Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

Bartosz Jurek

Endogeniczne czynniki wzrostu w wielosektorowych modelach dynamiki ekonomicznej

Praca doktorska

Promotor:
prof. zw. dr hab. Emil Panek
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

Poznań 2008

Spis treści

Wykaz ważniejszych symboli matematycznych stosowanych w pracy

$x \in A$	–	element x należy do zbioru A
$x \notin A$	–	element x nie należy do zbioru A
$\{x \mid P\}$	–	zbiór elementów x spełniających warunek P
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	–	zbiór złożony z elementów $x_1, \ldots, x_n$
$A \subset B$	–	zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B
$A \subseteq B$	–	zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B lub $A = B$
$A \cup B$	–	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	–	część wspólna zbiorów A i B
$A \setminus B$	–	różnica zbiorów A i B
$\mathbb{R}^n$	–	n-wymiarowa przestrzeń wektorowa
$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$	–	nieujemny orthant przestrzeni $\mathbb{R}^n$
$\forall x$	–	dla każdego x
$\exists x$	–	istnieje takie x
$P \wedge Q$	–	koniunkcja zdań P i Q (zachodzi równocześnie P i Q)
$P \vee Q$	–	alternatywa zdań P i Q (zachodzi P lub Q)
$P \Rightarrow Q$	–	implikacja zdań P i Q (jeżeli zachodzi P, to zachodzi Q)
$P \Leftrightarrow Q$	–	równoważność zdań P i Q (P zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi Q)
$f\colon X \to Y$	–	odwzorowanie f z X do Y
$[a, b]$	–	przedział obustronnie domknięty w $\mathbb{R}^1$
$[a, b)$	–	przedział prawostronnie otwarty w $\mathbb{R}^1$
$(a, b]$	–	przedział lewostronnie otwarty w $\mathbb{R}^1$
(a, b)	–	przedział obustronnie otwarty w $\mathbb{R}^1$
$C^0(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$	–	klasa ciągłych funkcji z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$x > y$	–	oznacza, że $\forall i \ (x_i > y_i)$
$x \geq y$	–	oznacza, że $\forall i \ (x_i \geq y_i)$
$x \gneqq y$	–	oznacza, że $x \geq y$ i $x \neq y$
$x^i \underset{i}{\to} \bar{x}$	–	ciąg elementów $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ zbieżny do $\bar{x}$
$\lim_{x \to a} f(x)$	–	granica funkcji f w punkcie a
$\max_{x \in A} f(x)$	–	maksymalna wartość funkcji f na zbiorze A
$\arg\max_{x \in A} f(x)$	–	argument, przy którym funkcja f osiąga wartość maksymalną na zbiorze A
x^T	–	transpozycja wektora x
$\lVert x \rVert = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$	–	norma wektora $x \in \mathbb{R}^n$ przyporządkowująca wektorowi x sumę wartości bezwzględnych jego współrzędnych
$\frac{x}{l} = \left(\frac{x_1}{l}, \frac{x_2}{l}, \ldots, \frac{x_n}{l}\right)$	–	dzielenie wektora x przez skalar l
A^T	–	transpozycja macierzy A
Ax	–	iloczyn macierzy A i wektora kolumnowego x
yA	–	iloczyn wektora wierszowego y i macierzy A
A^{-1}	–	macierz odwrotna do kwadratowej macierzy A
$\det A$	–	wyznacznik kwadratowej macierzy A
E	–	macierz jednostkowa
e	–	wektor, którego wszystkie elementy są równe 1

.

Wstęp

Obserwując otaczającą nas rzeczywistość nie sposób nie zauważyć ogromnego tempa zachodzących zmian społecznych i gospodarczych. W wyniku globalizacji procesów ekonomicznych, wraz z dostępem do coraz doskonalszych technologii teleinformatycznych rośnie świadomość ekonomiczna społeczeństw pragnących czerpać korzyści z otwierających się przed nimi możliwości, które stwarza współczesna cywilizacja. W efekcie, pomimo coraz częstszych głosów sprzeciwu zwracających uwagę (między innymi) na szybką degradację środowiska naturalnego i narastające konflikty społeczne, priorytetem polityki gospodarczej niemal każdego kraju świata jest dzisiaj szybki wzrost prowadzący do zwiększenia zamożności jego obywateli. Okazuje się jednak, że osiągnięcie i utrzymanie wysokiej stopy wzrostu gospodarczego nie jest rzeczą prostą. Obserwuje się również duże zróżnicowanie potencjału wzrostu pomiędzy poszczególnymi krajami. Przed ekonomistami stoi więc zadanie identyfikacji czynników decydujących o możliwościach trwałego, długookresowego wzrostu gospodarczego oraz wskazania sposobu postępowania zapewniającego osiągnięcie jego możliwie najlepszych parametrów.

W literaturze poświęconej zagadnieniom wzrostu gospodarczego dominują prace, w których analiza prowadzona jest na poziomie agregatów opisujących kształtowanie się takich podstawowych wielkości ekonomicznych, jak produkcja globalna, konsumpcja czy inwestycje w skali całej gospodarki. Przy ich wykorzystaniu budowane są rozmaite matematyczne modele gospodarki zakładające z natury rzeczy bardzo uproszczony mechanizm jej funkcjonowania[1]. Modele tego typu pozwalają na analizę stanów równowagi i ścieżek wzrostu zrównoważonego, które potencjalnie mogą być w gospodarce osiągnięte oraz umożliwiają poszukiwanie sposobów doprowadzania gospodarki z upływem czasu do równowagi. Nie mogą natomiast służyć wyjaśnieniu przyczyn zmian, które w wyniku rozwoju ekonomicznego zachodzą np. w poszczególnych gałęziach gospodarki. W tym celu niezbędna staje się analiza zależności występujących pomiędzy gałęziami, w której takie wielkości, jak produkcja globalna, konsumpcja czy inwestycje nie są wyrażone za pomocą pojedynczych

[1] Zob. np. R. J. Barro, X. Sala-i-Martin [7], C. I. Jones [44], R. Lucas [66], R. Solow [99].

liczb lecz wektorów – ich wymiary odpowiadają liczbie wyróżnionych gałęzi. Modele matematyczne umożliwiające prowadzenie takiej analizy przyjęto w ekonomii nazywać wielosektorowymi lub wielogałęziowymi modelami wzrostu[2]. Wnioski płynące z badania własności tego typu modeli stanowią istotne uzupełnienie rezultatów uzyskanych poczas analizy modeli zagregowanych i pozwalają na lepsze zrozumienie przyczyn i skutków wzrostu gospodarczego.

W 1949 roku P. A. Samuelson sformułował hipotezę, zgodnie z którą optymalne ścieżki wzrostu, bez względu na wyjściowy stan gospodarki, są w długich okresach zbieżne do pewnej wzorcowej ścieżki zrównoważonego wzrostu zwanej magistralą[3]. Hipoteza ta została potwierdzona w obszernej rodzinie wielosektorowych modeli wzrostu[4], a twierdzenia opisujące tę własność przyjęto nazywać twierdzeniami o magistrali. Dają one nowe narzędzie planistom makroekonomicznym, którzy po wyznaczeniu optymalnych ścieżek zrównoważonego wzrostu mogą w praktyce wpływać na kształtowanie makroekonomicznych proporcji sprzyjających osiąganiu długookresowego, magistralnego wzrostu zrównoważonego.

W pierwszych dekadach drugiej połowy XX wieku niemal wszystkie najważniejsze wydawnictwa ekonomiczne publikowały prace poświęcone wielosektorowym modelom wzrostu. Szybko rozwijała się również teoria magistral. Wraz z upływem lat zainteresowanie analizą wielogałęziową zaczęło jednak słabnąć. Zdaniem niektórych ekonomistów[5], stało się tak głównie za sprawą szybkiego rozwoju i rosnącego znaczenia nowej, endogenicznej teorii wzrostu. Głosi ona, między innymi, że najważniejszymi czynnikami decydującymi o możliwości osiągania trwałego długookresowego wzrostu gospodarczego są akumulacja kapitału ludzkiego i wiedzy oraz postęp technologiczny[6]. Tymczasem ogromna większość modeli wielosektorowych, a także udowodnionych dla nich twierdzeń o magistrali, opierała się na założeniu stałości wykorzystywanej w gospodarce technologii[7]. Nie uwzględniano w nich w zasadzie żadnych czynników produkcji poza kapitałem fizycznym i pracą. W efekcie, w publikacjach poświęconych zagadnieniom wzrostu gospodarczego zaczęły dominować maksymalnie zagregowane modele jedno- i dwu- (rzadziej trój-) czynnikowe. Rozwój badań nad wielosektorowymi modelami gospodarki został znacznie zahamowany.

Podejmowane w literaturze próby przeniesienia teorii wzorstu endogenicznego na grunt modeli wielosektorowych są stosunkowo nieliczne i ograniczają się zazwyczaj

[2]Zob. np. D. Gale [29] i [28], L. W. McKenzie [72], E. Panek [82].

[3]Por. np. R. Dorfman. P. A. Samuelson, R. M. Solow [22], L. W. McKenzie [73].

[4]Zob. np. H. Atsumi [5], L. W. McKenzie [72], M. Morishima [76], R. Radner [86], P. A. Samuelson [94], J. Tsukui [101].

[5]Zob. np. B. Los [64].

[6]Por. np. P. Aghion, P. Howitt [2], P. M. Romer [88].

[7]Jako wyjątki można wskazać takie prace, jak np. D. T. Gantz [30], E. B. Keeler [51].

do włączenia do rozważań jedynie postępu technologicznego[8]. Bardzo trudno znaleźć również publikacje, w których na gruncie modeli wielogałęziowych, uwzględniających zmienność technologii oraz akumulację kapitału ludzkiego i wiedzy, dowodzone byłyby twierdzenia o magistrali. Chcąc, przynajmniej w niewielkim stopniu, wypełnić tę lukę, w części teoretycznej pracy zaproponujemy wielosektorowy model wzrostu endogenicznego będący uogólnieniem szeroko omawianego w literaturze modelu Leontiefa–Gale'a[9]. Analizując jego własności wykażemy, że kapitał ludzki i wiedza są, obok kapitału fizycznego i pracy, głównymi czynnikami zrównoważonego wzrostu gospodarczego, co ważne, pozwalającymi na osiąganie w gospodarce trwałego wzrotu produkcji *per capita*. Sformułujemy i przedstawimy dowody twierdzeń o magistrali, zarówno w tzw. słabej, jak i silnej postaci.

Jak już wspomnieliśmy, w teorii wzrostu endogenicznego zakłada się, że na możliwości osiągania trwałego, długookresowego wzrostu gospodarczego istotny wpływ ma akumulacja kapitału ludzkiego i wiedzy technicznej, wykorzystywanej w procesach produkcyjnych. O ile rozmiar (wartość) kapitału fizycznego, czy poziom zatrudnienia w gospodarce, są wielkościami stosunkowo łatwymi do oszacowania, to już wyznaczenie rozmiarów kapitału ludzkiego i poziomu wiedzy nastręcza sporo trudności. Co więcej, w literaturze brak jest nawet powszechnie uznanych definicji tych pojęć. Dlatego też, pragnąc na użytek tej pracy przybliżyć dorobek teorii wzrostu endogenicznego, w rozdziale 1 prezentujemy i szczegółowo omawiamy występujące w literaturze teoretycznej definicje kapitału ludzkiego oraz proponowane metody jego szacowania. Zwracamy uwagę na mocne i słabe strony każdego z proponowanych podejść podkreślając, że wzrost zasobów kapitału ludzkiego musi w długim okresie pociągać za sobą zmiany technologiczne w gospodarce, i odwrotnie, postęp technologiczny implikuje przyrosty kapitału ludzkiego zatrudnionych w niej pracowników. Mając świadomość ogromnej roli, jaką we wzroście gospodarczym odgrywają innowacje i udoskonalenia wykorzystywanych procesów produkcyjnych, w rozdziale 1 omawiamy wpływ rosnącego poziomu wiedzy na tempo postępu technicznego. Opisujemy również zjawisko tzw. międzygałęziowej dyfuzji wiedzy.

Twierdzenia udowodnione dotąd w klasie stacjonarnych, egzogenicznych modeli typu Leontiefa–Gale'a, nie uwzględniających akumulacji kapitału ludzkiego i postępu technicznego, głoszą (między innymi), że optymalna stopa zrównoważonego wzrostu gospodarczego nie może być wyższa od stopy wzrostu liczby ludności[10]. Oznacza to, że w takich gospodarkach produkcja, konsumpcja, czy też inwestycje w przeliczeniu na jednego zatrudnionego (*per capita*) w stanach stacjonarnych nie

[8]Por. np. B. Los [64], F. M. Scherer [95], E. N. Wolff [107].

[9]Zob. np. P. Maćkowiak [67] i [68], E. Panek [82] i [83].

[10]Por. np. lemat 6.4 i twierdzenie 6.4 w pracy E. Panek [82], str. 343 i 352.

rosną. Własność ta wynika bezpośrednio z założenia o proporcjonalności nakładów i wyników we wszystkich procesach produkcyjnych oraz utożsamiania nakładu czynnika pracy z liczbą pracowników zatrudnionych w poszczególnych gałęziach. Analogiczne założenie przyjmujemy w rozdziale 2, z tą jednak różnicą, że zasób czynnika pracy określamy w nim przez kapitał ludzki posiadany przez pracowników, a nie ich liczbę. W rozdziale tym formułujemy wyjściowy endogeniczny model wzrostu oraz definiujemy podstawowe pojęcia, z których korzystamy w dalszej części pracy. Dowodzimy w nim szeregu własności optymalnych i stacjonarnych procesów wzrostu. Zwieńczeniem sekwencji twierdzeń jest tzw. słabe i silne twierdzenie o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu endogenicznego (twierdzenia 2.11 i 2.13). W całym rozdziale 2 zakładamy niezmienność (stałość) wykorzystywanej w gospodarce technologii, w szczególności stałą w czasie produktywność kapitału ludzkiego i fizycznego. Natomiast efektem akumulacji kapitału ludzkiego i wiedzy technicznej jest już rosnąca (na magistrali) produktywność (wydajność pracy) osób zatrudnionych w poszczególnych gałęziach gospodarki.

W rozdziale 3 prezentujemy dwa kierunki uogólnień wielosektorowego modelu wzrostu typu Leontiefa–Gale'a z kapitałem ludzkim, pozwalające na uwzględnienie postępu technicznego. Najpierw przyjmujemy założenie, że zmiany technologiczne wprowadzane są w gospodarce sukcesywnie, z zachowaniem pewnych odstępów czasu, na podobieństwo rewolucji technicznych, natomiast pomiędzy okresami, w których zmiany te są dokonywane, technologia pozostaje stała. Nazywamy go modelem z przedziałami stałą technologią. Dowodzimy, że jeżeli odstępy czasu pomiędzy wdrożeniami kolejnych technologii są dostatecznie długie, to w horyzontach wyznaczanych przez te okresy ujawnia się efekt magistrali (twierdzenia 3.4 i 3.5). W drugim przypadku zakładamy, że technologia stosowana w gospodarce może zmieniać się permanentnie z okresu na okres, zbiegając z upływem czasu do pewnej technologii wzorcowej, wyznaczającej w świetle aktualnej wiedzy kres rozpoznawalnych możliwości technologicznych. Mówimy wówczas o modelu wzrostu endogenicznego z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. Korzystając częściowo z wyników uzyskanych w rozdziale 2 formułujemy i dowodzimy w nim twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej, wielosektorowej gospodarce typu Leontiefa–Gale'a z technologią graniczną (twierdzenie 3.9). Dopuszczając, by szybkość z jaką wprowadzane są innowacje nie była gospodarce narzucana, ale wynikała z osiąganego etapu jej rozwoju, w obu modelach zakładamy, że o sile postępu technicznego decyduje tempo akumulacji wiedzy technicznej w poszczególnych gałęziach gospodarki.

Wśród prac poświęconych efektowi magistrali w wielosektorowych modelach dynamiki ekonomicznej znacznie rzadziej znaleźć można takie, w których autorzy – oprócz rozważań teoretycznych – prezentują również wyniki przeprowadzonych badań empirycznych[11]. Co więcej, prezentowane w tych pracach modele nie uwzględniają ani kapitału ludzkiego, ani wiedzy technicznej. Próbę weryfikacji empirycznej efektu magistrali na gruncie wielosektorowych modeli wzrostu endogenicznego przedstawionych w rozdziałach 2 i 3 podejmujemy w rozdziale 4, w którym prezentujemy wyniki symulacji i obliczeń wykonanych w oparciu o dane statystyczne dla gospodarki Polski. Analizie empirycznej poddajemy zarówno model stacjonarny (bez postępu technologicznego), jak i model niestacjonarny z technologią przedziałami stałą. W obu przypadkach uzyskane przez nas wyniki wskazują, że efekt magistrali ujawnia się w gospodarce już w horyzoncie 20 lat. Okres potrzebny na dojście gospodarki do magistrali zależy, oczywiście, od przyjętego stanu początkowego, z którego „startuje" gospodarka. W naszych obliczeniach wynosi on około 5–6 lat, zatem dostosowania gospodarki do stanu pozwalającego na osiągnięcie najszybszego zrównoważonego wzrostu mogą w praktyce przebiegać dość szybko. Co ciekawe, efekt magistrali wyraźniej uwidocznia się w gospodarce ze zmienną technologią. Po części wynik taki jest następstwem przyjęcia w modelu niestacjonarnym dłuższego horyzontu czasowego (30 lat), tym niemniej zmienność technologii (zmienność parametrów modelu) odgrywa w nim kluczową rolę.

[11]Zob. np. W. Jurek, R. Kiedrowski, E. Panek [50], J. Tsukui, Y. Murakami [102].

Rozdział 1

Czynniki wzrostu endogenicznego

Jednym z zadań stojących przed nauką ekonomii od zarania jej rozwoju jest próba wyjaśnienia przyczyn zróżnicowania bogactwa narodów. Co sprawia, że jedne kraje są biedne, a inne rozwijają się szybko powiększając dobrobyt swoich obywateli? Problemowi temu poświęcono w literaturze wiele miejsca, jego pierwsze naukowe sformułowanie znajdujemy w klasycznym dziele A. Smitha „Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów”[12]. W latach pięćdziesiątych XX wieku R. Solow sformułował model wzrostu, który różnice w osiąganej wielkości produkcji *per capita* tłumaczył zróżnicowanym tempem akumulacji kapitału fizycznego[13]. Przeprowadzone w późniejszych latach badania empiryczne nie potwierdziły jednak w pełni słuszności teorii Solowa. Oprócz wielkości angażowanego kapitału fizycznego duży wpływ na wyniki gospodarcze ma bowiem również jego jakość. Podobnie, o wielkości wytwarzanej produkcji decyduje nie tylko liczba pracowników, ale także wiedza i umiejętności jakie pracownicy ci posiadają. Spostrzeżenia te doprowadziły do położenia większego nacisku na badanie wpływu jaki na wzrost gospodarczy mają takie zjawiska, jak postęp technologiczny oraz akumulacja kapitału ludzkiego. O ile jednak w literaturze ekonomicznej panuje generalnie zgoda co do konieczności włączenia do rozważań nad wzrostem gospodarczym obu wspomnianych zjawisk, to ani postęp technologiczny, ani kapitał ludzki nie są definiowane i ujmowane w sposób jednoznaczny. Zanim więc przystąpimy do zaprezentowania i analizy matematycznego modelu wzrostu, przybliżymy istotę obu tych zjawisk, wyjaśniając nasze rozumienie postępu technologicznego, dyfuzji wiedzy oraz kapitału ludzkiego. Zaprezentujemy również proponowane w literaturze sposoby ich mierzenia i modelowania.

[12] A. Smith [98].
[13] R. Solow [99].

1.1. Postęp technologiczny

1.1.1. Znaczenie wiedzy w procesach produkcyjnych

W każdym procesie wytwórczym występują dwa podstawowe czynniki produkcji: praca oraz kapitał fizyczny. Oczywiste jest jednak, że samo ich posiadanie nie gwarantuje uzyskania pożądanego efektu. Producent musi bowiem wiedzieć co dokładnie chce wytworzyć, jakimi właściwościami powinien charakteryzować się jego wyrób, a także jakie będą mu do tego potrzebne surowce i materiały. Innymi słowy, niezbędna jest wiedza odnośnie do produktu. Ponadto, producent musi również znać sposób, w jaki zgromadzone zasoby pracy i kapitału fizycznego należy ze sobą połączyć, tak aby technicznie możliwe było wytworzenie owego produktu. Posiadać musi więc wiedzę odnośnie do procesu produkcyjnego. Dobrze prowadzona działalność produkcyjna nie jest możliwa bez posiadania zarówno wiedzy o produkcie, jak i wiedzy o procesie wytwórczym. Poziomy obu rodzajów wiedzy technicznej wykorzystywanej przez producentów decydują o stosowanych przez nich technologiach produkcji, które mają bardzo istotny wpływ na osiągane rezultaty. Jeśli bowiem producenci mogą zwiększać posiadaną wiedzę techniczną, to przy niezmienionych wielkościach angażowanych zasobów kapitału fizycznego i pracy mogą również stosować coraz efektywniejsze rozwiązania techniczno–organizacyjne i wytwarzać coraz więcej produktów coraz wyższej jakości. Z punktu widzenia wzrostu gospodarczego niezwykle interesujące jest więc pytanie o przyczyny oraz konsekwencje zmian poziomu owej wiedzy.

Głównym źródłem nowych rozwiązań wzbogacających dostępną wiedzę techniczną są prace badawczo–rozwojowe. Prowadzą one do powstawania projektów nowatorskich rozwiązań i wynalazków mogących wpływać na poprawę osiąganych efektów. Poprawa ta może przy tym następować zarówno w wyniku doskonalenia i podnoszenia jakości produktów, jak i usprawniania procesów wytwórczych. Gdy nowoopracowane rozwiązanie znajduje zastosowanie praktyczne mówimy, że wprowadzona zostaje innowacja. W konsekwencji zmienia się wykorzystywana technologia produkcji[14]. Działalność badawczo–rozwojowa wiąże się jednak z pewnym stopniem ryzyka i niepewności. Najczęściej nie można bowiem przewidzieć czy poniesione na badania nakłady przyniosą spodziewane rezultaty. Mimo to, przyrost wiedzy technicznej jest (w głównej mierze) następstwem celowych działań producentów reagujących na możliwości i zagrożenia, jakie stawia przed nimi konkurencyjny rynek[15]. Kierując się przesłankami racjonalnego działania dążą oni bowiem do jak najpełniej-

[14] Por. V. W. Ruttan [91].

[15] Por. P. M. Romer [88].

szego zaspokojenia potrzeb konsumentów, a tym samym do modyfikacji oferowanych przez siebie produktów. Gdy jeden z producentów podnosi jakość swoich produktów, inni, nie chcąc utracić swej pozycji rynkowej, zmuszeni są również do wprowadzenie nowych lub do unowocześnienia dotychczasowych wyrobów. W rezultacie rośnie poziom wykorzystywanej w gospodarce wiedzy o produktach. W szczególności, producenci mogą osiągnąć wyższe zyski np. poprzez redukcję niepotrzebnych kosztów i doskonalenie procesów wytwórczych, w ich interesie leży wóczas zwiększanie stosowanej wiedzy o procesach produkcyjnych. Mechanizmy te sprawiają, że nieodłączną cechą każdej gospodarki rynkowej jest ciągły wzrost poziomu dostępnej i wykorzystywanej w praktyce wiedzy technicznej. Wzrost ten określany jest mianem postępu technologicznego.

Podejmując działalność wytwórczą producent nie musi korzystać wyłącznie ze swych autorskich rozwiązań. Może również polegać na różnego rodzaju opracowaniach naukowych, technicznych, wiedzy przekazywanej przez media, pochodzącej od innych producentów, uczestniczyć w konferencjach naukowych, szkoleniach, etc. Dzieje się tak dlatego, że wiedza techniczna, przynajmniej w części, wykazuje pewne cechy dobra publicznego. Generalnie, wiedza nie ma charakteru dobra konkurencyjnego, co oznacza, że może być wykorzystywana przez więcej niż jednego producenta jednocześnie[16]. Oczywiście, producenci, którym udało sie opracować nowe technologie produkcji, bądź też wprowadzić nowatorskie rozwiązanie organizacyjne, nie muszą być, i najczęściej nie są, zainteresowani przekazywaniem nowo zdobytej wiedzy innym producentom działającym w tej samej branży. W krajach o rozwiniętej gospodarce rynkowej funkcjonują rozwiązania prawne, które poprzez patenty i prawa autorskie umożliwiają wynalazcom ochronę stworzonych rozwiązań przed wykorzystywaniem ich przez innych. Gdy ochrona taka występuje, wiedza nabiera cechy dobra wyłączalnego i wówczas, mimo że nie jest dobrem konkurencyjnym, nie może być używana przez każdego producenta. W rzeczywistości ekonomicznej skuteczność ochrony patentowej nie jest jednak stuprocentowa. Ponadto, bardzo często okazuje się, że nowoopracowane rozwiązania, nowatorskie idee powstałe w placówkach naukowych lub działach badawczo–rozwojowych, prowadzą do lepszego funkcjonowania innych podmiotów, często o całkowicie odmiennych profilach działalności. W gospodarce obserwowane są więc przepływy wiedzy, tak wewnątrz, jak i pomiędzy poszczególnymi jej gałęziami[17]. Oczywiście, im bardziej podobne z technologicznego punktu widzenia są podmioty gospodarcze, tym silniejsze przepływy występują między nimi.

[16]Zob. np. B. Los, B. Verspagen [65] lub P. M. Romer [88].

[17]Por. np. E. Dietzenbacher, B. Los [21], J. Popkin [85].

W efekcie wzrostu poziomu wiedzy o produktach i technologiach w gospodarce uwidacznia się również, oprócz przepływu wiedzy, podział – pomiędzy wynalazcę i jego odbiorców – kosztów i korzyści związanych z innowacjami[18]. Najlepsza dla producenta jest oczywiście taka sytuacja, gdy występuje on na rynku w pozycji monopolisty. Może wówczas podyktować taką cenę nowego czy też ulepszonego produktu, która umożliwi mu przerzucenie całego kosztu innowacji na odbiorców. Monopolista może więc utrzymać wszelkie korzyści związane z wprowadzeniem na rynek produktu o wyższej jakości. Jednak w rzeczywistości ekonomicznej pełny monopol występuje stosunkowo rzadko, toteż zmienność obowiązujących na rynku cen nie odzwierciedla faktycznego wzrostu jakości oferowanych wyrobów. Najlepszym przykładem, przytaczanym również w pracy B. Los, B. Verspagen [65], są ceny komputerów osobistych. W ciągu ostatnich 10–15 lat utrzymywały się one na względnie stałym poziomie (lub nawet nieco się obniżyły). Tymczasem, jakość sprzętu komputerowego, liczona choćby szybkością obliczeniową procesorów, wzrosła ponad dziesięciokrotnie. W tym przypadku kupujący niemal wcale nie zostali obciążeni kosztami związanymi z opracowaniem i wprowadzeniem do sprzedaży unowocześnionych produktów. Przejęli przez to znaczną część korzyści wynikających z ich wykorzystywania. W konsekwencji większość gałęzi gospodarki mogła odnotować poprawę produktywności w wyniku nakładów na badania i rozwój poniesionych jedynie w przemyśle komputerowym.

Istnienie przepływów wiedzy oraz podziału kosztów i korzyści związanych z wprowadzaniem na rynek ulepszonych produktów sprawia, że w gospodarce ujawnia się efekt dyfuzji technologii. Tempo postępu technologicznego jest więc uzależnione nie tylko od wielkości nakładów ponoszonych przez poszczególnych producentów na badania i innowacje, ale także od istnienia i siły przepływów technologii występujących pomiędzy podmiotami gospodarki. Co więcej, jak wynika z przeprowadzanych badań empirycznych, dyfuzja technologii ma bardzo istotne znaczenie również w ujęciu międzypaństwowym[19]. Istnienie wielkich ponadnarodowych korporacji, wymiana handlowa, a także swobodny, przynajmniej w niektórych częściach świata, przepływ siły roboczej w znacznym stopniu przyczyniają się do przepływu technologii pomiędzy różnymi krajami świata.

[18]Por. np. Z. Griliches [33], B. Los, B. Verspagen [65], G. Papaconstantinou, N. Sakurai, A. Wyckoff [84].

[19]Zob. np. J. Benhabib, M. M. Spiegel [10], D. Frantzen [27], P. Hanel [38].

1.1.2. Źródła transferu wiedzy

Postęp technologiczny jest zjawiskiem pożądanym zarówno z makro, jak i mikroekonomicznego punktu widzenia. By możliwe było skuteczne wpływanie na jego tempo, konieczne jest zidentyfikowanie kanałów, którymi wiedza o produktach i procesach wytwórczych trafia do producentów. Najłatwiej dokonać tego poprzez analizę danych pochodzących od przedsiębiorców działających na rynku, którzy na codzień, niekiedy nawet nieświadomie, są świadkami przepływu wiedzy w gospodarce. W literaturze wyróżnić można siedem podstawowych źródeł napływu wiedzy[20].

Pierwszym z nich jest nabycie licencji na produkt lub określone rozwiązanie techniczno–organizacyjne, umożliwiające bądź to wytwarzanie produktu o lepszych niż dotychczas właściwościach, bądź też zapewniające redukcję ponoszonych kosztów. Wykupując licencję nabywca, oprócz wiedzy, uzyskuje także prawo do jej wykorzystywania, dzięki czemu niemal natychmiast może on czerpać z niej zamierzone korzyści. Jest to niewątpliwie najprostszy, choć jednocześnie dość kosztowny, sposób wzbogacania posiadanej przez producenta wiedzy technicznej.

Drugim możliwym kanałem napływu wiedzy jest analiza dokumentów patentowych. Dzięki niej producenci mogą dowiedzieć się jakim zasobem wiedzy dysponują inne podmioty oraz czy poszukiwane przez nich rozwiązania nie zostały już wcześniej opracowane. Ponadto, dokumenty patentowe bywają bardzo pomocne naukowcom i wynalazcom, którzy dzięki zawartej w nich wiedzy mogą zdecydowanie szybciej tworzyć kolejne projekty i wynalazki. Takie wykorzystanie dokumentów patentowych nie jest sprzeczne z ideą patentu i sprzyja wzrostowi tempa postępu technologicznego. W praktyce jednak, ochrona wiedzy za pomocą patentów bywa daleka od doskonałości. W konsekwencji, ich analiza przyczyniać się może również do powstawania tzw. imitacji, czyli rozwiązań kopiujących idee chronione patentem. Uznaje się jednak, że jeżeli liczba powstających imitacji nie jest na tyle duża, by zniechęcać producentów do prowadzenia prac badawczo–rozwojowych, to dostępność dokumentów patentowych wpływa pozytywnie na tempo postępu technologicznego.

Chcąc podnieść poziom posiadanej wiedzy, producenci mogą również śledzić informacje ukazujące się w specjalistycznych publikacjach naukowo–technicznych. Mogą uczestniczyć w organizowanych przez różnego rodzaju ośrodki naukowe konferencjach, spotkaniach, czy też szkoleniach. Dają one możliwość zapoznania się z najnowszymi rozwiązaniami technologicznymi i organizacyjnymi prowadząc w konsekwencji do przyspieszenia procesów innowacyjnych w przedsiębiorstwach.

Duże znaczenie w zdobywaniu nowej wiedzy mają także kontakty z pracownikami innych firm. Nieformalne rozmowy z dostawcami, odbiorcami, czy też nawet ze

[20] Zob. R. C. Levin, A. K. Klevorick, R. R. Nelson, S. G. Winter [63].

znajomymi, mogą być źródłem niezwykle cennych informacji przydatnych zarówno w usprawnianiu procesów wytwórczych, jak i podnoszeniu jakości oferowanych produktów.

Kolejnym zidentyfikowanym empirycznie kanałem napływu wiedzy jest zatrudnianie pracowników, którzy pracowali wcześniej w działach produkcyjnych lub badawczo–rozwojowych innych firm. Kanał ten jest charakterystyczny szczególnie dla Stanów Zjednoczonych, gdzie pracownicy nie są tak silnie związani ze swoim miejscem pracy jak np. Europejczycy i stosunkowo często zmieniają pracodawcę. W efekcie zdarza się, że specjaliści dokonujący innowacji w jednej firmie są później zatrudniani przez konkurentów, którzy, oprócz doświadczonego pracownika, zyskują w łatwy sposób wiedzę na temat oferowanych przez współuczestników rynku produktów oraz procesów wykorzystywanych do ich wytwarzenia.

Ważnym źródłem wiedzy technicznej jest analiza produktów wytworzonych przez innych producentów (ang. *reverse engineering*). Poddając dokładnej analizie wyroby oferowane przez konkurencję producenci mogą dowiedzieć się nie tylko jakie mają one właściwości, ale także z czego i w jaki sposób zostały wytworzone. Zdobyta w ten sposób wiedza wykorzystywana jest później najczęściej do stworzenia imitacji lub też produktu nowocześniejszego, charakteryzującego się wyższą jakością niż wyroby konkurentów.

Ostatnim wyróżnionym (choć oczywiście nie najmniej istotnym) sposobem gromadzenia wiedzy są niezależne badania i innowacje własne. Są one przeprowadzane przez wyodrębnione w strukturach przedsiębiorstw jednostki badawczo–rozwojowe lub też samodzielne jednostki naukowe. Dokonywane przez zatrudnionych w nich pracowników odkrycia i wynalazki powiększają dostępny zasób wiedzy. Co ważne, rozwiązania opracowane bezpośrednio przez producentów najpełniej odpowiadają ich potrzebom, przez co zwykle przynoszą największe korzyści i są najłatwiejsze do wykorzystania. Możliwe jest przy tym, poprzez zastosowanie patentów, zapewnienie ochrony nowej wiedzy przed niechcianym wykorzystaniem jej przez innych producentów.

Oczywiście, wszystkie wymienione kanały transferu wiedzy wykorzystywane są przez producentów w różnym stopniu. W wielu przypadkach, kilka bądź nawet wszystkie z nich współdziałają ze sobą, tak że niezwykle trudno wskazać jest faktyczną drogę, którą wiedza trafia do danego przedsiębiorstwa. W rezultacie, trudno jest także ocenić znaczenie poszczególnych kanałów w podnoszeniu poziomu wiedzy technicznej konkretnych podmiotów. Z makroekonomicznego punktu widzenia istotny jest już jednak sam fakt istnienia przepływów wiedzy w gospodarce.

