ \lim_{t\to\infty} \dot{\overline{c}}(t) \neq 0$$

$$\text{lub} \ \lim_{t\to\infty} \overline{k}(t) = \pm\infty \ \text{lub} \ \lim_{t\to\infty} \overline{h}(t) = \pm\infty \ \text{lub} \ \lim_{t\to\infty} \overline{c}(t) = \pm\infty.$$

Sytuacje, w których $\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{k}}(t) < 0$ lub $\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{h}}(t) < 0$ lub $\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{c}}(t) < 0$ lub $\lim_{t\to\infty} \overline{k}(t) = -\infty$ lub $\lim_{t\to\infty} \overline{h}(t) = -\infty$ lub $\lim_{t\to\infty} \overline{c}(t) = -\infty$ możemy od razu wykluczyć ze względu na warunki nieujemności dla $\overline{k}$, $\overline{h}$ i $\overline{c}$.

Na podstawie równań (7.29) dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, silnej wklęsłości $f(\overline{k}, \overline{h})$, warunków Inady $\lim_{\overline{k}\to\infty} f_{\overline{k}} = \lim_{\overline{h}\to\infty} f_{\overline{h}} = 0$ oraz warunku nieujemności dla $\overline{c}$, możemy także wykluczyć $\lim_{t\to\infty} \overline{k}(t) = \infty$ i $\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{k}}(t) > 0$ oraz $\lim_{t\to\infty} \overline{h}(t) = \infty$ i $\lim_{t\to\infty} \dot{\overline{h}}(t) > 0$.

Zatem $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{k}}(t) = 0$ i $\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) \neq \infty$. Korzystając z tego faktu rozpatrzymy sytuacje, gdy $\lim_{t\to\infty} \bar{c}(t) = \infty$ oraz $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{c}}(t) > 0$. Z równań (7.29) dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep* wynika, że wówczas musiałoby zachodzić:

$$\lim_{t\to\infty}\Big(f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\Big) = \infty .$$

To jest jednak niemożliwe z uwagi na silną wklęsłość funkcji produkcji $f(\bar{k},\bar{h})$.

Zatem $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{k}}(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{h}}(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \dot{\bar{c}}(t) = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) \neq \pm\infty$, $\lim_{t\to\infty} \bar{h}(t) \neq \pm\infty$, $\lim_{t\to\infty} \bar{c}(t) \neq \pm\infty$.

Stąd oraz z (7.37) i (7.38) wynika, że prawdą jest:

$$\text{albo } \left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (0,0,0,0),$$

$$\text{albo } \left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (\bar{k}_1,\bar{h}_1,0,s_K),$$

$$\text{albo } \left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (\bar{k}_e^{**},\bar{h}_e^{**},\bar{c}_e^{**},s_K^{**}).$$

W kolejnych dwóch punktach dowodu pokażemy, że nie jest możliwa zbieżność $\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (0,0,0,0)$ oraz $\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (\bar{k}_1,\bar{h}_1,0,s_K)$.

2. Pokażemy, że nie jest możliwe, aby $\bar{k}(t) \xrightarrow[t]{} 0$ (co eliminuje zbieżność $\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t),s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (0,0,0,0)$).

W tym celu załóżmy, że $\bar{k}(t) \xrightarrow[t]{} 0$.

Ponieważ z założenia $\bar{k}(0) > 0$, zatem z warunku $\bar{k}(t) \xrightarrow[t]{} 0$ wynika, że istnieje takie (dowolnie duże) $\tau > 0$, dla którego:

$$0 < \bar{k}(\tau) < \bar{k}_e^{**}, \tag{7.39}$$

$$\dot{\bar{k}}(\tau) < 0. \tag{7.40}$$

Z definicji $\bar{k}_e^{**}$ i silnej wklęsłości funkcji produkcji $f(\bar{k},\bar{h})$ wnioskujemy, że:

$$f_{\bar{k}} > m + \delta_K + \rho - (1-\gamma)m, \quad \text{dla } 0 < \bar{k} < \bar{k}_e^{**}. \tag{7.41}$$

Z (7.41) i założenia $\rho - (1-\gamma)m - n > 0$ (zob. (7.23)) wynika, że:

$$f_{\bar{k}} > n + m + \delta_K, \qquad \text{dla } \ 0 < \bar{k} < \bar{k}_e^{**}, \tag{7.42}$$

Ze względu na (7.39) i (7.41), z równania dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) wynika, że:

$$\text{albo } \bar{c}(\tau) > 0 \ \text{ i } \ \dot{\bar{c}}(\tau) > 0, \qquad \text{albo } \bar{c}(\tau) = 0 \ \text{ i } \ \dot{\bar{c}}(\tau) = 0.$$

2.1. Załóżmy najpierw, że $\bar{c}(\tau) > 0$ i $\dot{\bar{c}}(\tau) > 0$.

Stąd oraz z (7.41) i równania dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) otrzymujemy wniosek:

$$\dot{\bar{c}}(t) > 0, \qquad \text{dla } \ 0 < \bar{k} < \bar{k}_e^{**} \ \text{ i } \ t \geq \tau. \tag{7.43}$$

Z definicji $\bar{k}_e^{**}$, $\bar{h}_e^{**}$, silnej wklęsłości funkcji $f(\bar{k}, \bar{h})$ oraz równań dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) i (7.33) wynika:

$$\bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{h}(t) < \bar{h}_e^{**}, \qquad \text{dla } \dot{\bar{c}}(t) > 0 \tag{7.44}$$

Z (7.43), (7.44) oraz z tego, że funkcja $f(\bar{k}, \bar{h})$ jest silnie wklęsła i zeruje się w punkcie $(0,0)$ wynika, że:

$$f\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t)\right) - (n + m + \delta_K)\bar{k}(t) - (n + m + \delta_H)\bar{h}(t) > 0, \ \text{dla } \ 0 < \bar{k} < \bar{k}_e^{**} \ \text{ i } \ t \geq \tau. \tag{7.45}$$

Sumując obustronnie równania (7.29) dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, dostajemy:

$$\dot{\bar{k}}(t) + \dot{\bar{h}}(t) = f\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t)\right) - (n + m + \delta_K)\bar{k}(t) - (n + m + \delta_H)\bar{h}(t) - \bar{c}(t). \tag{7.46}$$

Rozpatrzymy dwa przypadki: $\dot{\bar{k}}(\tau) + \dot{\bar{h}}(\tau) < 0$ oraz $\dot{\bar{k}}(\tau) + \dot{\bar{h}}(\tau) \geq 0$, pokazując, że w żadnym z nich nie jest możliwa zbieżność $\bar{k}(t) \xrightarrow[t]{} 0$.

2.1.1. Załóżmy najpierw, że $\dot{\bar{k}}(\tau) + \dot{\bar{h}}(\tau) < 0$.

Stąd oraz z (7.46), (7.45) i (7.39) wynika, że:

$$\bar{c}(\tau) > f\left(\bar{k}(\tau), \bar{h}(\tau)\right) - (n + m + \delta_K)\bar{k}(\tau) - (n + m + \delta_H)\bar{h}(\tau) > 0. \tag{7.47}$$

Powyższą nierówność wykorzystamy do wykazania, że jeśli $\dot{\bar{k}}(\tau) + \dot{\bar{h}}(\tau) < 0$, to zachodzi również:

$$\dot{\bar{k}}(t) + \dot{\bar{h}}(t) < 0, \qquad \text{dla } t \geq \tau. \tag{7.48}$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taki moment $\tau_1 > \tau$, że:

$$\dot{\bar{k}}(\tau_1)+\dot{\bar{h}}(\tau_1)\geq 0\,, \quad \text{oraz} \quad \dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)<0 \ \text{dla} \ t\in\left\langle\tau,\tau_1\right) \tag{7.49}$$

Wtedy:

$$\dot{\bar{k}}(t)<0 \ \text{lub} \ \dot{\bar{h}}(t)<0\,, \quad \text{dla} \ \ t\in\left\langle\tau,\tau_1\right)\,, \tag{7.50}$$

Z uwagi na (7.39), (7.43), (7.44) zachodzi wówczas:

$$\dot{\bar{c}}(t)>0\,, \qquad \text{dla} \ \ t\in\left\langle\tau,\tau_1\right)\,, \tag{7.51}$$

czyli:

$$\bar{c}(\tau_1)>\bar{c}(\tau)\,. \tag{7.52}$$

Z drugiej strony, z (7.49) oraz (7.46), wynika, że:

$$\bar{c}(\tau_1)\leq f\left(\bar{k}(\tau_1),\bar{h}(\tau_1)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(\tau_1)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(\tau_1)\,. \tag{7.53}$$

Pokażemy, że:

$$\begin{aligned} f\left(\bar{k}(\tau_1),\bar{h}(\tau_1)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(\tau_1)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(\tau_1)<\\ < f\left(\bar{k}(\tau),\bar{h}(\tau)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(\tau)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(\tau) \end{aligned} \tag{7.54}$$

Obliczając pochodną funkcji $f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)$

względem czasu, mamy: $\left(f_{\bar{k}}-(n+m+\delta_K)\right)\dot{\bar{k}}(t)+\left(f_{\bar{h}}-(n+m+\delta_H)\right)\dot{\bar{h}}(t)$.

Z równań dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) - (7.33) wynika, że:

$$f_{\bar{k}}-(n+m+\delta_K)=f_{\bar{h}}-(n+m+\delta_H)\,, \text{ dla } \dot{\bar{c}}(t)\neq 0 \text{ i } \bar{k}(t),\bar{h}(t)>0\,. \tag{7.55}$$

Z (7.42), (7.55), (7.51) i (7.49) wynika, że:

$$\left(f_{\bar{k}}-(n+m+\delta_K)\right)\dot{\bar{k}}(t)+\left(f_{\bar{h}}-(n+m+\delta_H)\right)\dot{\bar{h}}(t)<0\,, \text{ dla } \ t\in\left\langle\tau,\tau_1\right)\,,$$

czyli zachodzi nierówność (7.54).

Z (7.47), (7.53) oraz (7.54) wynika, że $\bar{c}(\tau_1)<\bar{c}(\tau)$, co prowadzi do sprzeczności z (7.52). Dowodzi to prawdziwości (7.48).

Różniczkując równanie (7.46) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d\,\dot{\bar{k}}(t)}{dt}+\frac{d\,\dot{\bar{h}}(t)}{dt}=\left(f_{\bar{k}}-(n+m+\delta_K)\right)\dot{\bar{k}}(t)+\left(f_{\bar{h}}-(n+m+\delta_H)\right)\dot{\bar{h}}(t)-\dot{\bar{c}}(t). \tag{7.56}$$

Z uwagi na (7.39), (7.43), (7.44) (dla $t=\tau$) oraz (7.48) zachodzi:

$$\dot{\bar{c}}(t)>0\,, \qquad \text{dla } t\geq\tau\,, \tag{7.57}$$

Na mocy (7.48), (7.55) i (7.57), z równania (7.56) wynika, że:

$$\frac{d\,\dot{\bar{k}}(t)}{dt}+\frac{d\,\dot{\bar{h}}(t)}{dt}<0, \qquad \text{dla } t\geq\tau .$$

Ostatnia nierówność świadczy o tym, że istnieje taki moment $\tau<t'<\infty$, w którym $\bar{k}(t')+\bar{h}(t')=0$. Z warunków nieujemności $\bar{k}(t),\bar{h}(t)\geq 0$ i równania (7.46), postaci:

$$\dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)=f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)-\bar{c}(t),$$

wynika, że w momencie t' spełniona musi być także równość $\bar{c}(t')=0$, co jest jednak sprzeczne z założeniem $\bar{c}(\tau)>0$ i (7.57).

2.1.2. Załóżmy teraz, że $\dot{\bar{k}}(\tau)+\dot{\bar{h}}(\tau)>0$.

Rozpatrzymy oddzielnie trzy możliwe (pod)przypadki, pokazując, że w żadnym z nich nie jest możliwa zbieżność $\bar{k}(t)\xrightarrow[t]{}0$.