1.1.3. Metody pomiaru międzygałęziowej dyfuzji wiedzy

W makroekonomicznych rozważaniach poświęconych zagadnieniom produktywności tak całych gospodarek, jak i wyszczególnionych w nich gałęzi, przyjmuje się zwykle, że podstawowymi czynnikami produkcji decydującymi o osiąganych efektach są – jak już o tym pisaliśmy – praca oraz kapitał fizyczny. Wiemy jednak, że o wielkości wytwarzanej produkcji decyduje również posiadana przez producentów wiedza o produktach i procesach wytwórczych. Wraz z jej wzrostem możliwe staje się zwiększanie produkcji nawet wtedy, gdy nie zmienia się zasób wykorzystywanej pracy i kapitału fizycznego. Załóżmy, że gospodarka podzielona jest na n gałęzi oraz że istnieje funkcyjna zależność między poziomem produkcji gałęzi, a rozmiarami angażowanych czynników produkcji. Formalnie zwykle zapisuje się wówczas, że

$$Q_i = F_i\big(K_i, L_i, R_i, (IR)_i\big), \tag{1.1}$$

gdzie $F_i(\cdot)$ jest funkcją produkcji i-tej gałęzi, Q_i, K_i oznaczają, odpowiednio, rozmiary (w praktyce: wartość) wytworzonej produkcji globalnej i produkcyjnego kapitału fizycznego, L_i oznacza ilość wykorzystywanego czynnika pracy w i-tej gałęzi gospodarki, R_i jest liczbą wprowadzonych przez i-tą gałąź innowacji własnych, natomiast $(IR)_i$ jest liczbą innowacji wprowadzonych przez pozostałe gałęzie gospodarki, które wpłynęły na podniesienie poziomu wiedzy wykorzystywanej w gałezi i-tej, $i = 1, \ldots, n$. Oczywiście, w rzeczywistości niektóre gałęzie różnią się między sobą tak znacznie, że przepływ technologii między nimi jest bardzo mały lub nie występuje wcale. Na przykład, trudno oczekiwać, że innowacje wprowadzone w rolnictwie będą miały wpływ na efektywność przemysłu wydobywczego. Konieczne jest więc takie ujęcie liczby innowacji obcych $(IR)_i$, które uwzględniałoby zróżnicowanie technologiczne poszczególnych gałęzi. Przyjmuje się w związku z tym na przykład, że[21]

$$(IR)_i = \sum_{j \neq i} \omega_{ji} R_j, \tag{1.2}$$

gdzie stałe współczynniki $\omega_{ji} \geq 0$ określają siłę przepływu wiedzy z gałęzi j-tej do i-tej. Zastosowanie praktyczne wzoru (1.2) rodzi trudności związane ze sposobem wyznaczania wartości współczynników ω_{ji}. W literaturze proponowane są cztery podstawowe grupy metod.

Pierwszą grupę tworzą metody wykorzystujące informacje o wielkości transakcji dokonywanych między przedsiębiorstwami należącymi do różnych gałęzi gospodarki. W metodach tych, w najprostszym ujęciu, przyjmuje się, że wartości współczynników

[21] Por. np. Z. Griliches [34], B. Los, B. Verspagen [65].

międzygałęziowych przepływów wiedzy ω_{ji} są proporcjonalne do wartości współczynników nakładów bieżących a_{ji} (współczynnik a_{ji} opisuje liczbę jednostek produkcji pochodzącej z gałęzi j-tej niezbędną do wytworzenia jednej jednostki produkcji w gałęzi i-tej). Założenie to oznacza więc, że im większe jest znaczenie produktów gałęzi j-tej w strukturze nakładów gałezi i-tej, tym większy wpływ na przyrost wiedzy wykorzystywanej w gałęzi i-tej mają innowacje dokonywane w gałezi j-tej. Alternatywnie, zakłada się również, że wartości współczynników ω_{ji} są proporcjonalne do wyrażeń $a_{ji}x_i/x_j$, gdzie x_i, x_j oznaczają produkcję wytworzoną w i-tej oraz j-tej gałęzi gospodarki. Im większa jest wówczas sprzedaż produktów z gałezi j-tej do i-tej w stosunku do całkowitej produkcji wytworzonej w gałezi j-tej, tym większy jest napływ wiedzy z tej gałęzi[22]. Metody wyznaczania współczynników międzygałęziowych przepływów wiedzy w oparcu o wielkość dokonywanych w gospodarce transakcji, choć są stosunkowo łatwe w wykorzystaniu, wiążą się z uwzględnieniem jedynie dyfuzji wiedzy zawartej w produktach. Efekt przepływu wiedzy o procesach produkcyjnych jest w ich przypadku w zasadzie pomijany.

Do drugiej grupy należą metody wykorzystujące informacje o liczbie opatentowanych rozwiązań i wynalazków oraz o liczbie innowacji dokonanych w poszczególnych gałęziach gospodarki. W metodach tych wybierana jest pula patentów, którym przypisuje się odpowiadające im gałęzie pochodzenia, tzn. gałęzie, w których opracowano opatentowane rozwiązania, oraz gałęzie wykorzystania, czyli gałęzie, w których rozwiązania te znalazły zastosowanie. Na podstawie tak zgromadzonych danych wyznaczane są następnie wartości współczynników ω_{ji}[23].

Trzecią grupę tworzą metody, w których analizie poddawany zostaje stopień wykorzystania informacji zawartych w dokumentach patentowych. Częste ich cytowanie może bowiem świadczyć o dużym zainteresowaniu producentów działających w ramach różnych gałęzi gospodarki wiedzą opatentowaną przez wynalazcę. Na tej podstawie wnioskuje się o występowaniu przepływów wiedzy związanej zarówno z wytwarzanymi produktami, jak i wykorzystywanymi w tym celu rozwiązaniami techniczno–organizacyjnymi. Oczywiście, im większa liczba cytowań, tym wyższe wartości odpowiednich współczynników ω_{ji}.

Do ostatniej, czwartej grupy należą metody bazujące na pomiarze podobieństwa technologicznego wyróżnionych gałęzi gospodarki. Przyjmuje się, że im bardziej zbliżone są rozwiązania technologiczne i organizacyjne wykorzystywane w dwóch różnych gałęziach i, j, tym większe prawdopodobieństwo, że innowacje dokonane w i-tej gałęzi mogą być przydatne również w gałęzi j-tej. W konsekwencji, im większe jest

[22] Por. np. E. N. Wolff [107].

[23] Por. np. F. M. Scherer [95, 96], B. Verspagen [105].

podobieństwo technologiczne gałezi, tym silniejszy efekt dyfuzji wiedzy występuje między nimi. Wartości współczynników ω_{ji} wyznaczane są wówczas zgodnie z regułą[24]

$$\omega_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{F} f_k^i f_k^j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{F}(f_k^i)^2 \sum_{k=1}^{F}(f_k^j)^2}}, \tag{1.3}$$

gdzie F jest liczbą wyróżnionych rozłącznych klas patentów, f_k^i, f_k^j oznaczają udział patentów należących do k-tej klasy w ogólnej liczbie patentów uzyskanych przez przedsiębiorców działających w (odpowiednio) i-tej i j-tej gałęzi rozpatrywanej gospodarki, $k = 1, \ldots, F$. Wykorzystanie metod pomiaru podobieństwa technologicznego gałęzi pozwala w największym stopniu uwzględnić przepływy zarówno wiedzy o produktach, jak i wiedzy o procesach wytwórczych. Warto jednak zauważyć, że z postaci warunku (1.3) wynika, że dla dowolnych dwóch gałęzi gospodarki i, j przepływ wiedzy z gałęzi i-tej do j-tej jest tak samo silny, jak przepływ wiedzy z gałęzi j-tej do i-tej. Przy zastosowaniu metod należących do jednej z trzech grup wymienionych wcześniej taka równość nie musi zachodzić.

Wśród metod pomiaru efektów dyfuzji technologii wyróżnia się niekiedy także metody wykorzystujące informacje zbierane za pomocą specjalnie przygotowanych ankiet[25]. Wyselekcjonowani producenci prowadzący działalność w ramach różnych gałęzi gospodarki odpowiadają w nich na pytania na temat wykorzystywania określonych rozwiązań organizacyjnych, technologicznych, a także maszyn i materiałów. Gdy badania takie są z odpowiednią częstotliwością powtarzane, to na podstawie zebranych informacji można, przynajmniej częściowo, wnioskować o tempie dyfuzji technologii zachodzącej w gospodarce. Za pomocą metod ankietowych bardzo trudno jest jednak zidentyfikować gałęzie, w których innowacje zostały opracowane, co w znacznej mierze uniemożliwia wyznaczenie wartości współczynników ω_{ji}.

1.1.4. Neutralność postępu technologicznego

Wzrost wykorzystywanej w procesach produkcyjnych wiedzy technicznej może wpływać na produktywność przedsiębiorstw, gałęzi i całych gospodarek na wiele różnych sposobów. W rozważaniach teoretycznych szczególną uwagę zwraca się na trzy z nich, składające się na tzw. neutralny postęp technologiczny[26].

Niech A_i oznacza poziom technologii, czyli wiedzy technicznej wykorzystywanej w i-tej gałęzi gospodarki. Wielkość A_i opisuje łączny wpływ jaki na produktywność i-tej gałęzi ma liczba wprowadzonych innowacji własnych R_i oraz liczba innowacji

[24] Por. A. Goto, K. Suzuki [31], A. B. Jaffe [41], B. Los, B. Verspagen [65].

[25] Por. G. Papaconstantinou, N. Sakurai, A. Wyckoff [84].

[26] Zob. np. D. Acemoglu [1].

obcych $(IR)_i$ podnoszących poziom wiedzy wykorzystywanej w gałezi i-tej. Jeżeli

$$F_i(K_i, L_i, A_i) = A_i \tilde{F}_i(K_i, L_i), \tag{1.4}$$

to mówimy, że postęp technologiczny jest neutralny w sensie Hicksa. Wzrost wiedzy nie ma wpływu wówczas na stosunek krańcowej wydajności (produktywności) kapitału fizycznego do krańcowej wydajności pracy:

$$\forall A_i > 0 \left(\frac{\partial F_i}{\partial K_i} : \frac{\partial F_i}{\partial L_i} = \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial K_i} : \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial L_i} = const. \right).$$

W sytuacji, gdy

$$F_i(K_i, L_i, A_i) = \tilde{F}_i(A_i K_i, L_i) = \tilde{F}_i(\tilde{K}_i, L_i), \tag{1.5}$$

gdzie $\tilde{K}_i = A_i K_i$, mamy do czynienia z postępem technologicznym neutralnym w sensie Solowa. Wówczas wzrost poziomu wiedzy pociąga za sobą lepsze wykorzystanie kapitału fizycznego. Wpływa więc na krańcową produktywność analizowanej gałęzi gospodarki podobnie, jak wzrost jego zasobu:

$$\forall A_i > 0 \left(\frac{\partial F_i}{\partial K_i} = A_i \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{K}_i} \right).$$

Natomiast jeżeli

$$F_i(K_i, L_i, A_i) = \tilde{F}_i(K_i, A_i L_i) = \tilde{F}_i(K_i, \tilde{L}_i), \tag{1.6}$$

gdzie $\tilde{L}_i = A_i L_i$, to postęp technologiczny jest neutralny w sensie Harroda i wpływa na wzrost wytwarzanej produkcji w podobny sposób, jak wzrost zasobu czynnika pracy:

$$\forall A_i > 0 \left(\frac{\partial F_i}{\partial L_i} = A_i \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{L}_i} \right).$$

Dlatego ten typ postępu technologicznego często jest nazywany postępem wspomagającym pracę. Nabiera on szczególnego znaczenia zwłaszcza wtedy, gdy w rozważaniach przyjmujemy, że miarą zasobu pracy w gospodarce (gałęzi) nie jest liczba zatrudnianych pracowników, ale wielkość posiadanego kapitału ludzkiego.

W literaturze znaleźć można wiele prac poświęconych zagadnieniom postępu technologicznego i jego wpływu na wzrost gospodarczy[27]. Szczególnie w latach 60 i 70 XX wieku, kiedy to dynamicznie rozwijała się teoria wzrostu, powstało wiele opracowań, w których opisywano zarówno przyczyny, jak i konsekwencje postępu technologicznego. W niniejszej pracy ograniczamy się jedynie do przedstawienia najważniejszych koncepcji teoretycznych, z których będziemy korzystać w kolejnych rozdziałach.

[27]Zob. np. D. Acemoglu [1], R. G. D. Allen [4], D. Romer [87].

1.2. Kapitał ludzki

1.2.1. Istota kapitału ludzkiego

W rzeczywistości ekonomicznej bardzo często zdarza się, że pracownicy zatrudnieni w jednej gałęzi gospodarki, lub nawet w jednym przedsiębiorstwie, uzyskują mocno zróżnicowane dochody. Analogiczne różnice są wyraźnie widoczne także wtedy, gdy porównuje się wynagrodzenia uzyskiwane przez te same kategorie pracowników w różnych krajach świata. Nasuwa się pytanie o przyczyny owego zróżnicowania. Dlaczego jedni pracownicy zarabiają więcej, inni mniej? Szukając odpowiedzi na to pytanie sięgnąć należy do prac klasyków ekonomii. A. Smith w „Badaniach nad naturą i przyczynami bogactwa narodów" pisał, że[28]

> „Człowieka wykształconego kosztem dużych nakładów pracy i czasu tak, by mógł wykonywać prace wymagające nadzwyczajnych umiejętności i sprawności, można porównywać do kosztownej maszyny. Należy oczekiwać, że praca, którą uczy się on wykonywać, wynagrodzona ponad poziom płacy przeciętnego pracownika, zwróci mu całość wydatków poniesionych na edukację wraz z zyskami przynajmniej na poziomie zysków osiąganych przez kapitał tej samej wartości."

W myśl tej idei, różnice w poziomie płac są więc rezultatem różnic w wykształceniu poszczególnych pracowników. Należy bowiem oczekiwać, że jednostki lepiej wykształcone mogą pracować efektywniej, za co należy im się wyższe wynagrodzenie[29]. W konsekwencji, efekty osiągane zarówno przez pojedynczych przedsiębiorców, jak i całe gospodarki zależą nie tylko od liczby zatrudnionych pracowników, ale także, i to w dużym stopniu, od ich wiedzy, zdolności, umiejętności, etc. Zależą więc od ilości oraz jakości angażowanego kapitału ludzkiego.

Różnice w dochodach uzyskiwanych przez poszczególne jednostki mogą być więc rezultatem posiadania przez nie różnych zasobów wiedzy, zdolności i umiejętności, co umownie określamy mianem kapitału ludzkiego. Co jednak sprawia, że przedsiębiorcy skłonni są płacić więcej tym pracownikom, którzy posiadają więcej tegoż kapitału? W punkcie 1.1 stwierdziliśmy, że ani wiedza o procesach wytwórczych, ani wiedza o produktach nie mają charakteru dobra konkurencyjnego. Technicznie możliwe jest więc, aby bez ponoszenia kosztów oba rodzaje wiedzy były wykorzystywane w wielu miejscach jednocześnie. Inaczej jest jednak w przypadku kapitału ludzkiego. Jego zasoby są bowiem nierozerwalnie związane z poszczególnymi pracownikami i, co

[28] A. Smith [98], str. 137, zob. także J. J. Spengler [100].

[29] Por. np. L. Wößmann [108].

oczywiste, żaden z nich nie może wykonywać dwóch różnych czynności w tym samym czasie. Jeśli więc pracodawca życzy sobie, aby zatrudnieni przez niego pracownicy posiadali np. umiejętność dodawania, to każdy z nich dysponować musi odpowiednim w tym celu zasobem kapitału ludzkiego. Jeśli jeden z tych pracowników zostanie zwolniony, to liczba operacji wymagających dodawania, które w jednostce czasu będą mogły wykonać pozostałe osoby zatrudnione przez przedsiębiorcę, zmaleje[30]. Pracodawca może korzystać z kapitału ludzkiego pracowników tak długo, jak długo są oni przez niego zatrudnieni i jak długo płaci im należne wynagrodzenie. Ponieważ wyższe zasoby kapitału ludzkiego implikują wyższą produktywność czynnika pracy, więc każdy producent zainteresowany jest zatrudnianiem pracowników o możliwie wysokim poziomie kapitału ludzkiego. Jego zwiększanie oznacza dla pracowników konieczność ponoszenia określonych kosztów oraz przeznaczania na ten cel niezbędnej ilości czasu. Jeśli nakłady te nie zostaną zrekompensowane wyższymi płacami, to zwiększanie zasobów kapitału ludzkiego będzie dla pracowników nieopłacalne. Z kolei uzależnienie wynagordzenia od poziomu wiedzy i umiejętności pracownika otwiera przed nim konieczność wyboru między bieżącą konsumpcją a jej ograniczaniem w celu zwiększenia przyszłych dochodów. Uruchamia tym samym mechanizm ciągłego wzrostu zasobów kapitału ludzkiego posiadanych przez pojedynczych pracowników i w efekcie prowadzi również do polepszania efektów osiąganych przez producentów.

Literatura poświęcona zagadnieniom akumulacji kapitału ludzkiego oraz wpływu, jaki wywiera on na produktywność gospodarek jest bardzo bogata[31]. Co jednak ciekawe, mimo dużej liczby publikacji poświęconych tym zagadnieniom, brak jest definicji, która w sposób jednoznaczny i precyzyjny określałaby czym jest kapitał ludzki. W najprostszym ujęciu przyjmuje się, że o jakości kapitału ludzkiego posiadanego przez pracownika decyduje wiedza, umiejętności i doświadczenie zawodowe, które mogą wpływać na wykonywaną przez niego pracę. W szerszym ujęciu przez kapitał ludzki rozumie się „wiedzę, umiejętności i cechy zawarte w człowieku, które umożliwiają tworzenie osobistego, społecznego i ekonomicznego dobrobytu”[32]. Ważne jest przy tym, zdaniem niektórych autorów, by w rozważaniach nad kapitałem ludzkim brać pod uwagę również cechy wrodzone określające potencjał poszczególnych jednostek[33]. Należy bowiem oczekiwać, że jeżeli wszystkie osoby należące do danej populacji ponosić będą takie same wydatki na zwiększanie swego kapitału ludzkiego,

[30] Por. np. B. Los, B. Verspagen [65], P. M. Romer [88].

[31] Przegląd najważniejszych prac poświęconych tematyce kapitału ludzkiego znaleźć można w artykule K. Cichego [14].

[32] Zob. OECD [81].

[33] Por. M. Laroche, M. Mérette, G. C. Ruggeri [57].

to wyższy jego poziom osiągną te jednostki, które charakteryzują się wyższym potencjałem.

Wzrost jakości kapitału ludzkiego leży w interesie zarówno pracowników, jak i pracodawców. Wymaga on przy tym, co oczywiste, ponoszenia odpowiednich nakładów inwestycyjnych. Zazwyczaj zalicza się do nich wydatki ponoszone na szpitale i ochronę zdrowia, szkolenia przeprowadzane w miejscu pracy, edukację, i to zarówno na poziomie wyższym, średnim, jak i podstawowym, kursy i programy szkoleniowe podnoszące kwalifikacje osób dorosłych, a także wydatki związane z migracją pojedynczych pracowników lub całych rodzin odbywaną w celu podjęcia lepiej płatnej pracy[34]. Należy pamiętać, że na poprawę jakości posiadanego kapitału ludzkiego każdy człowiek musi przeznaczyć pewną część czasu rezygnując jednocześnie z wykorzystania go na pracę zarobkową. Wartość utraconego wynagrodzenia powinna być więc również traktowana jako część inwestycji w kapitał ludzki[35]. Pociąga to jednak za sobą ogromne trudności w szacowaniu faktycznych wartości tych inwestycji. Duże wyzwanie stanowi również pomiar zasobów samego kapitału ludzkiego.

1.2.2. Metody pomiaru zasobów kapitału ludzkiego

Jak pokazują wyniki przeprowadzanych badań empirycznych, zasoby kapitału ludzkiego wywierają silny wpływ na produktywność tak poszczególnych przedsiębiorstw, jak i całych gospodarek. Kapitał ludzki jest jednak fizycznie nieobserwowalny. Oznacza to, że podejmując próbę szacowania jego zasobów zmuszeni jesteśmy posługiwać się miernikami pośrednimi. Nie można bowiem w prosty i precyzyjny sposób wyrazić liczbowo takich cech człowieka, jak wiedza, inteligencja, umiejętności, doświadczenie, zdrowie, etc. Proponowane w literaturze metody pomiaru kapitału ludzkiego podzielić można na cztery grupy. Tworzą je metody oparte na miernikach wykształcenia, metody kosztowe, metody dochodowe oraz metody mieszane.

1.2.2.1. Metody oparte na miernikach wykształcenia

Najprostsze metody pomiaru zasobów kapitału ludzkiego bazują na przeświadczeniu, że głównym i zdecydowanie najważniejszym elementem decydującym o produktywności poszczególnych pracowników jest posiadane przez nich wykształcenie. Wpływ takich czynników, jak cechy wrodzone, zdrowie czy doświadczenie zawodowe jest w przypadku tych metod całkowicie pomijany. Wykorzystywanie mierników wykształcenia wiąże się więc ze stosunkowo dużym prawdopodobieństwem otrzymania

[34] Zob. W. Milo, G. Szafrański, Z. Wośko, M. Malaczewski [74], T. Schultz [97].
[35] Por. np. N. G. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil [69].

błędnych oszacowań. Bardzo często jednak brak odpowiednich danych sprawia, że zastosowanie innych, bardziej precyzyjnych metod jest w praktyce niemożliwe.

Jednym z najprostszych mierników poziomu wykształcenia ludności jest współczynnik alfabetyzacji osób dorosłych rozumianej jako umiejętność pisania i czytania ze zrozumieniem[36]. Wartość współczynnika obliczana jest według prostego wzoru

$$l = \frac{M}{P},$$

gdzie M jest liczbą osób dorosłych umiejących pisać i czytać, P oznacza ogólną liczbę osób dorosłych w danej populacji, l jest szukanym współczynnikiem alfabetyzacji. Przy jego konstrukcji bierze się jednak pod uwagę jedynie wiedzę zdobywaną na samym początku procesu edukacji. Posiadanie, bądź nie, umiejętności liczenia, analitycznego i logicznego myślenia, korzystania z komputera i rozmaitych programów, etc., nie wpływa na wartość współczynnika alfabetyzacji. Z tego powodu porównywanie wartości obliczonych dla różnych populacji, np. dla różnych krajów, pozwala wnioskować jedynie o zróżnicowaniu posiadanych przez nie zasobów najbardziej podstawowych elementów kapitału ludzkiego.

Do szacowania poziomu wykształcenia ludności wykorzystywane są również dane o liczbie uczniów i studentów będących na różnych etapach procesu edukacji. By móc dzięki nim wnioskować o zasobach kapitału ludzkiego wyznacza się współczynniki udziału ludności podejmującej naukę w danych typach szkół w ogólnej liczbie ludności znajdującej się w wieku, w którym, zgodnie z obowiązującym prawem lub panującymi zwyczajami, mogłaby do tych szkół uczęszczać (ang. *school enrollment ratios*)[37]. Na przykład, dysponując odpowiednimi danymi można wyznaczyć dla gospodarki polskiej współczynniki opisujące stosunek liczby uczniów klas podstawowych do liczby ludości będącej w wieku od 7 do 12 lat, stosunek liczby gimnazjalistów do liczby ludności w wieku od 13 do 15 lat, itd. Znając wartości tych współczynników oraz ogólną liczbę ludności Polski można podejmować próby oszacowania istniejącego w kraju zasobu kapitału ludzkiego, choć może to być miara bardzo przybliżona[38]. Większość z uczących się osób nie jest bowiem zatrudniona przez żadnego z producentów i wiedza, którą posiadają nie może być wykorzystana w produkcji. Dopiero po upływie pewnego okresu czasu wejdą oni na rynek pracy i zaczną poszukiwać zatrudnienia. Jeśli jednak na każdym etapie kształcenia liczba uczniów i studentów wykazuje niewielkie zmiany w czasie i jednocześnie liczebność populacji również utrzymuje się na względnie stałym poziomie, to otrzymane wyniki mogą stanowić już dobre przybliżenie faktycznego wykształcenia ludności.

[36] Por. np. P. M. Romer [89], L. Wößmann [108].
[37] Por. np. R. J. Barro, J. W. Lee [9], N. G. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil [69].
[38] Por. L. Wößmann [108].

Powszechnie wykorzystywanym miernikiem wykształcenia ludności wykorzystywanym do szacowania posiadanych zasobów kapitału ludzkiego jest średnia liczba lat spędzanych przez zatrudnionych pracowników w szkole[39]. Może być ona obliczana na kilka różnych sposobów. L. Wößmann, w pracy [108], wyróżnia metodę nieustannego spisu inwentarza, metodę projekcyjną oraz metodę bazującą na danych pochodzących z badań ankietowych i spisów ludności.

Przy zastosowaniu metody nieustannego spisu inwentarza (ang. *perpetual inventory method*) w pierwszym kroku obliczana jest łączna liczba lat, jaką wszyscy zatrudnieni poświęcili na naukę w szkołach. W tym celu wykorzystywana jest następująca formuła:

$$S_{t_1}^{PIM} = \sum_{t=t_1-A_h+D_0}^{t_1-A_l+D_0} \sum_g E_{g,t+g-1}(1-r_g-d_g)p_{g,t+g-1},$$

gdzie: t_1 oznacza przyjęty okres obliczeń; $S_{t_1}^{PIM}$ jest szukaną łączną liczbą lat spędzonych przez pracowników w szkole; $E_{g,t}$ jest liczbą uczniów, którzy w okresie t pobierali naukę w klasie g; A_l, A_h są, odpowiednio, dolną i górną granicą wieku produkcyjnego; D_0 oznacza wiek, w jakim dzieci rozpoczynają naukę w szkole; r_g określa procent uczniów będących w klasie g, którzy z powodu słabych ocen nie otrzymują promocji do klasy $g+1$; d_g oznacza procent uczniów, którzy mimo rozpoczęcia nauki w klasie g przerywają naukę; $p_{g,t}$ opisuje prawdopodobieństo, że osoba, która w okresie t uczęszczała do klasy g dożyje okresu t_1. W drugim kroku, wyznaczoną liczbę $S_{t_1}^{PIM}$ dzieli się przez ogólną liczbę osób znajdujących się w okresie t_1 w wieku produkcyjnym, otrzymując oszacowanie średniej liczby lat poświęcanych przez osoby zatrudnione na naukę w szkołach. Mimo że metoda nieustannego spisu inwentarza nie jest matematycznie skomplikowana, o możliwościach jej praktycznego wykorzystania w znacznym stopniu decydują dostępne dane historyczne. Wymaga ona bowiem posiadania długich szeregów z danymi, które w wielu krajach nie były gromadzone. Prowadzi to do konieczności wykorzystywania wyników pochodzących z innych badań lub nawet uzyskanych dla innych populacji. W konsekwencji, otrzymane oszacowania zasobów kapitału ludzkiego mogą być obarczone stosunkowo dużym błędem.

Przy wykorzystaniu metody projekcyjnej średnia liczba lat spędzonych w szkole jest szacowana na podstawie wartości opóźnionych współczynników udziału ludności uczącej się w danych typach szkół w ogólnej liczbie ludności znajdującej się w wieku, w którym mogłaby do tych szkół uczęszczać (*school enrollment ratios*).

[39]Zob. np. R. J. Barro [6, 8], A. B. Krueger, M. Lindahl [53], L. J. Lau, D. T. Jamison, F. F. Louat [58].

W przeprowadzonych badaniach empirycznych G. A. Kyriacou, w pracy [55], zaobserwował bowiem, że we wszystkich 42 analizowanych przez niego krajach istnieje silna zależność postaci

$$S_{75} = 0,052 + 4,439 \cdot e_{pri,60} + 2,665 \cdot e_{sec,70} + 8,092 \cdot e_{hig,70},$$

gdzie: S_{75} jest oszacowaną na 1975 rok średnią liczbą lat nauki pracowników zatrudnionych w gospodarce; $e_{pri,t}$, $e_{sec,t}$, $e_{hig,t}$ oznaczają współczynniki udziału uczniów szkół pierwszego, drugiego oraz wyższego stopnia w ogólnej liczbie ludności znajdującej się w odpowiedniej grupie wiekowej obliczone w roku t. Przy założeniu, że zależność między opóźnionymi współczynnikami $e_{pri,t}$, $e_{sec,t}$, $e_{hig,t}$ a średnią liczbą lat nauki jest stała w czasie, możemy zapisać równanie

$$S_{t_1}^{PRO} = 0,052 + 4,439 \cdot e_{pri,t_1-15} + 2,665 \cdot e_{sec,t_1-5} + 8,092 \cdot e_{hig,t_1-5}, \tag{1.7}$$

gdzie t_1 oznacza okres, na który dokonujemy obliczeń, natomiast $S_{t_1}^{PRO}$ jest szacowaną na rok t_1 średnią liczbą lat, jaką pracownicy będący w wieku produkcyjnym spędzili w szkole. Niewątpliwą zaletą metody projekcyjnej jest niewielka liczba danych historycznych potrzebnych do jej zastosowania. Wśród wad wymienia się zwykle założenie o niezmienności parametrów występujących w równaniu (1.7) oraz brak teoretycznego uzasadnienia dla wykorzystania proponowanych wielkości opóźnień[40].

Trzecia grupa metod wyznaczania średniej liczby lat nauki zatrudnionych pracowników wykorzystuje informacje pochodzące z przeprowadzanych spisów ludności i badań ankietowych. Szukaną wielkość otrzymuje się na podstawie równania

$$S^{SPI} = \sum_a \left(n_a \sum_{i=1}^{a} D_i \right),$$

gdzie: S^{SPI} oznacza średnią liczbę lat w szkole; a jest numerem określającym poziom wykształcenia (np. $a = 1$ – wykształcenie podstawowe, $a = 2$ – wykształcenie średnie, itd.); n_a oznacza procent pracowników, dla których poziom wykształcenia a jest najwyższym poziomem, jaki posiadają; D_a oznacza czas trwania edukacji na poziomie a wyrażony w latach. Informacje pochodzące ze spisów ludności są zwykle bardzo dokładne i pozwalają na precyzyjne oszacowanie liczby S^{SPI}. Niestety, spisy ludności są w większości krajów świata przeprowadzane raz na 10 lat. W znacznym stopniu utrudnia to ocenę kształtowania się zasobów kapitału ludzkiego w latach pomiędzy kolejnymi spisami. Aby uzupełnić brakujące dane wykonuje się niekiedy dodatkowe badania ankietowe. Pytania są w nich jednak, co zrozumiałe, zadawane tylko wybranej grupie osób, przez co obniża się precyzja otrzymywanych oszacowań.

[40] Zob. L. Wößmann [108].

Największą słabością metod szacowania zasobów kapitału ludzkiego na podstawie liczby lat spędzanych przez pracowników w szkole jest pominięcie różnic w jakości kształcenia. Różnice te okazują się bardzo wyraźne i to zarówno w ujęciu międzynarodowym, kiedy porównywana jest jakość kształcenia w różnych krajach świata, jak i w ujęciu czasowym, gdy analizuje się ewolucję systemu edukacji i zmiany jakości kształcenia w czasie. By zapewnić porównywalność oszacowań wykonanych w różnych latach i w różnych krajach, konieczne jest zastosowanie takich mierników, które wrażliwe są nie tylko na długość procesu kształcenia, ale przede wszystkim na jego jakość. Miernikami tymi mogą być wyniki ujednoliconych międzynarodowych egzaminów i testów przeprowadzanych w kolejnych latach przez takie organizacje, jak np. International Association for the Evaluation of Educational Achievment lub International Assessment of Educational Progress. Możliwe jest także wykorzystanie bardziej złożonych mierników uwzględniających takie czynniki jak długość roku szkolnego, wielkość wydatków ponoszonych przez państwo na jednego ucznia, wynagrodzenie nauczycieli, dochody rodzin, itp.[41]

1.2.2.2. Metody kosztowe

U podstaw kosztowych metod szacowania zasobów kapitału ludzkiego leży przekonanie, że o wielkości tych zasobów decyduje wartość wydatków ponoszonych na inwestycje w kapitał ludzki. Metody te wzięły swój początek od E. Engela, który w 1883 roku zaproponował, by zasób kapitału ludzkiego mierzyć wartością wydatków, jakie ponoszą rodzice na wychowanie swoich dzieci od momentu poczęcia aż do ukończenia przez nie 25 roku życia. E. Engel podzielił populację na trzy klasy społeczne: niższą, średnia i wyższą. Uważał przy tym, że dla każdej klasy koszt urodzenia dziecka jest inny, po czym wraz z wiekiem wydatki na jego utrzymanie rosną liniowo. W efekcie, koszt posiadania dziecka w wieku $x < 26$ można obliczyć na podstawie równania

$$c_x = \sum_{i=0}^{x}(c_0 + ic_0k) = c_0 + c_0\left(x + \frac{x(x+1)k}{2}\right), \tag{1.8}$$

gdzie c_x oznacza wydatki poniesione na dziecko przez x lat jego życia, c_0 jest kosztem urodzenia dziecka należącego do danej klasy, k jest parametrem równania. Na podstawie obserwacji empirycznych oszacowano także, że dla każdej wyróżnionej klasy społecznej zachodzi równość $k = 0,1$[42]. Wyprowadzone przez E. Engela równania (1.8) jest niewątpliwie proste i eleganckie matematycznie. Należy jednak przypuszczać, że oszacowania dokonane przy jego wykorzystaniu byłyby mało dokładne.

[41] Zob. np. R. J. Barro, J. W. Lee [6], J. W. Lee, R. J. Barro [62].

[42] Zob. B. F. Kiker [52], T. Le, J. Gibson, L. Oxley, [60, 61].

Trudno bowiem zgodzić się z liniową zależnością między wielkością inwestycji a wiekiem dziecka utrzymującą się aż do osiągnięcia przez nie 25 roku życia. Równanie (1.8) nie uwzględnia także występowania zmian wartości pieniądza w czasie.

Ewolucja poglądów Engela doprowadziła do powstania koncepcji głoszącej, że dobrym przybliżeniem faktycznej wartości posiadanego zasobu kapitału ludzkiego jest suma aktualnie ponoszonych wydatków inwestycyjnych, tj. wydatków na ochronę zdrowia, zapewnienie bezpieczeństwa publicznego, edukację, szkolenia, etc.[43] Główną zaletą tego podejścia jest powszechna dostępność danych niezbędnych do przeprowadzenia obliczeń. Niewątpliwą wadą natomiast jest brak prostego związku między aktualnymi inwestycjami, a posiadanym zasobem kapitału ludzkiego. Korzyści z poniesionych nakładów inwestycyjnych ujawniają się bowiem dopiero po kilku lub nawet kilkunastu latach, co oznacza, że wnioskowanie o dzisiejszych zasobach kapitału ludzkiego na podstawie dzisiejszych inwestycji może być zasadne tylko wtedy, gdy ich wielkość utrzymuje się w długim okresie na względnie stałym poziomie.

Cechą charakterystyczną wszystkich metod pomiaru kapitału ludzkiego za pomocą wielkości poniesionych wydatków inwestycyjnych jest założenie, że im te wydatki są większe, tym większy zasób kapitału ludzkiego można dzięki nim zgromadzić. Tymczasem w rzeczywistości reguła ta nie zawsze się sprawdza. T. Le, J. Gibson, L. Oxley w pracy [60] argumentują na przykład, że koszty ponoszone przez rodziców na utrzymanie i wychowanie dziecka mniej zdolnego, o wątłym zdrowiu są wyższe niż w przypadku dziecka uzdolnionego i cieszącego się dobrym zdrowiem. Nie ma natomiast podstaw by sądzić, że mimo niższych wydatków dziecko to dysponować będzie w przyszłości niższym zasobem kapitału ludzkiego.

Przy wykorzystaniu metod kosztowych precyzja otrzymywanych oszacowań jest w bardzo dużym stopniu uzależniona od prawidłowej identyfikacji wydatków inwestycyjnych, które faktycznie przyczyniają się do wzrostu zasobów kapitału ludzkiego. Każdy z zatrudnionych przeznacza zdobyte wynagrodzenie na zakup różnego rodzaju dóbr i usług. Niektóre z nich mają charakter czysto konsumpcyjny i w żaden sposób nie wpływają na zmiany kapitału ludzkiego. Inne rodzaje dóbr i usług nabywane są tylko po to, by podnieść poziom wiedzy czy też poprawić umiejętności kupującego (lub też np. jego dzieci). Mają więc charakter czysto inwestycyjny. Ogromna część wydatków jest jednak ponoszona w celu zakupu dóbr i usług, które można uznać zarówno za konsumpcyjne, jak i inwestycyjne[44]. Bardzo trudno jest więc obliczyć rzeczywistą wartość wydatków ponoszonych w celu powiększania zasobów kapitału

[43] Zob. np. R. Eisner [26].

[44] Por. np. R. Eisner [25], T. Schultz [97].

ludzkiego[45]. W efekcie, trudno jest więc także uzyskać precyzyjne oszacowania wartości tych zasobów.