2.1.2.1. Załóżmy najpierw, że:

$$\dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)>0 \text{ oraz } \bar{k}(t)<\bar{k}_e^{**} \quad \text{dla } t\geq\tau . \tag{7.58}$$

Wtedy z (7.43) wynika, że:

$$c(t)>0,\ \dot{\bar{c}}(t)>0 \qquad \text{dla } t\geq\tau . \tag{7.59}$$

Z warunku Inady $\lim\limits_{\bar{k}\to 0} f_{\bar{k}}=\infty$, (7.59) oraz (7.55) wynika, że $f_{\bar{h}}\xrightarrow[\bar{k}\to 0]{}\infty$. Wtedy z warunku Inady $\lim\limits_{\bar{h}\to 0} f_{\bar{h}}=\infty$ oraz silnej wklęsłości funkcji produkcji $f(\bar{k},\bar{h})$ wynika, że $\bar{h}(t)\xrightarrow[\bar{k}\to 0]{}0$. Zatem $\left(\bar{k}(t)+\bar{h}(t)\right)\xrightarrow[\bar{k}\to 0]{}0$.

To jednak pozostaje w sprzeczności z warunkiem początkowym $\bar{k}(0),\bar{h}(0)>0$ oraz założeniem (7.58).

2.1.2.2. Załóżmy teraz, że istnieje takie $t'\geq\tau$, że:

$$\bar{k}(t')=\bar{k}_e^{**}, \qquad \dot{\bar{k}}(t')+\dot{\bar{h}}(t')\geq 0, \tag{7.60}$$

oraz

$$\bar{k}(t)<\bar{k}_e^{**} \ \text{ i } \ \dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)>0, \ \text{ dla } t\in\left\langle\tau,t'\right) .$$

Wedty jednak z przyjętego założenia $\bar{c}(\tau) > 0$ oraz równań dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) - (7.33) wynika, że:

$$\bar{c}(t') > 0\,,\ \dot{\bar{c}}(t') = 0 \tag{7.61}$$

oraz $\bar{h}(t') = \bar{h}_e^{**}$.

Z uwagi na (7.60), zachodzi także:

$$\dot{\bar{k}}(t') = \dot{\bar{h}}(t') = 0 \text{ lub } \dot{\bar{k}}(t') > 0 \text{ lub } \dot{\bar{h}}(t') > 0\,.$$

Jeśli $\dot{\bar{k}}(t') = \dot{\bar{h}}(t') = 0$ to, wobec (7.61), został osiągnięty stan stacjonarny $\bar{k}_e^{**}, \bar{h}_e^{**}, \bar{c}_e^{**} > 0$.

Jeśli zaś $\dot{\bar{k}}(t') > 0$ lub $\dot{\bar{h}}(t') > 0$, to istnieje $t'' \ge \tau'$, takie że:

$$\bar{k}(t'') > \bar{k}_e^{**} \text{ lub } \bar{h}(t'') > \bar{h}_e^{**}\,. \tag{7.62}$$

Z równań dynamiki konsumpcji *njep* (7.32) - (7.33) wynika, że:

$$\bar{k}(t) > \bar{k}_e^{**} \ \Leftrightarrow\ \bar{h}(t) > \bar{h}_e^{**} \ \Leftrightarrow\ \dot{\bar{c}}(t) < 0 \quad \text{dla } \bar{c}(t) > 0 \tag{7.63}$$

Z (7.61), (7.62) oraz (7.63) wynika, że:

$$\bar{k}(t) > \bar{k}_e^{**},\quad \bar{h}(t) > \bar{h}_e^{**},\quad \dot{\bar{c}}(t) < 0 \quad , \quad \text{dla } \bar{c}(t) > 0 \text{ i } t \ge \tau''\,.$$

Zatem do momentu, w którym $\bar{c} = 0$, nie jest możliwa zbieżność $\bar{k}(t) \xrightarrow[t]{} 0$.

W punkcie 2.2 dowodu pokażemy, że nie istnieje skończony moment $t^* < \infty$, w którym $\bar{c}(t^*) = 0$.

2.1.2.3. Załóżmy zatem, że istnieje taki moment $\tau_2 > \tau$, że:

$$\dot{\bar{k}}(\tau_2) + \dot{\bar{h}}(\tau_2) \le 0\,. \tag{7.64}$$

oraz:

$$\bar{k}(t) < \bar{k}_e^{**} \qquad \text{dla } t \in \left\langle \tau, \tau_2 \right\rangle. \tag{7.65}$$

Z (7.43) i (7.65) wynika, że $\bar{c}(\tau_2) > 0$. Przyjmując za moment wyjściowy τ_2, przeprowadzamy teraz takie samo wnioskowanie, jak w punkcie 2.1.1. dowodu, uzyskując sprzeczność.

2.2. Rozpatrzmy przypadek $\bar{c}(\tau) = 0$ dla $\tau < \infty$.

W zadaniu (7.23) - (7.25), zarówno funkcja podcałkowa, jak i równania ruchu zmiennych stanu nie zawierają (z wyjątkiem czynnika dyskontującego) jako oddzielnego argumentu zmiennej czasu (*t*). W tego typu zadaniach sterowania optymalnego (nazywanych problemami autonomicznymi) w rozwiązaniu optymalnym hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje stałą wartość w czasie[8].

Po podstawieniu (7.27) do (7.25) i uproszczeniu, otrzymujemy:

$$H_C(t) = \frac{\gamma \bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \bar{c}(t)^{-\gamma}\left[f\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t)\right) - (n+m+\delta_K)\bar{k}(t) - (n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\right].$$

Podstawiając dowolne skończone wartości zmiennych $\bar{k}, \bar{h}, \bar{c} > 0$, otrzymujemy skończoną wartość H_C. Natomiast dla $\bar{c}(t) \xrightarrow[t \to \tau]{} 0$ oraz $\left(\bar{k}(\tau), \bar{h}(\tau)\right) \neq (\bar{k}_1, \bar{h}_1)$ (pominięty przypadek rozpatrzymy w punkcie 3 dowodu) otrzymujemy $H_C(t) \xrightarrow[t \to \tau]{} \infty$. Oznacza to, że w rozwiązaniu optymalnym gospodarka nie może osiągnąć zerowej konsumpcji w skończonym czasie.

Z punktów 2.1 i 2.2 dowodu wynika, że gospodarka startująca z $\bar{k}(0), \bar{h}(0) > 0$ nigdy nie zbiega do stanu stacjonarnego $(0,0,0,0)$.

3. W ostatnim kroku pokażemy, że ze względu na warunki transwersalności (7.31) nie jest możliwa zbieżność $\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t), \bar{c}(t), s_K(t)\right) \xrightarrow[t]{} (\bar{k}_1, \bar{h}_1, 0, s_K)$.

Z definicji $\bar{k}_1$, $\bar{h}_1$ ($\bar{k}_1, \bar{h}_1 > 0$ takie, że $f(\bar{k}_1, \bar{h}_1) = (n+m+\delta_K)\bar{k}_1 - (n+m+\delta_H)\bar{h}_1$) oraz z tego, że funkcja $f(\bar{k}, \bar{h})$ jest silnie wklęsła i zeruje się w punkcie $(0,0)$ wynika, że dla $\bar{k}(t) \to \bar{k}_1$, $\bar{h}(t) \to \bar{h}_1$ zachodzą nierówności:

$$f_{\bar{k}} < n+m+\delta_K, \; f_{\bar{h}} < n+m+\delta_H.$$

Wówczas jednak z definicji mnożników Lagrange'a wartości bieżącej $\theta_K = \lambda_K e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$, $\theta_H = \lambda_H e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ oraz ich równań dynamiki (7.30) otrzymujemy:

$$\frac{\dot{\lambda}_K(t)}{\lambda_K(t)} = n+m+\delta_K - f_{\bar{k}} > 0, \qquad \frac{\dot{\lambda}_H(t)}{\lambda_H(t)} = n+m+\delta_H - f_{\bar{h}} > 0,$$

co jest sprzeczne z warunkami transwersalności (7.31).

■

[8] Zob. np. A. C. Chiang, *op. cit.*, s. 189-190, 211, 239-240.

Z równań (7.38) charakteryzujących długookresową równowagę dynamiczną (stan stacjonarny $(\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}, s_K^{**}))$, definicji (6.18) elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego, $\alpha(\overline{k},\overline{h})$ i $\beta(\overline{k},\overline{h})$, oraz równania $\overline{c} = (1 - s_K - s_H) f(\overline{k},\overline{h})$ (zob. (7.9)), możemy wyznaczyć długookresowe optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki:

$$s_K^{**} = \alpha \frac{m + n + \delta_K}{\rho + \delta_K + \gamma m},$$
$$s_H^{**} = \beta \frac{m + n + \delta_H}{\rho + \delta_H + \gamma m}, \tag{7.66}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\overline{k}_e, \overline{h}_e)$, $\beta = \beta(\overline{k}_e, \overline{h}_e)$ to stałe, na ścieżce wzrostu równomiernego, elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego (udziały kapitału rzeczowego i ludzkiego w produkcie).

Jak wynika z (7.66), optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki**,** s_K^{**}, s_H^{**}, do których zmierzają optymalne trajektorie $s_K^{**}(t) = s_K\left(\overline{k}^{**}(t), \overline{h}^{**}(t)\right)$**,** $s_H^{**}(t) = s_H\left(\overline{k}^{**}(t), \overline{h}^{**}(t)\right)$**,** są tym niższe, im wyższa jest stopa dyskontowa ρ oraz im wyższy parametr γ (im szybciej następuje spadek krańcowej chwilowej użyteczności konsumpcji, czyli im większa skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie)**.** Przy bardzo wysokiej stopie dyskontowej (i / lub bardzo wysokim γ), optymalne stopy inwestycji dążą do zera. To zaś przekłada się na ekstremalnie niski poziom konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym.

Przy przyjętym założeniu $\rho - n - (1-\gamma)m > 0$, prawdziwe są nierówności:

$$s_K^{**} < s_K^{*},\ s_H^{**} < s_H^{*},$$

gdzie s_K^{*}, s_H^{*} oznaczają stopy inwestycji zgodne ze „złotą regułą akumulacji" Phelpsa, dane przez (7.11).

Przy $\rho \to \left(n + (1-\gamma)m\right)^{+}$ optymalne stopy inwestycji są zbieżne do wartości odpowiadających „złotej regule akumulacji" Phelpsa[9].

[9] Zobacz komentarz do odpowiednich rezultatów uzyskanych w rozdziale trzecim, dla modelu bez kapitału ludzkiego (wniosek 3.2).

Uwaga 7.3. Zauważmy, ze problem niemierzalności części produktu nie pociąga za sobą żadnych zmian w samym matematycznym sformułowaniu zadania optymalizacyjnego i procedurze jego rozwiązania, co nadaje przeprowadzonej w tym punkcie pracy analizie pewien dodatkowy wymiar ogólności.

W skrajnym przypadku, gdy całość ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego stanowią utracone dochody, optymalna stopa mierzalnych inwestycji w kapitał rzeczowy na ścieżce wzrostu równomiernego wyraża się wzorem: $s_K^m{}^{**} = \frac{s_K^{**}}{1 - s_H^{**}}$, gdzie s_K^{**} i s_H^{**} są dane przez (7.66). Zob. poprzednie uwagi dotyczące tego zagadnienia w rozdziałach szóstym i siódmym.

7.5. Optymalne inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki a polityka fiskalna w warunkach dynamicznej równowagi konkurencyjnej

Rozważmy teraz gospodarkę składającą się z dużej liczby N jednakowych gospodarstw domowych oraz dużej liczby przedsiębiorstw maksymalizujących zyski w warunkach doskonałej konkurencji. Liczba ludności w gospodarce w chwili t wynosi $L(t) = L_0 e^{nt}$.

Każde gospodarstwo domowe dostarcza przedsiębiorstwom $L_G(t) = L(t)/N$ jednostek pracy, równej liczbie jego członków, wraz z ucieleśnionymi w nich zasobami kapitału ludzkiego, $h(t)L_G(t)$, gdzie h oznacza przeciętny zasób kapitału ludzkiego w gospodarce (kapitał ludzki *p.c.*) Wysokość dochodów za pracę uzależniona jest od zasobów kapitału ludzkiego ucieleśnionego w pracownikach. Zakładamy, że w dochodach otrzymywanych przez pracowników można oddzielić wynagrodzenie pracy „surowej" (np. na poziomie płacy minimalnej lub dla pracowników wykonujących podstawowe prace fizyczne) oraz wynagrodzenie kapitału ludzkiego. Typowe gospodarstwo domowe uzyskuje ponadto dochody od przedsiębiorstw za dzierżawę $k(t)L_G(t)$ jednostek kapitału rzeczowego, gdzie k oznacza wielkość kapitału rzeczowego *p.c.* w gospodarce. Otrzymywane dochody dzielone są pomiędzy konsumpcję, inwestycje „w siebie" oraz akumulację kapitału rzeczowego.

Bilans dochodów i wydatków gospodarstwa domowego w momencie t przedstawia się następująco:

$$\left(k(t)\dot{L}_G(t)\right)+\left(h(t)\dot{L}_G(t)\right)-\left(\delta_K k(t)+\delta_H h(t)\right)L_G(t)+c(t)L_G(t)= \\ = w(t)L_G(t)+\left(q_K(t)k(t)+q_H(t)h(t)\right)L_G(t), \tag{7.67}$$

gdzie $w(t)$, $q_H(t)$, $q_K(t)$ oznaczają, odpowiednio, ceny pracy „surowej", kapitału ludzkiego i kapitału rzeczowego, a δ_K, δ_H - stopy deprecjacji poszczególnych typów kapitału.

Wyrażając wszystkie zmienne w kategoriach *njep* i dzieląc równanie (7.67) obustronnie przez $A(t)L_G(t)$, przy czym $A(t)=A_0e^{mt}$, otrzymujemy:

$$\dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)+(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)+\bar{c}(t)= \\ =\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t). \tag{7.68}$$

Względny udział wydatków na inwestycje w kapitał rzeczowy w całości wydatków gospodarstwa domowego (stopa inwestycji w kapitał rzeczowy) wynosi $s_K(t)$, zaś odpowiedni względny udział wydatków na inwestycje „w siebie" (stopa inwestycji w kapitał ludzki) - $s_H(t)$. Opisują to równania:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}}(t)+(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)&=s_K(t)\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right), \\ \dot{\bar{h}}(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)&=s_H(t)\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right). \end{aligned} \tag{7.69}$$

Względny udział wydatków na konsumpcję wynosi z definicji $1-s_K(t)-s_H(t)$. Oznacza to, że równania (7.69) sumują się stronami do (7.68).

Zakładamy także:

$$\bar{k}(0),\bar{h}(0)>0 \quad \text{oraz} \quad \bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t)\geq 0. \tag{7.70}$$

Przyjmując rynkowe ceny pracy „surowej" $w(t)$, kapitału rzeczowego $q_K(t)$ i ludzkiego $q_H(t)$ jako dane, gospodarstwo domowe podejmuje decyzje o podziale otrzymywanych dochodów pomiędzy konsumpcję, inwestycje w kapitał ludzki oraz inwestycje w kapitał rzeczowy, dążąc do maksymalizacji sumy zdyskontowanej (według stopy ρ) chwilowej użyteczności konsumpcji swoich członków w nieskończonym horyzoncie czasu:

$$\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}L_G(t)e^{-\rho t}dt, \qquad \rho>0,\ \gamma\in(0,1), \tag{7.71}$$

gdzie c to konsumpcja *p.c.*

Definicja 7.1. Optymalnym planem konsumpcji i inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki gospodarstwa domowego w horyzoncie optymalizacji (t_0, ∞) w gospodarce konkurencyjnej nazywamy trójkę $(\bar{k}^*(t), \bar{h}^*(t), \bar{c}^*(t))$, będącą rozwiązaniem zadania (7.68) - (7.71) dla danych ścieżek $\bar{w}(t), q_K(t), q_H(t)$.

Zadanie (7.68) - (7.71) jest zadaniem sterowania optymalnego, w którym $\bar{k}(t)$, $\bar{h}(t)$ są zmiennymi stanu, zaś funkcję zmiennych sterujących może spełniać para zmiennych $\bar{c}(t)$, $s_K(t)$, bądź $\bar{c}(t)$, $s_H(t)$. Wybierając pierwszą parę zmiennych jako zmienne sterujące, zadanie to zapisujemy w następującej postaci:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \overset{\bar{c},\, s_K}{\rightarrow} \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m-n>0, \tag{7.72}$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}}(t) &= s_K(t)\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right)+(n+m+\delta_K)\bar{k}(t), \\ \dot{\bar{h}}(t) &= (1-s_K(t))\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right)-\bar{c}(t)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(t), \end{aligned} \tag{7.73}$$

$$\bar{k}(0), \bar{h}(0) > 0, \tag{7.74}$$

$$\bar{k}(t), \bar{h}(t), \bar{c}(t) \geq 0. \tag{7.75}$$

W zapisie warunków koniecznych optymalności uwzględnimy, tak samo jak w punkcie 7.4, warunki Kuhna-Tuckera ze względu na warunki nieujemności dla zmiennych stanu $\bar{k}(t), \bar{h}(t) \geq 0$. Formułujemy zatem funkcję Lagrange'a wartości bieżącej:

$$L_C(t) = H_C(t) + \psi_K(t)\bar{k}(t) + \psi_H(t)\bar{h}(t),$$

gdzie $\psi_K(t), \psi_H(t)$ to mnożniki Lagrange'a wartości bieżącej odpowiadające ograniczeniom, odpowiednio, $\bar{k}(t) \geq 0$, $\bar{h}(t) \geq 0$, zaś hamiltonian wartości bieżącej jest postaci:

$$\begin{aligned} H_C(t) = \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} &+ \theta_K(t)\left[s_K(t)\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)\right] + \\ &+ \theta_H(t)\left[(1-s_K(t))\left(\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t)\right)-\bar{c}(t)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)\right], \end{aligned}$$

gdzie $\theta_K(t)$ i $\theta_H(t)$ są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej odpowiadającymi równaniom dynamiki zmiennych stanu (7.73).

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej $\bar{c}(t) > 0$, warunki konieczne optymalności przyjmują postać następującą[10]:

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_K(t)} = \bar{k}(t) \geq 0, \quad \psi_K(t) \geq 0, \quad \bar{k}(t)\psi_K(t) = 0, \tag{7.76}$$

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_H(t)} = \bar{h}(t) \geq 0, \quad \psi_H(t) \geq 0, \quad \bar{h}(t)\psi_H(t) = 0, \tag{7.77}$$

$$\theta_K(t) = \theta_H(t) = \bar{c}(t)^{-\gamma}, \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_K(t) &= -\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{k}(t)} + \theta_K(t)\big(\rho - n - (1-\gamma)m\big) = \\
&= -\theta_K(t)\big(s_K(t)q_K(t) - (m + \delta_K + \rho - (1-\gamma)m)\big) - \theta_H(t)\big(1 - s_K(t)\big)q_K(t) - \psi_K(t), \\
\dot{\theta}_H(t) &= -\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{h}(t)} + \theta_H(t)\big(\rho - n - (1-\gamma)m\big) = \\
&= -\theta_H(t)\big(\big(1 - s_K(t)\big)q_H(t) - (m + \delta_H + \rho - (1-\gamma)m)\big) - \theta_K(t)s_K(t)q_H(t) - \psi_H(t),
\end{aligned} \tag{7.79}$$

wraz z równaniami (7.73) dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}(t), \bar{h}(t)$ i warunkami transwersalności:

$$\lim_{t\to\infty} \theta_K(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = \lim_{t\to\infty} \theta_H(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} H_C(t)e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} = 0. \tag{7.80}$$

Po zróżniczkowaniu równania (7.78) względem czasu i dokonaniu podstawień w (7.79), otrzymujemy następujące równania dynamiki konsumpcji *njep*:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{c}}(t) &= \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\big(q_K(t) - (m + \delta_K + \rho - (1-\gamma)m)\big) + \psi_K(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}, \\
\dot{\bar{c}}(t) &= \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\big(q_H(t) - (m + \delta_H + \rho - (1-\gamma)m)\big) + \psi_H(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}.
\end{aligned} \tag{7.81}$$

Przyrównując do siebie prawe strony obu równań (7.81), po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\psi_K(t) - \psi_H(t) = \big[\big(q_H(t) - \delta_H\big) - \big(q_K(t) - \delta_K\big)\big]\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{7.82}$$

Z równania (7.82) oraz warunków Kuhna-Tuckera (7.76) - (7.77) wynikają następujące implikacje:

$$\begin{aligned}
\big(q_H(t) - \delta_H\big) > \big(q_K(t) - \delta_K\big) \;&\to\; \psi_K(t) > 0 \;\to\; \bar{k}(t) = 0, \\
\big(q_H(t) - \delta_H\big) < \big(q_K(t) - \delta_K\big) \;&\to\; \psi_H(t) > 0 \;\to\; \bar{h}(t) = 0,
\end{aligned} \tag{7.83}$$

[10] Por. warunki konieczne optymalności dla zadania (7.23) - (7.25) w punkcie 7.4.

$$\bar{k}(t) > 0 \rightarrow \psi_K(t) = 0, \quad \bar{h}(t) > 0 \rightarrow \psi_H(t) = 0.$$

Zgodnie z (7.83), każda różnica w stopach zysku netto (po uwzględnieniu deprecjacji) z kapitału rzeczowego i ludzkiego skłania gospodarstwa domowe do obniżenia do zera zasobów tego rodzaju kapitału, dla którego stopa zysku netto jest niższa[11].

Przedsiębiorstwa maksymalizujące zysk najmują usługi pracy i kapitału ludzkiego oraz dzierżawią kapitał rzeczowy do momentu zrównania się krańcowych produktywności z rynkowymi cenami czynników. W stanie równowagi długookresowej na rynku doskonale konkurencyjnym przedsiębiorstwa osiągają zerowe zyski czyste, czyli suma wynagrodzeń czynników wytwórczych wyczerpuje wartość produkcji każdej firmy. Oznacza to, że zachodzą równości[12]:

$$q_K(t) = f_{\bar{k}}, \qquad q_H(t) = f_{\bar{h}}, \qquad \bar{w}(t) = f(\bar{k}(t), \bar{h}(t)) - \bar{k}(t) f_{\bar{k}} - \bar{h}(t) f_{\bar{h}}, \tag{7.84}$$

gdzie, jak dotychczas, $\bar{y}(t) = f(\bar{k}(t), \bar{h}(t))$ oznacza postać intensywną (w kategoriach *njep*) agregatowej funkcji produkcji $Y(t) = F(K(t), H(t), \bar{L}(t))$, dodatnio jednorodnej stopnia jeden.