Istotną wadą metod kosztowych przemawiającą przeciwko ich stosowaniu jest fakt, że nie uwzględniają one możliwości powiększania zasobów kapitału ludzkiego w wyniku działań nie związanych z rynkiem. Tymczasem nowe umiejętności i nową wiedzę nabywać można również bez konieczności ponoszenia jakichkolwiek wydatków. Ponadto, wraz ze wzrostem wykształcenia ludności obserwuje się większą ich dbałość o zdrowie, efektywniejsze wykorzystywanie czasu przeznaczonego na wypoczynek, czy też lepsze przystosowanie do wymagań rynku pracy[46]. Wydatki na edukację nie odzwierciedlają więc całkowitego efektu wzrostu zasobu kapitału ludzkiego. W konsekwencji, jest mało prawdopodobne, by efekt ten mógł być w pełni uwzględniony przy szacowaniu kapitału ludzkiego metodami kosztowymi.

1.2.2.3. Metody dochodowe

Przeciwieństwem kosztowych metod szacowania zasobów kapitału ludzkiego są metody dochodowe. Opierają się one na założeniu, że o wielkośći posiadanego zasobu kapitału ludzkiego nie decydują koszty poniesione na jego zgromadzenie, ale korzyści, jakie można dzięki niemu osiągnąć. Miarą tych korzyści są dochody uzyskiwane z pracy[47]. W 1853 roku W. Farr przedstawił procedurę pozwalającą na oszacowanie wartości kapitału ludzkiego posiadanego przez pojedynczego pracownika poprzez wyznaczenie obecnej wartości jego przyszłych wynagrodzeń, pomniejszonych o niezbędne koszty utrzymania. Kontynuując rozważania W. Farr'a, w 1930 roku L. Dublin i A. Lotka zaproponowali, by wartość pracownika, V_a, obliczać na podstawie równania

$$V_a = \sum_{x=a}^{\infty} \frac{P_{a,x}(y_x E_x - c_x)}{(1+r)^{x-a}}, \tag{1.9}$$

gdzie: a oznacza wiek danej osoby, r oznacza stopę procentową; $P_{a,x}$ jest prawdopodobieństwem, że człowiek będący w wieku a dożyje wieku x; y_x oznacza roczne zarobki osiągane miedzy x a $x+1$ rokiem życia; E_x jest roczną stopą zatrudnie-

---

[45] Niektórzy autorzy proponują, by wszędzie tam, gdzie nie można rozstrzygnąć jaka część wydatków ma charakter konsumpcyjny, a jaka inwestycyjny, podziału dokonywać w sposób arbitralny, np. przyjmując, że 50% wydatków na ochronę zdrowia i zapewnienie bezpieczeństwa publicznego stanowi inwestycje w kapitał ludzki – zob. T. Le, J. Gibson, L. Oxley [60].

[46] Zob. R. H. Haveman, B. L. Wolfe [39].

[47] Za prekursora metod dochodowych uważany jest William Petty, który w swej pracy „Arytmetyka polityczna” z 1690 roku przeprowadził szereg prostych obliczeń szacując wartość zasobu kapitału ludzkiego, jakim dysponowała ówczesna Anglia i Walia na poziomie 520 mln £, czyli ok. 80 £ *per capita*. W obliczeniach wykorzystane zostały jednak jedynie mocno zagregowane dane nie uwzględniające zróżnicowania dochodów ludności – zob. T. Le, J. Gibson, L. Oxley [60, 61].

nia ludzi w wieku x; c_x opisuje podstawowe koszty utrzymania ponoszone miedzy x a $x+1$ rokiem życia[48]. Wielkość V_a w równaniu (1.9) jest, jak widzimy, miarą wartości kapitału ludzkiego pojedynczego pracownika znajdującego się w wieku a. Wielkości zagregowane, opisujące wartość zasobu kapitału ludzkiego posiadanego przez grupę pracowników, wyznaczyć można jako sumę ich indywidualnych wartości V_a.

Formułując równanie (1.9) L. Dublin i A. Lotka zakładali, że wynagrodzenia otrzymywane przez pracowników należących do poszczególnych grup wiekowych nie zmieniają się w czasie. W efekcie, osoby będące w wieku a po upływie n lat mogą oczekiwać wynagrodzenia równego obecnemu wynagrodzeniu osób w wieku $a+n$ lat. Tymczasem w większości krajów świata obserwuje się wyraźny wzrost płac, szczególnie w długim okresie. Wyraźne są również różnice w dochodach uzyskiwanych przez pracowników o odmiennym wykształceniu. Z tego powodu J. W. Graham i R. H. Webb, w pracy [32], proponują, aby obecną wartość przyszłych dochodów zatrudnionego obliczać na podstawie równania

$$PV_t^e = \sum_{j=t}^{75} \frac{E_j^e P_{tj} I_j^e (1+x^e)^{j-t}}{(1+r)^{j-t}}, \tag{1.10}$$

gdzie: PV_t^e oznacza obecną wartość przyszłych dochodów pracownika w wieku t posiadającego wykształcenie e; E_j^e opisuje zarobki uzyskiwane aktualnie przez pracownika w wieku j posiadającego wykształcenie e; P_{tj} określa prawdopodobieństwo, że osoba będąca w wieku t dożyje wieku j; I_j^e to prawdopodobieństwo, że osoba z wykształceniem e będzie uzyskiwać dochody w j-tym roku swego życia; x^e oznacza roczną stopę wzrostu wynagrodzenia pracowników z wykształceniem e; r jest stopą dyskontową. Co ważne, wyznaczona z równania (1.10) wielkość PV_t^e przedstawia łączną bieżącą wartość wszystkich przyszłych dochodów pracownika. Dochody te nie są tutaj pomniejszane o koszty ponoszone przez pracownika na utrzymanie.

Szacowanie wartości kapitalu ludzkiego za pomocą zarówno równania (1.9), jak i będącego jego uogólnieniem równania (1.10), wiąże się z założeniem, że na wielkość zasobu kapitału ludzkiego wpływ ma jedynie taka działalności i takie czynności, za które wykonujący je pracownicy otrzymują wynagrodzenie. Tymczasem D. W. Jorgenson oraz B. M. Fraumeni argumentują, że do dochodów uzyskiwanych przez pracowników, oprócz wynagrodzenia za pracę, wliczona powinna być również wartość czasu, w którym nie wykonują oni czynności rynkowych, przeznaczając ten czas na edukację i zwiększanie zasobów swojej wiedzy. Wyższe wykształcenie pracownika powoduje bowiem nie tylko wzrost jego wynagrodzenia, ale także podnosi

[48]Por. np. B. F. Kiker [52], T. Le, J. Gibson, L. Oxley [60, 61].

wartość czasu, który przeznacza on na wypoczynek oraz zwiększa jakość i wartość takich czynności, jak np. wychowywanie dzieci[49]. Uwzględniając czynniki nierynkowe, D. W. Jorgenson i B. M. Fraumeni oszacowali wartość zasobów kapitału ludzkiego grup ludności Stanów Zjednoczonych zróżnicowanych ze względu na płeć, wiek i wykształcenie. W obliczeniach obecną wartość przyszłych dochodów uzyskanych z działalności rynkowej wyznaczono na podstawie równania

$$\begin{aligned} mi(y,s,a,e) &= ymi(y,s,a,e) + \\ &+ \big[senr(y,s,a,e) \cdot sr(y,s,a+1) \cdot mi(y,s,a+1,e+1) + \\ &+ \big(1 - senr(y,s,a,e)\big) \cdot sr(y,s,a+1) \cdot mi(y,s,a+1,e)\big] \cdot \frac{1+g}{1+r}, \end{aligned}$$

gdzie: $mi(y,s,a,e)$, $ymi(y,s,a,e)$ oznaczają, odpowiednio, wartość przyszłych dochodów z działalności rynkowej oraz roczny dochód z działalności rynkowej pracownika płci s w wieku a posiadającego wykształcenie e liczony w roku y; $senr(y,s,a,e)$ jest prawdopodobieństwem, że dany pracownik, posiadając wykształcenie e, kontynuuje naukę by osiągnąć poziom wykształcenia $e+1$; $sr(y,s,a+1)$ oznacza prawdopodobieństwo osiągnięcia przez pracownika wieku $a+1$; g jest roczną stopą wzrostu płac; r to stopa dyskontowa[50]. Analogicznie, obecna wartość dochodów nie związanych z działalnością rynkową wyznaczona została na podstawie równania

$$\begin{aligned} ni(y,s,a,e) &= yni(y,s,a,e) + \\ &+ \big[senr(y,s,a,e) \cdot sr(y,s,a+1) \cdot ni(y,s,a+1,e+1) + \\ &+ \big(1 - senr(y,s,a,e)\big) \cdot sr(y,s,a+1) \cdot ni(y,s,a+1,e)\big] \cdot \frac{1+g}{1+r}, \end{aligned}$$

gdzie $ni(y,s,a,e)$, $yni(y,s,a,e)$ oznaczają, odpowiednio, wartość przyszłych dochodów nie związanych z działalnością rynkową oraz roczny dochód nie związany z działalnością rynkową pracownika płci s w wieku a, posiadającego wykształcenie e, liczony w roku y. Łączna obecna wartość przyszłych dochodów, jakie może uzyskać ten pracownik jest sumą wielkości $mi(y,s,a,e)$ oraz $ni(y,s,a,e)$.

Istotną wadą metody D. W. Jorgensona i B. M. Fraumeni jest niewrażliwość otrzymywanych oszacowań wartości zasobów kapitału ludzkiego na stopę bezrobocia. Dla uzyskiwanych tą metodą wyników nie ma bowiem znaczenia czy w gospodarce aktywni zawodowo są wszyscy, czy też np. tylko połowa osób znajdujących się w wieku produkcyjnym. Wyższa stopa bezrobocia implikuje jedynie niższe wynagrodzenia za pracę, które rekompensowane są jednak wyższymi dochodami z działalności nie związanych z rynkiem[51]. Z tego powodu wielu autorów bazujących w badaniach empirycznych na metodzie D. W. Jorgensona i B. M. Fraumeni wprowadziło

[49]Zob. D. W. Jorgenson, B. M. Fraumeni [42], T. Le, J. Gibson, L. Oxley [60].

[50]Zob. np. S. Ahlroth, A. Björklund, A. Forslund [3].

[51]Zob. K. Conrad [16].

do niej modyfikacje ograniczające wpływ aktywności pozarynkowej na wartość kapitału ludzkiego lub też prowadzące do pomiaru kapitału ludzkiego jedynie tych osób, które pozostają aktywne zawodowo[52].

Obecna wartość przyszłych dochodów uzyskiwanych przez zatrudnionego może stanowić dobre przybliżenie wartości jego kapitału ludzkiego. Wielkość otrzymywanego wynagrodzenia zależy jednak nie tylko od umiejętności pracownika, ale także od wielu innych czynników, w tym także od jakości i wartości kapitału fizycznego, który ma on do dyspozycji. Możliwa jest więc sytuacja, gdy dwóch pracowników o tym samym poziomie wykształcenia, będących w tym samym wieku i posiadających takie same zdolności i umiejętności, uzyskiwać będzie mocno zróżnicowane wynagrodzenia za wykonywaną pracę. Różnice w osiąganych dochodach nie będą odzwierciedlać wówczas różnic w posiadanym przez nich kapitale ludzkim. By wyeliminować tę wadę, charakterystyczną dla większości dochodowych metod szacowania kapitału ludzkiego, C. B. Mulligan oraz X. Sala-i-Martin, w pracy [77], zaproponowali, aby do pomiaru wielkości jego zasobów wykorzystywać wskaźnik wyrażający stosunek dochodów uzyskiwanych przez zatrudnionego, do wynagrodzenia, jakie za pracę otrzymuje niewykształcony pracownik. Miernik ten pozwala na uchwycenie tych różnic w uzyskiwanych dochodach, które wynikają z różnic w wykształceniu i umiejętnościach pracowników. Wzrost ich produktywności będący następstwem wzrostu wartości i jakości kapitału fizycznego wykorzystywanego w pracy w bardzo ograniczonym stopniu może wpływać na wartość miernika.

Podstawową wadą dochodowych metod szacowania kapitału ludzkiego jest leżące u ich podstaw założenie, że różnice w dochodach uzyskiwanych przez pracowników odzwierciedlają różnice w ich produktywności. Natomiast w rzeczywistości ekonomicznej często zdarza się, że o wielkości wynagrodzeń decydują strategie przyjmowane przez pracodawców, czy też czynniki nie związane z rynkiem, jak np. obowiązujące rozwiązania prawne wyznaczające płacę minimalną. Wzrost wynagrodzenia nie musi być więc efektem wzrostu wiedzy i umiejętności pracownika.

1.2.2.4. Metody mieszane

Każdej z wyżej wymienionych metod szacowania zasobów kapitału ludzkiego – czy to będzie metoda pomiaru jakości wykształcenia, metoda kosztowa, czy metoda dochodowa – z racji ich ograniczneń towarzyszą określone błędy oszacowań. By błędy te były możliwie najmniejsze, proponuje się wykorzystanie procedur łączących zalety dwóch lub nawet trzech rodzajów metod.

[52]Zob. np. T. Le, J. Gibson, L. Oxley [59], H. Wei [106].

Przykładem mieszanej metody wyznaczania zasobów kapitału ludzkiego jest metoda opracowana przez H. L. Tao i T. F. Stinsona[53]. Wykorzystali oni prostą zależność pomiędzy posiadanym przez pracownika kapitałem ludzkim a otrzymywanym przez niego wynagrodzeniem, daną równaniem

$$E_{a,e,t}^{s} = w_t h_{a,e,t}^{s}, \tag{1.11}$$

gdzie: $E_{a,e,t}^{s}$, $h_{a,e,t}^{s}$ oznaczają, odpowiednio, wynagrodzenie oraz zasób kapitału ludzkiego w okresie t pracownika płci s z wykształceniem e będącego w wieku a; w_t jest wynagrodzeniem jednostki kapitału ludzkiego w okresie t. W pierwszym kroku H. L. Tao i T. F. Stinson oceniają zdolności i umiejętności osób, które w roku t ukończyły naukę w szkole średniej na podstawie wyników uzyskanych przez nie w testach SAT (Scholastic Aptitude Test). Ponadto, przy zastosowaniu metody kosztowej, wyznaczana jest wielkość wydatków poniesionych przez nie na inwestycje w kapitał ludzki. Informacje uzyskane z obu tych źródeł wykorzystywane są następnie do oszacowania zasobów kapitału ludzkiego, jakimi dysponują absolwenci szkół średnich z roku t. Na podstawie obserwowanych empirycznie wielkości uzyskiwanych przez nich dochodów, w kolejnym kroku procedury wyznaczana jest wartość w_t. Ponieważ, jak zakładają H. L. Tao i T. F. Stinson, wynagrodzenie jednostki kapitału ludzkiego nie zależy od płci, wykształcenia ani wieku pracownika, więc podstawiając do równania (1.11) wielkości wynagrodzeń odpowiadające kolejnym wyróżnionym w populacji grupom wyznaczyć można posiadane przez ich członków zasoby kapitału ludzkiego. Zasób kapitału ludzkiego dostępnego w całej populacji jest, oczywiście, obliczany jako suma zasobów kapitału ludzkiego wszystkich należących do niej pracowników.

Zaletą procedury H. L. Tao i T. F. Stinsona jest wykorzystanie metody kosztowej jedynie do wyznaczenia zasobu kapitału ludzkiego jakim dysponuje przeciętny absolwent szkoły średniej. Za inwestycje wpływające na jego wielkość autorzy uznają przy tym tylko wydatki ponoszone na edukację, gdyż, jak twierdzą, pozostałe wydatki znajdują odzwierciedlenie w poziomie uzyskiwanych dochodów i uwzględnianie ich w rachunkach nie jest konieczne. Pozwala to na uniknięcie konieczności rozstrzygania jaka część ponoszonych wydatków ma charakter konsumpcyjny, a jaka inwestycyjny. Ponadto, przy wykorzystaniu równania (1.11) nie ma również potrzeby ustalania wartości ani stopy wzrostu wynagrodzeń, ani stopy dyskontowej. Wadą metody jest natomiast założenie, że wynagrodzenie absolwentów szkół średnich jest proporcjonalne do ich umiejętności ocenionych na podstawie wyników testów SAT. Testy te, co oczywiste, nie przedstawiają w pełni faktycznych zdolności zdających

[53] Zob. T. Le, J. Gibson, L. Oxley [60, 61].

je osób i nie uwzględniają możliwości wahań wynagrodzeń z przyczyn innych niż poziom edukacji.

1.2.3. Kapitał ludzki a postęp technologiczny

Wielkość zasobu kapitału ludzkiego jakim dysponuje pojedynczy pracownik odzwierciedla poziom jego wykształcenia, stan zdrowia, posiadane zdolności i umiejętności, nabyte doświadczenie, itp. Wzrost tego zasobu może być więc następstwem wydłużania okresu nauki lub też zwiększania wydatków na szeroko rozumiane inwestycje w kapitał ludzki. Może być jednak również efektem ujawniania się w gospodarce postępu technologicznego. Jeśli bowiem działające na rynku przedsiębiorstwo zamierza wprowadzić na rynek nowe produkty lub też zastosować udoskonalone, bardziej efektywne procesy produkcyjne, to konieczne staje się nie tylko opracowanie nowych rozwiązań, ale także odpowiednie przeszkolenie pracowników. Zwiększa się w ten sposób posiadana przez nich wiedza techniczna. Wówczas jednak, w wyniku dyfuzji technologii zaobserwować można wzrost poziomu wiedzy także wśród pracowników innych przedsiębiorstw. Ponadto, ujawnienie się postępu technologicznego w wielu gałęziach gospodarki może wpływać zarówno na zmiany w procesie edukacji podnoszące jakość kształcenia, np. rozwój przemysłu komputerowego, jak i na skuteczność systemu opieki zdrowotnej, np. rozwój przemysłu farmaceutycznego lub transportu. Oznacza to, że zasób kapitału ludzkiego pojedynczego pracownika w znacznym stopniu zależy od technologii wykorzystywanych w gospodarce, a tempo i kierunek ich zmian bardzo silnie wpływają na możliwości zwiększania zasobów kapitału ludzkiego. Z drugiej strony, nowa wiedza dotycząca zarówno produktów, jak i procesów wytwórczych, powstaje w głównej mierze w wyniku pracy osób zatrudnionych w jednostkach naukowych i działach badawczo–rozwojowych poszczególnych firm. Im większe jest wykształcenie, doświadczenie i umiejętności tych osób, tym większa szansa, że zdołają one opracować nowatorskie rozwiązania prowadzące do poprawy jakości produktów i redukcji kosztów ich wytwarzania. By rozwiązania te mogły zostać wykorzystane, konieczne jest także przekazanie nowej wiedzy pracownikom zatrudnionym w działach produkcyjnych. Możliwości tworzenia i wprowadzania w życie nowych rozwiązań technicznych warunkowane są więc posiadanymi zasobami kapitału ludzkiego. Jednocześnie, akumulacja kapitału ludzkiego bardzo mocno zależy od istnienia i siły postępu technologicznego[54].

Występowanie silnej zależności pomiędzy wykorzystywaną technologią a dostępnym zasobem kapitału ludzkiego wpływa w istotny sposób na możliwość pojawienia

[54] Por. np. C. I. Jones [43].

się w gospodarce efektu dyfuzji technologii. W sytuacji, gdy wiedza i umiejętności posiadane przez pracowników przedsiębiorstwa, gałęzi czy też całej gospodarki są niskie, nawet udostępnienie im najnowszych i najbardziej zaawansowanych technologii nie spowoduje szybkiego zwiększenia ich produktywności. Wcześniej bowiem pracownicy ci będą musieli zdobyć wiedzę niezbędną do praktycznego wykorzystania nowych rozwiązań technicznych. Będą musieli więc zwiększyć swój zasób kapitału ludzkiego. Oczywiście, wzrost tego zasobu wymaga czasu. Niezbędne jest również poniesienie określonych nakładów inwestycyjnych, których wielkość może mieć bardzo istotny wpływ na tempo adaptowania nowych rozwiązań technicznych. W skrajnym przypadku, gdy posiadane zasoby kapitału ludzkiego są małe, a możliwości jego wzrostu mocno ograniczone, różnica pomiędzy najlepszymi dostępnymi i aktualnie wykorzystywanymi technologiami może się nawet zwiększać[55].

[55]Por. np. J. Benhabib, M. M. Spiegel [10].

Rozdział 2

Endogeniczny model wzrostu typu Leontiefa-Gale'a

We wstępie do rozdziału 1 stwierdziliśmy, że pominięcie w rozważaniach nad wzrostem gospodarczym takich zjawisk jak postęp technologiczny czy akumulacja kapitału ludzkiego uniemożliwia prawidłową identyfikację przyczyn zróżnicowania bogactwa narodów. Uniemożliwia także zrozumienie zależności występujących pomiędzy podstawowymi wielkościami makroekonomicznymi. Mimo to okazuje się, że próby analizy modeli wielosektorowych uwzględniających zjawiska postępu technologicznego i akumulacji kapitału ludzkiego są stosunkowo nieliczne. Co ciekawe, nawet w tych nielicznych modelach, w któych autorzy decydują się na włączenie do analizy jednego ze wspominanych zjawisk, pomijają, bądź tylko sygnalizują, występowanie drugiego[1]. Na ich gruncie nie są także dowodzone – szczególnie nas interesujące, a zarazem istotne z punktu widzenia planowania gospodarczego – magistralne własności ścieżek wzrostu. Pragnąc przenieść osiągnięcia teorii wzrostu endogenicznego na grunt modeli wielosektorowych, w dalszej części pracy sformułujemy i poddamy szczegółowej analizie uogólnioną postać modelu Leontiefa-Gale'a[2], w której o możliwościach produkcyjnych wyróżnionych gałęzi gospodarki decydują zgromadzone w nich zasoby kapitału fizycznego i ludzkiego. Ponadto przyjmować będziemy, że w każdej gałęzi istnieć mogą jednostki naukowo–badawcze, które, również dzięki zaangażowaniu kapitału fizycznego i ludzkiego, umożliwiają podniesienie w tych gałęziach poziomu wiedzy technicznej. Jej wzrost przyczynia się do powiększania dostępnych zasobów kapitału ludzkiego, i w efekie – przy rosnących równolegle, dzięki inwestycjom, zasobach produkcyjnego i innowacyjnego kapitału fizycznego – umożliwia osiągnięcie trwałego efektu wzrostu produkcji *per capita*. Na przykładzie tak

[1] Por. np. B. Los [64], F. M. Scherer [95], E. N. Wolff [107].

[2] Por. np. E. Panek [82], str. 320.

sformułowanego modelu udowodnimy szereg twierdzeń o magistrali, zarówno w tzw. słabej, jak i silnej wersji.

2.1. Sformułowanie modelu

Interesuje nas funkcjonowanie gospodarki w skończonym horyzoncie czasowym $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$, podzielonej na n gałęzi, z których każda wytwarza tylko jeden, charakterystyczny dla siebie rodzaj towarów. Oczywiście, w praktyce nie jest możliwe dokonanie takiej dezagregazji gospodarki, aby w każdej wyróżnionej gałęzi wytwarzany był dokładnie jeden produkt, dlatego pod pojęciem produkcji i-tej gałęzi rozumiemy wartość produktów wytworzonych w niej w ustalonej jednostce czasu[3].

2.1.1. Produkcja

W każdym okresie horyzontu $\mathcal{T}$ do produkcji niezbędny jest zarówno kapitał fizyczny, jak i kapitał ludzki. Dopuszczalne procesy produkcji w gospodarce opisuje przestrzeń produkcyjna G zawarta w nieujemnym orthancie $3n$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Elementami przestrzeni G w okresie $t \in \mathcal{T}$ są wektory

$$\zeta_t = \begin{bmatrix} k_t \\ b_t \\ x_t \end{bmatrix},$$

gdzie k_t, b_t, x_t są n–wymiarowymi (kolumnowymi) wektorami, odpowiednio, produkcyjnego kapitału trwałego, dostępnego w procesach produkcyjnych kapitału ludzkiego oraz produkcji wytworzonej w poszczególnych gałęziach gospodarki w okresie t. Inkluzja $\zeta_t \in G$ oznacza, że w okresie t gospodarka z trwałym kapitałem produkcyjnym $k_t = (k_{1\,t}, \ldots, k_{n\,t})^T$ oraz kapitałem ludzkim $b_t = (b_{1\,t}, \ldots, b_{n\,t})^T$ (w poszczególnych sektorach) jest zdolna do wytworzenia produkcji $x_t = (x_{1\,t}, \ldots, x_{n\,t})^T$. Zakładamy, że przestrzeń produkcyjna G spełnia następujące warunki:

(G1) Wypukłość:

$$\forall \beta \in [0, 1] \ \big(\zeta^1, \zeta^2 \in G \ \Rightarrow \ \beta\zeta^1 + (1 - \beta)\zeta^2 \in G\big).$$

(G2) Brak któregokolwiek z czynników powoduje wstrzymanie produkcji:

$$\begin{bmatrix} k \\ b \\ x \end{bmatrix} \in G \ \wedge \ (k_i = 0 \ \vee \ b_i = 0) \ \Rightarrow \ x_i = 0.$$

[3] Najczęściej mierzoną w cenach stałych roku bazowego $t = 0$; por. np. E. Panek [82], str. 291.

(G3) Możliwość marnotrawstwa – I wariant:

$$\begin{bmatrix} k \\ b \\ x \end{bmatrix} \in G \;\wedge\; 0 \leq \bar{x} \leq x \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} k \\ b \\ \bar{x} \end{bmatrix} \in G.$$

(G4) Możliwość marnotrawstwa – II wariant:

$$\begin{bmatrix} k \\ b \\ x \end{bmatrix} \in G \;\wedge\; \bar{k} \geq k \;\wedge\; \bar{b} \geq b \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{b} \\ x \end{bmatrix} \in G.$$

(G5) Domkniętość:

$$\begin{bmatrix} k^i \\ b^i \\ x^i \end{bmatrix} \in G \;\wedge\; \begin{bmatrix} k^i \\ b^i \\ x^i \end{bmatrix} \underset{i}{\rightarrow} \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{b} \\ \bar{x} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{b} \\ \bar{x} \end{bmatrix} \in G.$$

(G6) Możliwość równoczesnego wytworzenia wszystkich towarów:

$$G \cap \mathrm{int}\mathbb{R}^{3n}_{+} \neq \varnothing.$$

Z pojęciem przestrzeni produkcyjnej wiąże się pojęcie produkcyjnego przekształcenia technologicznego. Mianem tym określamy multifunkcję $T^P\colon \mathbb{R}^{2n}_{+} \to 2^{\mathbb{R}^n_{+}}$ postaci

$$T^P(k,b) = \left\{ x \;\middle\|\; \begin{bmatrix} k \\ b \\ x \end{bmatrix} \in G \right\}.$$

Przekształcenie T^P przyporządkowuje każdej parze kapitału produkcyjnego k i ludzkiego b wszystkie możliwe do wytworzenia wektory produkcji x. Oznacza to, że w każdym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ ma miejsce inkluzja

$$x_t \in T^P(k_t, b_t). \tag{2.1}$$

Można udowodnić[4], że jeżeli przestrzeń produkcyjna G spełnia warunki (G1)–(G6), to przekształcenie T^P ma następujące własności:

(T1) $\forall k \geq 0,\ \forall b \geq 0,\ \forall \lambda \geq 0\ \big(T^P(\lambda k, \lambda b) = \lambda T^P(k,b)\big)$.

(T2) $\forall k^1 \geq 0,\ \forall k^2 \geq 0,\ \forall b^1 \geq 0,\ \forall b^2 \geq 0$
$$\big(T^P(k^1,b^1) + T^P(k^2,b^2) \subseteq T^P(k^1+k^2, b^1+b^2)\big).$$

[4]Por. np. E. Panek [82], str. 324.

(T3) $\forall i\ (k_i = 0\ \vee\ b_i = 0 \Rightarrow x_i = 0)$.

(T4) $0 \leq \bar{x} \leq x \wedge x \in T^P(k,b) \Rightarrow \bar{x} \in T^P(k,b)$.

(T5) $\bar{k} \geq k \wedge \bar{b} \geq b \wedge x \in T^P(k,b) \Rightarrow x \in T^P(\bar{k},\bar{b})$.

(T6) $\forall k \geq 0$, $\forall b \geq 0$ zbiory T^P są ograniczone i domknięte (czyli zwarte).

(T7) Przekształcenie T^P ma domknięty wykres, tzn.

$$\begin{bmatrix} k^i \\ b^i \\ x^i \end{bmatrix} \underset{i}{\rightarrow} \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{b} \\ \bar{x} \end{bmatrix} \wedge x^i \in T^P(k^i, b^i) \Rightarrow \bar{x} \in T^P(\bar{k},\bar{b}).$$

2.1.2. Bilans produkcji

W gospodarce spełniony jest następujący warunek bilansowy

$$x_t = Ax_t + \hat{i}_t + c_t,$$

gdzie $A \geq 0$ oznacza kwadratową macierz współczynników nakładów bieżących (element a_{ij} określa nakład towarów pochodzących z gałęzi i-tej niezbędny do wytworzenia jednostki produkcji w gałezi j-tej), $\hat{i}_t$, c_t są n-wymiarowymi (kolumnowymi) wektorami, odpowiednio, nakładów inwestycyjnych (według gałęzi pochodzenia) i konsumpcji w okresie t. Przyjmujemy przy tym, że

$$\frac{c_t}{eoh_t} \geq \bar{c}l, \tag{2.2}$$

gdzie l jest liczbą ludności w gospodarce, i-ty element kolumnowego wektora h_t oznacza zasób kapitału ludzkiego, jakim dysponuje osoba zatrudniona w i-tej gałęzi w okresie t, $o = diag(o_1, \ldots, o_n)$ jest diagonalną macierzą współczynników struktury zatrudnienia w gospodarce (element o_i określa jaka część ludności zatrudniona jest w gałęzi i-tej), $\bar{c} \gneqq 0$ jest wektorem określającym normę konsumpcji dóbr wytwarzanych w poszczególnych gałęziach gospodarki w przeliczeniu na jednostkę kapitału ludzkiego, $e = (1, \ldots, 1)$. Warunek (2.2) oznacza, że konsumpcja na jednostkę kapitału ludzkiego nie może być niższa od pewnego poziomu normatywnego $\bar{c}$.

Nieskonsumowana część produkcji końcowej przeznaczana jest w gospodarce na inwestycje. Dzięki nim możliwe jest powiększanie zasobów zarówno kapitału produkcyjnego, jak i innowacyjnego, wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej. Niech i_t^P, i_t^R oznaczają n-wymiarowe (kolumnowe) wektory wartości nakładów na inestycje produkcyjne i innowacyjne ponoszonych w poszczególnych gałęziach gospodarki w okresie t. Dodatkowo, przez $S^P \geq 0$, $S^R \geq 0$ oznaczamy kwadratowe macierze struktury nakładów ponoszonych na oba rodzaje inwestycji (element s_{ij}^P określa jaki udział w jednostce nakładów ponoszonych na inwestycje produkcyjne w gałęzi j-tej ma produkcja pochodząca z gałęzi i-tej; analogicznie definiuje się elementy s_{ij}^R macierzy S^R). Oczywiście

$$\hat{i}_t = S^P i_t^P + S^R i_t^R$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}^P = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} s_{ij}^R = 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Równanie bilansowe możemy wówczas zapisać w następującej postaci:

$$x_t = Ax_t + S^P i_t^P + S^R i_t^R + c_t. \tag{2.3}$$

W wielosektorowych modelach wzrostu wywodzących się z modelu Leontiefa przyjmuje się zwykle, że macierz współczynników nakładów bieżących jest produktywna, tzn. spełnia warunek

$$\exists x \geq 0 \ (x > Ax).$$

Można udowodnić, że macierz nakładów bieżących A jest produktywna wtedy i tylko wtedy, gdy $(E - A)^{-1} \gneqq 0$, gdzie E oznacza macierz jednostkową[5]. Ponadto okazuje się, że macierz A jest produktywna wtedy i tylko wtedy, gdy[6]

$$(E - A)^{-1} = E + \sum_{s=1}^{\infty} A^s.$$

W konsekwencji, jeżeli macierz A jest produktywna i nierozkładalna[7], to spełniony jest warunek

(Z1) $(E - A)^{-1} > 0$.

2.1.3. Kapitał trwały (fizyczny)

W każdej gałęzi gospodarki gromadzone są zasoby zarówno kapitału produkcyjnego, jak i kapitału innowacyjnego. Tworzą je różnego rodzaju budynki, hale produkcyjne, maszyny, urządzenia, etc., które mogą być wykorzystane bądź w działalności

[5] Zob. np. D. Gale [28], str. 334.

[6] Zob. np. E. Panek [82], str. 285.

[7] Kwadratową macierz A stopnia n nazywamy nierozkładalną, jeżeli nie istnieje taki podzbiór właściwy $J \subset \{1, \ldots, n\}$, że $\forall i \notin J$, $\forall j \in J$ $(a_{ij} = 0)$ – zob. np. E. Panek [82], str. 758.

wytwórczej, bądź też przy pracach badawczo–rozwojowych. Dynamikę obu rodzajów kapitału opisują równania

$$k_{t+1} = (E - \delta^P)k_t + \sigma^P i_t^P, \tag{2.4}$$

$$g_{t+1} = (E - \delta^R)g_t + \sigma^R i_t^R, \tag{2.5}$$

gdzie k_t, g_t oznaczają n-wymiarowe (kolumnowe) wektory fizycznego kapitału produkcyjnego i innowacyjnego, δ^P, δ^R, σ^P, σ^R są diagonalnymi macierzami wskaźników, odpowiednio, deprecjacji kapitału produkcyjnego, deprecjacji kapitału innowacyjnego, skutkowania inwestycji produkcyjnych oraz skutkowania inwestycji innowacyjnych[8]. O wskaźnikach tych zakładamy, że spełniają warunki

$$\begin{array}{lll} 0 < \delta_i^P < 1, & 0 < \delta_i^R < 1, & i = 1, \ldots, n, \\ \sigma_i^P > 0, & \sigma_i^R > 0, & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Przy ustalonym wektorze produkcji x_t wzrost dowolnego rodzaju inwestycji powoduje, wobec równania (2.3), konieczność ograniczenia konsumpcji. Nie jest przy tym możliwe, by część wytworzonej produkcji, którą raz wykorzystano do powiększenia zasobów bądź kapitału produkcyjnego, bądź też kapitału innowacyjnego, mogła zasilać przyszłe strumienie konsumpcji. Wobec tego

$$i_t^P \geq 0, \qquad i_t^R \geq 0, \qquad t = 0, \ldots, t_1. \tag{2.6}$$

2.1.4. Kapitał ludzki

Zakładamy, że na przestrzeni całego horyzontu $\mathcal{T}$ niezmienna pozostaje struktura zatrudnienia (według gałęzi gospodarki) opisana macierzą o. Przyjmujemy także, że liczba ludności l jest stała[9] oraz że na wielkość kapitału ludzkiego, jaki może być zaangażowany w procesach produkcynych wpływa jedynie średni poziom kapitału ludzkiego w przeliczeniu na jednego zatrudnionego i faktyczna liczba pracowników produkcyjnych. Prawdziwe jest zatem równanie

$$b_t = o\rho_t h_t l, \tag{2.7}$$

[8] W modelu zakładamy istnienie tzw. rocznego cyklu inwestycyjnego. Przykłady modeli wielosektorowych, w których inwestycje skutkować mogą po dwu lub więcej okresach znaleźć można np. w pracach Z. Czerwiński i in. [20], W. Jurek [49], J. Tsukui, Y. Murakami [102]. Modele te nie uwzględniają jednak akumulacji kapitału fizycznego.