Ze względu na zachowania optymalizacyjne gospodarstw domowych ujęte w (7.83) oraz własność funkcji produkcji $f(0,0) = 0$ (zob. własność w3 w Tw. 6.1 w rozdziale szóstym), dodatkowym koniecznym warunkiem równowagi rynkowej przy niezerowym poziomie produkcji jest równanie:

$$q_H(t) - \delta_H = q_K(t) - \delta_K. \tag{7.85}$$

Definicja 7.2. Mówimy, że gospodarka konkurencyjna osiąga chwilową równowagę dynamiczną w momencie t^*, jeżeli rynkowe ceny kapitału rzeczowego, ludzkiego i pracy, odpowiednio, $q_K(t), q_H(t), \bar{w}(t)$, kształtują się na takich poziomach, że gospodarstwa domowe nie są skłonne do zmiany swojego dotychczasowego optymalnego planu konsumpcji i inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki. Gospodarka konkurencyjna znajduje się międzyokresowej równowadze dynamicznej w horyzoncie (t_0, T), jeżeli osiąga chwilową równowagę dynamiczną w każdym momencie

---

[11] Ponieważ rozważamy gospodarkę jednoproduktową, zgodnie z logiką modelu nie mamy podstaw do wykluczenia możliwości zamiany dóbr kapitałowych na dobra konsumpcyjne i *vice versa*. Przyjęte w (7.75) warunki nieujemności na zmienne stanu i zmienną sterującą dopuszczają taką możliwość. Jeśli zamiast warunków nieujemności dla kapitału rzeczowego i ludzkiego przyjęlibyśmy silniejsze ograniczenia w postaci warunków nieujemności na stopy inwestycji w oba rodzaje kapitału, warunki (7.83) uległyby złagodzeniu.

[12] Bardziej szczegółowo na ten temat, zob. punkt 1.2.

$t \in (t_0, T)$. Oznacza to, że trajektorie rynkowych cen pracy $w(t)$, kapitału rzeczowego $q_K(t)$ i ludzkiego $q_H(t)$ odtwarzają ścieżki założone przez typowe gospodarstwo domowe w optymalnym planie w okresie t_0.

W rozważanym modelu zakłada się, że gospodarka osiąga międzyokresową równowagę dynamiczną w nieskończonym horyzoncie optymalizacji gospodarstw domowych[13].

Podstawiając (7.84) do (7.73), (7.81) i (7.83), otrzymujemy, odpowiednio:

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{k}}(t) = s_K(t) f\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t)\right) - (n + m + \delta_K)\bar{k}(t),\\
&\dot{\bar{h}}(t) = \left(1 - s_K(t)\right) f\left(\bar{k}(t), \bar{h}(t)\right) - \bar{c}(t) - (n + m + \delta_H)\bar{h}(t),\\
&\dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(f_{\bar{k}}(t) - \left(m + \delta_K + \rho - (1-\gamma)m\right)\right) + \psi_K(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma},\\
&\dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(f_{\bar{h}}(t) - \left(m + \delta_H + \rho - (1-\gamma)m\right)\right) + \psi_H(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma},\\
&\left(f_{\bar{h}}(t) - \delta_H\right) > \left(f_{\bar{k}}(t) - \delta_K\right) \;\rightarrow\; \psi_K(t) > 0 \;\rightarrow\; \bar{k}(t) = 0,\\
&\left(f_{\bar{h}}(t) - \delta_H\right) < \left(f_{\bar{k}}(t) - \delta_K\right) \;\rightarrow\; \psi_H(t) > 0 \;\rightarrow\; \bar{h}(t) = 0,\\
&\bar{k}(t) > 0 \rightarrow \psi_K(t) = 0, \quad \bar{h}(t) > 0 \rightarrow \psi_H(t) = 0.
\end{aligned} \tag{7.86}$$

Równania (7.86), wraz z warunkami transwersalności (7.80), warunkami początkowymi (7.74) i warunkiem nieujemności $\bar{c}(t) \geq 0$ opisują dynamikę rozważanej gospodarki konkurencyjnej. Nietrudno zauważyć, że stanowią one powtórzenie warunków optymalności, przy tych samych warunkach początkowych, zadania społecznego planisty (7.23) - (7.24). Oznacza to, że w międzyokresowej dynamicznej równowadze konkurencyjnej w gospodarce maksymalizowany jest społeczny dobrobyt.

W szczególności, stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki na ścieżce wzrostu równomiernego dane są przez (zob. (7.66)):

$$s_K^{**} = \alpha \frac{m + n + \delta_K}{\rho + \delta_K + \gamma m}, \qquad s_H^{**} = \beta \frac{m + n + \delta_H}{\rho + \delta_H + \gamma m}, \tag{7.87}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

W modelu gospodarki konkurencyjnej uwzględniamy teraz sektor budżetowy.
Na dochody sektora budżetowego składają podatki od dochodów uzyskiwanych przez gospodarstwa domowe oraz dochody z majątku państwowego. Rozróżniamy pomiędzy

[13] Por. komentarz w rozdziale trzecim (punkt 3.4).

stopą opodatkowania dochodów z pracy, $0 \le \tau_w \le 1$, i dochodów z kapitału rzeczowego, $0 \le \tau_q \le 1$. Przypominamy, że na dochody z pracy składają się wynagrodzenie pracy „surowej” (np. na poziomie płacy minimalnej bądź płacy robotników niewykwalifikowanych) oraz wynagrodzenie kapitału ludzkiego. Majątek państwowy powiększa się w wyniku inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy. Nie zainwestowana w ten sposób część dochodów budżetowych przeznaczana jest na finansowanie działalności sektora publicznego (konsumpcję budżetową) oraz inwestycje budżetowe w kapitał ludzki (edukację, naukę, szkolenia zawodowe, itp.). Inwestycje te powiększają zasoby kapitału ludzkiego w posiadaniu gospodarstw domowych, nie powiększają natomiast bezpośrednio dochodów budżetowych.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$\bar{c}_B$ - wydatki konsumpcyjne *njep* sektora budżetowego,

$\bar{c}_P$ - wydatki konsumpcyjne *njep* gospodarstw domowych,

$\bar{c}$ - konsumpcja społeczna *njep*,

$\bar{k}_B$ - kapitał rzeczowy *njep* zakumulowany dzięki inwestycjom budżetowym,

$\bar{k}_P$ - kapitał rzeczowy *njep* zakumulowany dzięki inwestycjom gospodarstw domowych,

$\bar{k}$ - społeczny zasób kapitału rzeczowego *njep*,

$\bar{h}_B$ - kapitał ludzki *njep* zakumulowany dzięki inwestycjom budżetowym,

$\bar{h}_P$ - kapitał ludzki *njep* zakumulowany dzięki inwestycjom gospodarstw domowych,

$\bar{h}$ - społeczny zasób kapitału ludzkiego *njep*,

s_K^P - stopa inwestycji prywatnych w kapitał rzeczowy (stosunek inwestycji gospodarstw domowych w kapitał rzeczowy do dochodów do dyspozycji gospodarstw domowych),

s_H^P - stopa inwestycji prywatnych w kapitał ludzki (stosunek inwestycji gospodarstw domowych w kapitał ludzki do dochodów do dyspozycji gospodarstw domowych),

τ_w - stopa opodatkowania dochodów z pracy (procentowa część łącznego wynagrodzenia pracy „surowej” i kapitału ludzkiego przekazywana do budżetu),

τ_q - stopa opodatkowania zysków z kapitału rzeczowego,

(pozostałe oznaczenia *j.w.*).

Bilans dochodów i wydatków sektora budżetowego (zapisany w kategoriach *njep*) przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{k}}_B(t)+\dot{\bar{h}}_B(t)+(n+m)\bar{k}_B(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}_B(t)+\bar{c}_B(t)=\\&\quad=\tau_w(t)\Big(\bar{w}(t)+q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t)+\bar{h}_B(t)\Big)\Big)+\tau_q(t)q_K(t)\bar{k}_P(t)+q_K(t)\bar{k}_B(t).\end{aligned}\tag{7.88}$$

Przyjmujemy ponadto: $\bar{k}_B(0),\bar{h}_B(0)>0$, $\bar{k}_B(t),\bar{h}_B(t),\bar{c}_B(t)\ge 0$.

Bilans dochodów i wydatków (w kategoriach *njep*) gospodarstwa domowego, z uwzględnieniem podatków płaconych do budżetu, przyjmuje postać następującą (por. (7.68)):

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{k}}_P(t)+\dot{\bar{h}}_P(t)+(n+m)\bar{k}_P(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}_P(t)+\bar{c}_P(t)=\\&\quad=(1-\tau_w(t))\Big(\bar{w}(t)+q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t)+\bar{h}_B(t)\Big)\Big)+(1-\tau_q(t))q_K(t)\bar{k}_P(t).\end{aligned}\tag{7.89}$$

Przyjmujemy, że $\bar{k}_P(0),\bar{h}_P(0)>0$ oraz $\bar{k}_P(t),\bar{h}_P(t),\bar{c}_P(t)\ge 0$.

Akumulację kapitału rzeczowego i ludzkiego w gospodarstwie domowym opisują równania, odpowiednio:

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{k}}_P(t)+(n+m)\bar{k}_P(t)=\\&\quad=s_K^P(t)\Big[(1-\tau_w(t))\Big(\bar{w}(t)+q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t)+\bar{h}_B(t)\Big)\Big)+(1-\tau_q(t))q_K(t)\bar{k}_P(t)\Big],\end{aligned}\tag{7.90}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{h}}_P(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}_P(t)=\\&\quad=s_H^P(t)\Big[(1-\tau_w(t))\Big(\bar{w}(t)+q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t)+\bar{h}_B(t)\Big)\Big)+(1-\tau_q(t))q_K(t)\bar{k}_P(t)\Big].\end{aligned}\tag{7.91}$$

Względny udział wydatków na konsumpcję w całości wydatków gospodarstwa domowego wynosi z definicji $1-s_K^P(t)-s_H^P(t)$. Oznacza to, że równania (7.90) i (7.91) sumują się stronami do (7.89).

Sumując stronami bilanse dochodów i wydatków gospodarstw domowych i sektora budżetowego otrzymujemy bilans dochodów i wydatków dla całej gospodarki. Zapisany w kategoriach *njep*, przyjmuje on następującą postać:

$$\dot{\bar{k}}(t)+(n+m)\bar{k}(t)+\dot{\bar{h}}(t)+(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)+\bar{c}(t)=\bar{w}(t)+q_K(t)\bar{k}(t)+q_H(t)\bar{h}(t).\tag{7.92}$$

Spełnione są ponadto ograniczenia: $\bar{k}(0),\bar{h}(0)>0$ oraz $\bar{k}(t),\bar{h}(t),\bar{c}(t)\ge 0$.

Przyjmujemy te same założenia o funkcjonowaniu przedsiębiorstw w warunkach doskonałej konkurencji jak w modelu gospodarki konkurencyjnej bez sektora budżetowego. W szczególności, obowiązują równania:

$$q_K(t) + \delta_K = f_{\bar{k}}, \qquad q_H(t) = f_{\bar{h}}, \qquad \bar{w}(t) = f(\bar{k}(t), \bar{h}(t)) - \bar{k}(t) f_{\bar{k}} - \bar{h}(t) f_{\bar{h}}, \tag{7.93}$$

oznaczające, że czynniki produkcji opłacane są według ich krańcowych produktywności, a suma wypłacanych wynagrodzeń wyczerpuje wartość produkcji przedsiębiorstw. W odróżnieniu od modelu bez sektora budżetowego, zakładamy, że koszty amortyzacji (deprecjacji) kapitału rzeczowego ponoszą przedsiębiorstwa. Ta niewielka modyfikacja w stosunku do (7.84) pozwala uwzględnić fakt, że część dochodów z kapitału rzeczowego przeznaczana na inwestycje restytucyjne nie podlega opodatkowaniu (zob. (7.89)).

Zakładamy, że celem gospodarstwa domowego jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji swoich członków w nieskończonym horyzoncie czasu, danej przez funkcjonał celu (7.71), w którym konsumpcja finansowana przez sektor budżetowy traktowana jest jako dana, przy ograniczeniu budżetowym (7.89), w którym jako dane traktowane są rynkowe ceny pracy „surowej" $\bar{w}(t)$, kapitału ludzkiego $q_H(t)$ i kapitału rzeczowego $q_K(t)$, oraz stopy opodatkowania dochodów, $\tau_w(t)$ i $\tau_q(t)$.

Uwzględniając w funkcjonale celu całość społecznej konsumpcji *njep*, $\bar{c}(t) = \bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)$, przyjmujemy tym samym założenie, że gospodarstwa domowe tak samo traktują konsumpcję publiczną jak konsumpcję finansowaną z własnych środków, przy czym ścieżka konsumpcji publicznej $\bar{c}_B(t)$ jest egzogenicznie dana, zaś konsumpcja prywatna $\bar{c}_P(t)$ w każdym momencie t podlega rachunkowi optymalizacyjnemu.

Problem optymalizacyjny gospodarstwa domowego można przedstawić w następującej postaci:

$$\int_0^{\infty} \frac{\left(\bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} dt \xrightarrow{\bar{c}_P,\, s_K^P} \max, \qquad \rho - (1-\gamma)m - n > 0, \tag{7.94}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{k}}_P(t) = -(n+m)\bar{k}_P(t) + \\
&\quad + s_K^P(t)\Big[(1-\tau_w(t))\Big(\bar{w}(t) + q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t) + \bar{h}_B(t)\Big)\Big) + (1-\tau_q(t))q_K(t)\bar{k}_P(t)\Big], \\
&\dot{\bar{h}}_P(t) = -(n+m+\delta_H)\bar{h}_P(t) - \bar{c}_P(t) + \\
&\quad + \Big(1-s_K^P(t)\Big)\Big[(1-\tau_w(t))\Big(\bar{w}(t) + q_H(t)\Big(\bar{h}_P(t) + \bar{h}_B(t)\Big)\Big) + (1-\tau_q(t))q_K(t)\bar{k}_P(t)\Big].
\end{aligned} \tag{7.95}$$

$$\bar{k}_P(0), \bar{h}_P(0) > 0, \qquad \bar{k}_P(t), \bar{h}_P(t), \bar{c}_P(t) \geq 0. \tag{7.96}$$

Definicja 7.3. Optymalnym planem konsumpcji i oszczędności gospodarstwa domowego w horyzoncie optymalizacji (t_0, ∞) w gospodarce konkurencyjnej z sektorem budżetowym nazywamy trójkę $(\bar{k}_P^*(t), \bar{h}_P^*(t), \bar{c}_P^*(t))$, będącą rozwiązaniem zadania (7.94) - (7.96), dla danych ścieżek $\bar{w}(t), q_K(t), q_H(t), \tau_w(t), \tau_q(t), \bar{c}_B(t)$.

Zadanie (7.94) - (7.96) jest zadaniem sterowania optymalnego, w którym zmiennymi sterującymi są $\bar{c}_P(t)$ i $s_K^P(t)$, zaś zmiennymi stanu - $\bar{k}_P(t)$ i $\bar{h}_P(t)$.

Ze względu na warunki nieujemności dla zmiennych stanu $\bar{k}(t), \bar{h}(t) \geq 0$ formułujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(t) = H(t) + \eta_K(t)\bar{k}_P(t) + \eta_H(t)\bar{h}_P(t)$$

gdzie $\eta_K(t)$, $\eta_H(t)$ to mnożniki Lagrange'a odpowiadające warunkom nieujemności, odpowiednio, $\bar{k}(t) \geq 0$, $\bar{h}(t) \geq 0$, zaś hamiltonian $H(t)$ jest postaci:

$$H(t) = \frac{1}{1-\gamma}\Big(\bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)\Big)^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m+n-\rho)t} + \eta_K(t)\dot{\bar{k}}_P(t) + \eta_H(t)\dot{\bar{h}}_P(t),$$

gdzie $\lambda_K(t)$, $\lambda_H(t)$ są mnożnikami Lagrange'a odpowiadającymi poszczególnym równaniom dynamiki zmiennych stanu (7.95).

Mnożąc funkcję Lagrange'a przez $e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$, otrzymujemy funkcję Lagrange'a wartości bieżącej:

$$L_C(t) = H_C(t) + \psi_K(t)\bar{k}_P(t) + \psi_H(t)\bar{h}_P(t),$$

gdzie $\psi_K(t) = \eta_K(t)e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$, $\psi_H(t) = \eta_H(t)e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$, zaś hamiltonian wartości bieżącej jest postaci:

$$H_C(t) = \frac{1}{1-\gamma}\Big(\bar{c}_P(t) + \bar{c}_B(t)\Big)^{1-\gamma} + \theta_K(t)\dot{\bar{k}}_P(t) + \theta_H(t)\dot{\bar{h}}_P(t),$$

gdzie: $\theta_K(t)=\lambda_K(t)e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$, $\theta_H(t)=\lambda_H(t)e^{(\rho-n-(1-\gamma)m)t}$ są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu rozwiązania wewnętrznego dla zmiennej sterującej $\bar{c}_P(t)>0$, warunki konieczne optymalności przyjmują postać układu równań:

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_K(t)}=\bar{k}_P(t)\geq 0,\quad \psi_K(t)\geq 0,\quad \bar{k}_P(t)\psi_K(t)=0, \tag{7.97}$$

$$\frac{\partial L_C(t)}{\partial \psi_H(t)}=\bar{h}_P(t)\geq 0,\quad \psi_H(t)\geq 0,\quad \bar{h}_P(t)\psi_H(t)=0, \tag{7.98}$$

$$\theta_K(t)=\theta_H(t)=\bar{c}(t)^{-\gamma}, \tag{7.99}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_K(t)&=-\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{k}_P(t)}+\theta_K(t)\big(\rho-n-(1-\gamma)m\big)=\\
&=-\theta_K(t)\Big[s_K^P(t)\big(1-\tau_q(t)\big)q_K(t)-(\rho+\gamma m)\Big]-\\
&\quad-\theta_H(t)\big(1-s_K^P(t)\big)\big(1-\tau_q(t)\big)q_K(t)-\psi_K(t),\\
\dot{\theta}_H(t)&=-\frac{\partial L_C(t)}{\partial \bar{h}_P(t)}+\theta_H(t)\big(\rho-n-(1-\gamma)m\big)=\\
&=-\theta_H(t)\Big[\big(1-s_K^P(t)\big)\big(1-\tau_w(t)\big)q_H(t)-(\delta_H+\rho+\gamma m)\Big]-\\
&\quad-\theta_K(t)s_K^P(t)\big(1-\tau_w(t)\big)q_H(t)-\psi_H(t),
\end{aligned} \tag{7.100}$$

wraz z równaniami (7.95) dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}_P(t)$, $\bar{h}_P(t)$ i warunkami transwersalności:

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_K(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\lambda_H(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}H(t)=0. \tag{7.101}$$

Po zróżniczkowaniu równania (7.99) względem czasu i dokonaniu podstawień w (7.100), otrzymujemy następujące równania dynamiki konsumpcji *njep*:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{c}}_P(t)+\dot{\bar{c}}_B(t)&=\frac{1}{\gamma}\big(\bar{c}_P(t)+\bar{c}_B(t)\big)\Big(q_K(t)\big(1-\tau_q(t)\big)-(\rho+\gamma m)\Big)+\\
&\quad+\psi_K(t)\frac{1}{\gamma}\big(\bar{c}_P(t)+\bar{c}_B(t)\big)^{1+\gamma},\\
\dot{\bar{c}}_P(t)+\dot{\bar{c}}_B(t)&=\frac{1}{\gamma}\big(\bar{c}_P(t)+\bar{c}_B(t)\big)\Big(q_H(t)\big(1-\tau_w(t)\big)-(\delta_H+\rho+\gamma m)\Big)+\\
&\quad+\psi_H(t)\frac{1}{\gamma}\big(\bar{c}_P(t)+\bar{c}_B(t)\big)^{1+\gamma}.
\end{aligned} \tag{7.102}$$

Przyrównując do siebie prawe strony równań (7.102), po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\psi_K(t)-\psi_H(t)=\left[\left(q_H(t)\left(1-\tau_w(t)\right)-\delta_H\right)-q_K(t)\left(1-\tau_q(t)\right)\right]\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{7.103}$$

Z równania (7.103) oraz warunków Kuhna-Tuckera (7.97) - (7.98) wynikają następujące implikacje:

$$\begin{gathered}
\left(q_H(t)\left(1-\tau_w(t)\right)-\delta_H\right)>q_K(t)\left(1-\tau_q(t)\right) \;\rightarrow\; \psi_K(t)>0 \;\rightarrow\; \bar{k}_P(t)=0, \\
\left(q_H(t)\left(1-\tau_w(t)\right)-\delta_H\right)<q_K(t)\left(1-\tau_q(t)\right) \;\rightarrow\; \psi_H(t)>0 \;\rightarrow\; \bar{h}_P(t)=0, \\
\bar{k}_P(t)>0 \rightarrow \psi_K(t)=0, \quad \bar{h}_P(t)>0 \rightarrow \psi_H(t)=0.
\end{gathered} \tag{7.104}$$

Jak wynika z (7.104), każda różnica w stopach rozporządzalnych dochodów netto (po uwzględnieniu opodatkowania i deprecjacji) z kapitału rzeczowego i ludzkiego skłania gospodarstwa domowe do obniżenia do zera zasobów tego rodzaju kapitału, dla którego stopa rozporządzalnych dochodów netto jest niższa.

Ostatecznie, warunki konieczne optymalności przyjmują postać układu równań różniczkowych (7.95), (7.102), wraz z warunkami (7.104), warunkami transwersalności (7.101), przy ograniczeniu na zmienną sterującą $\bar{c}_P(t)\geq 0$.

Uwzględniając bilans dochodów i wydatków sektora budżetowego (7.88) oraz równania (7.93), charakteryzujące zachowania przedsiębiorstw, otrzymujemy kompletny model gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym. Podobnie jak w modelu bez sektora budżetowego zakładamy, że gospodarka znajduje się w międzyokresowej równowadze dynamicznej (patrz definicja 7.2) w nieskończonym horyzoncie optymalizacji gospodarstw domowych.

Korzystając z definicji zmiennych $\bar{k}(t)$, $\bar{h}(t)$, $\bar{c}(t)$ oraz podstawiając (7.93) do (7.92) i (7.102), otrzymujemy równania dynamiki społecznej konsumpcji i społecznych zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego, odpowiednio:

$$\dot{\bar{k}}(t)+\dot{\bar{h}}(t)=f\left(\bar{k}(t),\bar{h}(t)\right)-(n+m+\delta_K)\bar{k}(t)-(n+m+\delta_H)\bar{h}(t)-\bar{c}(t), \tag{7.105}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{c}}(t)&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(f_{\bar{k}}\left(1-\tau_q(t)\right)-\left(\delta_K\left(1-\tau_q(t)\right)+\rho+\gamma m\right)\right)+\psi_K(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}, \\
\dot{\bar{c}}(t)&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(f_{\bar{h}}\left(1-\tau_w(t)\right)-(\delta_H+\rho+\gamma m)\right)+\psi_H(t)\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)^{1+\gamma}.
\end{aligned} \tag{7.106}$$

Definicja 7.4. Stanem stacjonarnym modelu nazywamy takie szczególne poziomy społecznej konsumpcji *njep* $\bar{c}_e$ oraz społecznych zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*, $\overline{k}_e$, $\overline{h}_e$, że jeżeli gospodarka osiągnie te poziomy, to nie będą one podlegały dalszym zmianom (czyli $\dot{\overline{c}}(t)=0$, $\dot{\overline{k}}(t)=0$, $\dot{\overline{h}}(t)=0$).

Skupimy uwagę na stanie stacjonarnym, w którym $\overline{k}_P(t), \overline{h}_P(t)>0$. Z (7.104) wynika, że zachodzi wówczas $\psi_K(t)=0, \psi_H(t)=0$.

Z równań (7.106) wynika ponadto, że warunkiem istnienia stanu stacjonarnego $(\overline{k}_e, \overline{h}_e, \overline{c}_e)>0$ jest, aby stopy opodatkowania dochodów z pracy i kapitału były stałe w czasie, $\tau_q(t)=\tau_q$, $\tau_w(t)=\tau_w$.