[9] Założenie to przyjmujemy jedynie dla uproszczenia analizy. Wyniki uzyskane przy założeniu stałej liczby ludności dają się łatwo uogólnić na przypadek, gdy liczebność populacji zmiania się ze stałą stopą wzrostu, tj. $l_t = l_0(1 + \lambda)^t$.

gdzie ρ_t jest diagonalną macierzą wskaźników udziału pracowników produkcyjnych w ogólnej liczbie zatrudnionych w poszczególnych gałęziach gospodarki. W każdym okresie horyzontu $\mathcal{T}$ macierz ρ_t spełnia warunek

$$0 \leq \rho_t \leq E.$$

Decydując o wartościach wskaźników $\rho_{i\,t}$, $i = 1, \ldots, n$, gałęzie gospodarki ustalają nie tylko wielkości kapitału ludzkiego angażowanego w produkcji, ale także zasoby kapitału ludzkiego dostępne w działalności badawczo–rozwojowej. Ich wielkość określa równanie

$$d_t = o(E - \rho_t)h_t l. \tag{2.8}$$

Wzrost średniego poziomu kapitału ludzkiego w przeliczeniu na jednego zatrudnionego możliwy jest dzięki zwiększaniu zasobów wykorzystywanej w gospodarce wiedzy technicznej. Wiedza ta, w wyniku edukacji i gromadzenia w czasie pracy doświadczenia zawodowego, powiększa kwalifikacje pracowników umożliwiając im coraz efektywniejsze wykonywanie powierzanych im czynności. Z drugiej strony, w każdym okresie rozważanego horyzontu czasowego część nie wykorzystywanej na codzień wiedzy jest zapominana, przez co posiadany przez zatrudnionych kapitał ludzki ulega deprecjacji. Jego dynamikę opisuje równanie

$$h_{t+1} = (E - \delta^H)h_t + \sigma^H w_t, \tag{2.9}$$

gdzie δ^H, σ^H są diagonalnymi macierzami wskaźników, odpowiednio, deprecjacji kapitału ludzkiego oraz efektywności zdobywania nowej wiedzy, w_t jest n-wymiarowym (kolumnowym) wektorem poziomów wykorzystywanej wiedzy technicznej charakterystycznej dla poszczególnych gałęzi gospodarki. Podobnie, jak w przypadku kapitału trwałego, przyjmujemy, że

$$0 < \delta_i^H < 1, \qquad \sigma_i^H > 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

2.1.5. Wiedza i innowacje

W każdej gałęzi gospodarki producenci, oprócz działalności produkcyjnej, prowadzą również prace badawczo–rozwojowe. Wykorzystując zgromadzone na ten cel zasoby kapitału fizycznego i ludzkiego dążyć mogą do opracowania i wdrożenia nowych procesów wytwórczych lub też nowych, ulepszonych produktów. Wszystkie dopuszczalne procesy tworzenia usprawnień i wynalazków opisuje przestrzeń innowacyjna I, której elementami w każdym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ są

$3n$-wymiarowe wektory

$$\zeta_t^* = \begin{bmatrix} g_t \\ d_t \\ q_t \end{bmatrix},$$

gdzie q_t jest n-wymiarowym (kolumnowym) wektorem innowacji własnych w okresie t (element q_{it} oznacza liczbę innowacji opracowanych w i-tej gałęzi gospodarki w okresie t). Zakładamy, że, podobnie jak przestrzeń produkcyjna G, przestrzeń innowacyjna I spełnia układ warunków (G1)–(G6). Z przestrzenią I związana jest także multifunkcja $T^R\colon \mathbb{R}^{2n}_+ \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ postaci

$$T^R(g,d) = \left\{ q \,\middle|\, \begin{bmatrix} g \\ d \\ q \end{bmatrix} \in I \right\},$$

którą nazywamy innowacyjnym przekształceniem technologicznym. Przyporządkowuje ono każdej parze kapitału innowacyjnego g i ludzkiego d wszystkie możliwe do opracowania wektory innowacji q. Tym samym, w każdym okresie horyzontu $\mathcal{T} = \{0,\ldots,t_1\}$ ma miejsce inkluzja

$$q_t \in T^R(g_t, d_t). \tag{2.10}$$

Przekształcenie T^R ma oczywiście własności (T1)–(T7). Dodatkowo zakładać będziemy, że

(Z2) Jeżeli $(k^{1T}, b^{1T}, g^{1T}, d^{1T}) > 0$, $(k^{2T}, b^{2T}, g^{2T}, d^{2T}) > 0$ oraz

$$\frac{(k^{1T}, b^{1T}, g^{1T}, d^{1T})}{eoh^1} \neq \frac{(k^{2T}, b^{2T}, g^{2T}, d^{2T})}{eoh^2},$$

to dla każdej liczby $\beta \in (0,1)$ istnieją takie wektory $x > \beta x^1 + (1-\beta)x^2$ oraz $q > \beta q^1 + (1-\beta)q^2$, gdzie $x^1 \in T^P(k^1, b^1)$, $x^2 \in T^P(k^2, b^2)$, $q^1 \in T^R(g^1, d^1)$, $q^2 \in T^R(g^2, d^2)$, że

$$x \in T^P\big(\beta k^1 + (1-\beta)k^2, \beta b^1 + (1-\beta)b^2\big),$$
$$q \in T^R\big(\beta g^1 + (1-\beta)g^2, \beta d^1 + (1-\beta)d^2\big).$$

Założenie (Z2) wprowadza korzyści skali dla kombinacji czynników o różnej strukturze[10].

[10] Analogiczne założenia przyjmowane są w wielosektorowych modelach wzrostu nie uwzględniających kapitału ludzkiego i produkcji wiedzy - por. np. P. Maćkowiak [68], H. Nikaido [79], str. 221, E. Panek [82], str. 355.

Dzięki prowadzonym pracom badawczo–rozwojowym oraz powstającym w ich efekcie nowatorskim projektom i wynalazkom podnosi się poziom dostępnej w gospodarce wiedzy technicznej. Dostępność nowych rozwiązań organizacyjnych i technologicznych nie musi jednak powodować szybkiego wzrostu wiedzy wykorzystywanej przez producentów. Wzrost ten jest bowiem uzależniony od powszechoności wprowadzania innowacji. Jeśli więc tylko niewielka część producentów usprawni swoje procesy wytwórcze lub podniesie jakość oferowanych produktów, to w skali całej gospodarki wzrost wykorzystywanej wiedzy technicznej będzie niewielki. Natomiast gdy te same innowacje zostaną wprowadzone przez wszystkich, lub przynajmniej przez dużą grupę producentów, obserwowane przyrosty wiedzy będą zdecydowanie większe. Zmiany poziomu wykorzystywanej wiedzy technicznej zależą więc nie od ogólnej liczby innowacji wdrażanych w gospodarce, ale od liczby innowacji *per capita*.

Może się zdarzyć, że innowacje opracowane w jednej gałęzi gospodarki okażą się w pewien sposób przydatne również w innych gałęziach. Działy badawczo–rozwojowe przyczyniają się wówczas nie tylko do wzbogacenia wiedzy wykorzystywanej w gałęziach do których należą, ale także do podnoszenia poziomu wiedzy stosowanej w innych gałęziach. W gospodarce może się więc ujawnić efekt międzygałęziowej dyfuzji wiedzy. W konsekwencji, w każdej gałęzi gospodarki przyrost wykorzystywanej wiedzy technicznej może być zdecydowanie większy niż wynika to z wielkości nakładów poniesionych w niej na badania i rozwój. Oczywiście, takie międzygałęziowe przepływy wiedzy mogą mieć różną siłę w zależności od powiązań występujących między poszczególnymi gałęziami gospodarki. Dynamikę wykorzystywanej wiedzy technicznej opisuje równanie

$$w_{t+1} = w_t + l^{-1} W q_t, \tag{2.11}$$

gdzie $W \geq 0$ jest kwadratową $n \times n$ macierzą współczynników przepływu wiedzy (element w_{ij} określa w jakim stopniu innowacja dokonana w j-tej gałęzi może wpływać na podniesienie poziomu wiedzy stosowanej w gałęzi i-tej). Zakładamy przy tym, że

(Z3) $\det W \neq 0$.

Zasób kapitału ludzkiego, jakim dysponują zatrudnieni w poszczególnych gałęziach gospodarki zależy przede wszystkim od zdobytego przez nich wykształcenia oraz doświadczenia zawodowego. Zależy więc od posiadanej przez pracownika wiedzy o wykorzystywanych w gospodarce procesach produkcyjnych i wytwarzanych towarach. Jednak, ponieważ nawet niewykształcony i niedoświadczony pracownik dysponuje pewnym zasobem podstawowej wiedzy i umiejętności, przyjmować będziemy, że

(Z4) $w_0 > 0, \qquad h_0 > 0.$

Zauważmy, że z równania (2.11) wynika, iż $\forall t \in \{0, \ldots, t_1 - 1\}$ $(w_{t+1} \geq w_t)$, przez co $\forall t \in \mathcal{T}$ $(w_t \geq w_0)$. Na podstawie równania (2.9) wnioskujemy wówczas, że $\forall t \in \{1, \ldots, t_1\}$ $(h_t \geq \sigma^H w_{t-1} \geq \sigma^H w_0)$. Założenie (Z4) sprawia więc, że w żadnym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ średni kapitał ludzki h_t nie może być niższy od pewnego dodatniego poziomu $\sigma^H w_0$.

2.2. Równowaga von Neumanna

Zakładając, że liczba ludności nie zmienia się w kolejnych okresach horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ (zob. punkt 2.1.4, przypis 8), bez utraty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $l = 1$. Wszystkie występujące w modelu wielkości, poza wektorem wiedzy w_t, interpretować możemy wówczas jako wielkości *per capita*.

Wektor wierszowy $y_t = (k_t^T, g_t^T, b_t^T, d_t^T, h_t^T, x_t^T, w_t^T, c_t^T)$ opisuje stan gospodarki w okresie $t \in \mathcal{T}$. Jeżeli w gospodarce możliwe jest przejście w ciągu jednego okresu ze stanu y_t do stanu y_{t+1}, to o parze (y_t, y_{t+1}) mówimy, że opisuje *dopuszczalny proces wzrostu*. Zbiór wszystkich dopuszczalnych procesów wzrostu oznaczać będziemy przez Y. Zauważmy, że zbiór ten jest wypukły. Faktycznie, bowiem jeżeli $(y_t^1, y_{t+1}^1) \in Y$ oraz $(y_t^2, y_{t+1}^2) \in Y$, to z warunków (T1)–(T2) oraz (2.1)–(2.11) wynika, że dla każdej liczby $\beta \in [0, 1]$ wektor $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1})$, w którym

$$\tilde{y}_t = \beta y_t^1 + (1 - \beta) y_t^2, \qquad \tilde{y}_{t+1} = \beta y_{t+1}^1 + (1 - \beta) y_{t+1}^2$$

również jest dopuszczalnym procesem wzrostu (tzn. należy do Y). W procesie tym wskaźniki udziału pracowników produkcyjnych w ogólnej liczbie zatrudnionych przyjmują wartości zgodnie ze wzorem

$$\tilde{\rho}_{i\,t} = \frac{\beta \rho_{i\,t}^1 h_{i\,t}^1 + (1 - \beta) \rho_{i\,t}^2 h_{i\,t}^2}{\beta h_{i\,t}^1 + (1 - \beta) h_{i\,t}^2}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dla dowolnego dopuszczalnego procesu wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y$ zdefiniować możemy liczbę

$$\alpha_i(y_t, y_{t+1}) = \begin{cases} y_{i\,t+1}/y_{i\,t}, & \text{gdy } y_{i\,t} > 0, \\ +\infty, & \text{gdy } y_{i\,t} = 0,\ y_{i\,t+1} > 0, \\ \text{wielkość nieokreślona, gdy } y_{i\,t} = y_{i\,t+1} = 0. \end{cases}$$

Liczbę

$$\alpha(y_t, y_{t+1}) = \min_{1 \leq i \leq 8n} \alpha_i(y_t, y_{t+1})$$

nazywamy wskaźnikiem efektywności procesu (y_t, y_{t+1}), natomiast liczbę

$$\alpha_M = \max_{(y_t, y_{t+1}) \in Y} \alpha(y_t, y_{t+1})$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem (efektywności) wzrostu w gospodarce Leontiefa–Gale'a. Proces $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y$, dla którego $\alpha(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) = \alpha_M$ nazywamy optymalnym procesem wzrostu.

Twierdzenie 2.1. *Funkcja* $\alpha\colon Y \to \mathbb{R}^1_+$ *jest ciągła, dodatnio jednorodna stopnia 0, a zbiór jej wartości jest zwarty (ograniczony i domknięty).*

Dowód*[11]*: Zauważmy, że z założenia (Z4) wynika, iż $y_t \gneqq 0$, $y_{t+1} \gneqq 0$. Funkcja α jest ciągła w każdym punkcie $(y_t, y_{t+1}) \in Y$, w którym $\alpha(y_t, y_{t+1}) = y_{k\,t+1}/y_{k\,t}$ oraz $y_{k\,t} > 0$, $k = \{1, \ldots, 8n\}$. Załóżmy, że $\alpha(y_t, y_{t+1}) = y_{k\,t+1}/y_{k\,t}$ oraz $y_{k\,t} = 0$. Wektor y_t jest półdodatni, zatem istnieje element $y_{j\,t} > 0$, przez co

$$\alpha(y_t, y_{t+1}) = \min_{1 \le i \le 8n} \alpha_i(y_t, y_{t+1}) \le \alpha_j(y_t, y_{t+1}) < +\infty,$$

co jest niemożliwe. Jeśli bowiem $y_{k\,t+1} > 0$, to $y_{k\,t+1}/y_{k\,t} = +\infty$, natomiast jeśli $y_{k\,t+1} = 0$, to iloraz $y_{k\,t+1}/y_{k\,t}$ jest nieokreślony. Oznacza to, że jeżeli $\alpha(y_t, y_{t+1}) = y_{k\,t+1}/y_{k\,t}$, to zawsze $y_{k\,t} > 0$ i wobec tego $\alpha \in C^0(Y \to \mathbb{R}^1_+)$.

Dodatnia jednorodność stopnia 0 funkcji $\alpha(y_t, y_{t+1})$ wynika bezpośrednio z definicji liczby $\alpha_i(y_t, y_{t+1})$.

Pokażemy teraz, że zbiór wartości funkcji $\alpha(y_t, y_{t+1})$ jest zwarty. Utwórzmy zbiór[12]

$$M = \left\{ (z_t, z_{t+1}) \;\middle|\; (z_t, z_{t+1}) = \frac{(y_t, y_{t+1})}{\|y_t\|} \;\wedge\; (y_t, y_{t+1}) \in Y \right\}.$$

Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji $\alpha(y_t, y_{t+1})$ wynika, że

$$\max_{(y_t, y_{t+1}) \in Y} \alpha(y_t, y_{t+1}) = \max_{(z_t, z_{t+1}) \in M} \alpha(z_t, z_{t+1}).$$

Z założenia (Z4) wynika, że $\forall\, (y_t, y_{t+1}) \in Y \; \big(\|y_t\| > 0\big)$, zatem zbiór M jest domknięty. Na podstawie warunków modelu łatwo zauważyć, że jest on również ograniczony[13]. Zbiór M jest więc zwarty, co oznacza, że jego obraz $\alpha(M) = \alpha(Y)$ również jest zwarty. Ciągła funkcja $\alpha(y_t, y_{t+1})$ osiąga na M maksimum, czyli istnieje proces $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y$ spełniający warunek

$$\alpha(y_t, y_{t+1}) \le \max_{(y_t, y_{t+1}) \in Y} \alpha(y_t, y_{t+1}) = \alpha(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) = \alpha_M < +\infty.$$

■

[11] Dowody twierdzeń 2.1 i 2.2 wzorowane są na dowodach twierdzeń 5.2 oraz 5.3 w pracy E. Panek [82], str. 217 i 220.

[12] W całej pracy przez $\|x\|$ oznaczamy sumę wartości bezwzględnych współrzędnych wektora $x \in \mathbb{R}^n$ – zob. wykaz ważniejszych symboli matematycznych stosowanych w pracy, str. 5.

[13] Nie podkreślając tego specjalnie, w całej pracy zakładamy, że wartości parametrów modelu są różne od $+\infty$.

Definicja 2.1. *O procesie* $(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}) \in Y$*, wektorze cen* $\bar{p} \gneqq 0$ *i liczbie* $\alpha > 0$ *mówimy, że charakteryzują gospodarkę w równowadze von Neumanna, jeżeli spełnione są następujące warunki*[14]*:*

$$\alpha\bar{y}_t \leq \bar{y}_{t+1}, \tag{2.12}$$

$$\forall(y_t, y_{t+1}) \in Y \ (y_{t+1}\bar{p} - \alpha y_t\bar{p} \leq 0), \tag{2.13}$$

$$\bar{y}_{t+1}\bar{p} > 0. \tag{2.14}$$

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli gospodarka jest w równowadze von Neumanna, to:*

(I) prawdziwe są implikacje:

$$\alpha\bar{y}_{i\,t} < \bar{y}_{i\,t+1} \Rightarrow \bar{p}_i = 0,$$

$$\bar{p}_i > 0 \Rightarrow \alpha\bar{y}_{i\,t} = \bar{y}_{i\,t+1},$$

$$\bar{y}_t\bar{p} > 0 \Rightarrow \alpha = \bar{y}_{t+1}\bar{p}/\bar{y}_t\bar{p},$$

$$\forall(y_t, y_{t+1}) \in Y, \ (y_t\bar{p} > 0 \Rightarrow \alpha \geq y_{t+1}\bar{p}/y_t\bar{p}),$$

(II) liczba α *w definicji 2.1 jest wskaźnikiem efektywności procesu* $(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$*,*

(III) jeżeli $(\bar{y}_t^1, \bar{y}_{t+1}^1)$*,* $(\bar{y}_t^2, \bar{y}_{t+1}^2)$ *są procesami w równowadze von Neumanna z wektorem cen* $\bar{p}$ *i wskaźnikiem efektywności* α*, to proces*

$$(y_t, y_{t+1}) = \beta(\bar{y}_t^1, \bar{y}_{t+1}^1) + (1-\beta)(\bar{y}_t^2, \bar{y}_{t+1}^2),$$

gdzie $\beta \in [0, 1]$*, też jest procesem wzrostu w równowadze von Neumanna z tym samym wektorem cen* $\bar{p}$ *i tym samym wskaźnikiem efektwności* α*.*

Dowód: (I) Załóżmy, że $\alpha\bar{y}_{i\,t} < \bar{y}_{i\,t+1} \ \wedge \ \bar{p}_i > 0$. Wówczas mnożąc obie strony nierówności (2.12) przez wektor $\bar{p}$ otrzymamy, że $\alpha\bar{y}_t\bar{p} < \bar{y}_{t+1}\bar{p}$, co jest sprzeczne z warunkiem (2.13). Zatem jeśli $\alpha\bar{y}_{i\,t} < \bar{y}_{i\,t+1}$, to $\bar{p}_i = 0$. Podobnie, jeżeli $\bar{p}_i > 0$ i nie jest prawdą, że $\alpha\bar{y}_{i\,t} = \bar{y}_{i\,t+1}$, to wobec (2.12) zachodzi nierówność $\alpha\bar{y}_{i\,t} < \bar{y}_{i\,t+1}$. Mnożąc obie strony nierówności (2.12) przez $\bar{p}$ ponownie dochodzimy do sprzeczności z warunkiem (2.13), co dowodzi prawdziwości drugiej implikacji. Bezpośrednio z (2.13) wynika, że jeśli tylko $y_t\bar{p} > 0$, to $\alpha \geq y_{t+1}\bar{p}/y_t\bar{p}$ i prawdziwa jest trzecia z wymienionych implikacji. Jednocześnie po obustronnym przemnożeniu nierówności (2.12) przez wektor $\bar{p}$ otrzymujemy warunek $\alpha\bar{y}_t\bar{p} \leq \bar{y}_{t+1}\bar{p}$. Zgodnie z (2.14) $\bar{y}_{t+1}\bar{p} > 0$, więc aby spełniony był warunek (2.13), również $\bar{y}_t\bar{p} > 0$, co w konsekwencji oznacza, że

$$\frac{\bar{y}_{t+1}\bar{p}}{\bar{y}_t\bar{p}} \leq \alpha \leq \frac{\bar{y}_{t+1}\bar{p}}{\bar{y}_t\bar{p}}.$$

[14]Zob. definicja 5.2 (wraz z komentarzem) w pracy E. Panek [82], str. 219.

Tym samym spełniona jest czwarta implikacja.

(II) Zauważmy, że jeśli $\alpha \neq \alpha(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$, to aby spełniony był warunek (2.12) musi zachodzić nierówność $\alpha < \alpha(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$ i wówczas $\forall i\ (\bar{y}_{i\,t+1} > 0 \Rightarrow \bar{y}_{i\,t+1} > \alpha \bar{y}_{i\,t})$. Na podstawie punktu (I) twierdzenia wnioskujemy więc, że $\forall i\ \big(\bar{y}_{i\,t+1} = 0 \vee \bar{p}_i = 0\big)$. Oznacza to, że $\bar{y}_{t+1}\bar{p} = 0$, co jest sprzeczne z warunkiem (2.14).

(III) Część (III) twierdzenia wynika natychmiast z postaci warunków (2.12)–(2.14) oraz wypukłości zbioru Y. ■

Wiemy, że istnieje proces, w którym osiągany jest optymalny, czyli najwyższy z możliwych wskaźnik efektywności wzrostu α_M. Powstaje więc pytanie, czy ta najwyższa efektywność może być osiągnięta również w stanie równowagi von Neumanna? Odpowiedzi dostarcza następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli zachodzą warunki (T1)–(T7), spełnione są założenia (Z1), (Z4) oraz zbiór Y zawiera wektor dodatni, to istnieje taki wektor $\bar{p} \gneqq 0$, że czwórka $\{\alpha_M, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}, \bar{p}\}$ charakteryzuje gospodarkę (2.1)–(2.11) w równowadze von Neumanna.*

Dowód: Zauważmy, że jeżeli $0 < (y_t, y_{t+1}) \in Y$, to $\alpha_M = \alpha(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}) \geq \alpha(y_t, y_{t+1}) > 0$. Wektor $(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}) \in Y$ tworzy optymalny proces wzrostu, więc oczywiście $\alpha_M \bar{y}_t \leq \bar{y}_{t+1}$, tzn. spełniony jest warunek (2.12) definicji równowagi von Neumanna. Utwórzmy zbiór

$$M = \big\{m \,|\, m = y_{t+1} - \alpha_M y_t \ \wedge \ (y_t, y_{t+1}) \in Y\big\}.$$

Zbiór Y jest wypukły. Wypukły jest więc również zbiór M. Jednocześnie, w zbiorze M nie istnieje element $m > 0$. Gdyby bowiem istniał, to istniałby także proces $(y_t, y_{t+1}) \in Y$, dla którego wskaźnik efektywności wzrostu spełniałby warunek $\alpha(y_t, y_{t+1}) > \alpha_M$, co przeczy definicji liczby α_M. Istnieje więc hiperpłaszczyzna przechodząca przez początek układu współrzędnych z wektorem kierunkowym $\bar{p} \gneqq 0$ oddzielająca zbiór M od $\mathbb{R}^{8n}_{+}$. Oznacza to, że $\forall m \in M\ (m\bar{p} \leq 0)$ i spełniony jest warunek (2.13) definicji równowagi.

Zauważmy, że wektor normy konsumpcji $\bar{c}$ jest półdodatni. Wobec założeń (Z1), (Z4) oznacza to, że $\forall t \in \mathcal{T}$ zachodzi warunek $k_t, h_t, b_t, x_t, w_t > 0$. Ponieważ $\alpha_M > 0$, więc istnieje proces wzrostu $(\bar{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y$, w którym $\hat{y}_{t+1} > 0$. Jeśli więc $\bar{p} \gneqq 0$, to

$$0 < \hat{y}_{t+1}\bar{p} \leq \alpha_M \bar{y}_t \bar{p},$$

co oznacza, że spełniony jest również warunek (2.14) definicji równowagi von Neumanna. ■

Dalej zakładamy, że w rozpatrywanej gospodarce $\alpha_M > 1$; jest to tzw. warunek produktywności gospodarki (gospodarka wytwarza więcej niż zużywa).

2.3. Wzrost zrównoważony

Dotychczas rozważaliśmy jedynie procesy wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y$ opisujące zmiany zachodzące w gospodarce w ciągu jednego okresu. Wzrost gospodarki w horyzoncie $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ przedstawiają $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalne procesy wzrostu, które definiujemy następująco:

Definicja 2.3. *Ciąg stanów gosodarki $\{y_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających w horyzoncie czasowym $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ układ warunków (2.1)–(2.11) oraz założenie (Z4) nazywamy $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalnym procesem wzrostu. W procesie tym ciąg $\left\{i_t^P\right\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalną trajektorią inwestycji produkcyjnych, ciąg $\left\{k_t\right\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalną trajektorią kapitału produkcyjnego, etc.*

Nietrudno zauważyć, że proces wzrostu $\{y_t\}_{t=0}^{t_1}$ jest $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym okresie $t \in \{0, \ldots, t_1 - 1\}$ ma miejsce inkluzja $(y_t, y_{t+1}) \in Y$.

Definicja 2.4. *Niech $t_1 = +\infty$. $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalny proces wzrostu nazywamy procesem stacjonarnym, jeżeli w procesie tym kapitał produkcyjny, kapitał innowacyjny, kapitał ludzki wykorzystywany w procesach produkcyjnych, kapitał ludzki wykorzystywany w działalności badawczo rozwojowej, produkcja oraz wiedza rosną ze stałymi, takimi samymi we wszystkich gałęziach gospodarki stopami wzrostu λ_k, λ_g, λ_b, λ_d, λ_x oraz λ_w:*

$$\begin{aligned} k_t &= (1 + \lambda_k)^t k_0, & g_t &= (1 + \lambda_g)^t g_0, \\ b_t &= (1 + \lambda_b)^t b_0, & d_t &= (1 + \lambda_d)^t d_0, \\ x_t &= (1 + \lambda_x)^t x_0, & w_t &= (1 + \lambda_w)^t w_0. \end{aligned}$$

W stacjonarnym procesie wzrostu zarówno w działach produkcyjnych, jak i badawczo–rozwojowych wszystkich gałęzi w kolejnych okresach utrzymana zostaje stała struktura oraz tempo wzrostu zasobów kapitału fizycznego i ludzkiego. Niezmienna pozostaje również struktura i tempo wzrostu produkcji oraz wykorzystywanej w gospodarce wiedzy technicznej. Mimo że definicja 2.4 dopuszcza by stopy wzrostu wszystkich wymienionych wielkości różniły się między sobą to okazuje się, że przy poczynionych założeniach sytuacja taka jest niemożliwa. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4. *W procesie stacjonarnym stopy wzrostu kapitału produkcyjnego, kapitału innowacyjnego, kapitału ludzkiego wykorzystywanego zarówno w procesach produkcyjnych, jak i w działalności badawczo rozwojowej, produkcji oraz wiedzy są sobie równe, czyli $\lambda_k = \lambda_g = \lambda_b = \lambda_d = \lambda_x = \lambda_w = \lambda$.*

Dowód[15]***:*** Z równania dynamiki kapitału produkcyjnego (2.4) w procesie stacjonarnym mamy:

$$k_0(1+\lambda_k)^{t+1} = (E-\delta^P)k_0(1+\lambda_k)^t + \sigma^P i_t^P,$$

zatem

$$k_0(1+\lambda_k) = (E-\delta^P)k_0 + \sigma^P i_t^P (1+\lambda_k)^{-t}.$$

Ponieważ $\det \sigma^P \neq 0$, możemy zapisać

$$\begin{aligned} i_0^P &= (\sigma^P)^{-1}(\lambda_k E + \delta^P)k_0, \\ i_t^P &= (1+\lambda_k)^t(\sigma^P)^{-1}(\lambda_k E + \delta^P)k_0, \end{aligned}$$

co oznacza, że w procesie stacjonarnym inwestycje produkcyjne zmieniają się ze stałą stopą równą stopie wzrostu kapitału produkcyjnego λ_k. Analogicznie, zauważyć można, że inwestycje innowacyjne również zmieniają się ze stałą stopą wzrostu λ_g. Jednocześnie, z równania dynamiki kapitału ludzkiego (2.9) wynika, że w procesie stacjonarnym spełniony jest warunek

$$h_{t+1} = (E-\delta^H)h_t + \sigma^H(1+\lambda_w)^t w_0,$$

wobec którego $\forall t \ \big(h_t = (1+\lambda_w)^t h_0\big)$. Przekształcając równanie bilansowe (2.3) oraz nierówność (2.2) otrzymujemy zależność:

$$(E-A)x_0 \geq S^P i_0^P \frac{(1+\lambda_k)^t}{(1+\lambda_x)^t} + S^R i_0^R \frac{(1+\lambda_g)^t}{(1+\lambda_x)^t} + \bar{c}eoh_0 \frac{(1+\lambda_w)^t}{(1+\lambda_x)^t}.$$

Aby była ona spełniona $\forall t \geq 0$ musi zachodzić warunek $\lambda_x \geq \max\{\lambda_k, \lambda_g, \lambda_w\}$. Ponieważ $\forall t \geq 0 \ \big(x_t \in T^P(k_t, o\rho_t h_t)\big)$, zatem z własności (T1) przekształcenia T^P otrzymujemy:

$$x_0 \in T^P\left(k_0\frac{(1+\lambda_k)^t}{(1+\lambda_x)^t}, o\rho_t h_0\frac{(1+\lambda_w)^t}{(1+\lambda_x)^t}\right).$$

Z domkniętości wykresu przekształcenia technologicznego T^P (warunek (T7)) oraz faktu, iż $\forall t \ (0 \leq \rho_t \leq E)$ płynie wniosek, że jeżeli $\lambda_x > \max\{\lambda_k, \lambda_w\}$, wówczas $0 \neq x_0 \in T^P(0,0)$, co jest niemożliwe (sprzeczne z warunkiem (T3)). Tym samym $\lambda_x = \max\{\lambda_k, \lambda_w\}$. Jeśli jednak $\lambda_k \neq \lambda_w$, to albo $0 \neq x_0 \in T^P(k_0, 0)$, albo $0 \neq x_0 \in T^P(0, o\rho^0 h_0)$ dla pewnej diagonalnej macierzy ρ^0 z elementami $\rho_i^0 \in [0,1]$ na głównej przekątnej, $i = 1, \ldots, n$, co również jest niemożliwe. W rezultacie zachodzi więc równość $\lambda_k = \lambda_w = \lambda_x$.

Zauważmy, że jeżeli $\forall t \ \big(w_t = (1+\lambda_w)^t w_0\big)$, to na podstawie równania (2.11) wnioskujemy, że liczba innowacji opracowywanych w gospdodarce zmienia się również ze

[15] Dowód twierdzenia 2.4 wzorowany jest na dowodzie lematu 6.4 w pracy E. Panek [82], str. 343. Por. również B. Jurek [45].

stopą wzrostu λ_w. Wiemy przy tym, że $\forall t\ \big(q_t \in T^R(g_t, o(E-\rho_t)h_t)\big)$. Z własności (T1) przekształcenia T^R wynika, że

$$q_0 \in T^R\left(g_0\frac{(1+\lambda_g)^t}{(1+\lambda_w)^t}, o(E-\rho_t)h_0\right).$$

Jeśli więc $\lambda_w > \lambda_g$, to na podstawie własności (T7) przekształcenia T^R wnioskujemy, że $0 \neq q_0 \in T^R\big(0, o(E-\rho_t)h_0\big)$, co przeczy warunkowi (T3). Tym samym $\lambda_w = \lambda_g$. Jednocześnie, na podstawie równań (2.7), (2.8) wnioskujemy, że $\lambda_b = \lambda_d = \lambda_w$, co w konsekwencji oznacza, iż $\lambda_k = \lambda_g = \lambda_b = \lambda_d = \lambda_x = \lambda_w = \lambda$. ■

Z twierdzenia 2.4 wynika natychmiast, że w stacjonarnym procesie wzrostu macierz wskaźników udziału pracowników produkcyjnych w ogólnej liczbie zatrudnionych w poszczególnych gałęziach gospodarki pozostaje stała w czasie, tzn. $\forall t$ $(\rho_t = \rho = const)$. Ponadto, na podstawie równania bilansowego (2.3) łatwo zauważyć, że jeżeli produkcja oraz oba rodzaje kapitału fizycznego rosną we wszystkich gałęziach ze stopą wzrostu λ, to również konsumpcja zmienia się w kolejnych okresach z tą samą stopą. Podobnie, wzrost wykorzystywanej w gospodarce wiedzy technicznej ze stopą wzrostu λ pociągą za sobą, wobec równania (2.9), zmiany kapitału ludzkiego także ze stopą wzrostu λ. W procesie stacjonarnym spełniony jest więc warunek

$$c_t = (1+\lambda)^t c_0, \qquad h_t = (1+\lambda)^t h_0.$$

Z twierdzenia 2.4 wynika zatem, że jeżeli $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalny proces wzrostu jest procesem stacjonarnym, to utrzymana zostaje w nim stała struktura gospodaraki w każdym okresie dowolnie długie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$. Tym samym, $\forall t \in \mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$

$$y_t = (1+\lambda)^t y_0.$$

Stopa wzrostu gospodarki wyznacza przy tym stałą w czasie wartość wskaźnika efektywności procesu wzrostu, tzn. $\forall t \in \{0, \ldots, t_1 - 1\}$

$$\alpha(y_t, y_{t+1}) = (1+\lambda).$$

Nie podkreślając tego specjalnie, w dalszej części pracy zakładamy, że w rozpatrywanej gospodarce istnieją takie stacjonarne procesy wzrostu, w których osiągana jest dodatnia stopa wzrostu λ.