Przyrównując do zera lewe strony równań (7.105) i (7.106), przy założeniu, że $\tau_q(t)=\tau_q$, $\tau_w(t)=\tau_w$ oraz $\overline{c}>0$, otrzymujemy, odpowiednio:

$$\overline{c}=f(\overline{k},\overline{h})-(n+m+\delta_K)\overline{k}-(n+m+\delta_H)\overline{h}, \qquad (7.107)$$

$$f_{\overline{k}}=\frac{\delta_K(1-\tau_q)+\rho+\gamma m}{1-\tau_q}, \qquad f_{\overline{h}}=\frac{\delta_H+\rho+\gamma m}{1-\tau_w}. \qquad (7.108)$$

Trójka $\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}>0$, spełniająca układ równań (7.107) - (7.108) definiuje stan stacjonarny gospodarki (długookresową równowagę dynamiczną). Zauważmy, że w tak zdefiniowanym stanie stacjonarnym, struktura zarówno konsumpcji społecznej, jak i społecznych zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego może zmieniać się w czasie, a konsumpcja i zasoby kapitału gospodarstwa domowego „dostosowują" się w każdym momencie *t* po poziomów wynikających z danych trajektorii $\overline{c}_B(t)$, $\overline{k}_B(t)$ i $\overline{h}_B(t)$[14].

Oznaczmy przez s_K i s_H stopy inwestycji społecznych w kapitał, odpowiednio, rzeczowy i ludzki, zdefiniowane jako stosunki społecznych inwestycji (prywatnych i budżetowych) w dany rodzaj kapitału do produktu. Z przyjętych definicji wynika, że stopy inwestycji społecznych spełniają równanie:

$$\overline{c}=(1-s_K-s_H)f(\overline{k},\overline{h}).$$

[14] W skrajnym przypadku, zasoby kapitału rzeczowego i / lub ludzkiego, akumulowane dzięki inwestycjom gospodarstw domowych, mogą spaść do zera. Wtedy stopy inwestycji społecznych wynikają z danych ścieżek kapitału rzeczowego i ludzkiego oraz konsumpcji finansowanych przez sektor budżetowy. Kwestią stabilności stanu stacjonarnego $\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}>0$ określonego przez równania (7.107) i (7.108) w ogólnym przypadku nie będziemy się tutaj zajmować. W szczególnym przypadku, gdy $\overline{c}_B(t)=\overline{c}_B=const.$, $\tau_q(t)=\tau_q=const.$, $\tau_w(t)=\tau_w=const.$, stabilność stanu stacjonarnego $\overline{k}_e^{**}, \overline{h}_e^{**}, \overline{c}_e^{**}>0$ wynika z twierdzenia 7.3.

Korzystając z tego równania, warunków długookresowej równowagi dynamicznej (7.107) - (7.108) oraz definicji elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego, odpowiednio, $\alpha(\bar{k},\bar{h})$, $\beta = \beta(\bar{k},\bar{h})$ (zob. (6.18)), wyznaczamy stałe (w stanie stacjonarnym) długookresowe stopy inwestycji społecznych w kapitał rzeczowy, ludzki, odpowiednio:

$$s_K^{***} = \alpha \frac{(1-\tau_q)(m+n+\delta_K)}{(1-\tau_q)\delta_K + \rho + \gamma m}, \qquad s_H^{**} = \beta \frac{(1-\tau_w)(m+n+\delta_H)}{\delta_H + \rho + \gamma m}, \tag{7.109}$$

gdzie $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$.

Z równania (7.109) wynika, że długookresowe stopy inwestycji społecznych w kapitał rzeczowy i ludzki w gospodarce konkurencyjnej z sektorem budżetowym zależą od stóp opodatkowania dochodów, odpowiednio, z kapitału rzeczowego i pracy (w tym kapitału ludzkiego). Im wyższa jest stopa opodatkowania dochodów z kapitału rzeczowego (pracy), tym niższą stopę inwestycji społecznych w kapitał rzeczowy (ludzki) osiąga gospodarka na ścieżce wzrostu równomiernego[15].

Porównując (7.109) ze stopami inwestycji s_K^{**}, s_H^{**} w gospodarce bez sektora rządowego (danymi przez (7.87)) wnioskujemy, że dla dowolnych dodatnich poziomów stóp podatkowych τ_q, τ_w, zachodzą nierówności, odpowiednio:

$$s_K^{***} < s_K^{**}, \qquad s_H^{***} < s_H^{**}. \tag{7.110}$$

Przy $\tau_q = 0$ ($\tau_w = 0$) zachodzi $s_K^{***} = s_K^{**}$ ($s_H^{***} < s_H^{**}$). Jak pamiętamy z wcześniejszych rozważań, stopy inwestycji s_K^{**}, s_H^{**}, wynikające z równowagi rynkowej w gospodarce konkurencyjnej bez sektora budżetowego, stanowiły optymalne, na ścieżce wzrostu równomiernego, poziomy tych stóp z punktu widzenia społecznego dobrobytu. Mówiąc ogólniej, rozwiązanie problemu społecznego planisty maksymalizującego społeczny dobrobyt pokrywało się z rozwiązaniem wynikającym z równowagi konkurencyjnej. Ponieważ w modelu gospodarki konkurencyjnej z sektorem budżetowym zakładamy taką samą, jak poprzednio, postać funkcjonału celu gospodarstwa domowego, zadanie społecznego planisty, maksymalizującego społeczną międzyokresową funkcję użyteczności (7.94), przy ograniczeniu budżetowym dla całej gospodarki (7.105) oraz warunkach początkowych $\bar{k}(0), \bar{h}(0) > 0$ i ograniczeniach

---

[15] Pochodna cząstkowa s_K^{***} względem τ_q wyraża się wzorem: $\dfrac{\partial s^{***}}{\partial \tau_q} = -\alpha \dfrac{(m+n+\delta)(\rho+\gamma m)}{\left((1-\tau_q)\delta + (\rho+\gamma m)\right)^2} < 0$.

$\bar{k}(t), \bar{h}(t), \bar{c}(t) \geq 0$, jest tożsame z zadaniem (7.23) - (7.24). Zmienną sterującą jest konsumpcja społeczna *njep*, a podział wydatków konsumpcyjnych pomiędzy sektory budżetowy i gospodarstw domowych nie wpływa na wartość funkcjonału celu. Stopy s_K^{**}, s_H^{**}, dane przez (7.87), są także optymalnymi (w stanie stacjonarnym) stopami inwestycji w analizowanym teraz modelu. Z nierówności (7.110) wynika zatem, że opodatkowanie dochodów zniekształca międzyokresową alokację zasobów w gospodarce, przyczyniając się do osiągania przez gospodarkę rozwiązania suboptymalnego.

Wniosek 7.1. W porównaniu z wynikami analizy przeprowadzonej w rozdziale trzecim (punkt 3.5), uwzględnienie w modelu gospodarki konkurencyjnej akumulacji kapitału ludzkiego prowadzi do wniosku, że zniekształcający wpływ na międzyokresową alokację zasobów w gospodarce, obniżający poziom dobrobytu społecznego, ma nie tylko opodatkowanie dochodów z kapitału, ale także opodatkowanie dochodów z pracy[16].

W sytuacji, gdy dochody z kapitału i dochody z pracy nie podlegają opodatkowaniu, czyli $\tau_q = \tau_w = 0$, stopy inwestycji społecznych w kapitał rzeczowy i ludzki ustalają się na poziomach, przy których maksymalizowany jest społeczny dobrobyt.

Wniosek 7.2. Z równania (7.109) wynika ponadto, że stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki pozostają niezależne od podziału dochodów budżetowych pomiędzy konsumpcję i inwestycje (od stopy inwestycji budżetowych s_B). Oznacza to, że każda próba podniesienia przez państwo społecznych stóp inwestycji poprzez zwiększenie procentowej części dochodów budżetowych przeznaczanej na inwestycje budżetowe, wywoła odpowiednie obniżenie stóp inwestycji w sektorze gospodarstw domowych, w takim stopniu, że społeczne stopy inwestycji nie ulegną zmianie. W konsekwencji (w przeciwieństwie do rezultatów analizy w punkcie 7.3, polityka fiskalna jest nieskuteczna w oddziaływaniu na długookresową ścieżkę wzrostu gospodarczego (poziomy zmiennych *njep* w stanie stacjonarnym) i poziom dobrobytu społecznego[17].

[16] Przy założeniu, że do dochodów z pracy wliczamy wynagrodzenie kapitału ludzkiego, jak w przeprowadzonej analizie.

[17] Wniosek ten pozostaje słuszny przy założeniu, że w rozwiązaniu problemu optymalizacyjnego gospodarstwa domowego nie jest osiągane rozwiązane brzegowe, w którym $\bar{k}_P(t) = 0$ lub $\bar{h}_P(t) = 0$. Zob. przypis 13.

W przeprowadzonej analizie zakładaliśmy, że konsumpcja finansowana przez sektor budżetowy w takim samym stopniu wpływa na użyteczność gospodarstw domowych, jak konsumpcja finansowana z własnych dochodów do dyspozycji tych gospodarstw (w funkcjonale celu gospodarstwa domowego ujęta jest całość konsumpcji, bez względu na źródło pochodzenia). Założenie takie jest raczej mało realistyczne. Z tego względu moglibyśmy teraz przyjąć (podobnie jak w punkcie 3.5 na drugim etapie analizy) alternatywne założenie, że gospodarstwa domowe podejmują decyzje o podziale dochodów do dyspozycji na bieżącą konsumpcję i inwestycje w sposób zapewniający maksymalizację międzyokresowej użyteczności konsumpcji finansowanej wyłącznie z własnych środków (w funkcjonale celu gospodarstwa domowego ujęta jest tylko konsumpcja prywatna). W takim przypadku, funkcjonowanie sektora budżetowego w gospodarce prowadzi do rozwiązania suboptymalnego z punktu widzenia dobrobytu społecznego, nawet wówczas, gdy stopy opodatkowania dochodów z kapitału i pracy są zerowe, a sektor budżetowy finansuje swoją działalność wyłącznie z dochodów z akumulacji kapitału rzeczowego. Ponieważ wnioski, odpowiednio uogólnione, są analogiczne jak te, uzyskane w rozdziale trzecim, rezygnujemy tutaj z przedstawienia formalnej analizy tego zagadnienia.

Zakończenie

Na fali ostatniego renesansu badań teoretycznych nad wzrostem gospodarczym pod koniec ubiegłego stulecia neoklasyczny model wzrostu gospodarczego Solowa, stanowiący po dziś dzień podstawową w tzw. głównym nurcie makroekonomii strukturę teoretyczną, ujmującą mechanizm długofalowego wzrostu gospodarczego, stał się przedmiotem gwałtownej krytyki. W odróżnieniu od wcześniejszych ataków ze strony ekonomii postkeyneowskiej, koncentrujących się na - z metodologicznego punktu widzenia - sprawach fundamentalnych (takich, jak teoretyczna prawomocność koncepcji makroekonomicznej agregatowej funkcji produkcji i zastosowania teorii krańcowej produktywności czynników na poziomie analizy makroekonomicznej), podstawowe przesłanki zarzutów formułowanych współcześnie, wychodzących z samego centrum głównego nurtu ekonomii, dotyczą wniosków wynikających z modelu odnośnie kwestii empirycznych. Z drugiej strony liczne próby stworzenia alternatywnej struktury teoretycznej, ujmującej mechanizm długofalowego wzrostu gospodarczego, w ramach tzw. teorii wzrostu endogenicznego, nie przyniosły jak dotąd żadnego konsensusu. W tym kontekście podjęta w pracy próba syntetycznego ujęcia standardowego podejścia neoklasycznego, przeprowadzana pod kątem jego walorów eksplanacyjnych, a także rozszerzenia tego podejścia w nowych kierunkach wydaje się przedsięwzięciem całkowicie uzasadnionym.

Najistotniejsze wnioski wynikające z prowadzonych w pracy analiz można podsumować następująco.

1. Podstawowe różnice pomiędzy neoklasycznym i keynesowskim podejściem w modelowaniu długofalowego wzrostu gospodarczego sprowadzają się do (neoklasycznego) założenia o występowaniu permanentnej równowagi na wszystkich rynkach (równowagi ogólnej w gospodarce). Założenie to umożliwia skoncentrowanie uwagi na podażowej stronie gospodarki, pozostawiając na boku kwestie związane z krótkookresowymi wahaniami globalnego popytu. Z tego właśnie względu podejście neoklasyczne okazało się bardziej efektywne w ujmowaniu zagadnień związanych z długofalowym wzrostem gospodarczym i wytyczyło dalszy kierunek rozwoju makroekonomicznej teorii wzrostu.

2. Sposób przedstawienia przez Solowa modelu Harroda - Domara w artykule z 56 r., w kategoriach funkcji produkcji Koompansa - Leontiefa, przy założeniu tożsamości oszczędności i inwestycji w gospodarce, ignoruje istotę podejścia keynesowskiego. Solow sprowadza przyczyny niestabilności wzrostu w podejściu keynesowskim do braku mechanizmu zapewniającego ustalanie się w gospodarce właściwej relacji kapitału do pracy, co powoduje powstawanie wąskich gardeł produkcji po stronie jednego z czynników i niewykorzystanych nadwyżek drugiego czynnika. Ujęcie takie ignoruje właściwy problem „ostrza noża", wynikający z braku mechanizmów gwarantujących odpowiednie tempo wzrostu inwestycji, zapewniające pełne wykorzystanie mocy produkcyjnych w gospodarce.

3. Wnioski wynikające z neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa pozostają zgodne z długookresowymi tendencjami empirycznymi (tzw. „stylizowanymi faktami" wzrostu gospodarczego). Zasadnicze ograniczenia eksplanacyjne modelu ujawniają się natomiast w analizie obserwowanych różnic w poziomach zamożności pomiędzy krajami oraz procesów konwergencji bądź dywergencji tych poziomów w skali ogólnoświatowej.

4. Siła twierdzenia o asymptotycznej zbieżności gospodarki do stanu stacjonarnego (ścieżki wzrostu równomiernego), stanowiącego podstawę większości istotnych predykcji i zastosowań empirycznych modelu, jest ograniczona przez przyjmowane założenia o stałej, egzogenicznie danej stopie oszczędności/inwestycji w gospodarce oraz neutralnej w sensie Harroda (czysto pracoefektywnościowej) tendencji postępu technicznego. Z tego punktu widzenia endogeniczne ujęcie tych elementów modelu stanowi istotne rozszerzenie jego walorów eksplanacyjnych.

5. Tendencja do neutralności postępu technicznego w sensie Harroda, stanowiąca warunek konieczny wzrostu równomiernego, może być wyprowadzona z zachowań optymalizacyjnych przedsiębiorstw, kierujących się w wyborach innowacyjnych kryterium minimalizacji kosztów produkcji. Uogólnienie neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, polegające na endogenicznym ujęciu zakładanej w tym modelu harrodowskoneutralnej tendencji postępu technicznego, wymaga rezygnacji z posługiwania się funkcją produkcji Cobba-Douglasa na rzecz ogólniejszej postaci funkcji produkcji.

6. Kapitał ludzki tym różni się od kapitału rzeczowego, że jest ucieleśniony w konkretnych ludzkich jednostkach. Nie może zatem podlegać transferowi z pokolenia na pokolenie. Ponadto, akumulacja kapitału ludzkiego wiąże się z rezygnacją nie tylko z

bieżącej konsumpcji, jak w przypadku akumulacji kapitału rzeczowego, ale także z bieżących dochodów (działalności zarobkowej). Obie te własności kapitału ludzkiego powinny znaleźć odzwierciedlenie w makroekonomicznych modelach wzrostu gospodarczego, w których akumulacja kapitału ludzkiego jest uwzględniana.

7. Specyficzny sposób ujęcia procesu akumulacji kapitału ludzkiego w modelu wzrostu endogenicznego Lucasa, nawiązujący bezpośrednio do szczególnej wersji mikroekonomicznych modeli akumulacji kapitału ludzkiego Haley'a i Ben - Poratha, z liniową funkcją produkcji kapitału ludzkiego, stosunkowo łatwo poddaje się krytyce. Na tej podstawie można zakwestionować podjętą przez Lucasa teoretyczną próbę uczynienia z procesu akumulacji kapitału ludzkiego wyłącznego motoru długofalowego wzrostu gospodarczego, zastępującego w tej roli egzogeniczny postęp techniczny zakładany w standardowym modelu neoklasycznym.

8. Uwzględnienie w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego procesu akumulacji kapitału ludzkiego rozszerza w efektywny sposób możliwości eksplanacyjne tego modelu. Rozszerzony w ten sposób neoklasyczny model wzrostu gospodarczego można sformułować i analizować w kategoriach ogólnej, neoklasycznej funkcji produkcji o stałych korzyściach skali.

9. Ograniczenia analityczne oryginalnej koncepcji „złotej reguły akumulacji" Phelpsa wynikają między innymi z faktu nieuwzględniania okresu wyrzeczeń, koniecznego dla osiągnięcia przez gospodarkę w długim okresie „wyżej położonej" ścieżki równomiernego wzrostu. Można pokazać, że „złota reguła akumulacji" stanowi szczególny (graniczny) przypadek bardziej ogólnej reguły optymalizacyjnej, wynikającej z maksymalizacji międzyokresowej funkcji dobrobytu społecznego, przy określonych preferencjach społecznych co do rozkładu konsumpcji w czasie.

10. W ramach neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego możliwość stymulowania przez władze gospodarcze tempa wzrostu gospodarczego ograniczona jest do okresów przejściowych, w których gospodarka przechodzi z jednej ścieżki wzrostu równomiernego na drugą.

11. Przy założeniu braku reakcji podmiotów prywatnych na działania ze strony państwa, istnieje możliwość zagwarantowania przez państwo realizacji „złotej reguły akumulacji" (bądź innej reguły zapewniającej maksymalizację określonej funkcji dobrobytu społecznego), poprzez zmianę struktury wydatków budżetowych i stopy redystrybucji dochodu przez budżet.

12. W dynamicznej równowadze ogólnej w gospodarce konkurencyjnej bez udziału sektora budżetowego, zachowania optymalizacyjne indywidualnych podmiotów działających na rynku prowadzą do osiągania przez gospodarkę optymalnej ścieżki wzrostu, maksymalizującej społeczny dobrobyt.

13. Przy założeniu, że stopy inwestycji sektora prywatnego wynikają z zachowań optymalizacyjnych gospodarstw domowych maksymalizujących międzyokresową funkcję użyteczności, w dynamicznej równowadze ogólnej w gospodarce następuje wypychanie inwestycji prywatnych przez inwestycje budżetowe. Wynika stąd, że polityka fiskalna jest całkowicie nieskuteczna w oddziaływaniu na wzrost gospodarczy poprzez stymulowanie społecznych inwestycji.

14. Opodatkowanie dochodów z kapitału zniekształca międzyokresową alokację zasobów w gospodarce, prowadząc do stanu suboptymalnego z punktu widzenia dobrobytu społecznego. Jeżeli w analizie uwzględnia się akumulację kapitału ludzkiego, to taki zniekształcający wpływ okazuje się mieć również opodatkowanie dochodów z pracy.

15. Wnioski odnośnie skutków polityki fiskalnej państwa z punktu widzenia dobrobytu społecznego zależą od tego, czy gospodarstwa domowe uwzględniają poziom konsumpcji publicznej w swoich decyzjach optymalizacyjnych, czy nie. W przypadku, gdy gospodarstwa domowe biorą pod uwagę całkowity poziom konsumpcji swoich członków, bez względu na źródło jej sfinansowania (prywatne czy budżetowe), to w przypadku zerowej stopy opodatkowania dochodów z kapitału, a także pracy (w modelu z kapitałem ludzkim), w dynamicznej równowadze ogólnej w gospodarce maksymalizowany jest społeczny dobrobyt. Jeśli natomiast gospodarstwa domowe maksymalizują międzyokresową funkcję użyteczności konsumpcji finansowanej wyłącznie z własnych dochodów do dyspozycji, to obecność sektora budżetowego w gospodarce prowadzi do rozwiązania suboptymalnego z punktu widzenia dobrobytu społecznego, nawet wówczas, gdy stopy opodatkowania dochodów z kapitału, a także pracy (w modelu z kapitałem ludzkim), są zerowe, a sektor budżetowy finansuje swoją działalność wyłącznie z dochodów z akumulacji kapitału rzeczowego.

Na zakończenie, autor wyraża opinię, że renesans zainteresowania teorią wzrostu, jaki nastąpił w literaturze światowej w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku i trwa do dzisiaj, nie znalazł dotąd w polskim piśmiennictwie naukowym należytego oddźwięku[1]. Zdaniem autora, fakt ten jest przejawem zjawiska ogólniejszej natury, polegającego na względnej niechęci dużej części polskiego środowiska naukowego w dziedzinie nauk ekonomicznych do aktywnego zajmowania się zagadnieniami *stricte* teoretycznymi, z zakresu tzw. badań podstawowych. Wśród przyczyn tego stanu rzeczy można wymienić: ciągłą potrzebę udzielania fachowych rad i odpowiedzi na palące problemy transformacji ustrojowej oraz czynnego zaangażowania się w tworzenie zrębów instytucjonalnych gospodarki rynkowej, duże zapotrzebowanie młodych elit biznesowych na profesjonalne wsparcie ze strony przedstawicieli ekonomii akademickiej, ukierunkowujące, w naturalny sposób, zainteresowania tych ostatnich na bardziej praktyczne obszary nauk ekonomicznych, czy też po prostu konieczność nadrobienia zaległości w przyswajaniu osiągnięć współczesnej zachodniej myśli ekonomicznej.

Zakończenie okresu transformacji systemowej postawiło przed Polską nowe wyzwania, wśród których do najważniejszych w sferze gospodarczej należy niewątpliwie utrzymanie na dłuższą metę wysokiego tempa wzrostu gospodarczego, pozwalającego na nadrobienie dystansu dzielącego naszą gospodarkę od krajów wysoko rozwiniętych. Z tego względu także w badaniach naukowych (oraz w dydaktyce) niezbędne jest poświęcenie większej uwagi problematyce długofalowego wzrostu gospodarczego.

Niniejsza praca wychodzi naprzeciw temu zapotrzebowaniu i w jakimś stopniu wypełnia wskazane luki.

[1] Nie mówiąc już o ogólnym zaniedbaniu teorii wzrostu w nauczaniu ekonomii, o czym można się przekonać przeglądając polskojęzyczne podręczniki do makroekonomii.