Rozpatrzmy następujące zadanie:

znaleźć

$$\max \lambda \tag{2.15}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
&x_t \in T^P(k_t, o\rho h_t),\\
&q_t \in T^R\big(g_t, o(E-\rho)h_t\big),\\
&x_t = Ax_t + S^P i_t^P + S^R i_t^R + c_t,\\
&k_{t+1} = (E-\delta^P)k_t + \sigma^P i_t^P,\\
&g_{t+1} = (E-\delta^R)g_t + \sigma^R i_t^R,\\
&h_{t+1} = (E-\delta^H)h_t + \sigma^H w_t,\\
&w_{t+1} = w_t + W q_t,\\
&\frac{c_t}{eoh_t} \geq \bar{c},\\
&x_t = (1+\lambda)^t x, \qquad k_t = (1+\lambda)^t k, \qquad g_t = (1+\lambda)^t g,\\
&h_t = (1+\lambda)^t h, \qquad c_t = (1+\lambda)^t c, \qquad i_t^P = (1+\lambda)^t i^P,\\
&i_t^R = (1+\lambda)^t i^R, \qquad q_t = (1+\lambda)^t q, \qquad w_t = (1+\lambda)^t w,\\
&k_0 \geq 0, \qquad g_0 \geq 0, \qquad h_0 \geq 0, \qquad w_0 \geq 0,\\
&0 \leq \rho \leq E,\\
&t = 0, 1, \ldots .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Rozwiązanie zadania (2.15)–(2.16) wskazuje na taki proces stacjonarny, w którym osiągana jest najwyższa stopa wzrostu konsumpcji w zbiorze wszystkich procesów stacjonarnych, startujących z dowolnego nieujemnego poziomu kapitału produkcyjnego, innowacyjnego, ludzkiego oraz wiedzy. Z uwagi na postać poszczególnych trajektorii oraz własności przekształceń T^P i T^R, zadanie (2.15)–(2.16) jest równoważne z zadaniem

znaleźć

$$\max \lambda \tag{2.17}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
&(E-A)^{-1}\gamma \in \big\{T^P(\kappa, o\rho\chi) - \Omega^P\kappa - \Omega^R\phi\big\},\\
&W^{-1}\lambda(\sigma^H)^{-1}(\lambda E + \delta^H)\chi \in T^R\big(\phi, o(E-\rho)\chi\big),\\
&\gamma \geq \bar{c},\\
&0 \leq \rho \leq E,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

gdzie $\Omega^P = (E-A)^{-1}S^P(\sigma^P)^{-1}(\lambda E + \delta^P)$, $\Omega^R = (E-A)^{-1}S^R(\sigma^R)^{-1}(\lambda E + \delta^R)$, $\gamma = c/eoh$, $\kappa = k/eoh$, $\phi = g/eoh$, $\chi = h/eoh$. Dodatkowo niech $\xi = x/eoh$, $\mu = b/eoh$, $\eta = d/eoh$, $\omega = w/eoh$. Zmiennymi zadania (2.17)–(2.18) są λ, γ, κ, ϕ, χ, ρ. Niech szóstka $(\bar{\lambda}, \bar{\gamma}, \bar{\kappa}, \bar{\phi}, \bar{\chi}, \bar{\rho})$ oznacza rozwiązanie zadania (2.17)–(2.18)[16],

[16]Istnienie rozwiązania zadania (2.17)–(2.18) wynika bezpośrednio z istnienia liczby α_M.

a $\bar{\xi}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\omega}$ odpowiadające mu optymalne (w myśl kryterium (2.17)) wektory produkcji globalnej, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcji, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej oraz wiedzy. O wektorze

$$\bar{\psi} = (\bar{\kappa}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\mu}^T, \bar{\eta}^T, \bar{\chi}^T, \bar{\xi}^T, \bar{\omega}^T, \bar{\gamma}^T)$$

mówimy, że wyznacza optymalny stan gospodarki. Łatwo przy tym zauważyć, że liczba $1 + \bar{\lambda}$ jest optymalnym wskaźnikiem efektywności wzrostu w rozpatrywanej gospodarce, tzn. $\alpha_M = 1 + \bar{\lambda}$.

Definicja 2.5. *Proces stacjonarny, w którym*

$$\psi_t = \frac{y_t}{eoh_t} = \bar{\psi} = const$$

nazywamy procesem wzrostu na magistrali lub optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu. Promień

$$N = \{\beta\bar{\psi} \,|\, \beta > 0\}$$

nazywamy magistralą lub promieniem von Neumanna. Promienie

$$\begin{array}{lll} N_k = \{\beta\bar{\kappa} \,|\, \beta > 0\}, & N_g = \{\beta\bar{\phi} \,|\, \beta > 0\}, & N_h = \{\beta\bar{\chi} \,|\, \beta > 0\}, \\ N_b = \{\beta\bar{\mu} \,|\, \beta > 0\}, & N_d = \{\beta\bar{\eta} \,|\, \beta > 0\}, & N_x = \{\beta\bar{\xi} \,|\, \beta > 0\}, \\ N_c = \{\beta\bar{\gamma} \,|\, \beta > 0\}, & N_w = \{\beta\bar{\omega} \,|\, \beta > 0\} & \end{array}$$

nazywamy magistralami, odpowiednio, kapitału produkcyjnego, kapitału innowacyjnego, kapitału ludzkiego, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcyjnych, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo-rozwojowej, produkcji, konsumpcji i wiedzy.

O ważnej właności optymalnych stacjonarnych procesów wzrostu mówi następujący lemat:

Lemat 2.1. *W optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu $\bar{\gamma} = \bar{c}$.*

Dowód: Załóżmy, wbrew tezie, że w procesie magistralnym $\bar{\gamma} \gneqq \bar{c}$. Wówczas, wobec założenia (Z1), zachodzi nierówność $(E-A)^{-1}\bar{\gamma} > (E-A)^{-1}\bar{c}$. Oznacza to, że istnieje taki wektor $\varepsilon > 0$, że

$$(E - A)^{-1}\bar{c} \in \big\{T^P(\bar{\kappa}, o\bar{\rho}\bar{\chi}) - \bar{\Omega}^P\bar{\kappa} - \bar{\Omega}^R\bar{\phi} - \varepsilon\big\}.$$

Można wówczas wskazać taką liczbę $\hat{\lambda} > \bar{\lambda}$, wektor $\hat{\phi} > \bar{\phi}$, macierze $\hat{\Omega}^P \gneqq \bar{\Omega}^P$, $\hat{\Omega}^R \gneqq \bar{\Omega}^R$ oraz wartości wskaźników $\hat{\rho}_i < \bar{\rho}_i$, $i = 1, \ldots, n$, że

$$\begin{gathered} (E - A)^{-1}\bar{c} \in \big\{T^P(\bar{\kappa}, o\hat{\rho}\bar{\chi}) - \hat{\Omega}^P\bar{\kappa} - \hat{\Omega}^R\hat{\phi}\big\}, \\ W^{-1}\hat{\lambda}(\sigma^H)^{-1}(\hat{\lambda}E + \delta^H)\bar{\chi} \in T^R\big(\hat{\phi}, o(E - \hat{\rho})\bar{\chi}\big). \end{gathered}$$

Warunek ten implikuje istnienie stacjonarnego procesu wzrostu, w którym osiągana jest stopa wzrostu $\hat{\lambda} > \bar{\lambda}$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości lematu. ■

Zgodnie z lematem 2.1, najwyższa stopa wzrostu w procesie stacjonarnym osiągana jest tylko wtedy, gdy konsumpcja w przeliczeniu na jednostkę kapitału ludzkiego kształtuje się na ustalonym poziomie normatywnym $\bar{c}$. Dzieje się tak dlatego, że konsumpcja w naszym modelu jest wielkością rezidualną, nie sprzężoną zwrotnie (pozytywnie) z żadnym czynnikiem wzrostu. Z drugiej strony, każde jej zwiększenie ogranicza (pośrednio) możliwości wzrostu zasobów zarówno kapitału fizycznego, jak i ludzkiego.

W ogólnym przypadku, w gospodarce istnieć może wiele różnych optymalnych stacjonarnych procesów wzrostu. Okazuje się jednak, że przy założeniach (G1)–(G6), (Z1)–(Z4) rozwiązanie zadania (2.17)–(2.18) jest jednoznaczne. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.5. *W gospodarce (2.1)–(2.11) spełniającej warunki (T1)–(T7) oraz założenia (Z1)–(Z4) rozwiązanie zadania (2.17)–(2.18) jest jednoznaczne.*

Dowód: Załóżmy, wbrew tezie lematu, że istnieją dwa różne optymalne stacjonarne procesy wzrostu, w których

$$(\kappa^1, \phi^1, \mu^1, \eta^1, \chi^1, \xi^1, \omega^1, \gamma^1) \neq (\kappa^2, \phi^2, \mu^2, \eta^2, \chi^2, \xi^2, \omega^2, \gamma^2).$$

Z lematu 2.1 wiemy, że $\gamma^1 = \gamma^2 = \bar{c}$. Załóżmy, że

$$\frac{(\kappa^{1T}, \mu^{1T}, \phi^{1T}, \eta^{1T})}{eo\chi^1} \neq \frac{(\kappa^{2T}, \mu^{2T}, \phi^{2T}, \eta^{2T})}{eo\chi^2}.$$

Wobec założenia (Z2) oznacza to, że dla każdej liczby $\beta \in (0,1)$ istnieje taki wektor $\xi > \beta\xi^1 + (1-\beta)\xi^2$, że zachodzi inkluzja

$$\xi \in T^P\big(\beta\kappa^1 + (1-\beta)\kappa^2, \beta\mu^1 + (1-\beta)\mu^2\big).$$

Można wówczas, podobnie jak w dowodzie lematu 2.1, wskazać taki proces stacjonarny, w którym osiągana jest stopa wzrostu wyższa od $\bar{\lambda}$, co, oczywiście, jest niemożliwe. A zatem $(\kappa^2, \mu^2, \phi^2, \eta^2) = N(\kappa^1, \mu^1, \phi^1, \eta^1)$, gdzie $N > 0$. Z warunków (2.7), (2.8) wynika, że $\mu^1 + \eta^1 = o\chi^1$ oraz $\mu^2 + \eta^2 = o\chi^2$. Jeśli więc $N \neq 1$, to $eo\chi^1 \neq eo\chi^2$ i, tym samym, $e(oh^1/eoh^1) \neq e(oh^2/eoh^2)$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $(\kappa^1, \mu^1, \phi^1, \eta^1) = (\kappa^2, \mu^2, \phi^2, \eta^2)$. W szczególności oznacza to, że $\mu^1 + \eta^1 = \mu^2 + \eta^2$, co jest równoważne z warunkiem $o\chi^1 = o\chi^2$. Aby był on spełniony musi, oczywiście, zachodzić równość $\chi^1 = \chi^2$. Jednocześnie, z równania dynamiki kapitału ludzkiego (2.9) wynika, że $\omega^1 = (\sigma^H)^{-1}(\bar{\lambda}E + \delta^H)\chi^1$ oraz $\omega^2 = (\sigma^H)^{-1}(\bar{\lambda}E + \delta^H)\chi^2$. Jeśli więc $\chi^1 = \chi^2$, to również $\omega^1 = \omega^2$. Na koniec wystarczy zauważyć, że warunek bilansowy (2.3) implikuje równość

$$\xi^1 = (E - A)^{-1}\gamma^1 + \bar{\Omega}^P\kappa^1 + \bar{\Omega}^R\phi^1 = (E - A)^{-1}\gamma^2 + \bar{\Omega}^P\kappa^2 + \bar{\Omega}^R\phi^2 = \xi^2$$

i w rezultacie $(\kappa^1, \phi^1, \mu^1, \eta^1, \chi^1, \xi^1, \omega^1, \gamma^1) = (\kappa^2, \phi^2, \mu^2, \eta^2, \chi^2, \xi^2, \omega^2, \gamma^2)$. ■

W myśl twierdzenia 2.5, optymalny wskaźnik efektywności wzrostu jest wyższy od wskaźnika efektywność każdego procesu, w którym wyjściowy stan gospodarki odbiega od położenia magistralnego, tzn. $\forall (y_t, y_{t+1}) \in Y$

$$y_t \notin N \Rightarrow \alpha(y_t, y_{t+1}) < \alpha_M.$$

Z definicji magistrali wynika, że jeżeli wektor y_t wyznacza optymlany stan gospodarki, tzn. $y_t \in N$, to każdy wektor βy_t, $\beta > 0$, również wyznacza optymalny stan gospodarki. Przyjmijmy więc, że $\bar{y}$ jest wektorem leżącym na magistrali, którego norma jest równa 1:

$$\bar{y} \in N, \qquad \|\bar{y}\| = 1.$$

Twierdzenie 2.6. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\vartheta_\varepsilon > 0$, że*

$$(y_t, y_{t+1}) \in Y \ \wedge \ \left\| \frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y} \right\| \geq \varepsilon \ \Rightarrow \ \alpha(y_t, y_{t+1}) \leq \alpha_M - \vartheta_\varepsilon.$$

Dowód: Utwórzmy zbiory:

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (z_t, z_{t+1}) \,\middle|\, (z_t, z_{t+1}) = \frac{(y_t, y_{t+1})}{\|y_t\|} \ \wedge \ (y_t, y_{t+1}) \in Y \ \wedge \ \|z_t - \bar{y}\| \geq \varepsilon \right\}, \\ A &= \big\{ \alpha \,|\, \alpha = \alpha(z_t, z_{t+1}) \ \wedge \ (z_t, z_{t+1}) \in G \big\}. \end{aligned}$$

Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α wynika, że $\alpha(Y) = \alpha(G)$. Zbiór G jest przy tym zwarty oraz $\alpha \in C^0(G)$, zatem $A = \alpha(G) \subset \mathbb{R}^1_+$ również jest zbiorem zwartym. Funkcja liniowa $f(\alpha) = \alpha - \alpha_M$ osiąga na nim maksimum, które, wobec twierdzenia 2.5, jest liczbą ujemną. Tym samym istnieje liczba $\vartheta_\varepsilon > 0$ spełniająca tezę twierdzenia. ■

2.4. Słabe twierdzenie o magistrali

Z twierdzenia 2.3 wiemy, że istnieje taki wektor $\bar{p} \gneqq 0$, że czwórka $\{\alpha_M, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}, \bar{p}\}$ charakteryzuje gospodarkę w równowadze von Neumanna. Ważną z punktu widzenia dalszych rozważań własność wektora $\bar{p}$ opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.7. *Jeżeli proces (y_t, y_{t+1}) jest dopuszczalny, to $y_t\bar{p} > 0$.*

Dowód: Załóżmy, wbrew tezie twierdzenia, że $\exists (y_t, y_{t+1}) \in Y$ $(y_t \bar{p} = 0)$. Ponieważ wektor normy konsumpcji $\bar{c}$ jest półdodatni, więc wobec warunków (T3), (Z1), (Z4) w każdym okresie horyzontu $\mathcal{T}$ spełnione są warunki $(k_t, b_t, h_t, x_t) > 0$ oraz $(g_t, d_t, w_t, c_t) \gneqq 0$. Niech $\bar{p} = (p^1, p^2)^T$, gdzie p^1 jest wektorem (wierszowym) n-wymiarowym, natomiast p^2 wektorem (wierszowym) $7n$-wymiarowym. Ponieważ zakładamy, że $y_t \bar{p} = 0$, więc $p^1 = 0$, $p^2 \gneqq 0$. Weźmy proces $(\hat{y}_0, \hat{y}_1)$, w którym

$$(\hat{h}_0, \hat{c}_0) = (\bar{\chi}, \bar{\gamma}) eo\hat{h}_0, \tag{I}$$

$$\hat{k}_0 > \bar{\kappa} eo\hat{h}_0, \qquad \hat{k}_1 > \bar{\kappa} eo\hat{h}_1, \tag{II}$$

$$\hat{b}_0 < \bar{\mu} eo\hat{h}_0, \tag{III}$$

$$(\hat{g}_0, \hat{d}_0) > (\bar{\phi}, \bar{\eta}) eo\hat{h}_0, \tag{IV}$$

$$\hat{x}_0 \leq \bar{\xi} eo\hat{h}_0, \qquad \hat{i}_0^R > (\sigma^R)^{-1}(\lambda E + \delta^R)\hat{g}_0, \tag{V}$$

$$\hat{w}_0 > \bar{\omega} eo\hat{h}_0. \tag{VI}$$

Zauważmy, że wśród dopuszczalnych procesów wzrostu istnieje proces $(\hat{y}_0, \hat{y}_1)$ spełniający układ warunków (I)–(VI). Ponieważ $\delta_i^P \in (0,1)$, więc przyjmując odpowiednio duże początkowe zasoby kapitału $\hat{k}_0$ możemy otrzymać trajektorię kapitału $\{\hat{k}_t\}_{t=0}^1$ spełniającą (II). Jednocześnie, jeśli odpowiednio duże są początkowe zasoby kapitału innowacyjnego oraz wiedzy, to można wskazać takie wartości wskaźników udziału pracowników produkcyjnych w ogólnej liczbie zatrudnionych, że spełnione są warunki (I), (III)–(VI).

Warunek (VI) implikuje nierówność $\hat{h}_1 > \alpha_M \hat{h}_0$, przez co, przyjmując macierz $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_0$, otrzymujemy $(\hat{b}_1, \hat{d}_1) > \alpha_M(\hat{b}_0, \hat{d}_0)$. Z warunku (V) wynika natomiast, że $\hat{g}_1 > \alpha_M \hat{g}_0$, dzięki czemu wśród dopuszczalnych procesów wzrostu spełniających układ warunków (I)–(VI) wskazać można procesy, w których $\hat{w}_1 > \alpha_M \hat{w}_0$. Analogicznie, na podstawie (II) wnioskujemy, że możliwe jest, aby jednocześnie zachodziła nierówność $\hat{x}_1 > \alpha_M \hat{x}_0$, co w szczególności pozwala na to, by $\hat{c}_1 > \alpha_M \hat{c}_0$. W konsekwencji

$$(\hat{b}_1, \hat{g}_1, \hat{d}_1, \hat{h}_1, \hat{x}_1, \hat{w}_1, \hat{c}_1) > \alpha_M(\hat{b}_0, \hat{g}_0, \hat{d}_0, \hat{h}_0, \hat{x}_0, w_0, c_0).$$

Ponieważ $p^1 = 0$, $p^2 \gneqq 0$, więc $\hat{y}_1 \bar{p} > \alpha_M \hat{y}_0 \bar{p}$, co jest sprzeczne z warunkiem (2.13) definicji równowagi von Neumanna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $p^1 \gneqq 0$, przez co $y_t \bar{p} > 0$ dla każdego dopuszczalnego stanu gospodarki. ■

Wiemy, że jeżeli $\bar{y}_t \in N$, to istnieje taki proces dopuszczalny $(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}) \in Y$, w którym warunek (2.13) definicji równowagi von Neumanna spełniony jest z równością. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} v_t &= (y_{1\,t}, \ldots, y_{6n\,t}, y_{7n+1\,t}, \ldots, y_{8n\,t}) = (k_t^T, b_t^T, g_t^T, d_t^T, h_t^T, x_t^T, c_t^T), \\ \bar{v} &= (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{6n}, \bar{y}_{7n+1}, \ldots, \bar{y}_{8n}), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{y} \in N$, $\|\bar{y}\| = 1$.

Twierdzenie 2.8. *Dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu* $(y_t, y_{t+1}) \in Y$ *prawdziwa jest implikacja*

$$\frac{v_t}{\|y_t\|} \neq \bar{v} \;\Rightarrow\; y_{t+1}\bar{p} - \alpha_M y_t \bar{p} < 0.$$

Dowód: Załóżmy, wbrew tezie, że istnieje taki proces $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y$, dla którego $\hat{v}_t/\|\hat{y}_t\| \neq \bar{v}$ oraz $\hat{y}_{t+1}\bar{p} - \alpha_M \hat{y}_t \bar{p} = 0$. W procesie tym

$$(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\chi}, \hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}) \neq (\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{\chi}, \bar{\xi}, \bar{\omega}, \bar{\gamma}).$$

Przyjmijmy, że $\hat{\gamma} \gneqq \bar{\gamma}$. Ponieważ, zgodnie z założeniem (Z1), $(E - A)^{-1} > 0$, więc istnieje taki wektor $\varepsilon > 0$, że

$$\varepsilon + (E - A)^{-1}\bar{\gamma} + (E - A)^{-1} S^P \frac{\hat{i}_t^P}{eo\hat{h}_t} + (E - A)^{-1} S^R \frac{\hat{i}_t^R}{eo\hat{h}_t} \in T^P(\hat{\kappa}_t, \hat{\mu}_t).$$

Wówczas dopuszczalny jest także proces $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1})$, w którym $\tilde{\gamma}_t = \bar{\gamma}$, $\tilde{\kappa}_t \leq \hat{\kappa}_t$, $\tilde{\mu}_t < \hat{\mu}_t$, $\tilde{\phi}_t > \hat{\phi}_t$, $\tilde{\eta}_t > \hat{\eta}_t$, $\tilde{\omega}_t > \hat{\omega}_t$ oraz

$$\frac{\tilde{y}_{i\,t+1} - \tilde{y}_{i\,t}}{\tilde{y}_{i\,t}} > \frac{\hat{y}_{i\,t+1} - \hat{y}_{i\,t}}{\hat{y}_{i\,t}}, \qquad i = 1, \ldots, 8n. \tag{I}$$

Oznacza to jednak, że $\tilde{y}_{t+1}\bar{p} - \alpha_M \tilde{y}_t \bar{p} > 0$, a to jest niemożliwe (sprzeczne z warunkiem (2.13) definicji równowagi von Neumanna). Tym samym musi zachodzić równość $\hat{\gamma}_t = \bar{\gamma}$.

Przyjmijmy teraz, że $(\hat{\kappa}_t, \hat{\mu}_t, \hat{\phi}_t, \hat{\eta}_t) \neq (\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta})$. Przy założeniu (Z2), dla każdej liczby $\beta \in (0, 1)$ istnieją wektory

$$\xi > \beta\hat{\xi}_t + (1 - \beta)\bar{\xi}, \qquad q > \beta\frac{\hat{q}_t}{eo\hat{h}_t} + (1 - \beta)\bar{q},$$

gdzie $\bar{q} = W^{-1}\bar{\lambda}\bar{\omega}$, spełniające warunki:

$$\xi \in T^P\big(\beta\hat{\kappa}_t + (1 - \beta)\bar{\kappa}, \beta\hat{\mu}_t + (1 - \beta)\bar{\mu}\big),$$
$$q \in T^R\big(\beta\hat{\phi}_t + (1 - \beta)\bar{\phi}, \beta\hat{\eta}_t + (1 - \beta)\bar{\eta}\big).$$

W rezultacie, istnieje dopuszczalny proces wzrostu $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Y$, w którym

$$(\tilde{\kappa}_t, \tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t, \tilde{\eta}_t, \tilde{\chi}_t, \tilde{\gamma}_t) = \beta(\hat{\kappa}_t, \hat{\mu}_t, \hat{\phi}_t, \hat{\eta}_t, \hat{\chi}_t, \hat{\gamma}_t) + (1 - \beta)(\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{\chi}, \bar{\gamma}),$$
$$\tilde{\omega}_t > \beta\hat{\omega}_t + (1 - \beta)\bar{\omega},$$
$$\tilde{\xi}_t = \xi$$

i jednocześnie spełniony jest warunek (I), który, jak wykazaliśmy, prowadzi do sprzeczności. Musi więc zachodzić równość $(\hat{\kappa}_t, \hat{\mu}_t, \hat{\phi}_t, \hat{\eta}_t) = (\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta})$. Wiemy przy tym również, że $\hat{\mu}_t + \hat{\eta}_t = o\hat{\chi}_t$ oraz $\bar{\mu} + \bar{\eta} = o\bar{\chi}$, zatem $\hat{\chi} = \bar{\chi}$. By zakończyć dowód wystarczy pokazać, że nie jest możliwe aby jednocześnie $\hat{\xi}_t \neq \bar{\xi}$ oraz $\hat{y}_{t+1}\bar{p} - \alpha_M \hat{y}_t \bar{p} = 0$. Zauważmy najpierw, że nie istnieje wektor $\xi' \gneqq \bar{\xi}$, dla którego ma miejsce inkluzja $\xi' \in T^P(\bar{\kappa}, \bar{\mu})$. Gdyby bowiem istniał, to wektor produkcji $\bar{\xi}$ mógłby zostać wytworzony przy niższym nakładzie kapitału $\kappa' \lneqq \bar{\kappa}$. W konsekwencji istniałby, wobec założenia (Z1), taki wektor $\varepsilon > 0$, że

$$\varepsilon + (E - A)^{-1}\bar{\gamma} + \bar{\Omega}^P \kappa' + \bar{\Omega}^R \bar{\phi} \in T^P(\kappa', \bar{\mu}).$$

Wówczas jednak, powtarzając rozumowanie z dowodu lematu 2.1, zauważyć możemy, że istnieje proces stacjonarny, w którym osiągana jest stopa wzrostu $\lambda' > \bar{\lambda}$, a to jest, oczywiście, niemożliwe. Jeśli więc $\hat{\xi}_t \neq \bar{\xi}$, to $\hat{\xi}_t \lneqq \bar{\xi}$. Oznacza to jednak, że wektor produkcji $\hat{\xi}_t$ może być wytworzony przy zaangażowaniu mniejszego nakładu kapitału produkcyjnego $\tilde{\kappa}_t \lneqq \hat{\kappa}_t$, a to z kolei pociąga za sobą istnienie takiego dopuszczalnego procesu wzrostu $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1})$, w którym $\tilde{k}_t \lneqq \hat{k}_t$, $\tilde{y}_{i\,t} = \hat{y}_{i\,t}$, $\tilde{y}_{i\,t+1} = \hat{y}_{i\,t+1}$, $i = n+1, \ldots, 8n$, oraz

$$\frac{\tilde{k}_{i\,t+1} - \tilde{k}_{i\,t}}{\tilde{k}_{i\,t}} \geq \frac{\hat{k}_{i\,t+1} - \hat{k}_{i\,t}}{\hat{k}_{i\,t}}, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n.$$

Proces $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1})$ spełnia warunek $\tilde{y}_{t+1}\bar{p} - \alpha_M \tilde{y}_t \bar{p} \geq 0$. Jednocześnie, $(\tilde{\kappa}_t, \tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t, \tilde{\eta}_t) \neq (\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta})$, co, jak pokazaliśmy, oznacza istnienie dopuszczalnego procesu wzrostu, który nie spełnia warunku (2.13) definicji równowagi von Neumanna. Oczywiście, jest to niemożliwe, przez co wnioskujemy, że $\hat{\xi}_t = \bar{\xi}$. ■

Twierdzenie 2.9. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\varrho_\varepsilon > 0$, że prawdziwa jest implikacja:*

$$(y_t, y_{t+1}) \in Y \;\wedge\; \left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; y_{t+1}\bar{p} - (\alpha_M - \varrho_\varepsilon) y_t \bar{p} \leq 0.$$

Dowód: Utwórzmy zbiór

$$G = \left\{ (z_t, z_{t+1}) \,\middle|\, (z_t, z_{t+1}) = \frac{(y_t, y_{t+1})}{\|y_t\|} \;\wedge\; (y_t, y_{t+1}) \in Y \;\wedge\; \left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Zbiór G jest ograniczony i domknięty (zwarty). Jednocześnie $\forall (z_t, z_{t+1}) \in G$ spełniona jest, wobec twierdzenia 2.8, nierówność $z_{t+1}\bar{p} - \alpha_M z_t \bar{p} < 0$. Zdefiniujmy funkcję

$$f(z_t, z_{t+1}) = \frac{z_{t+1}\bar{p}}{z_t \bar{p}} - \alpha_M.$$

Z twierdzenia 2.7 wiemy, że $y_t \bar{p} > 0$ dla każdego dopuszczalnego stanu gospodarki, przez co również $\forall (z_t, z_{t+1}) \in G$ $(z_t \bar{p} > 0)$. Oznacza to, że funkcja $f(z_t, z_{t+1})$ jest określona w każdym punkcie zbioru G. Ponadto, ciągłość iloczynu skalarnego implikuje ciągłość funkcji $f(z_t, z_{t+1})$. Funkcja $f(z_t, z_{t+1})$ osiąga więc maksimum na zbiorze G, które, jak wynika z twierdzenia 2.8, jest liczbą ujemną. Istnieje zatem taka liczba $\varrho_\varepsilon > 0$, że $\forall (z_t, z_{t+1}) \in G$

$$\alpha_M - \varrho_\varepsilon \geq \frac{z_{t+1}\bar{p}}{z_t\bar{p}},$$

co oznacza, że warunek

$$y_{t+1}\bar{p} - (\alpha_M - \varrho_\varepsilon)y_t\bar{p} \leq 0$$

jest prawdziwy dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu (y_t, y_{t+1}) spełniającego założenia twierdzenia. ■

W ogólnym przypadku, w rozpatrywanej gospodarce może istnieć nieskończenie wiele różnych ścieżek wzrostu. Jakość tych ścieżek oceniać będziemy poprzez pomiar ich (społecznej) użyteczności. Niech zatem $u\colon \mathbb{R}^{8n}_+ \to \mathbb{R}^1_+$ oznacza społeczną funkcję użyteczności o wartościach nieujemnych określoną na zbiorze nieujemnych (wektorów) stanów gospodarki. Zakładamy, że funkcja u spełnia następujące warunki:

(U1) Funkcja u jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia jeden,

(U2) Istnieje taka liczba $K > 0$, że dla każdego stanu gospodarki y_t spełniony jest warunek $u(y_t) \leq K y_t\bar{p}$.

Niech $D(k_0, g_0, h_0, w_0, t)$ oznacza zbiór wszystkich stanów, do których w okresie $t \in \mathcal{T}$ może dojść gospodarka, w której w okresie $t = 0$ zasoby kapitału produkcyjnego, innowacyjnego, ludzkiego oraz wiedzy opisane były wektorami, odpowiednio, k_0, g_0, h_0, w_0. Jeśli więc

$$\begin{aligned} D(k_0, g_0, h_0, w_0, 0) \;\; = \;\; \big\{ y \,|\, y = (&k_0^T, g_0^T, b_0^T, d_0^T, h_0^T, x_0^T, w_0^T, c_0^T) \text{ i wektor } y \text{ spełnia} \\ &\text{warunki (2.1)–(2.11), (Z4)} \big\}, \end{aligned}$$

to w każdym okresie $t \in \{1, \ldots, t_1\}$

$$D(k_0, g_0, h_0, w_0, t) = \big\{ y \,|\, \exists z \in D(k_0, g_0, h_0, w_0, t-1) \;\wedge\; (z, y) \in Y \big\}.$$

Definicja 2.6. $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$*-dopuszczalny proces wzrostu* $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ *spełniający warunek*

$$u(\hat{y}_{t_1}) = \max_{y \in D(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)} u(y)$$

nazywamy u-optymalnym procesem wzrostu.

Zgodnie z definicją 2.6, u-optymalnym procesem wzrostu nazywamy taki proces, który umożliwia dojście gospodarki w końcowym okresie analizowanego horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ do stanu charakteryzującego się najwyższą użytecznością społeczną. Na ocenę jakości ścieżek wzrostu gospodarczego wpływać może więc nie tylko poziom konsumpcji towarów wytwarzanych w wyróżnionych gałęziach, ale także zgromadzone w nich zasoby kapitału fizycznego, ludzkiego, posiadana wiedza, czy też wielkość wytwarzanej produkcji.

Przy przyjętych założeniach (T1)–(T7), (Z1)–(Z4), (U1)–(U2) oraz własnościach dopuszczalnych procesów wzrostu wynikających z przedstawionych twierdzeń udowodnić można następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.10. *Załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna $\tau_M < +\infty$ i taki $(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{\tau_M}$, że $\tilde{y}_{\tau_M} \in N$. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje taka liczba $s_{\varepsilon'} \geq 0$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon'$$

nie przekracza $s_{\varepsilon'}$. Liczba $s_{\varepsilon'}$ nie zależy od długości horyzontu t_1.

Dowód: Niech $L \subseteq \mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ oznacza zbiór okresów, w których

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon'.$$

Liczebność zbioru L oznaczać będziemy przez l. Ponieważ $\forall t \in \{0, \ldots, t_1 - 1\}$ $\big((\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y\big)$, więc, zgodnie z warunkiem (2.13),

$$\hat{y}_{t+1}\bar{p} \leq \alpha_M \hat{y}_t \bar{p}, \qquad t = 0, \ldots, t_1 - 1. \tag{I}$$

Jednocześnie, z twierdzenia 2.8 wiemy, że $\forall t \in L$

$$\hat{y}_{t+1}\bar{p} \leq (\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'})\hat{y}_t \bar{p}. \tag{II}$$

Po prostych przekształceniach z warunków (I) i (II) wynika, że

$$\hat{y}_{t_1}\bar{p} \leq (\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'})^l \alpha_M^{t_1 - l} \hat{y}_0 \bar{p}. \tag{III}$$

Niech $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ oznacza taki $(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau_M)$-dopuszczalny proces wzrostu, w którym

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t, & \text{gdy } t \leq \tau_M, \\ \alpha_M^{t-\tau_M} \tilde{y}_{\tau_M}, & \text{gdy } t \geq \tau_M. \end{cases}$$

Użyteczność stanu $\tilde{y}_{\tau_M}$ oznaczmy przez $\tilde{u}$. Z dodatniej jednorodności stopnia jeden funkcji użyteczności u wynika, że $u(\tilde{y}_{t_1}) = \alpha_M^{t_1 - \tau_M} \tilde{u}$. Ponieważ proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ jest u-optymalny, więc

$$u(\hat{y}_{t_1}) \geq \alpha_M^{t_1 - \tau_M} \tilde{u} > 0. \tag{IV}$$

Jednocześnie z założenia (U2) wynika, że

$$u(\hat{y}_{t_1}) \leq K\hat{y}_{t_1}\bar{p}. \tag{V}$$

Łącząc warunki (III)–(V) możemy zauważyć, że

$$K(\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'})^l \alpha_M^{t_1-l}\hat{y}_0\bar{p} \geq \alpha_M^{t_1-\tau_M}\tilde{u} > 0.$$

Otrzymany warunek, po prostych przekształceniach, prowadzi do nierówności

$$\left(\frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)^l \geq \frac{\tilde{u}}{\alpha_M^{\tau_M} K\hat{y}_0\bar{p}},$$

z której wnioskujemy, że

$$l \leq \frac{\log\tilde{u} - \log\alpha_M^{\tau_M}K\hat{y}_0\bar{p}}{\log(\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}) - \log\alpha_M}.$$

Niech teraz $v = \min_{y\in D(k_0,g_0,h_0,w_0,0)} y\bar{p}$. Liczba $s_{\varepsilon'}$ z tezy twierdzenia jest najmniejszą liczbą całkowitą nie mniejszą niż

$$\max\left\{\tau_M,\ \frac{\log\tilde{u} - \log\alpha_M^{\tau_M}Kv}{\log(\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}) - \log\alpha_M}\right\}.$$

Liczba $s_{\varepsilon'}$ zależy od przyjętej liczby ε', natomiast nie zależy od t_1. ■

W myśl twierdzenia 2.10, liczba okresów, w których w optymalnym procesie wzrostu trajektorie kapitału produkcyjnego, kapitału innowacyjnego, kapitału ludzkiego, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcyjnych i innowacyjnych, a także produkcji i konsumpcji przebiegają poza pewnymi ustalonymi (dowolnie małymi) otoczeniami odpowiednich magistral jest ograniczona. Twierdzenie nie precyzuje natomiast przebiegu optymalnej trajektorii wiedzy. Można jednak udowodnić następujący lemat:

Lemat 2.2. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\varepsilon' \in (0,\varepsilon]$, że dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y$ spełniona jest implikacja*

$$\left\|\frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v}\right\| < \varepsilon' \ \wedge\ \left\|\frac{v_{t+1}}{\|y_{t+1}\|} - \bar{v}\right\| < \varepsilon' \ \Rightarrow\ \left\|\frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y}\right\| < \varepsilon.$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że

$$\frac{v_t}{\|y_t\|} = \bar{v}\ \wedge\ \frac{v_{t+1}}{\|y_{t+1}\|} = \bar{v}\ \Rightarrow\ \frac{y_t}{\|y_t\|} = \bar{y}.$$

Faktycznie, jeśli $v_t/\|y_t\| = \bar{v}$ oraz $v_{t+1}/\|y_{t+1}\| = \bar{v}$, to

$$(\kappa_t, \mu_t, \phi_t, \eta_t, \chi_t, \xi_t, \gamma_t) = (\kappa_{t+1}, \mu_{t+1}, \phi_{t+1}, \eta_{t+1}, \chi_{t+1}, \xi_{t+1}, \gamma_{t+1}) = (\bar{\kappa}, \bar{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{\chi}, \bar{\xi}, \bar{\gamma}).$$

Wówczas $\hat{i}_t = (\bar{\Omega}^P\bar{\kappa} + \bar{\Omega}^R\bar{\phi})eoh_t$. Skoro jednak $\kappa_{t+1} = \kappa_t$ oraz $\phi_{t+1} = \phi_t$, to

$$\frac{(k_{t+1})_i}{(k_t)_i} = \alpha_M, \qquad \frac{(g_{t+1})_i}{(g_t)_i} = \alpha_M, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Jednocześnie, ponieważ $\chi_{t+1} = \chi_t$, więc $h_{t+1} = \alpha_M h_t$. Na podstawie równania dynamiki kapitału ludzkiego (2.9) wnioskujemy wówczas, że

$$w_t = (\sigma^H)^{-1}(\bar{\lambda}E + \delta^H)h_t.$$

Jeśli więc $\chi_t = \bar{\chi}$, to $\omega_t = w_t/eoh_t = \bar{\omega}$ i wobec tego $y_t/\|y_t\| = \bar{y}$.

Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\big\|y_t/\|y_t\| - \bar{y}\big\| < \varepsilon$. Istnieje liczba $\varepsilon' > 0$, dla której spełniona jest nierówność $\big\|v_t/\|y_t\| - \bar{v}\big\| < \varepsilon' \le \varepsilon$. Jednocześnie, wiemy, że $\alpha(y_t, y_{t+1}) \le \alpha_M$. Jeśli więc $\big\|v_{t+1}/\|y_{t+1}\| - \bar{v}\big\| < \varepsilon'$, to istnieje taka liczba $\varepsilon^1 > 0$, że

$$\left\| \frac{h_{t+1} - h_t}{\|y_t\|} \right\| \le \varepsilon^1.$$

Z równania dynamiki kapitału ludzkiego (2.9) wynika wówczas, że istnieje liczba $\varepsilon^2 > 0$, dla której

$$\left\| \frac{w_t}{\|y_t\|} - \bar{w} \right\| \le \varepsilon^2,$$

gdzie $\bar{w} = (\bar{y}_{6n+1}, \dots, \bar{y}_{7n})^T$. Liczba ε^2 zależy, oczywiście, od liczby ε'. Łatwo przy tym zauważyć, że jeżeli $\varepsilon' \to 0$, to również $\varepsilon^2 \to 0$. W konsekwencji, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ wskazać można taką liczbę $\varepsilon' > 0$, że

$$\left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \wedge \ \left\| \frac{v_{t+1}}{\|y_{t+1}\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \Rightarrow \ \left\| \frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y} \right\| < \varepsilon,$$

co kończy dowód. ■

Bezpośrednio z twierdzenia 2.10 oraz lematu 2.2 wynika, że prawdziwe jest wówczas następujące słabe twierdzenie o magistrali:

Twierdzenie 2.11. *Załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna $\tau_M < +\infty$ i taki $(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{\tau_M}$, że $\tilde{y}_{\tau_M} \in N$. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $s_\varepsilon \ge 0$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y} \right\| \ge \varepsilon$$

nie przekracza s_ε. Liczba s_ε nie zależy od długości horyzontu t_1.

Dowód: Z lematu 2.2 wiemy, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\varepsilon' \le \varepsilon$, że $\forall (y_t, y_{t+1}) \in Y$ prawdziwa jest implikacja

$$\left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \wedge \ \left\| \frac{v_{t+1}}{\|y_{t+1}\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \Rightarrow \ \left\| \frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y} \right\| < \varepsilon.$$

Jednocześnie, z twierdzenia 2.10 wynika, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu spełnia warunek

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon'$$

nie przekracza $s_{\varepsilon'}$. Jeśli więc $t_1 \geq 2s_{\varepsilon'} + 2$, to przynajmniej dla jednego okresu $\tau_1 \in \mathcal{T}$ spełniony jest warunek

$$\left\| \frac{\hat{v}_{\tau_1}}{\|\hat{y}_{\tau_1}\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \wedge \ \left\| \frac{\hat{v}_{\tau_1+1}}{\|\hat{y}_{\tau_1+1}\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon', \tag{I}$$

który, wobec lematu 2.2, implikuje nierówność

$$\left\| \frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\|\hat{y}_{\tau_1}\|} - \bar{y} \right\| < \varepsilon. \tag{II}$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli $t_1 \geq 2s_{\varepsilon'} + 3$, to istnieją przynajmniej dwa takie okresy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, dla których zachodzą warunki (I)–(II), jeśli $t_1 \geq 2s_{\varepsilon'} + 4$, to istnieją przynajmniej trzy okresy $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathcal{T}$, dla których spełnione są warunki (I)–(II), etc. Zatem liczba okresów, w których

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y} \right\| \geq \varepsilon$$

nie przekracza liczby $s_\varepsilon = 2s_{\varepsilon'} + 1$. ■

Twierdzenie 2.11 głosi, że liczba okresów, w których optymalny proces wzrostu przebiega poza pewnym ustalonym (dowolnie małym) otoczeniem magistrali jest ograniczona. Twierdzenie nie wyklucza natomiast sytuacji, w której optymalny proces wzrostu w okresie τ znajduje się blisko magistrali, w okresie $\tau + 1$ oddala się od niej, po czym, w pewnym okresie $t > \tau + 1$, ponownie się do niej zbliża. Pokażemy, że, przy pewnych założeniach, sytuacja taka jest jednak niemożliwa. Wykorzystamy w tym celu sposób dowodzenia zaproponowany przez H. Nikaido w pracach [79] oraz [80].

2.5. Silne twierdzenie o magistrali

Obecnie, oprócz poczynionych wcześniej założeń (G1)–(G6), (Z1)–(Z4), (U1)–(U2), przyjmować będziemy, że:

(Z5) $\bar{y} > 0$.

(U3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{8n}_+ \ \big(x \geq y \Rightarrow u(x) \geq u(y)\big)$ oraz $\forall x, y \in \mathbb{R}^{8n}_+ \ \big(x > y \Rightarrow u(x) > u(y)\big)$.

Z lematu 2.1 wynika, że założenie (Z5) jest spełnione jedynie wtedy, gdy wektor normy konsumpcji $\bar{c}$ jest dodatni. Ponadto, łatwo zauważyć, że konieczne jest także, aby w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu w każdej gałęzi gospodarki była opracowywana dodatnia liczba innowacji.

Niech $Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ oznacza zbiór wszystkich $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalnych procesów wzrostu. Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 2.3. $\forall\,(k_0, g_0) \geq 0$, $\forall\,(h_0, w_0) > 0$ *niezależnie od długości horyzontu czasowego* $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ *istnieją takie dodatnie wektory* κ^{min}, κ^{max}, χ^{min}, χ^{max}, ϕ^{max}, ω^{max}, *że dla każdego procesu* $\{y_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$

$$\kappa^{min} < \kappa_t < \kappa^{max}, \qquad \phi_t < \phi^{max},$$
$$\chi^{min} < \chi_t < \chi^{max}, \qquad \omega_t < \omega^{max}$$

w każdym okresie $t \in \mathcal{T}$.

Dowód: Wiemy, że $\chi_t = h_t/eoh_t$. Ponieważ diagonalna macierz o jest z założenia nieosobliwa, więc możemy zapisać, że $\chi_t = o^{-1}oh_t/eoh_t$. Oczywiście, $oh_t/eoh_t \leq e^T$, zatem $\chi_t \leq o^{-1}e^T$, $t = 0, \ldots, t_1$. Istnieje więc szukany wektor χ^{max}.

Załóżmy teraz, że ciąg $\{\kappa_t\}_{t=0}^{+\infty}$ jest nieograniczony. Istnieje wówczas taki ciąg $\{\kappa_{t_j}\}_{j=0}^{+\infty}$, że $e\kappa_{t_j+1} > e\kappa_{t_j}$ i jednocześnie $e\kappa_{t_j} \to +\infty$. Z równania dynamiki kapitału produkcyjnego (2.4), po przekształceniach, otrzymujemy:

$$\frac{\kappa_{t_j+1}}{e\kappa_{t_j}} \frac{eoh_{t_j+1}}{eoh_{t_j}} = (E - \delta^P)\frac{\kappa_{t_j}}{e\kappa_{t_j}} + \sigma^P \frac{i^P_{t_j}}{eoh_{t_j} e\kappa_{t_j}}. \tag{I}$$

Jednocześnie z równania bilansowego (2.3) oraz warunku (2.1) wnioskujemy, że

$$(E - A)^{-1}\left(S^P \frac{i^P_{t_j}}{eoh_{t_j} e\kappa_{t_j}} + S^R \frac{i^R_{t_j}}{eoh_{t_j} e\kappa_{t_j}} + \frac{\gamma_{t_j}}{e\kappa_{t_j}}\right) = \frac{\xi_{t_j}}{e\kappa_{t_j}} \in T^P\left(\frac{\kappa_{t_j}}{e\kappa_{t_j}}, \frac{\mu_{t_j}}{e\kappa_{t_j}}\right). \tag{II}$$

Wiemy, że $\forall t \in \{0, \ldots, t_1\}$ $(\mu_t = o\rho_t\chi_t \;\wedge\; 0 \leq \rho_t \leq E)$. Jeśli więc $e\kappa_{t_j} \to +\infty$, to $\mu_{t_j}/e\kappa_{t_j} \to 0$ oraz, oczywiście, $0 \leq \kappa_{t_j}/e\kappa_{t_j} \leq e^T$. Warunki (T3), (T7) powodują wówczas, że $\xi_{t_j}/e\kappa_{t_j} \to 0$, przez co również $i^P_{t_j}/eoh_{t_j}e\kappa_{t_j} \to 0$. W konsekwencji, aby spełnione było równanie (I) konieczne jest, by $eoh_{t_j+1}/eoh_{t_j} \to L$, gdzie $L < 1$. Istnieją wówczas takie liczby $\hat{j} > 0$, $\hat{L} > 0$, że $\forall j \geq \hat{j}$ $(eoh_{t_j+1}/eoh_{t_j} < 1 - \hat{L})$, przez co $eoh_{t_j} \to 0$, co, przy założeniu (Z4), jest niemożliwe. Sprzeczność otrzymaliśmy zakładając, że ciąg $\{\kappa_t\}_{t=0}^{+\infty}$ jest nieograniczony, a to oznacza, że istnieje wektor κ^{max} spełniający tezę lematu.

Analogicznie, jeśli założymy, że ciąg $\{\phi_t\}_{t=0}^{+\infty}$ jest nieograniczony, to zauważyć możemy, że istnieje taki ciąg $\{\phi_{t_j}\}_{j=0}^{+\infty}$, że $e\phi_{t_j+1} > e\phi_{t_j}$ i jednocześnie $e\phi_{t_j} \to +\infty$. Przekształcając równanie dynamiki kapitału innowacyjnego (2.5) otrzymujemy:

$$\frac{\phi_{t_j+1}}{e\phi_{t_j}} \frac{eoh_{t_j+1}}{eoh_{t_j}} = (E - \delta^R)\frac{\phi_{t_j}}{e\phi_{t_j}} + \sigma^R \frac{i^R_{t_j}}{eoh_{t_j} e\phi_{t_j}}. \tag{III}$$

Wiemy przy tym, że istnieją takie wektory $\chi^{max} > 0$, $\kappa^{max} > 0$, że w każdym okresie dowolnie długiego horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ zachodzą nierówności $\chi_t < \chi^{max}$ oraz $\kappa_t < \kappa^{max}$. Warunki (II), (T3), (T7) oznaczają wówczas, że jeżeli $e\phi_{t_j} \to +\infty$, to również $i^R_{t_j}/eoh_{t_j}e\kappa_{t_j} \to 0$. W rezultacie, aby było spełnione równanie (III) konieczne jest, by $eoh_{t_j+1}/eoh_{t_j} \to L < 1$, co, jak pokazaliśmy, jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że istnieje szukany wektor $\phi^{max} > 0$.

Załóżmy teraz, że nieograniczony jest ciąg $\{\omega_t\}_{t=0}^{+\infty}$. Istnieje wówczas taki ciąg $\{\omega_{t_j}\}_{j=0}^{+\infty}$, że $e\omega_{t_j+1} > e\omega_{t_j}$ i jednocześnie $e\omega_{t_j} \to +\infty$. Jednocześnie, równanie dynamiki wiedzy zapisać możemy w postaci

$$\frac{\omega_{t_j+1}}{e\omega_{t_j}}\frac{eoh_{t_j+1}}{eoh_{t_j}} = \frac{\omega_{t_j}}{e\omega_{t_j}} + W\frac{q_{t_j}}{eoh_{t_j}e\omega_{t_j}}. \tag{IV}$$

Warunek (2.10) oznacza ponadto, że

$$\frac{q_{t_j}}{eoh_{t_j}e\omega_{t_j}} \in T^R\left(\frac{\phi_{t_j}}{e\omega_{t_j}}, \frac{\eta_{t_j}}{e\omega_{t_j}}\right).$$

Ponieważ jednak $\forall t\ \big(\eta_t = o(E-\rho_t)\chi_t \wedge 0 \leq \rho_t \leq E\big)$ i istnieją takie dodatnie wektory ϕ^{max}, χ^{max}, że w każdym okresie dowolnie długiego horyzontu czasowego spełnione są nierówności $\phi_t < \phi^{max}$, $\chi_t < \chi^{max}$, więc jeśli $e\omega_{t_j} \to +\infty$, to $\phi_{t_j}/e\omega_{t_j} \to 0$ oraz $\eta_{t_j}/e\omega_{t_j} \to 0$. Wobec założeń (T3), (T7) oznacza to, że $q_{t_j}/eoh_{t_j}e\omega_{t_j} \to 0$. Ponownie więc możemy zauważyć, że jeżeli $e\omega_{t_j} \to +\infty$, to aby spełnione było równanie (IV) musi zachodzić warunek $eoh_{t_j+1}/eoh_{t_j} \to L < 1$, który prowadzi do sprzeczności. A zatem, istnieje taki wektor ω^{max}, że $\forall t\ (\omega_t < \omega^{max})$.

Zauważmy, że wektor normy konsumpcji $\bar{c}$ jest półdodatni. Przy założeniu (Z1) i warunku (2.2) oznacza to, że $\xi_t \geq (E-A)^{-1}\gamma_t \geq (E-A)^{-1}\bar{c} > 0$, $t = 0,\dots,t_1$. W każdym okresie dowolnie długiego horyzontu $\mathcal{T}$ spełnione są nierówności $\chi_t \leq \chi^{max}$, $\kappa_t \leq \kappa^{max}$, więc na podstawie (T3), (T7) wnioskujemy, że istnieją szukane wektory $\chi^{min} > 0$, $\kappa^{min} > 0$. ■

Łatwo zauważyć, iż z lematu 2.3 wynika, że jeżeli w okresie $t = 0$ zasoby kapitału produkcyjnego, innowacyjnego, ludzkiego i wiedzy są w każdej gałęzi gospodarki wielkościami skończonymi, to niezależnie od długości horyzontu t_1 spełniony jest warunek $\|\psi_t\| < +\infty$, $t = 0,\dots,t_1$. Oczywiście, wszędzie dalej przyjmujemy, że początkowe zasoby wszystkich rodzajów kapitału oraz wiedzy są ograniczone. Prawdziwy jest wówczas następujący lemat:

Lemat 2.4. *Istnieje taka liczba $\Delta > 0$, że niezależnie od długości horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0,\dots,t_1\}$ każdy proces $\{y_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ spełnia warunek*

$$\left\|\frac{y_t}{\alpha_M^t}\right\| \leq \Delta, \qquad t = 0,\dots,t_1.$$

Dowód: Zauważmy najpierw, iż z warunku (2.13) definicji równowagi von Neumanna wynika, że $\forall (y_t, y_{t+1}) \in Y$ spełniona jest nierówność $y_{t+1}\bar{p} - \alpha_M y_t \bar{p} \leq 0$. Oznacza to, że dla każdego procesu $\{y_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ zachodzą nierówności

$$y_0 \bar{p} \geq \frac{y_t}{\alpha_M^t} \bar{p} \geq 0. \tag{I}$$

Jednocześnie, jeżeli $\bar{p} = (p^1, p^2)^T$, to $p^1 = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)^T \gneqq 0$ (por. dowód twierdzenia 2.7). Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami $y_t = (k_t^T, b_t^T, g_t^T, d_t^T, h_t^T, x_t^T, w_t^T, c_t^T)$. Załóżmy, wbrew tezie lematu, że istnieje taki okres τ, że $\|y_t / \alpha_M^t\| = +\infty$. Zauważmy, że nie jest możliwe, aby istniała gałąź gospodarki i, w której $(h_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$. Wówczas bowiem $eoh_\tau / \alpha_M^\tau = +\infty$ i również, wobec założenia (Z1) oraz warunków (2.2), (2.3), $(x_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$, $i = 1, \ldots, n$. Na podstawie lematu 2.3 zauważyć możemy, że pociąga to za sobą równość $(k_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$, $i = 1, \ldots, n$. Jeśli więc $p^1 \gneqq 0$, to $y_t \bar{p} / \alpha_M^\tau = +\infty$, a to jest, wobec warunku (I), niemożliwe. Tym samym $\forall t \in \{0, \ldots, t_1\} \big(\|h_t / \alpha_M^t\| < +\infty\big)$. Jednocześnie, ponieważ $\forall t \ (0 \leq \rho_t \leq E)$, więc również $\forall t \in \{0, \ldots, t_1\} \big(\|(b_t^T, d_t^T) / \alpha_M^t\| < +\infty \ \wedge \ eoh_t / \alpha_M^t < +\infty\big)$. Z lematu 2.3 wiemy, że istnieją takie wektory κ^{max}, ϕ^{max}, ω^{max}, że w każdym okresie dowolnie długiego horyzontu $\mathcal{T}$ spełnione są nierówności $\kappa_t < \kappa^{max}$, $\phi < \phi^{max}$, $\omega < \omega^{max}$. Oznacza to, że $\forall t \in \{0, \ldots, t_1\} \big(\|(k_t^T, g_t^T, w_t^T) / \alpha_M^t\| < +\infty\big)$. Zauważmy ponadto, że jeżeli istnieje gałąź gospodarki i, dla której $(c_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$, to z równania bilansowego (2.3) wynika, że również $(x_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$. Warunek $\|y_\tau / \alpha_M^\tau\| = +\infty$ może być więc spełniony jedynie wtedy, gdy $(x_\tau / \alpha_M^\tau)_i = +\infty$ dla pewnego i. Z warunku (2.1), przy założeniu (T1), otrzymujemy wówczas, że

$$0 \lneqq \frac{x_t / \alpha_M^t}{\|x_t / \alpha_M^t\|} \in T^P(0, 0),$$

co jest niemożliwe (przeczy warunkowi (T3)). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że istnieje liczba $\Delta > 0$ spełniająca tezę lematu. ∎

Lemat 2.5. *Niech $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ będzie u-optymalnym procesem wzrostu. Wówczas istnieje taka liczba $\Gamma > 0$, że*

$$\frac{\hat{y}_{t_1}}{\alpha_M^{t_1}} \bar{p} \geq \Gamma,$$

jeśli tylko $t_1 \geq \tau_M$, gdzie τ_M jest liczbą z twierdzenia 2.10.

Dowód: Rozważmy, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.10, proces wzrostu, w którym

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t, & \text{gdy } t \leq \tau_M, \\ \alpha_M^{t-\tau_M} \tilde{y}_{\tau_M}, & \text{gdy } t \geq \tau_M. \end{cases}$$

Ponadto niech $\tilde{u} = u(\tilde{y}_{\tau_M}) > 0$. Ponieważ proces $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ jest u-optymalny, więc

$$K\hat{y}_{t_1}\bar{p} \geq u(\hat{y}_{t_1}) \geq u(\tilde{y}_{t_1}) = \alpha_M^{t_1-\tau_M}\tilde{u},$$

skąd, po prostych przekształceniach, wynika, że

$$\frac{\hat{y}_{t_1}}{\alpha_M^{t_1}}\bar{p} \geq \frac{\tilde{u}}{K\alpha_M^{\tau_M}}.$$

Liczba $\tilde{u}/K\alpha_M^{\tau_M}$ jest dodatnia, zatem wystarczy przyjąć, że $\Gamma = \tilde{u}/K\alpha_M^{\tau_M}$. ■

Jak wiadomo, każdy wektor $y_t \in \mathbb{R}^{8n}$ można jednoznacznie zapisać w postaci sumy[17]:

$$y_t = f(y_t)\bar{y} + e(y_t), \qquad f(y_t) = \bar{y}^T y_t, \tag{2.19}$$

gdzie wektory $\bar{y}$ oraz $e(y)$ są ortogonalne. Własność tę wkorzystamy w dalszej części rozważań.

Lemat 2.6. *Niech* $\{y_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$. *Dla każdej liczby* $B > 0$ *prawdziwa jest implikacja*

$$\left\|\frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y}\right\| < B \Rightarrow \left\|e\left(\frac{y_t}{\alpha_M^t}\right)\right\| < B\Delta, \qquad t = 0, \ldots, t_1.$$

Dowód: Zapisując wektor $y_t/\|y_t\|$ w postaci (2.19) i pamiętając o ortogonalności wektorów $\bar{y}$ oraz $e(y_t/\|y_t\|)$ otrzymujemy warunek

$$B^2 > \left\|\frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y}\right\|^2 = \left\|f\left(\frac{y_t}{\|y_t\|}\right)\bar{y} - \bar{y}\right\|^2 + \left\|e\left(\frac{y_t}{\|y_t\|}\right)\right\|^2 \geq \left\|e\left(\frac{y_t}{\|y_t\|}\right)\right\|^2 = \frac{\|e(y_t)\|^2}{\|y_t\|^2},$$

skąd wynika, że $\|e(y_t)\| < B\|y_t\|$. Z lematu 2.4 wiemy, że $\|y_t\| \leq \Delta\alpha_M^t$, $t = 0, \ldots, t_1$, co oznacza, że spełniona jest nierówność $\|e(y_t)\| < B\Delta\alpha_M^t$, co kończy dowód. ■

Lemat 2.7. *Niech* $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ *oznacza u-optymalny proces wzrostu. Istnieje taka liczba* $\bar{B}$>0, *że jeżeli* $0 \leq B \leq \bar{B}$, *to dla każdej pary okresów* τ_1, τ_2 *spełniających warunek* $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_1$ *prawdziwa jest implikacja*

$$\left\|\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\|\hat{y}_{\tau_1}\|} - \bar{y}\right\| < B \ \wedge \ \left\|\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\|\hat{y}_{\tau_2}\|} - \bar{y}\right\| < B \Rightarrow f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) - f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right) = \varsigma < \max_i \frac{2B\Delta}{\bar{y}_i}.$$

Dowód: Załóżmy, wbrew tezie, że $\varsigma \geq \max_i 2B\Delta/\bar{y}_i$. Wówczas $\forall i\ (\varsigma\bar{y}_i/2 \geq B\Delta)$. Z lematu 2.6 wiemy, że $\|e(\hat{y}_{\tau_1}/\alpha_M^{\tau_1})\| < B\Delta$, $\|e(\hat{y}_{\tau_2}/\alpha_M^{\tau_2})\| < B\Delta$. Prawdziwe są więc następujące nierówności:

$$\frac{\varsigma}{2}\bar{y}_i \geq B\Delta > \left\|e\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right)\right\| \geq -e_i\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right),$$

[17] Jeżeli W jest podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V, a $W^0 = \{v \in V \,|\, v^T w = 0\ \forall w \in W\}$ jest dopełnieniem ortogonalnym W, to każdy wektor $v \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci sumy $v = w + w^0$, gdzie $w \in W$, $w^0 \in W^0$ – por. np. H. Nikaido [1968].

$$\frac{\varsigma}{2}\bar{y}_i \geq B\Delta > \left\| e\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\right\| \geq e_i\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right),$$

gdzie $i = 1, \ldots, 8n$. Niech

$$\hat{m} = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) + f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\right)\bar{y}.$$

Oczywiście, $\hat{m} \in N$ i istnieje taka liczba $m > 0$, że

$$\hat{m} = m(\bar{\kappa}^T, \bar{\mu}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\eta}^T, \bar{\chi}^T, \bar{\xi}^T, \bar{\omega}^T, \bar{\gamma}^T).$$

Możemy wówczas zapisać, że

$$\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}} = f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right)\bar{y} + e\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) > \left(f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) - \frac{\varsigma}{2}\right)\bar{y} = \hat{m}, \tag{I}$$

$$\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}} = f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\bar{y} + e\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right) < \left(f\left(\frac{\hat{y}_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right) + \frac{\varsigma}{2}\right)\bar{y} = \hat{m}. \tag{II}$$

Zauważmy, że $(\alpha_M^{\tau_1}\hat{m}, \alpha_M^{\tau_1+1}\hat{m}) \in Y$. Bezpośrednio z (I) wynika natomiast, że

$$\hat{y}_{\tau_1} = (\hat{k}_{\tau_1}^T, \hat{b}_{\tau_1}^T, \hat{g}_{\tau_1}^T, \hat{d}_{\tau_1}^T, \hat{h}_{\tau_1}^T, \hat{x}_{\tau_1}^T, \hat{w}_{\tau_1}^T, \hat{c}_{\tau_1}^T) > \alpha_M^{\tau_1}\hat{m}. \tag{III}$$

Jeżeli liczba B jest dostatecznie mała, to istnieje proces $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ postaci

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} \hat{y}_t, & \text{gdy } t \leq \tau_1 - 1, \\ \tilde{y}_t, & \text{gdy } t = \tau_1, \\ \alpha_M^t \hat{m}, & \text{gdy } t \geq \tau_1 + 1. \end{cases}$$

Faktycznie, bowiem jeżeli $\|\hat{y}_{\tau_1}/\|y_{\tau_1}\| - \bar{y}\| < B$ i zachodzi nierówność (III), to, wobec założenia (T4) i postaci równań dynamiki kapitału ludzkiego (2.9) i wiedzy (2.11), możliwe jest opracowanie w każdej gałęzi gospodarki w okresie $\tau_1 - 1$ odpowiednio mniejszej liczby innowacji tak, aby $\tilde{w}_{\tau_1} < \hat{w}_{\tau_1}$ i jednocześnie spełniona była równość $(\tilde{h}_{\tau_1+1}, \tilde{w}_{\tau_1+1}) = \alpha_M^{\tau_1+1}m(\bar{\chi}, \bar{\omega})$. Przyjmując wówczas $\tilde{\rho}_{\tau_1+1} = \bar{\rho}$ otrzymujemy $(\tilde{b}_{\tau_1+1}, \tilde{d}_{\tau_1+1}) = \alpha_M^{\tau_1+1}m(\bar{\mu}, \bar{\eta})$. Ponadto, z własności (T4) przekształcenia technologicznego T^P wynika, że można wytworzyć w gospodarce w okresie τ_1 taki wektor produkcji $\tilde{x}_{\tau_1} < \hat{x}_{\tau_1}$, aby przy odpowiednio zmniejszonych inwestycjach otrzymać równość $(\tilde{k}_{\tau_1+1}, \tilde{g}_{\tau_1+1}) = \alpha_M^{\tau_1+1}m(\bar{\kappa}, \bar{\phi})$. W konsekwencji możliwe jest także, by $(\tilde{x}_{\tau_1+1}, \tilde{c}_{\tau_1+1}) = \alpha_M^{\tau_1+1}m(\bar{\xi}, \bar{\gamma})$ i tym samym, aby

$$\tilde{y}_t = (\tilde{k}_t^T, \tilde{b}_t^T, \tilde{g}_t^T, \tilde{d}_t^T, \tilde{h}_t^T, \tilde{x}_t^T, \tilde{w}_t^T, \tilde{c}_t^T) = \alpha_M^t \hat{m}, \qquad t = \tau_1 + 1, \ldots, t_1.$$

Z (II) wynika, że $\alpha_M^{\tau_2}\hat{m} > \hat{y}_{\tau_2}$. Niech $\hat{r} > 0$, $\hat{r} \in N$, oznacza największy (co do normy) wektor, dla którego $\alpha_M^{\tau_2}\hat{m} \geq \hat{y}_{\tau_2} + \alpha_M^{\tau_2}\hat{r}$. Oczywiście, istnieje taka liczba $r > 0$, że

$$\hat{r} = r(\bar{\kappa}^T, \bar{\mu}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\eta}^T, \bar{\chi}^T, \bar{\xi}^T, \bar{\omega}^T, \bar{\gamma}^T).$$

Podobnie jak poprzednio, zauważyć możemy, że jeżeli liczba B jest dostatecznie mała, to istnieje $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ postaci

$$\check{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t, & \text{gdy } t \leq \tau_2 - 2, \\ \check{y}_t, & \text{gdy } t = \tau_2 - 1, \\ \hat{y}_t + \alpha_M^t \hat{r}, & \text{gdy } t \geq \tau_2. \end{cases}$$

Oczywiście, $(\tilde{y}_{\tau_2-1}, \alpha_M^{\tau_2}\hat{m}) \in Y$. Redukując liczbę opracowywanych w okresie $\tau_2 - 2$ innowacji otrzymać można taki wektor wiedzy $\check{w}_{\tau_2-1} < \tilde{w}_{\tau_2-1}$, aby spełniona była równość $(\check{h}_{\tau_2}, \check{w}_{\tau_2}) = (\hat{h}_{\tau_2}, \hat{w}_{\tau_2}) + \alpha_M^{\tau_2} r(\bar{\chi}, \bar{\omega})$. Z kolei obniżając odpowiednio w okresie $\tau_2 - 1$ inwestycje, otrzymać możemy $(\check{k}_{\tau_2}, \check{g}_{\tau_2}) = (\hat{k}_{\tau_2}, \hat{g}_{\tau_2}) + \alpha_M^{\tau_2} r(\bar{\kappa}, \bar{\phi})$. Przyjmując wówczas wartości wskaźników udziału pracowników produkcyjnych w ogólnej liczbie zatrudnionych w poszczególnych gałęziach zgodnie z regułą

$$\check{\rho}_{i\,\tau_2} = \frac{\hat{\rho}_{i\,\tau_2}\hat{h}_{i\,\tau_2} + \bar{\rho}_i \alpha_M^{\tau_2} r \bar{\chi}_i}{\hat{h}_{i\,\tau_2} + \alpha_M^{\tau_2} r \bar{\chi}_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

otrzymamy równość $(\check{b}_{\tau_2}, \check{d}_{\tau_2}) = (\hat{b}_{\tau_2}, \hat{d}_{\tau_2}) + \alpha_M^{\tau_2} r(\bar{\mu}, \bar{\eta})$. Wówczas, wobec założenia (T2), możliwe jest także, aby $(\check{x}_{\tau_2}, \check{c}_{\tau_2}) = (\hat{x}_{\tau_2}, \hat{c}_{\tau_2}) + \alpha_M^{\tau_2} r(\bar{\xi}, \bar{\gamma})$. Ponieważ zbiór Y jest wypukły, więc możliwe jest również, by spełniona była równość

$$\check{y}_t = (\check{k}_t^T, \check{b}_t^T, \check{g}_t^T, \check{d}_t^T, \check{h}_t^T, \check{x}_t^T, \check{w}_t^T, \check{c}_t^T) = \hat{y}_t + \alpha_M^t \hat{r}, \qquad t = \tau_1 + 1, \ldots, t_1.$$

W szczególności oznacza to, że $\check{y}_{t_1} = \hat{y}_{t_1} + \alpha_M^{t_1}\hat{r} > \hat{y}_{t_1}$, co w połączeniu z założeniem (U3) przeczy optymalności procesu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$. Sprzeczność otrzymaliśmy zakładając, że $\varsigma \geq \max_i 2B\Delta/\bar{y}_i$. ■

Z definicji równowagi von Neumanna wynika, że wektor cen równowagi $\bar{p}$ jest określony z dokładnością do struktury. Bez utraty ogólności rozważań możemy więc przyjąć, że $\bar{y}\bar{p} = 1$.

Lemat 2.8. *Niech $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1} \in Y(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$ oznacza u-optymalny proces wzrostu. Jeżeli istnieje taka para okresów τ_1, τ_2, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_1$, w których*

$$\left\| \frac{y_{\tau_1}}{\|y_{\tau_1}\|} - \bar{y} \right\| < B \ \wedge \ \left\| \frac{y_{\tau_2}}{\|y_{\tau_2}\|} - \bar{y} \right\| < B,$$

gdzie $0 \leq B \leq \bar{B}$ (liczba $\bar{B}$ jest liczbą z lematu 2.7), to dla każdego okresu t należącego do horyzontu $\{\tau_1, \ldots, \tau_2 - 1\}$ prawdziwa jest nierówność

$$0 \leq \frac{y_t}{\alpha_M^t}\bar{p} - \frac{y_{t+1}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} < 4B\Delta \max\left\{ \|\bar{p}\|, \max_i \frac{1}{\bar{y}_i} \right\}.$$

Dowód: Korzystając z nierówności Schwarza oraz lematów 2.6 i 2.7 (i pamiętając, że $\bar{y}\bar{p} = 1$) możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\bar{p} - \frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\bar{p} &= \left(f\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right)\bar{y} + e\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau^1}}\right) - f\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\bar{y} - e\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\right)\bar{p} \leq \\
&\leq f\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) - f\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right) + \left(e\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau^1}}\right) - e\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\right)\bar{p} \leq \\
&\leq \|\bar{p}\|\left\|e\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau^1}}\right) - e\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right)\right\| + f\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\right) - f\left(\frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\right) < \\
&< 2B\Delta\|\bar{p}\| + \max_i \frac{2B\Delta}{\bar{y}_i} \leq 4B\Delta \max\left\{\|\bar{p}\|, \max_i \frac{1}{\bar{y}_i}\right\}.
\end{aligned}$$

Zauważmy przy tym, że z prostego przekształcenia warunku (2.13) definicji równowagi von Neumanna wynika, że

$$\frac{y_t}{\alpha_M^t}\bar{p} - \frac{y_{t+1}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} \geq 0$$

dla każdego $(y_t, y_{t+1}) \in Y$. Jednocześnie

$$\left(\frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\bar{p} - \frac{y_{\tau_1+1}}{\alpha_M^{\tau_1+1}}\bar{p}\right) + \left(\frac{y_{\tau_1+1}}{\alpha_M^{\tau_1+1}}\bar{p} - \frac{y_{\tau_1+2}}{\alpha_M^{\tau_1+2}}\bar{p}\right) + \ldots + \left(\frac{y_{\tau_2-1}}{\alpha_M^{\tau_2-1}}\bar{p} - \frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\bar{p}\right) = \frac{y_{\tau_1}}{\alpha_M^{\tau_1}}\bar{p} - \frac{y_{\tau_2}}{\alpha_M^{\tau_2}}\bar{p},$$

co w konsekwencji oznacza, że

$$\frac{y_t}{\alpha_M^t}\bar{p} - \frac{y_{t+1}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} < 4B\Delta \max\left\{\|\bar{p}\|, \max_i \frac{1}{\bar{y}_i}\right\}$$

w każdym okresie $t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2 - 1\}$. ■

Wykorzystując zaprezentowane lematy, możemy sformułować i udowodnić następujące silne twierdzenia o magistrali:

Twierdzenie 2.12. *Załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna $\tau_M < +\infty$ i taki $(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}\}_{t=0}^{\tau_M}$, że $\tilde{y}_{\tau_M} \in N$. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje taka liczba $l_{\varepsilon'} \geq 0$, że jeżeli $t_1 > 2l_{\varepsilon'}$, to każdy u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\|\frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}\right\| < \varepsilon'$$

w każdym okresie $t \in \{l_{\varepsilon'}, \ldots, t_1 - l_{\varepsilon'}\}$.