Bibliografia

Aghion P., Durlauf S. N. (red.), *Handbook of Economic Growth*, Volume 1A, Elsevier, North Holland, 2005

Aghion P., Howitt P., *Endogenous Growth Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1998

Allen R. G. D., *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*, PWN, Warszawa 1975

Atkinson A. B., Stiglitz J. E., *A New View of Technological Change*, Economic Journal, vol. 79; 1969, s. 573 – 578

Barro R. J., *Economic Growth In a Cross Section of Countries*, Quarterly Journal of Economics, May 1991, p. 407 – 443

Barro R. J., *Government Spending In a Simple Model of Endogenous Growth*, Journal of Political Economics, October 1990, s. 103 – 125

Barro R., *Makroekonomia*, PWE, Warszawa 1997

Barro R. J., Sala-i-Martin X., *Convergence*, Journal of Political Economy, April 1992, vol.100, no. 2, p. 223-51

Barro R. J., Sala-i-Martin X., *Economic Growth*, McGraw – Hill Inc., New York 1995

Baumol W., *Productivity Growth, Convergence and Welfare*, American Economic Review, December 1986,vol. 76, p. 1072 – 1085

Becker G. C., *Human Capital*, National Bureau of Economic Research, New York 1975

Ben – Porath J., *The Production of Human Capital and The Life Cycle of Earnings*, Journal of Political Economy, 1967, July, vol.75, s. 352 - 365

Blanchard O. J., Fisher S., *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England 1990

Blaug M., *Metodologia ekonomii*, PWN, Warszawa 1995

Blaug M., *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa 2000

Burda M., Wyplosz Ch., *Makroekonomia. Podręcznik europejski*, PWE, Warszawa 1995

Cass D., *Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation*, Review of Economic Studies, July 1965, s. 233 – 240

Chiang A. C., *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa 2002

Chiang A.C., *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994

Chilosi A., Gomułka S., *Technological Conditions for Balanced Growth: a Criticism and Restatement*, Journal of Economic Theory, October 1974, s. 171 – 184

Czerwiński Z., *Moje zmagania z ekonomią*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2002

Domański S. R., *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa 1993

Domar E. D, *Capital expansion, rate of growth, and employment, Econometrica*, 14, 1946, s. 137 – 147

Domar E. D, *Expansion and Employment*, American Economic Review, 37, March 1947, s. 34 - 55

Domar E. D, *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa 1962

Drandakis E. M., Phelps E. S., *A Model of Induced Invention, Growth and Distribution*, The Economic Journal, vol 76, 1966, s. 823 – 840

Feldstein M., Horioka Ch., *Domestic Saving and International Capital Flows*, Economic Journal, t. 90, June 1980, s. 314 – 329

Fiedor B., *Neoklasyczna teoria postępu technicznego: próba systematyzacji i krytycznej analizy*, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1986

Flaschel P., *The Macrodynamics of Capitalism. Elements for a Synthesis of Marx, Keynes and Schumpeter*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg 2009

Gomułka S., *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, Centrum Analiz Społeczno – Ekonomicznych, Warszawa 1990

Haley W. J., *Human Capital. The Choice Between Investments and Income*, The American Economic Review, 1973, vol. 63, no. 5, December, s. 929 - 944

Hansen B., *Przegląd systemów równowagi ogólnej*, PWN, Warszawa 1976

Harcourt G. C., *Spory wokół teorii kapitału*, PWE, Warszawa 1975

Harrod R. F., *An Essay in Dynamic Theory*, Economic Journal, June 1939, s. 14 – 33

Harrod R. F., *Towards a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy*, London 1948, s. 100

Hicks J., *Theory of Wages*, MacMillan, London 1932

Johnson T., *Returns from Investment In Human Capital*, American Economic Review, September 1970, vol. 60, s. 546 – 560

Kaldor N., *Capital Accumulation and Economic Growth*, w: Lutz F. A., Hague D. C. (eds), *The Theory of Capital*, St. Martin's Press, New York 1961, s. 177 – 222

Kaldor N., *Eseje z teorii stabilizacji i wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa 1971

Kennedy C., *A Generalization of the Theory of Induced Bias in Technical Progress*, The Economic Journal, vol. 83, 1973, s. 48 - 57

Kennedy C., *Induced Bias In Innovation and the Theory of Distribution*, The Economic Journal, vol. 74, September 1964, s. 541 - 547

Koralewski M., *Analiza semantyczna funkcji produkcji*, Ekonomista, 1996, nr 5, s. 605 – 621

Krueger A. O., *Factor Endowments and Per Capita Income Differences Among Countries*, Economic Journal, September 1968, no. 78, s. 641- 59

Leonard D., Van Long N., *Optimal Control Theory and Static Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 1992

Levine, R., Reinelt D., *A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions*, American Economic Review, September 1992, vol. 82, no. 4, s. 942-63

Liberda B., *Inwestycje w kapitał ludzki a stopa oszczędzania gospodarstw domowych w Polsce*, Ekonomista, nr 4, 2005, s. 429 - 447

Lucas R. E., Jr., *Lectures on Economic Growth*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 2002

Lucas R. E., Jr., *On The Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics, vol. 22, July 1988, s. 3 – 42

Lucas R. E., Jr., Why *Doesn't Capital Flow From Rich To Poor Countries?*, American Economic Review, 1990, May, s. 92 - 96

Maddison A., *Growth and Slowdown in Advanced Capitalist Economies: Techniques of Quantitative Assessment*, Journal of Economic Literature, 25, 1987, June, s. 649 – 698

Mankiw N. G., Romer D., Weil N., *A Contribution To The Empirics Of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, May 1992, p. 407 – 437

Matkowski Z., Próchnik M., *Zbieżność rozwoju gospodarczego w krajach Europy Środkowo – Wschodniej i w stosunku do Unii Europejskiej*, Ekonomista 2005, nr 3, p. 293 – 319

Nikaido H., *Harrodian Pathology of Neoclassical Growth: The Irrelevance of Smooth Factor Substitution*, Zeitschrift für Nationalökonomie 40, 1980, s. 111 – 134, przedruk w: Nikaido H., *Prices, Cycles, and Growth*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1996.

Novales A., Fernandez E., Ruiz J., *Economic Growth, Theory and Numerical Solution Methods*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg 2009

Panek E., *Ekonomia matematyczna*, wyd. 2 poszerzone, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003

Phelps E., *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, American Economic Review, September 1961, s. 638 – 643

Pietraszewski P., *A Mechanics of Long-term Economic Growth - Generalized Neoclassical Approach*, w: E. Panek (red.), *Mathematics in economics*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, nr 112, Poznań 2009, s. 180 – 204

Pietraszewski P., *Analiza możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu*, Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny, Zeszyt 4, 2009 (w druku)

Pietraszewski P., *Uwagi o „złotej regule” akumulacji kapitału rzeczowego i ludzkiego w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu*, Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny, Zeszyt 1, 2009, s.105 - 122

Ramsey F.P., *A Mathematical Theory of Savings*, Economic Journal, December 1928, s. 543 – 559

Robinson J., *Akumulacja kapitału*, Warszawa 1958

Robinson J., *The Classification of Inventions*, Review of Economic Studies, February 1938

Rojek M., *Dowody fundamentalnych twierdzeń ekonomii dobrobytu w modelu równowagi ogólnej Arrowa – Debreu*, Ekonomista, nr 1, 2003, s. 43 - 68

Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000

Romer P. M., *Increasing Returns and Long – Run Growth*, Journal of Political Economy, October 1986, vol. 94, no. 5, p. 1002 – 10037

Romer P. M., *The Origins of The Endogenous Growth*, Journal of Economic Perspectives, Winter 1994, vol. 8, no. 1, p. 3 – 22

Romer P. M., *Why, Indeed in America? Theory, History and the Origins of Modern Economic Growth*, American Economic Rewiev, May 1996, vol. 86, no. 2, s. 202 - 206

Rosen S., *A Theory of Life Earnings*, Journal of Political Economy, 1976, vol. 84, s. 45 – 67

Rzońca A., *Model nabywania wiedzy przez praktykę jako przykład modelu nowej teorii wzrostu*, Bank i Kredyt, wrzesień 2002, s.36 - 45

Sachs J. D., *Wages, Profit and Macroeconomic Adjustment: A Comparative Study*, Brookings Papers on Economic Activity (1979: 2), s. 269 – 332

Samuelson P. A., *A Theory of Induced Innovations Along Kennedy – Weizsacker Lines*, Review of Economics and Statistics, 47, 1965, s. 343 – 356

Say J. B., *Traktat o ekonomii politycznej*, PWN, Warszawa 1960

Schultz T. W., *Investment in Human Capital*, The Free Press, New York 1976

Skodlarski J., Materna R., *Tendencje rozwoju gospodarki światowej na przestrzeni dziejów*; Gospodarka w Praktyce i Teorii, Nr 1 (12) 2003, s. 90 - 104

Smith A., *Bogactwo narodów. Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, PWN Warszawa 1954

Snowdon B., Vane H. R., *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*, Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 2003

Solow R. M., *A Contribution To The Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956, p. 65 – 94

Solow R. M., *Growth Theory and After,* American Economic Review, June 1988, 307 - 317

Solow R. M., *Growth Theory, An Exposition*, Oxford University Press, New York, Oxford 2000

Solow R. M., *Perspectives on Growth Theory*, Journal of Economic Perspectives, vol. 8, no. 1, Winter 1994, s. 45 - 54

Solow R. M., *Technical Change and the Aggregate Production Function*, Review of Economics and Statistics, 1957, August, s. 312 – 320

Solow R. M., *Technical Progress, Capital Formation and Economic Growth*, American Economic Review, vol. 52, 1962, s. 76-86.

Summers R., Heston A., *A New Set of International Comparisons of Real Product and Price Levels: Estimates for 130 Countries, 1950 – 1985*, Review of Income and Wealth, March 1988, 34, s. 1 – 25

Summers R., Heston A., *The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950 – 1988,* Quarterly Journal of Economics, No. 106, s. 327 – 368

Swan T. W., *Economic Growth and Capital Accumulation*, Economic Record, vol. 32, November 1956, s. 334-361

Taylor E., *Wstęp do ekonomiki*, Wydawnictwo Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań 2004

Tokarski T., *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001

Tokarski T., *Polityka fiskalna a wzrost gospodarczy*, w: Wzrost *gospodarczy, restrukturyzacja i bezrobocie w Polsce. Ujęcie teoretyczne i praktyczne*, Katedra Ekonomii UŁ, Łódź 2000, s. 27 - 45

Tokarski T., *Postęp techniczny a wzrost gospodarczy (analiza oparta na modelu R. M. Solowa)*, Studia Prawno – Ekonomiczne, t. LIII, 1996, s. 93 - 119

Tokarski T., *Postęp techniczny a wzrost gospodarczy w modelach Solowa i Lucasa*, Ekonomista, nr 2- 3, 1998, s. 271 - 291

Tokarski T., *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005

Turnovsky S. J., *Methods of Macroeconomic Dynamics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1995

Uzawa H., *Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium*, Review of Economic Studies, Vol. 28, No. 2, February 1961, s. 117 – 124

Uzawa H., Watanabe T., *A Note on the Classification of Technical Inventions*, Technical Report No. 85, Contract No. 225 (50), Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University 1960

Valdes B., *Economic Growth. Theory, Empirics and Policy*, Edward Legar Publishing, Inc., Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA, 1999

Varian H., *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 2007

Weizsacker C. C., *Tentative Notes on a Two Sector Model with Induced Technical Progress*, Review of Economic Studies, Vol. 33, 1966, s. 245 – 251

Wickens M., *Macroeconomic Theory. A Dynamic General Equilibrium Approach*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2008

Spis rysunków i tabel

Rysunek 1.1. Mechanizm wzrostu równomiernego w modelu Harroda – Domara 26
Rysunek 1.2. Stan stacjonarny i podział produktu w modelu Solowa 47
Rysunek 2.1. Mechanizm konwergencji względnej 64
Rysunek 3.1. Reakcja konsumpcji na wzrost stopy oszczędności 79
Rysunek 4.1. Optymalizacja stopnia praco- i kapitałoefektywności innowacji 128
Rysunek 4.2. Portret fazowy 135
Rysunek 4.3. Hipoteza o lokalnym poszukiwaniu 138
Rysunek 5.1. Optymalna akumulacja kapitału ludzkiego 157
Rysunek 5.2. Optymalna stopa inwestycji w kapitał ludzki 157
Rysunek 6.1. Stabilność ścieżki wzrostu równomiernego 199
Rysunek 6.2. Wzrost endogeniczny 211
Rysunek 7.1. Obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P 223

Tabela 7.1. Schemat znajdowania rozwiązań w zadaniu na optymalizację warunkową stóp inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy i ludzki 221
Tabela 7.2. Stopy inwestycji budżetowych spełniające warunki maksymalizacji konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym, odpowiadające danym stopom inwestycji prywatnych 222