Dowód: Z twierdzenia 2.9 wiemy, że dla każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje taka liczba $\varrho_{\varepsilon'} > 0$, że $\forall (y_t, y_{t+1}) \in Y$ prawdziwa jest implikacja

$$\left\|\frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v}\right\| \geq \varepsilon' \Rightarrow y_{t+1}\bar{p} - (\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'})y_t\bar{p} \leq 0. \tag{I}$$

Przyjmijmy taką wartość $B > 0$, aby

$$4B\Delta \max\left\{\|\bar{p}\|, \max_i \frac{1}{\bar{y}_i}\right\} < \left(1 - \frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)\Gamma, \tag{II}$$

$$B \leq \bar{B}, \tag{III}$$

$$B \leq \varepsilon', \tag{IV}$$

gdzie Γ jest liczbą z lematu 2.5, natomiast $\bar{B}$ jest liczbą z lematu 2.7. Z twierdzenia 2.10 wiemy, że nierówność

$$\left\|\frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}\right\| < B \tag{V}$$

spełniona jest zawsze, poza najwyżej s_B okresami, gdzie $s_B \geq 0$ i $s_B < +\infty$. Załóżmy, że $t_1 \geq s_B + 2$. Wówczas warunek (V) jest spełniony przynajmniej dla dwóch okresów. Niech τ_1 oraz τ_2 oznaczają, odpowiednio, pierwszy i ostatni okres horyzontu $\mathcal{T}$, w których zachodzi (IV). Z lematu 2.8 oraz warunku (II) wynika, że $\forall t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2 - 1\}$

$$0 \leq \frac{\hat{y}_t}{\alpha_M^t}\bar{p} - \frac{\hat{y}_{t+1}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} < \left(1 - \frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)\Gamma. \tag{VI}$$

Jeśli dla pewnego okresu $t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2 - 1\}$ spełniona jest nierówność

$$\left\|\frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}\right\| \geq \varepsilon', \tag{VII}$$

to z warunku (I) wynika, że

$$\frac{\hat{y}_{t+1}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} \leq \left(\frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)\frac{\hat{y}_t}{\alpha_M^t}\bar{p}.$$

Wówczas z lematu 2.5 otrzymujemy

$$\frac{\hat{y}_t}{\alpha_M^t}\bar{p} - \frac{\widehat{y_{t+1}}}{\alpha_M^{t+1}}\bar{p} \geq \left(1 - \frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)\frac{\hat{y}_t}{\alpha_M^t}\bar{p} \geq \left(1 - \frac{\alpha_M - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M}\right)\Gamma,$$

co jest sprzeczne z (VI). Tym samym, dla żadnego okresu $t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2 - 1\}$ nie może być spełniony warunek (VII). W połączeniu z (IV), (V) oznacza to, że

$$\left\|\frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}\right\| < \varepsilon', \qquad t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2\}.$$

Zauważmy, że $\tau_1 + (t_1 - \tau_2) \leq s_B$. By zakończyć dowód wystarczy więc przyjąć, że $l_{\varepsilon'} = s_B$. ■

Twierdzenie 2.13. *Załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna $\tau_M < +\infty$ i taki $(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}\}_{t=0}^{\tau_M}$, że $\tilde{y}_{\tau_M} \in N$. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $l_\varepsilon \geq 0$, że jeżeli $t_1 > 2l_\varepsilon$, to każdy u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\|\frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y}\right\| < \varepsilon$$

w każdym okresie $t \in \{l_\varepsilon, \ldots, t_1 - l_\varepsilon\}$.

Dowód: Zgodnie z lematem 2.2, dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$, że dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y$ prawdziwa jest implikacja

$$\left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \wedge \ \left\| \frac{v_{t+1}}{\|y_{t+1}\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon' \ \Rightarrow \ \left\| \frac{y_t}{\|y_t\|} - \bar{y} \right\| < \varepsilon. \tag{I}$$

Z twierdzenia 2.12 wiemy natomiast, że istnieje taka liczba $l_{\varepsilon'}$, zależna od liczby ε', że w każdym okresie $t \in \{l_{\varepsilon'}, \ldots, t_1 - l_{\varepsilon'}\}$ zachodzi nierówność

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v} \right\| < \varepsilon'. \tag{II}$$

Połączenie warunków (I) i (II) implikuje więc, że

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y} \right\| < \varepsilon$$

w każdym okresie $t \in \{l_{\varepsilon'}, \ldots, t_1 - l_{\varepsilon'} - 1\}$. By zakończyć dowód wystarczy przyjąć, że $l_\varepsilon = l_{\varepsilon'} + 1$. ■

Zgodnie z twierdzeniem 2.13, jeżeli rozpatrywany horyzont czasowy $\mathcal{T}$ jest dostatecznie długi, to jedynie w jego początkowych i końcowych okresach u-optymalny proces wzrostu przebiegać może poza ustalonym (dowolnie małym) otoczeniem magistrali. Liczba tych okresów nie zależy przy tym od długości horyzontu, a jedynie od przyjętego promienia owego otoczenia. W rezultacie, im większa jest liczba okresów, w których rozpatrujemy funkcjonowanie gospodarki, tym wyraźniejsza staje się zbieżność u-optymalnych procesów wzrostu do magistrali.

Występowanie efektu magistrali w gospodarce jest nie tylko eleganckim wynikiem teoretycznym, ale także ważną informacją dla planowania gospodarczego. Znaczenie praktyczne twierdzenia 2.13 uzależnione jest jednak w dużej mierze od liczby okresów niezbędnych do dostatecznie wyraźnego ujawnienia się efektu magistrali. Aby przyjęte przez nas założenie o stacjonarności gospodarki (czyli niezmienności przekształceń technologicznych, macierzy nakładów bieżących, struktury inwestycji, etc.) mogło być spełnione, choćby częściowo, przez rzeczywistą gospodarkę, analiza jej funkcjonowania powinna ograniczać się do relatywnie krótkiego horyzontu czasowego[18]. Przyjęcie dłuższych horyzontów czasowych wymaga uwzględnienia możliwości wystąpienia głębokich zmian technologicznych w gospodarce, a w efekcie odrzucenia założenia o jej stacjonarności.

[18]Informacji o szacunkowej długości horyzontu czasowego pozwalającej na wyraźne ujawnienie się efektu magistrali mogą dostarczyć badania empiryczne. Wynika z nich, że dla stacjonarnej gospodarki typu Leontiefa-Gale'a, ale nie uwzględniającej akumulacji kapitału ludzkiego i wiedzy, wystarczający jest już horyzont 15-letni – por. W. Jurek, R. Kiedrowski, E. Panek [50].

Rozdział 3

Postęp technologiczny w modelu Leontiefa-Gale'a

W rozdziale 2 zaprezentowany został model gospodarki, w którym kumulowana wiedza techniczna przekłada się jedynie na na wielkość zasobów kapitału ludzkiego. Wprowadzanie kolejnych usprawnień nie ma w nim wpływu na przbieg procesów produkcyjnych, nie stymuluje również żadnych innowacji. W konsekwencji, niezależnie od długości rozpatrywanego horyzontu czasowego, na stałym poziomie utrzymują się współczynniki nakładów bieżących, deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego, efektywności inwestowania, przepływów wiedzy, a także struktura zatrudnienia, struktura ponoszonych nakładów inwestycyjnych oraz norma konsumpcji poszczególnych rodzajów dóbr. W takiej gospodarce postęp technologiczny przyczynia się więc jedynie do lepszego wykorzystania czynnika pracy. Jest zatem neutralny w sensie Harroda. Oczywiście, w rzeczywistości ekonomicznej duża część wysiłku innowacyjnego skierowana jest właśnie na wzrost produktywności pracowników. Jednakże spora liczba projektów badawczych prowadzona jest w celu opracowania nowych towarów, podniesienia ich jakości, czy też wdrożenia zupełnie nowych procesów produkcyjnych. W ich wyniku, szczególnie w dłuższym horyzoncie czasu, zmieniać się może produktywność kapitału fizycznego oraz zależności występujące pomiędzy wyróżnionymi gałęziami gospodarki. Możliwość wystąpienia tego typu zmian uwzględnimy obecnie w zmodyfikowanych wersjach modelu Leontiefa-Gale'a. W pierwszej z nich zakładać będziemy, że w procesie wzrostu gospodarczego wyróżnić można rozłączne podhoryzonty, w trakcie trwania których wiedza techniczna umożliwia wyłącznie większy przyrost kapitału ludzkiego. Dopiero osiągnięcie pewnego progowego poziomu wiedzy pozwala na wprowadzenie szerszych zmian w gospodarce, owocujących w modelu nowymi współczynnikami nakładów bieżących, deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego, etc. W następnych okresach współczynniki te znowu pozostają stałe, aż do momentu, w którym w wyniku osiągnięcia kolejnego progowego poziomu wiedzy dochodzi do ponownych szerokich zmian technologicznych w gospodarce. Konstrukcję tę określamy mianem modelu z przedziałami stałą technologią[1]. Alternatywnie, w drugiej modyfikacji wyjściowego modelu, zakładać będziemy, że wartości wspomnianych współczynników mogą się zmieniać w każdym okresie rozpatrywanego horyzontu czasowego, zmierzając do wartości granicznych opisujących gospodarkę wzorcową. Ten obraz matematycznej gospodarki nazywamy modelem z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej[2].

3.1. Gospodarka z przedziałami stałą technologią

3.1.1. Zmienność technologii

Zarówno zmiany strukturalne, jak i technologiczne zachodzące w gospodarce są wynikiem podnoszącego się poziomu wykorzystywanej wiedzy technicznej. O ile jednak powstające wynalazki i nowe rozwiązania organizacyjne mogą w stosunkowo łatwy sposób wpływać na wiedzę przekazywaną w trakcie nauki lub też zdobywaną w wyniku pracy zawodowej, to ich wykorzystanie praktyczne wiąże się najczęściej ze znacznymi kosztami i koniecznością modernizacji maszyn, urządzeń, a nawet całych linii produkcynych. Kapitał ludzki zatrudnionych pracowników może więc bardzo szybko reagować na wzrosty wykorzytywanej w poszczególnych gałęziach gospodarki wiedzy technicznej. Natomiast zmiany w strukturze gospodarki, wytwarzanych w niej produktach i wykorzystywanym kapitale fizycznym są z reguły wolniejsze i przebiegają z pewnym opóźnieniem. W skrajnym przypadku zmiany te mogą mieć charakter skoków technologicznych, tzn. mogą odbywać się nie w wyniku łagodnych, stopniowych dostosowań, ale poprzez zdecydowane działania innowacyjne przeprowadzane w pewnych dłuższych odstępach czasu. Funkcjonowanie tego typu gospodarki przeanalizujemy obecnie uogólniając wyniki otrzymane na gruncie modelu prezentowanego w rozdziale 2.

Rozpatrujemy model gospodarki, w której w ustalonym, skończonym horyzoncie $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ może wystąpić s skoków technologicznych. W ich wyniku zmianie ulegać mogą zarówno zależności występujące pomiędzy wyróżnionymi gałęziami gospodarki opisane macierzami współczynników nakładów bieżących A, przepływów wiedzy W oraz struktury inwestycji S^P, S^R, jak i charakterystyki wykorzystywanego w gałęziach kapitału fizycznego i ludzkiego dane macierzami współczynników deprecjacji δ^P, δ^R, δ^H oraz skutkowania inwestycji σ^P, σ^R, σ^H. Dodatkowo przyj-

[1] Por. np. B. Jurek [47], E. Panek [82], str. 303.

[2] Por. np. J. N. Czeremnych [18], str. 83, J. N. Czeremnych [19], str. 148, B. Jurek [47].

mujemy, że w gospodarce zmieniać się może również macierz struktury zatrudnienia o, normatywne wielkości konsumpcji $\bar{c}$ oraz dostępne dla producentów procesy produkcyjne i innowacyjne opisane za pomocą przekształceń technologicznych T^P i T^R. Funkcjonowanie gospodarki przedstawia więc następujący układ warunków:

$$
\begin{aligned}
& x_t \in T_t^P(k_t, b_t), && (3.1)\\
& x_t = A_t x_t + S_t^P i_t^P + S_t^R i_t^R + c_t, && (3.2)\\
& \frac{c_t}{eoh_t} \geq \bar{c}_t, && (3.3)\\
& k_{t+1} = (E - \delta_t^P)k_t + \sigma_t^P i_t^P, && (3.4)\\
& g_{t+1} = (E - \delta_t^R)g_t + \sigma_t^R i_t^R, && (3.5)\\
& b_t = o_t \rho_t h_t, && (3.6)\\
& d_t = o_t(E - \rho_t)h_t, && (3.7)\\
& h_{t+1} = (E - \delta_t^H)h_t + \sigma_t^H w_t, && (3.8)\\
& w_{t+1} = w_t + W_t q_t, && (3.9)\\
& q_t \in T_t^R(g_t, d_t), && (3.10)\\
& i_t^P \geq 0, \qquad i_t^R \geq 0, \qquad t = 0, \ldots, t_1, && (3.11)
\end{aligned}
$$

w którym, zgodnie z koncepcją skoków technologicznych, macierz A_t zapisać możemy w postaci

$$
A_t = \begin{cases} A^0, & \text{gdy } w_t - w^1 \lneqq 0, \\ A^1, & \text{gdy } w_t - w^1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ A^s, & \text{gdy } w_t - w^s \geq 0, \end{cases} \tag{3.12}
$$

a macierze W_t, S_t^P, S_t^R, δ_t^P, δ_t^R, δ_t^H, σ_t^P, σ_t^R, σ_t^H, o_t, wektor $\bar{c}_t$ oraz przekształcenia technologiczne T_t^P, T_t^R zmieniają się w sposób analogiczny do (3.12). Wektory $w^1, w^2, \ldots, w^s$ określają minimalne poziomy wiedzy technicznej pozwalające na dokonanie kolejnych skoków technologicznych. Niech $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \ldots, \mathcal{T}^s$ oznaczają horyzonty czasowe, w których obowiązują w gospodarce poszczególne technologie, a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ okresy wystąpienia skoków technologicznych. Warunek (3.12) oznacza, że długości $s+1$ rozłącznych horyzontów $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \ldots, \mathcal{T}^s$ zależą od szybkości akumulacji wiedzy technicznej we wszystkich gałęziach gospodarki. Im jest ona wolniejsza, tym większa liczba okresów niezbędna jest na uzyskanie wymaganego poziomu wiedzy i tym większe stają się odstępy czasowe pomiędzy kolejnymi skokami technologicznymi. Przyjmujemy, że w początkowym okresie horyzontu czasowego, $t = 0$, znane są wektory $w^1, w^2, \ldots, w^s$.

3.1.2. Efekt magistrali w gospodarce z przedziałami stałą technologią

Dopuszczenie zmienności macierzy współczynników nakładów bieżących A_t, przepływów wiedzy W_t oraz przekształceń technologicznych T_t^P, T_t^R zmusza nas do modyfikacji poczynionych wcześniej założeń. Obecnie zakładać będziemy, że

(Z6) W każdym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$
- przekształcenia T_t^P, T_t^R spełniają warunki (T1)–(T7),
- macierz A_t spełnia założenie (Z1),
- macierz W_t spełnia załozenie (Z3),
- spełnione jest założenie (Z2).

Dla każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ utworzyć możemy zbiór wszystkich dopuszczalnych, przy wykorzystaniu danej technologii, procesów wzrostu. Podobnie jak w rozdziale 2, z dowolnym dopuszczalnym procesem wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^k$ zwiążemy liczby

$$\alpha_i^k(y_t, y_{t+1}) = \begin{cases} y_{i\,t+1}/y_{i\,t}, & \text{gdy } y_{i\,t} > 0, \\ +\infty, & \text{gdy } y_{i\,t} = 0,\ y_{i\,t+1} > 0, \\ \text{wielkość nieokreślona}, & \text{gdy } y_{i\,t} = y_{i\,t+1} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha^k(y_t, y_{t+1}) = \min_{1 \le i \le 8n} \alpha_i^k(y_t, y_{t+1}).$$

Wówczas, dla każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ wyznaczyć możemy liczbę

$$\alpha_M^k = \max_{(y_t, y_{t+1}) \in Y^k} \alpha^k(y_t, y_{t+1})$$

będącą optymalnym wskaźnikiem efektywności wzrostu w gospodarce stosującej technologię k.

Pomiędzy kolejnymi skokami technologicznymi w każdej gałęzi wykorzystywana jest tylko jedna z $s+1$ technologii. Analizując funkcjonowanie gospodarki w każdym z horyzontów czasowych $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \ldots, \mathcal{T}^s$ z osobna zauważyć możemy, że w każdym z podokresów ma ona te same podstawowe własności, co gospodarka przedstawiona w rozdziale 2. W szczególności, dla każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ zdefiniować możemy równowagę von Neumanna:

Definicja 3.1. *O procesie $(\bar{y}_t^k, \bar{y}_{t+1}^k) \in Y^k$, wektorze cen $\bar{p}^k \gneqq 0$ i liczbie $\alpha^k > 0$ mówimy, że charakteryzują gospodarkę stosującą technologię k w równowadze von Neumanna, jeżeli spełnione są następujące warunki:*

$$\alpha^k \bar{y}_t^k \le \bar{y}_{t+1}^k, \tag{3.13}$$

$$\forall (y_t, y_{t+1}) \in Y^k \ (y_{t+1}\bar{p}^k - \alpha^k y_t \bar{p}^k \le 0), \tag{3.14}$$

$$\bar{y}_{t+1}^k \bar{p}^k > 0. \tag{3.15}$$

Z twierdzenia 2.3, po niezbędnych modyfikacjach, wynika, że:

Twierdzenie 3.1. *Jeżeli spełnione jest założenie (Z6) oraz zbiór Y^k zawiera element dodatni, to istnieje taki wektor $\bar{p}^k \gneqq 0$, że czwórka $\{\alpha_M^k, \bar{y}_t^k, \bar{y}_{t+1}^k, \bar{p}^k\}$ charakteryzuje gospodarkę (3.1)–(3.11), stosującą technologię k, w równowadze von Neumanna.*

Nie podkreślając tego specjalnie, zakładać będziemy, że efektywność wzrostu w gospodarce z k-tą technologią spełnia warunek $\alpha_M^k > 1$ (warunek produktywności gospodarki stosującej k-tą technologię).

Każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ odpowiadają właściwe jej stacjonarne procesy wzrostu, które, zgodnie z definicją 2.4 i twierdzeniem 2.4 charakteryzują dynamikę gospodarki w warunkach stałej struktury oraz stałego tempa wzrostu. Oczywiście, procesy stacjonarne różnić się będą miedzy sobą osiąganą stopą wzrostu. Na gruncie każdej technologii sformułować więc możemy zadanie analogiczne do zadania (2.17)–(2.18), pozwalające na znalezienie takiego procesu stacjonarnego, w którym wzrost gospodarki będzie najszybszy. Rozwiązaniem tego zadania, w przypadku k-tej technologii, jest szóstka $(\bar{\lambda}^k, \bar{\gamma}^k, \bar{\kappa}^k, \bar{\phi}^k, \bar{\chi}^k, \bar{\rho}^k)$. Dodatkowo przez $\bar{\xi}^k$, $\bar{\mu}^k$, $\bar{\eta}^k$, $\bar{\omega}^k$ oznaczmy odpowiadające jej optymalne (w myśl kryterium (2.17)) wektory produkcji globalnej, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcji, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej oraz wiedzy. Wektor

$$\bar{\psi}^k = (\bar{\kappa}^{kT}, \bar{\phi}^{kT}, \bar{\mu}^{kT}, \bar{\eta}^{kT}, \bar{\chi}^{kT}, \bar{\xi}^{kT}, \bar{\omega}^{kT}, \bar{\gamma}^{kT})$$

wyznacza wówczas optymalny stan gospodarki, a liczba $\alpha_M^k = 1 + \bar{\lambda}^k$ jest optymalnym wskaźnikiem efektywności wzrostu w gospodarce stosującej technologię k.

Definicja 3.2. *Proces stacjonarny, w którym*

$$\psi_t^k = \frac{y_t}{eoh_t} = \bar{\psi}^k = const$$

nazywamy procesem wzrostu na magistrali lub optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu w gospodarce stosującej technologię k. Promień

$$N^k = \{\beta\bar{\psi}^k \,|\, \beta > 0\}$$

nazywamy magistralą lub promieniem von Neumanna związanym z k-tą technologią. Promienie

$$\begin{aligned} &N_k^k = \{\beta\bar{\kappa}^k \,|\, \beta > 0\}, && N_g^k = \{\beta\bar{\phi}^k \,|\, \beta > 0\}, && N_h^k = \{\beta\bar{\chi}^k \,|\, \beta > 0\}, \\ &N_b^k = \{\beta\bar{\mu}^k \,|\, \beta > 0\}, && N_d^k = \{\beta\bar{\eta}^k \,|\, \beta > 0\}, && N_x^k = \{\beta\bar{\xi}^k \,|\, \beta > 0\}, \\ &N_c^k = \{\beta\bar{\gamma}^k \,|\, \beta > 0\}, && N_w^k = \{\beta\bar{\omega}^k \,|\, \beta > 0\} && \end{aligned}$$

nazywamy magistralami, odpowiednio, kapitału produkcyjnego, kapitału innowacyjnego, kapitału ludzkiego, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcyjnych, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo-rozwojowej, produkcji, konsumpcji i wiedzy związanymi z technologią k.

Oczywiście, wszystkie własności otymalnych stacjonarnych procesów wzrostu sformułowane w rozdziale 2 pozostają prawdziwe również obecnie w gospodarce wykorzystującej jedną z $s+1$ technologii. W szczególności, wszystkie zdefiniowane magistrale są wyznaczone w sposób jednoznaczny. Każdej technologii odpowiada więc tylko jeden wektor $\bar{\psi}^k$ wyznaczający optymalną strukturę gospodarki. Wszędzie dalej przez $\bar{y}^k$ oznaczać będziemy wektor leżący na magistrali związanej z k-tą technologią, którego norma jest równa 1:

$$\bar{y}^k \in N^k, \qquad \|\bar{y}^k\| = 1, \qquad k = 0, \dots, s.$$

Ponadto niech

$$\bar{v}^k = (\bar{y}^k_1, \dots, \bar{y}^k_{6n}, \bar{y}^k_{7n+1}, \dots, \bar{y}^k_{8n}).$$

Bezpośrednio z twierdzenia 2.9 wynika wówczas prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.2. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i każdej technologii $k \in \{0, \dots, s\}$ istnieje taka liczba $\varrho^k_\varepsilon > 0$, że*

$$(y_t, y_{t+1}) \in Y^k \ \wedge \ \left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v}^k \right\| \geq \varepsilon \ \Rightarrow \ y_{t+1}\bar{p}^k - (\alpha^k_M - \varrho^k_\varepsilon) y_t \bar{p}^k \leq 0.$$

Przyjmując jako kryterium wzrostu maksymalizację użyteczności stanu gospodarki w końcowym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ możemy, przy założeniach (Z6), (U1)–(U2) sformułować następujące słabe twierdzenia o magistrali w gospodarce z przedziałami stałą technologią:

Twierdzenie 3.3. *Ustalmy liczby naturalne $\tau^0_M, \tau^1_M, \dots, \tau^s_M < +\infty$ spełniające nierówności $\tau^0_M \leq \tau_1 - 1$, $\tau_1 - 1 + \tau^1_M \leq \tau_2 - 1, \dots,$ $\tau_s - 1 + \tau^s_M \leq t_1$. Załóżmy, że istnieją:*
$(k_0, g_0, h_0, w_0, \tau^0_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{\tau^0_M}$, $\tilde{y}_{\tau^0_M} \in N^0$,
$(k_{\tau^0_M}, g_{\tau^0_M}, h_{\tau^0_M}, w_{\tau^0_M}, \tau^1_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=\tau^0_M}^{\tau^1_M}$, $\tilde{y}_{\tau^1_M} \in N^1$,
$\dots,$
$(k_{\tau^{s-1}_M}, g_{\tau^{s-1}_M}, h_{\tau^{s-1}_M}, w_{\tau^{s-1}_M}, \tau^s_M)$-dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=\tau^{s-1}_M}^{\tau^s_M}$, $\tilde{y}_{\tau^s_M} \in N^s$.
Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon' > 0$ i dla każdej technologii $k = 0, \dots, s$ istnieje taka liczba naturalna $s^k_{\varepsilon'}$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}^k \right\| \geq \varepsilon', \qquad t \in \mathcal{T}^k$$

nie przekracza $s^k_{\varepsilon'}$. Liczby $s^k_{\varepsilon'}$ nie zależą od długości horyzontu t_1.

Dowód: Dla każdej liczby k niech $L^k \subseteq \mathcal{T}^k$ oznacza zbiór wszystkich tych okresów należących do horyzontu $\mathcal{T}^k$, w których

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v}^k \right\| \geq \varepsilon'.$$

Liczebność zbioru L^k oznaczamy przez l^k. Oczywiście $\forall t \in \mathcal{T}^k$ ma miejsce inkluzja $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in Y^k$, więc zgodnie z warunkiem (3.14)

$$\hat{y}_{t+1}\bar{p}^k \leq \alpha^k_M \hat{y}_t \bar{p}^k, \qquad t \in \mathcal{T}^k. \tag{I}$$

Jednocześnie, z twierdzenia 3.2 wynika, iż istnieje taka liczba $\varrho_{\varepsilon'} > 0$, że $\forall k \, \forall t \in L^k$

$$\hat{y}_{t+1}\bar{p}^k \leq (\alpha^k_M - \varrho_{\varepsilon'})\hat{y}_t \bar{p}^k. \tag{II}$$

Z warunków (I) i (II) wynikają nierówności:

$$\begin{aligned}
&\hat{y}_{\tau_1}\bar{p}^0 \leq (\alpha^0_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_0} (\alpha^0_M)^{\tau_1 - l_0} \hat{y}_0 \bar{p}^0, \\
&\hat{y}_{\tau_2}\bar{p}^1 \leq (\alpha^1_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_1} (\alpha^1_M)^{\tau_2 - \tau_1 - l_1} \hat{y}_{\tau_1} \bar{p}^1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&\hat{y}_{t_1}\bar{p}^s \leq (\alpha^s_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_s} (\alpha^s_M)^{t_1 - \tau_s - l_s + 1} \hat{y}_{\tau_s} \bar{p}^s.
\end{aligned} \tag{III}$$

Zauważmy, że istnieją dodatnie liczby rzeczywiste $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^s$, dla których spełnione są następujące równania:

$$\begin{aligned}
&\hat{y}_{\tau_s}\bar{p}^s = \nu^s \hat{y}_{\tau_s} \bar{p}^{s-1}, \\
&\hat{y}_{\tau_{s-1}}\bar{p}^{s-1} = \nu^{s-1} \hat{y}_{\tau_{s-1}} \bar{p}^{s-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&\hat{y}_{\tau_1}\bar{p}^1 = \nu^1 \hat{y}_{\tau_1} \bar{p}^0.
\end{aligned} \tag{IV}$$

Z warunków (III), (IV) wynika nierówność

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t_1}\bar{p}^s \;\leq\;& \nu(\alpha^0_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_0}(\alpha^0_M)^{\tau_1 - l_0} \cdot (\alpha^1_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_1}(\alpha^1_M)^{\tau_2 - \tau_1 - l_1} \cdot \ldots \\
& \ldots \cdot (\alpha^s_M - \varrho_{\varepsilon'})^{l_s}(\alpha^s_M)^{t_1 - \tau_s - l_s + 1} \hat{y}_0 \bar{p}^0,
\end{aligned} \tag{V}$$

gdzie ν jest pewną liczbą dodatnią. Liczba ν jest, oczywiście, niezależna od długości horyzontów czasowych $\mathcal{T}^0, \dots, \mathcal{T}^s$. Niech $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ oznacza taki (k_0, g_0, h_0, w_0)-

dopuszczalny proces wzrostu, w którym

$$
\tilde{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t, & \text{dla } t \in \{0, \ldots, \tau_M^0\}, \\ (\alpha_M^0)^{t-\tau_M^0} \tilde{y}_t, & \text{dla } t \in \{\tau_M^0, \ldots, \tau_1 - 1\}, \\ \tilde{y}_t, & \text{dla } t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_1 - 1 + \tau_M^1\}, \\ (\alpha_M^1)^{t-\tau_1+1-\tau_M^1} \tilde{y}_{\tau_1-1+\tau_M^1}, & \text{dla } t \in \{\tau_1 - 1 + \tau_M^1, \ldots, \tau_2 - 1\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \tilde{y}_t, & \text{dla } t \in \{\tau_s, \ldots, \tau_s - 1 + \tau_M^s\}, \\ (\alpha_M^s)^{t-\tau_s+1-\tau_M^s} \tilde{y}_{\tau_s-1+\tau_M^s}, & \text{dla } t \in \{\tau_s - 1 + \tau_M^s, \ldots, t_1\}. \end{cases} \tag{VI}
$$

Ponieważ proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ jest u-optymalny, więc, oczywiście, $u(\hat{y}_{t_1}) \geq u(\tilde{y}_{t_1})$. Możemy przy tym zapisać

$$
u(\tilde{y}_{t_1}) = u(\tilde{y}_{\tau_M^0})(\alpha_M^0)^{\tau_1-1-\tau_M^0} \cdot u^1(\alpha_M^1)^{\tau_2-\tau_1-\tau_M^1} \cdot \ldots \cdot u^s(\alpha_M^s)^{t_1-\tau_s+1-\tau_M^s}, \tag{VII}
$$

gdzie $u^1, u^2, \ldots, u^s$ są pewnymi liczbami dodatnimi. Zgodnie z założeniem (U2) (str. 59), jeżeli w gospodarce wykorzystywana jest k-ta technologia, $k = 0, \ldots, s$, to istnieje taka liczba $K^k > 0$, że dla każdego dopuszczalnego stanu gospodarki y_t spełniony jest warunek $u(y_t) \leq K^k y_t \bar{p}^k$. W konsekwencji istnieje również taka liczba $K > 0$, dla której, wobec warunków (V), (VII), spełniona jest nierówność

$$
\begin{aligned} K\nu \cdot (\alpha_M^0 - \varrho_{\varepsilon'})^{l_0} (\alpha_M^0)^{\tau_1 - l_0} \cdot \ldots \cdot (\alpha_M^s - \varrho_{\varepsilon'})^{l_s} (\alpha_M^s)^{t_1-\tau_s-l_s+1} \cdot \hat{y}_0 \bar{p}^0 \geq \\ \geq u(\tilde{y}_{\tau_M^0}) u^1 \ldots u^s \cdot (\alpha_M^0)^{\tau_1-1-\tau_M^0} \cdot \ldots \cdot (\alpha_M^s)^{t_1-\tau_M^s-\tau_s+1}, \end{aligned}
$$

którą, po przekształceniach, zapisać można w postaci

$$
\left(\frac{\alpha_M^0 - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M^0}\right)^{l_0} \ldots \left(\frac{\alpha_M^s - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M^s}\right)^{l_s} \geq \frac{u(\tilde{y}_{\tau_M^0}) u^1 \ldots u^s}{(\alpha_M^0)^{\tau_M^0+1} (\alpha_M^1)^{\tau_M^1} \ldots (\alpha_M^s)^{\tau_M^s} K\nu \hat{y}_0 \bar{p}^0}. \tag{VIII}
$$

Liczba występująca po prawej stronie nierówności (VIII) jest niezależna od długości horyzontów $\mathcal{T}^0, \ldots, \mathcal{T}^s$. Jej wartość zależy natomiast od stanu gospodarki osiąganego w u-optymalnym procesie wzrostu w okresie $t = 0$. Niech

$$
P = \min_{y \in D(k_0, g_0, h_0, w_0, 0)} \frac{u(\tilde{y}_{\tau_M^0}) u^1 \ldots u^s}{(\alpha_M^0)^{\tau_M^0+1} (\alpha_M^1)^{\tau_M^1} \ldots (\alpha_M^s)^{\tau_M^s} K\nu y \bar{p}^0}.
$$

Oczywiście, dla $\forall k \in \{0, \ldots, s\}$ spełniona jest nierówność $(\alpha_M^k - \varrho_{\varepsilon'})/\alpha_M^k < 1$. Przyjmijmy, że $l_1 = l_2 = \ldots = l_s = 0$. Wówczas z (VIII) otrzymujemy warunek

$$
\left(\frac{\alpha_M^0 - \varrho_{\varepsilon'}}{\alpha_M^0}\right)^{l_0} \geq P,
$$

na podstawie którego wnioskujemy, że

$$
l_0 \leq \frac{\log P}{\log(\alpha_M^0 - \varrho_{\varepsilon'}) - \log \alpha_M^0} = l_0^{max}.
$$

Powtarzając powyższe rozumowanie dla każdej technologii otrzymujemy

$$l_k \le \frac{\log P}{\log(\alpha_M^k - \varrho_{\varepsilon'}) - \log \alpha_M^k} = l_k^{max}, \qquad k = 0, \ldots, s.$$

Liczby $s_{\varepsilon'}^k$ z tezy twierdzenia są więc najmniejszymi liczbami całkowitymi nie mniejszymi niż

$$\max\{\tau_M^k, l_k^{max}\}$$

i są niezależne od długości horyzontów $\mathcal{T}^0, \ldots, \mathcal{T}^s$. ■

Na podstawie lematu 2.2 łatwo zauważyć, że prawdziwe jest również następujące twierdzenie[3]:

Twierdzenie 3.4. *Niech będą spełnione te same założenia, co w twierdzeniu 3.3. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ istnieje taka liczba $s_\varepsilon^k \ge 0$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y}^k \right\| \ge \varepsilon, \qquad t \in \mathcal{T}^k$$

nie przekracza s_ε^k. Liczby s_ε^k nie zależą od długości horyzontu t_1.

Twierdzenie 3.4 głosi, że jeżeli skoki technologiczne są dostatecznie odległe w czasie, to liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu przebiega poza pewnymi ustalonymi (dowolnie małymi) otoczeniami odpowiednich magistral jest ograniczona. Dla gospodarki z przedziałami stałą technologią można również udowodnić silne twierdzenie o magistrali. W tym celu zakładać będziemy, że spełnione jest założenie (U3) (str. 63) oraz

(Z7) $\forall k \in \{0, \ldots, s\}$ $(\bar{y}^k > 0)$.

Oczywiście, jeżeli w gospodarce wykorzystywana jest tylko jedna z $s+1$ technologii, to prawdziwe są lematy 2.3, 2.4. Tym samym istnieje taka liczba $\Delta > 0$, że niezależnie od długości horyzontów $\mathcal{T}^0, \ldots, \mathcal{T}^s$ i technologii k dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu $\{y_t\}_{t=0}^{t_1}$

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{(\alpha_M^k)^t} \right\| \le \Delta, \qquad t \in \mathcal{T}^k, \qquad k = 0, \ldots, s.$$

Sformułować możemy również lemat analogiczny do lematu 2.5:

Lemat 3.1. *Niech będą spełnione te same założenia co w twierdzeniu 3.3, a $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ oznacza u-optymalny proces wzrostu. Wówczas istnieje taka liczba $\Gamma > 0$, że*

$$\frac{\hat{y}_{\tau_{k+1}-1}}{(\alpha_M^k)^{\tau_{k+1}-1}} \bar{p}^k \ge \Gamma, \qquad k = 0, \ldots, s,$$

gdzie $\tau_{s+1} - 1 = t_1$.

[3] Dowód przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.11.

Dowód: Rozważmy proces wzrostu $\{\tilde{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (VI) z dowodu twierdzenia 3.3. W procesie tym, w ostatnim okresie horyzontu czasowego t_1, osiągana jest użyteczność

$$u(\tilde{y}_{t_1}) = u(\tilde{y}_{\tau_M^0}) \cdot u^1 \ldots u^s \cdot (\alpha_M^0)^{\tau_1-\tau_M^0-1} \ldots (\alpha_M^s)^{t_1-\tau_M^s-\tau_s+1}.$$

Niech $\tilde{u}$ będzie liczbą spełniającą równanie $u(\tilde{y}_{t_1}) = \tilde{u}^s(\alpha_M^s)^{t_1}$. Ponieważ proces $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ jest u-optymalny, więc $u(\hat{y}_{t_1}) \geq u(\tilde{y}_{t_1})$. Przy założeniu (U2) zapisać możemy nierówność

$$K\hat{y}_{t_1}\bar{p}^s \geq \tilde{u}^s(\alpha_M^s)^{t_1},$$

która implikuje warunek

$$\frac{\hat{y}_{t_1}}{(\alpha_M^s)^{t_1}}\bar{p}^s \geq \frac{\tilde{u}^s}{K} = \Gamma^s > 0.$$

Jednocześnie, z warunku (3.14) definicji równowagi von Neumanna wynika, że

$$\hat{y}_{t+1}\bar{p}^s - \alpha_M^s\hat{y}_t\bar{p}^s \leq 0, \qquad t = \tau_s, \ldots, t_1 - 1.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy następujący ciąg nierówności:

$$\Gamma^s \leq \frac{\hat{y}_{t_1}}{(\alpha_M^s)^{t_1}}\bar{p}^s \leq \frac{\hat{y}_{t_1-1}}{(\alpha_M^s)^{t_1-1}}\bar{p}^s \leq \ldots \leq \frac{\hat{y}_{\tau_s}}{(\alpha_M^s)^{\tau_s}}\bar{p}^s.$$

Na podstawie twierdzenia 2.7 możemy zauważyć, że istnieje liczba $\nu^s > 0$ spełniająca równanie

$$\frac{\hat{y}_{\tau_s}}{(\alpha_M^s)^{\tau_s}}\bar{p}^s = \nu^s\frac{\hat{y}_{\tau_s}}{(\alpha_M^s)^{\tau_s-1}}\bar{p}^{s-1}.$$

W rezultacie, istnieje również taka liczba $\Gamma^{s-1} > 0$, że

$$\frac{\hat{y}_{\tau_s-1}}{(\alpha_M^{s-1})^{\tau_s-1}}\bar{p}^{s-1} \geq \Gamma^{s-1} > 0.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie dla wszystkich wcześniejszych technologii stwierdzamy, że

$$\frac{\hat{y}_{\tau_{k+1}-1}}{(\alpha_M^k)^{\tau_{k+1}-1}}\bar{p}^k \geq \Gamma^k > 0, \qquad k = 0, \ldots, s.$$

Wystarczy przyjąć $\Gamma = \min_k \Gamma^k$. ■

Oczywiście, jeżeli w gospodarce (3.1)–(3.11) wykorzystywana jest tylko jedna z $s+1$ technologii, to prawdziwe pozostają lematy 2.7, 2.8. W konsekwencji, z twierdzenia 2.13 wynika następujące silne twierdzenie o magistrali:

Twierdzenie 3.5. *Niech będą spełnione te same założenia, co w twierdzeniu 3.3. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdej technologii $k = 0, \ldots, s$ istnieje taka* *liczba* l_ε^k*, że jeżeli* $\tau_{k+1} - \tau_k > 2l_\varepsilon^k$*, gdzie* $\tau_0 = 0$*,* $\tau_{s+1} = t_1$*, to u-optymalny proces wzrostu* $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ *spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y}^k \right\| < \varepsilon,$$

w każdym okresie $t \in \{\tau_k + l_\varepsilon^k, \ldots, \tau_{k+1} - l_\varepsilon^k\}$.

W myśl twierdzenia 3.5, jeżeli kolejne zmiany technologii są przeprowadzane w dostatecznie dużych odstępach czasu, to jedynie w ograniczonej liczbie okresów tuż po i tuż przed dokonaniem kolejnych skoków technologicznych u-optymalne procesy wzrostu mogą leżeć poza ustalonymi otoczeniami odpowiednich magistral. W każdym, odpowiednio długim horyzoncie $\mathcal{T}^k$, $k = 0, \ldots, s$, w którym wykorzystywana w gospodarce technologia pozostaje stała zaobserwować można więc zbieżność struktury gospodarki osiąganej na u-optymalnej ścieżce wzrostu do struktury magistralnej, gwarantującej osiągnięcie możliwie najwyższej stopy zrównoważonego wzrostu. Zbieżność ta jest tym widoczniejsza, im dłuższe są horyzonty czasowe $\mathcal{T}^k$. Wprowadzenie nowej technologii powoduje co prawda wytrącenie gospodarki z otoczenia magistrali, jednak po pewnej liczbie okresów dostosowawczych struktura produkcji stabilizuje się na poziomie wyznaczonym przez nową magistralę.

3.2. Gospodarka niestacjonarna z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej

3.2.1. Zmienność technologii

W rzeczywistości ekonomicznej w większości przedsiębiorstw zmiany w wykorzystywanych procesach wytwórczych, kapitale trwałym, czy też organizacji produkcji wprowadzane są zgodnie z koncepcją skoków technologicznych. Każdy producent może jednak kierować się inną strategią wdrażania innowacji. Inne może być również tempo wzrostu wiedzy technicznej w poszczególnych przedsiębiorstwach gospodarki. W efekcie, ta sama technologia może być stosowana przez jednego producenta w dłuższym, a przez innego w krótszym horyzoncie czasowym. Przy dużej liczbie podmiotów tworzących wyróżnione gałęzie gospodarki oznacza to, że mimo występowania skoków technologicznych na poziomie przedsiębiorstw, w skali całej gospodarki zmiany strukturalne, organizacyjne i technologiczne przebiegają stale i nie można wskazać wyraźnych przedziałów czasowych, w których wykorzystywana technologia pozostawałaby stała. Tym niemniej, celem wszystkich innowacji opracowywanych i wdrażanych w gospodarce jest dążenie do coraz wyższej efektywności. Zmiany technologiczne, mimo iż wprowadzane przez przedsiębiorstwa w różnych okresach i w różnych odstępach czasu, prowadzą więc do ciągłego zwiększania możliwości wzrostu gospodarki. Oczywiście, w rzeczywistości nie można osiągnąć i utrzymać dowolnie wysokiej stopy wzrostu gospodarczego. By uwzględnić możliwość zmiany technologii w każdym okresie dowolnie długiego horyzontu czasowego i jednocześnie zapewnić realistyczny kierunek oraz zakres tych zmian rozpatrzymy obecnie gospodarkę z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. Przez pojęcie technologii granicznej rozumiemy przy tym technologię określającą granicę możliwości poprawy technologii. Granica ta może być wyznaczona na przykład na podstawie prognoz opartych na doświadczeniach gospodarek lepiej rozwiniętych.

Podobnie jak dotychczas, analizujemy gospodarkę w skończonym horyzoncie czasowym $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$. Zakładamy, że w okresie $t = 0$ znana jest technologia początkowa, którą opisują macierze współczynników nakładów bieżących A_0, przepływów wiedzy W_0, struktury inwestycji S_0^P, S_0^R, deprecjacji kapitału fizycznego δ_0^P, δ_0^R i ludzkiego δ_0^H, skutkowania inwestycji σ_0^P, σ_0^R, σ_0^H, struktury zatrudnienia o_0, a także wektor normy konsumpcji $\bar{c}_0$ i przekształcenia technologiczne T_0^P, T_0^R. Ponadto, znana jest również technologia graniczna dana macierzami $\bar{A}$, $\bar{W}$, $\bar{S}^P$, $\bar{S}^R$, $\bar{\delta}^P$, $\bar{\delta}^R$, $\bar{\delta}^H$, $\bar{\sigma}^P$, $\bar{\sigma}^R$, $\bar{\sigma}^H$, $\bar{o}$, wektorem $\bar{c}$ oraz przekształceniami technologicznymi $\bar{T}^P$, $\bar{T}^R$. Funkcjonowanie gospodarki opisuje układ warunków (3.1)–(3.11), w którym

$$A_t = z_t A_0 + (1 - z_t)\bar{A}, \qquad t = 0, \ldots, t_1, \tag{3.16}$$

a macierze W_t, S_t^P, S_t^R, δ_t^P, δ_t^R, δ_t^H, σ_t^P, σ_t^R, σ_t^H, o_t, wektor $\bar{c}_t$ oraz przekształcenia technologiczne T_t^P, T_t^R zmieniają się w sposób analogiczny do (3.16)[4]. Liczby z_t, $t = 0, \ldots, t_1$, są wskaźnikami udziału technologii początkowej w technologii wykorzystywanej w gospodarce w okresie t i przyjmują wartości z przedziału $(0, 1]$. Im większa jest wartość wskaźnika z_t tym technologia stosowana w okresie t bardziej zbliżona jest do technologii początkowej. Podobnie jak w modelu z przedziałami stałą technologią, zakładamy, że o tempie wprowadzania zmian strukturalnych, organizacyjnych i technologicznych w gospodarce decyduje tempo wzrostu wiedzy technicznej. W każdym okresie horyzontu $\mathcal{T}$ wartość wskaźnika z_t wyznaczana jest więc jako najmniejsza liczba rzeczywista z spełniająca nierówność

$$w_t \geq \frac{1}{z} w_0. \tag{3.17}$$

Z warunków (3.16), (3.17) wynika, że przy stałych wzrostach wiedzy technicznej poprawa współczynników opisujących stosowaną w gospodarce technologię jest coraz

[4]Przez zbieżność przekształceń technologicznych T_t^P, T_t^R do przekształceń $\bar{T}^P$, $\bar{T}^R$ rozumiemy tutaj zbieżność ich parametrów do wartości granicznych.

wolniejsza. Im bardziej zaawansowane są więc wykorzystywane rozwiązania techniczne, tym trudniejsze okazuje się ich dalsze usprawnianie.

3.2.2. Efekt magistrali w gospodarce z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej

W każdym okresie $t \in \{0, \ldots, t_1\}$, w zależności od wartości wskaźnika z_t, w gospodarce wykorzystywana może być inna technologia. Dla każdej z nich utworzyć możemy zbiór wszystkich dopouszczalnych, przy zastosowaniu danej technologii, procesów wzrostu Y^z, $z \in (0, 1]$. Biorąc dowolny dopuszczalny proces wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^z$ zdefiniować możemy liczby:

$$\alpha_i^z(y_t, y_{t+1}) = \begin{cases} y_{i\,t+1}/y_{i\,t}, & \text{gdy } y_{i\,t} > 0, \\ +\infty, & \text{gdy } y_{i\,t} = 0,\ y_{i\,t+1} > 0, \\ \text{wielkość nieokreślona, gdy } y_{i\,t} = y_{i\,t+1} = 0, \end{cases}$$
$$\alpha^z(y_t, y_{t+1}) = \min_{1 \leq i \leq 8n} \alpha_i^z(y_t, y_{t+1}).$$

Wówczas, każdej technologii $z \in (0, 1]$ odpowiada także liczba

$$\alpha_M^z = \max_{(y_t, y_{t+1}) \in Y^z} \alpha^z(y_t, y_{t+1}),$$

którą nazywamy optymalnym wskaźnikiem efektywności wzrostu w gospodarce stosującej technologię z. Analogicznie, jeżeli przez $\bar{Y}$ oznaczymy zbiór wszystkich dopuszczalnych procesów wzrostu w gospodarce wykorzystującej technologię graniczną, to zdefiniować możemy liczbę $\bar{\alpha}_M$ będącą optymalnym wskaźnikiem efektywności wzrostu przy zastosowaniu tej technologii. Przyjmujemy przy tym, że spełnione jest założenie

(Z8) $1 < \alpha_M^1 < \bar{\alpha}_M$.

W rozważaniach poświęconych analizie gospodarki stacjonarnej i przedziałami stacjonarnej ważną rolę odgrywają pojęcia równowagi von Numanna, stacjonarnego procesu wzrostu oraz magistrali. Obecnie, w gospodarce niestacjonarnej, jest podobnie, choć możliwość dokonywania zmian stosowanej technologii w każdym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ sprawia, że szczególnie istotne stają się tylko te procesy stacjonarne, które mogłyby zostać osiągnięte, gdyby w gospodarce wykorzystywana była technologia graniczna. Mimo że, jak wynika z warunków (3.16), (3.17), niezależnie od długości horyzontu czasowego technologia ta nigdy nie zostanie w pełni zaadoptowana, to zbieżność faktycznie stosowanej technologii do technologii granicznej, a tym samym zbieżność wskaźników efektywności wzrostu α_M^z do wskaźnika $\bar{\alpha}_M$, sprawia, że magistralę określa struktura produkcji osiągana właśnie w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu wyznaczonym dla gospodarki stosującej technologię graniczną. Niech zatem, podobnie jak w rozdziale 2, wektor

$$\bar{\psi} = (\bar{\kappa}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\mu}^T, \bar{\eta}^T, \bar{\chi}^T, \bar{\xi}^T, \bar{\omega}^T, \bar{\gamma}^T)$$

wyznacza optymalny stan gospodarki stosującej tę technologię.

Definicja 3.3. *Promień*

$$\bar{N} = \{\beta\bar{\psi} \,|\, \beta > 0\}$$

nazywamy magistralą lub promieniem von Neumanna w gospodarce niestacjonarnej z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. Promienie

$$\begin{aligned}
&\bar{N}_k = \{\beta\bar{\kappa} \,|\, \beta > 0\}, && \bar{N}_g = \{\beta\bar{\phi} \,|\, \beta > 0\}, && \bar{N}_h = \{\beta\bar{\chi} \,|\, \beta > 0\},\\
&\bar{N}_b = \{\beta\bar{\mu} \,|\, \beta > 0\}, && \bar{N}_d = \{\beta\bar{\eta}^k \,|\, \beta > 0\}, && \bar{N}_x = \{\beta\bar{\xi} \,|\, \beta > 0\},\\
&\bar{N}_c = \{\beta\bar{\gamma} \,|\, \beta > 0\}, && \bar{N}_w = \{\beta\bar{\omega} \,|\, \beta > 0\}
\end{aligned}$$

nazywamy magistralami, odpowiednio, kapitału produkcyjnego, kapitału innowacyjnego, kapitału ludzkiego, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w procesach produkcyjnych, kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo-rozwojowej, produkcji, konsumpcji i wiedzy w gospodarce niestacjonarnej z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej.

Z twierdzenia 2.3 płynie wniosek, że jeżeli w gospodarce wykorzystywana jest technologia graniczna (i spełnione są w niej warunki (T1)–(T7) oraz założenia (Z1), (Z4)), to istnieje taki wektor $\bar{p} \gneqq 0$ i taki dopuszczalny proces wzrostu $(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}) \in \bar{Y}$, że czwórka $\{\bar{\alpha}_M, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1}, \bar{p}\}$ charakteryzuje gospodarkę w równowadze von Neumanna. Prawdziwe jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.6. *Dla każdej liczby $z \in (0, 1]$ i dla każdego procesu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^z$ spełniona jest nierówność*

$$y_{t+1}\bar{p} - \bar{\alpha}_M y_t \bar{p} < 0.$$

Dowód: Z założenia (Z8) oraz warunków (3.16), (3.17) wynika, że dla każdej liczby $z \in (0, 1]$ spełniona jest nierówność $\alpha_M^z < \bar{\alpha}_M$. Ponadto, łatwo zauważyć, że jeżeli dla dowolnej liczby $z \in (0, 1]$ dopuszczalny jest proces wzrostu $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Y^z$, to istnieje również taki dopuszczalny proces wzrostu $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in \bar{Y}$, w którym $\hat{y}_t = \tilde{y}_t$ oraz $\hat{y}_{t+1} \geq \tilde{y}_{t+1}$. W rezultacie, wobec warunku (2.13) definicji równowagi von Neumanna, dla każdej liczby $z \in (0, 1]$ i dla każdego procesu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^z$ zachodzi nierówność

$$y_{t+1}\bar{p} - \bar{\alpha}_M y_t \bar{p} \leq 0. \qquad \text{(I)}$$

Jeśli przy tym dla pewnej liczby z istnieje proces $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Y^z$, który spełnia warunek (I) z równością, to istnieje taki proces $(\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}) \in \bar{Y}$, dla którego zachodzi $\hat{y}_{t+1}\bar{p} - \bar{\alpha}_M y_t \bar{p} > 0$, co jest niemożliwe. Tym samym, nierówność

$$y_{t+1}\bar{p} - \bar{\alpha}_M y_t \bar{p} \leq 0$$

jest spełniona dla każdej wartości wskaźnika $z \in (0, 1]$ i dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^z$. ■

Niech wektor $\bar{y}$ oznacza wektor leżący na magistrali, którego norma jest równa 1, tzn.:

$$\bar{y} \in \bar{N}, \qquad \|\bar{y}\| = 1.$$

Dodatkowo niech

$$\bar{v} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{6n}, \bar{y}_{7n+1}, \ldots, \bar{y}_{8n}).$$

Z twierdzenia 3.5 wynika w szczególności, że dla każdej wartości wskaźnika $z \in (0, 1]$ oraz dla każdego dopuszczalnego procesu wzrostu $(y_t, y_{t+1}) \in Y^z$ prawdziwa jest implikacja

$$\frac{v_t}{\|y_t\|} \neq \bar{v} \;\Rightarrow\; y_{t+1}\bar{p} - \bar{\alpha}_M y_t \bar{p} < 0.$$

Na podstawie twierdzenia 2.9 można również zauważyć, że

Twierdzenie 3.7. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\varrho_\varepsilon > 0$, że dla każdej liczby $z \in (0, 1]$ spełniony jest warunek:*

$$(y_t, y_{t+1}) \in Y^z \;\wedge\; \left\| \frac{v_t}{\|y_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; y_{t+1}\bar{p} - (\bar{\alpha}_M - \varrho_\varepsilon) y_t \bar{p} \leq 0.$$

Zauważmy, że z warunków (3.16), (3.17) wynika, iż wśród wszystkich dopuszczalnych ścieżek wzrostu wskazać można takie ścieżki, na których $\alpha_M^{z_t} \underset{t}{\to} \bar{\alpha}_M$. Dodatkowo przyjmujemy także, że spełnione jest następujące założenie:

(Z9) Można wskazać liczby $\tau_M \geq 0$, $\tilde{u} > 0$, że $\forall\, t_1 \geq \tau_M$ istnieje taki dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}\}_{t=0}^{t_1}$, że $\forall\, t \geq \tau_M$ zachodzi nierówność $u(\tilde{y}_t) \geq \bar{\alpha}_M^t \tilde{u}$.

Prawdziwe jest wówczas następujące słabe twierdzenie o magistrali w gospodarce niestacjonarnej z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej:

Twierdzenie 3.8. *Dla każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje taka liczba $s_{\varepsilon'} \geq 0$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{v}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{v} \right\| \geq \varepsilon'$$

nie przekracza $s_{\varepsilon'}$. Liczba $s_{\varepsilon'}$ nie zależy od długości horyzontu czasowego t_1.

Dowód przebiega w sposób analogiczny do dowodu twierdzenia 2.10, w którym porównywaliśmy użyteczność osiąganą w procesie optymalnym z użytecznością osiąganą w procesie dochodzącym do magistrali w okresie τ_M i pozostającym na niej w horyzoncie $\{\tau_M, \ldots, t_1\}$. Oczywiście, w gospodarce niestacjonarnej z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej proces taki nie istnieje. Tym niemniej, na podstawie założenia (Z9) oraz optymalności procesu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ możemy zauważyc, że istnieje liczba $\tilde{u} > 0$ spełniająca warunek

$$u(\hat{y}_{t_1}) \geq \bar{\alpha}_M^{t_1} \tilde{u} > 0.$$

Korzystając z tego warunku, i powtarzając rozumowanie zawarte w dowodzie twierdzenia 2.10, wnioskujemy, że istnieje szukana liczba $s_{\varepsilon'} \geq 0$. ■

Nietrudno zauważyć, że dopuszczalne procesy wzrostu w gospodarce z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej mają własność analogiczną do własności dopuszczalnych procesów wzrostu w gospodarce stacjonarnej wynikającej z lematu 2.2. W rezultacie prawdziwe jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.9. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $s_\varepsilon \geq 0$, że liczba okresów, w których u-optymalny proces wzrostu $\{\hat{y}_t\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek*

$$\left\| \frac{\hat{y}_t}{\|\hat{y}_t\|} - \bar{y} \right\| \geq \varepsilon$$

nie przekracza s_ε. Liczba s_ε nie zależy od długości horyzontu czasowego t_1.

W myśl twierdzenia 3.9, w gospodarce niestacjonarnej z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej obserwujemy, podobnie jak w gospodarce stacjonarnej oraz przedziałami stacjonarnej, charakterystyczną własność u-optymalnych procesów wzrostu. Mianowicie, niezależnie od długości horyzontu czasowego liczba okresów, w których procesy te przebiegają poza ustalonym otoczeniem magistrali jest ograniczona. Mimo że magistrala wyznaczona jest przez technologię graniczną, która nie może zostać w gospodarce w pełni przyjęta, to możliwość wprowadzania ciągłych innowacji przybliżających stosowaną technologię do technologii granicznej sprawia, że u-optymalny proces wzrostu pozostaje w otoczeniu magistrali zawsze, poza pewną ograniczoną liczbą okresów.

W rozdziale 2 pokazaliśmy, ze jeżeli u-optymalny proces wzrostu znajduje się w ustalonym otoczeniu magistrali w dwóch okresach $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, to pozostaje w nim również w każdym okresie $t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2\}$[5]. Analogiczną własność mają także u-optymalne procesy wzrostu w gospodarce przedziałami stacjonarnej. Natomiast w gospodarce niestacjonarnej, z uwagi na możliwość pojawiania się zmian technologicznych w każdym okresie horyzontu $\mathcal{T}$, u-optymalne procesy wzrostu zachowywać

[5] Por. twierdzenie 2.13.

mogą się inaczej. Ponieważ technologia początkowa może różnić się od technologii granicznej dość znacznie, więc nawet jeśli stan początkowy gospodarki opisany będzie wektorem leżącym na magistrali, to niemożliwe, bądź też niezasadne z punktu widzenia maksymalizacji użyteczności, może okazać się utrzymanie w kolejnych okresach stanu gospodarki nawet zbliżonego do magistralnego. Proces u-optymalny, który w okresach $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ pozostaje w zadanym otoczeniu magistrali może zatem wyjść poza to otoczenie w pewnym okresie $t \in \{\tau_1, \ldots, \tau_2\}$. W gospodarce niestacjonarnej silny efekt magistrali nie musi więc zachodzić.

Rozdział 4

Wyniki badań empirycznych na przykładzie gospodarki polskiej

W literaturze poświęconej zagadnieniom wzrostu gospodarczego znaleźć można wiele prac, których autorzy prezentują wyniki prowadzonych przez siebie różnorakich badań i analiz empirycznych. Nawet jeżeli nie mogą one być automatycznie uznane za narzędzie weryfikacji poprawności hipotez i twierdzeń formułowanych w rozważaniach teoretycznych, służą niewątpliwie ich ilustracji, pozwalając przy okazji na zwrócenie uwagi na znaczenie praktyczne opisywanych teorii. Niestety, liczba publikacji zawierających wyniki badań empirycznych przeprowadzonych na podstawie modeli wielosektorowych jest raczej skromna[1]. Duża część z nich powstała przy tym wiele lat temu, kiedy teoria wzrostu endogenicznego nie była jeszcze tak rozwinięta, jak dzisiaj. W efekcie brak jest prac, w których badania empiryczne stanowiłyby ilustrację efektu magistrali w modelach uwzględniających postęp techniczny i akumulcję kapitału ludzkiego oraz wiedzy. Badania takie przeprowadzimy w tej części pracy. Analizie empirycznej poddamy model ze stałą technologią, przedstawiony w rozdziale 2 oraz model z przedziałami stałą technologią, który opisany został w rozdziale 3. Wykorzystując dane statystyczne na temat gospodarki polskiej wyznaczymy:

1. magistrale oraz odpowiadające im stopy wzrostu zrównoważonego,
2. optymalne ścieżki wzrostu gospodarki ze stałą oraz przedziałami stałą technologią, której stan początkowy wyznaczają wektory produkcyjnego i innowacyjnego kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego oraz wiedzy, charakteryzujące gospodarkę Polski w 2000 roku.

[1] Wyniki badań empirycznych prowadzonych na podstawie modeli wielosektorowych znaleźć można np. w pracach W. Jurek, R. Kiedrowski, E. Panek [50], J. Tsukui, Y. Murakami [102].

4.1. Gospodarka ze stałą technologią

4.1.1. Wersja zadania zastosowana w obliczeniach

Aby na podstawie danych empirycznych móc wyznaczyć magistralę oraz optymalną ścieżkę wzrosu gospodarczego, konieczne jest skonkretyzowanie postaci produkcyjnego przekształcenia technologicznego T^P oraz przekształcenia innowacyjnego T^R. W obliczeniach przyjęliśmy, że mają one następującą postać:

$$T^P(k,b) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid 0 \le x \le P^k k,\ 0 \le x \le P^b b\big\}, \tag{4.1}$$

$$T^R(g,d) = \big\{q \in \mathbb{R}^n_+ \mid 0 \le q \le P^g g,\ 0 \le q \le P^d d\big\}, \tag{4.2}$$

gdzie P^k, P^b, P^g, P^d oznaczają diagonalne macierze produktywności (wydajności), odpowiednio, produkcyjnego kapitału fizycznego, produkcyjnego kapitału ludzkiego, innowacyjnego kapitału fizycznego i innowacyjnego kapitału ludzkiego (element p^k_i opisuje ile maksymalnie produkcji można uzyskać w gałęzi i-tej angażując jedną jednostkę kapitału fizycznego). Głównym powodem wykorzystania w obliczeniach przekształceń (4.1), (4.2) jest dostępność danych statystycznych pozwalających na oszacowanie ich parametrów. Co ważne, dzięki postaci przekształceń (4.1), (4.2) możliwe jest również sprowadzenia zadania znalezienia optymalnej ścieżki wzrostu gospodarczego do zadania programowania liniowego i zastosowanie zaimplementowanych w powszechnie wykorzystywanych aplikacjach komputerowych algorytmów rozwiązywania tego typu zadań. Przyjęcie bardziej skomplikowanych postaci przekształceń T^P, T^R, w których granice możliwości produkcyjnych i innowacyjnych wyznaczałyby np. funkcje potęgowe, wiązałoby się z większymi trudnościami w oszacowaniu parametrów modelu i rozwiązywaniu formułowanych zadań optymalizacyjnych. Należy zwrócić uwagę, że przekształcenia (4.1), (4.2) mają własności (T1)–(T7), natomiast nie spełniają założenia (Z2). Jednak wyniki przeprowadzonych obliczeń pokazują, że również dla tak sformułowanych przekształceń technologicznych w gospodarce może ujawnić się efekt magistrali.

Oprócz przyjęcia konkretnych postaci przekształceń T^P i T^R, na potrzeby naszej analizy empirycznej musimy także sprecyzować postać funkcji użyteczności, za pomocą której oceniać będziemy jakość procesów wzrostu. Mając na uwadze sformułowane w rozdziale 2 założenia (U1)–(U3), przyjmujemy, że

$$u(y_{t_1}) = \max\{\vartheta : \vartheta \bar{c} \le c_{t_1}\}, \tag{4.3}$$

gdzie $y_{t_1} = (k^T_{t_1}, g^T_{t_1}, b^T_{t_1}, d^T_{t_1}, h^T_{t_1}, x^T_{t_1}, w^T_{t_1}, c^T_{t_1})$ jest stanem gospodarki w końcowym okresie t_1 w $(k_0, g_0, h_0, w_0, t_1)$-dopuszczalnym procesie wzrostu (zob. punkt 2.2 i 2.3, definicja 2.3, oraz punkt 2.4, definicja 2.6). Oznacza to, że ocena jakości procesu wzrostu zależy od wielokrotności normatywnego wektora konsumpcji $\bar{c}$ osiąganej w końcowym (ostatnim) okresie ustalonego horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, t_1\}$.

W celu wyznaczenia optymalnej stopy zrównoważonego wzrostu gospodarczego i znalezienia zapewniającej jej osiągnięcie optymalnej struktury gospodarki konieczne jest rozwiązanie zadania (2.17)–(2.18). Zadanie to, gdy przekształcenia technologiczne T^P, T^R mają postać (4.1), (4.2), można, po dokonaniu prostych podstawień, zapisać następująco:

znaleźć

$$\max \lambda \tag{4.4}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
&(E-A)^{-1}\gamma + \Omega^P\kappa + \Omega^R\phi - P^k\kappa \leq 0,\\
&(E-A)^{-1}\gamma + \Omega^P\kappa + \Omega^R\phi - P^b o\rho\chi \leq 0,\\
&W^{-1}\lambda\big(\sigma^H\big)^{-1}\big(\lambda E + \delta^H\big)\chi - P^g\phi \leq 0,\\
&W^{-1}\lambda\big(\sigma^H\big)^{-1}\big(\lambda E + \delta^H\big)\chi - P^d o(E-\rho)\chi \leq 0,\\
&\bar{c} - \gamma \leq 0,\\
&0 \leq \rho \leq E,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

gdzie wektory κ, ϕ, χ, γ są, oczywiście, nieujemne. Pozostałe składowe wektora $\bar{\psi}$ opisującego magistralną strukturę gospodarki wyznaczyć można na podstawie równań:

$$\mu = o\rho\chi, \tag{4.6}$$

$$\eta = o(E-\rho)\chi, \tag{4.7}$$

$$\xi = \Omega^P\kappa + \Omega^R\phi + (E-A)^{-1}\gamma, \tag{4.8}$$

$$\omega = \big(\sigma^H\big)^{-1}\big(\lambda E + \delta^H\big)\chi. \tag{4.9}$$

Wobec przyjętych przez nas postaci przkształceń technologicznych T^P, T^R oraz funkcji użyteczności społecznej u, zadanie wyznaczenia optymalnego procesu wzrostu można przedstawić w postaci następującego zadania programowania liniowego:

znaleźć

$$\min f^T\mathbf{x} \tag{4.10}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &\leq 0,\\
\mathbf{Bx} &= \mathbf{b},\\
\mathbf{x} &\geq 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

gdzie f jest wektorem kolumnowym, którego ostatni element jest równych -1, pozostałe natomiast są równe 0:

$$f^T = (0, \ldots, 0, -1),$$

A jest macierzą prostokątną o następującej strukturze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{A2} & \bar{c} \end{bmatrix},$$

w której macierz **A1** ma postać

$$\begin{bmatrix} -P^k & 0 & (E-A)^{-1}S^P & (E-A)^{-1}S^R & 0 & 0 & 0 & 0 & (E-A)^{-1} \\ 0 & 0 & (E-A)^{-1}S^P & (E-A)^{-1}S^R & -P^b & 0 & 0 & 0 & (E-A)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}eo & 0 & 0 & -E \\ 0 & -P^g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P^d & -P^d o & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & -o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

A2 jest macierzą prostokątną,

$$\mathbf{A2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix},$$

macierz **B** ma postać

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B2} & \mathbf{B3} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B2} & \mathbf{B3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{B2} & \mathbf{B3} & \mathbf{b4} \end{bmatrix},$$

w której

$$\mathbf{B1} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B2} = \begin{bmatrix} E-\delta^P & 0 & \sigma^P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E-\delta^R & 0 & \sigma^R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E-\delta^H & \sigma^H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & W & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B3} = \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

b4 jest wektorem kolumnowym, którego wszystkie elementy są równe 0, **b** jest wektorem kolumnowym, którego pierwszych $4n$ elementów tworzą wektory, odpowiednio, produkcyjnego kapitału fizycznego, innowacyjnego kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego i wiedzy w stanie początkowym, natomiast pozostałe elementy są równe 0:

$$\mathbf{b}^T = (k_0^T, g_0^T, h_0^T, w_0^T, 0, \ldots, 0),$$

x jest szukanym wektorem kolumnowym, którego składowe wyznaczają stany osiągane przez gospodarkę w kolejnych okresach analizowanego horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$ oraz użyteczność społeczną procesu wzrostu. Wektor ten ma następującą strukturę:

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \ldots, \mathbf{x}_{t_1}^T, \vartheta),$$

gdzie

$$\mathbf{x}_t^T = \left(k_t^T, g_t^T, (i_t^P)^T, (i_t^R)^T, b_t^T, h_t^T, w_t^T, q_t^T, c_t^T\right),$$

$t = 0, \ldots, t_1$. Zauważmy, że macierze **A1**, **B1**, **B2**, **B3** oraz wektory $\mathbf{x}_t^T$ mają dokładnie $9n$ kolumn. Rozmiary macierzy **A**, **B** i wektorów f, **b** zależą więc nie tylko od liczby gałęzi wyróżnionych w rozpatrywanej gospodarce, ale także od długości horyzontu czasowego $\mathcal{T}$. Jeżeli przyjmiemy, że $t_0 = 0$, to macierz **A** z zadania (4.10)–(4.11) ma $6n(1 + t_1) + n$ wierszy i $9n(1 + t_1) + 1$ kolumn, macierz **B** ma $4n(1 + t_1)$ wierszy i $9n(1 + t_1) + 1$ kolumn, wektor **b** jest $4n(1 + t_1)$-elementowy, natomiast wektor f ma $9n(1 + t_1) + 1$ elementów.

Spośród wszystkich wektorów tworzących wektor stanu gospodarki y_t w skład wektora $\mathbf{x}_t$ nie wchodzi jedynie wektor produkcji globalnej x_t oraz wektor kapitału ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej d_t. Można je jednak łatwo wyznaczyć z równań:

$$x_t = (E - A)^{-1} S^P i_t^P + (E - A)^{-1} S^R i_t^R + (E - A)^{-1} c_t, \tag{4.12}$$

$$d_t = o h_t - b_t. \tag{4.13}$$

4.1.2. Źródła danych statystycznych wykorzystanych w obliczeniach

Przy wyznaczaniu optymalnych ścieżek wzrostu gospodarczego, magistrali oraz odpowiadającej jej optymalnej stopy wzrostu zrównoważonego wykorzystaliśmy dane statystyczne opisujące sytuację ekonomiczną w Polsce w 2000 roku. Większość użytych danych pochodzi z dwóch opracowań Głównego Urzędu Statystycznego: *Rocznika Statystycznego 2001*[2] oraz *Rachunków narodowych według sektorów i podsektorów instytucjonalnych 2000–2005*[3]. Przy szacowaniu parametrów modelu wykorzystaliśmy również macierz przepływów międzygałęziowych udostępnioną w internecie przez Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju[4]. Niestety, na podstawie ogólnodostępnych danych statystycznych niemożliwe okazało się dokładne oszacowanie wszystkich parametrów analizowanego modelu. W rezultacie, wyznaczając wartości niektórych z nich, np. współczynników deprecjacji kapitału ludzkiego, współczynników efektywności nauki czy też współczynników przepływu wiedzy, zmuszeni byliśmy do poczynienia szeregu, niekiedy bardzo poważnych, uproszczeń. Prezentowane niżej wyniki obliczeń stanowią więc przede wszystkim ilustrację przebiegu optymalnych procesów wzrostu w pewnej hipotetycznej gospodarce, którą, w miarę możliwości, staraliśmy się upodobnić do gospodarki Polski. Ich wartość prognostyczna jest w związku z tym, niestety, dość ograniczona.

Obliczenia przeprowadziliśmy dzieląc gospodarkę, na podstawie sekcji wyróżnionych w Polskiej Klasyfikacji Działalności, na następujące gałęzie:

1. Rolnictwo, łowiectwo, leśnictwo, rybołówstwo i rybactwo,
2. Górnictwo i kopalnictwo,
3. Przetwórstwo przemysłowe,
4. Wytwarzania i zaopatrywanie w energię elektryczną, gaz i wodę,
5. Budownictwo,
6. Handel i naprawy,
7. Hotele i restauracje,
8. Transport, gospodarka magazynowa i łączność,
9. Pośrednictwo finansowe,
10. Obsługa nieruchomości, wynajem, nauka i usługi działalności gospodarczej,
11. Administracja publiczna i obrona narodowa, ubezpieczenia społeczne,
12. Edukacja
13. Ochrona zdrowia i opieka społeczna,
14. Pozostała działalność usługowa, komunalna, społeczna i indywidualna.

[2]GUS [37].
[3]GUS [36].
[4]Zob. www.oecd.org/sti/inputoutput/.

W opracowaniach statystycznych udostępnianych przez GUS dane dotyczące działalności rolniczej, łowieckiej i leśniczej nie są zwykle łączone z danymi opisującymi działalność w sferze rybołówstwa i rybactwa. W macierzach przepływów międzygałęziowych udostępnionych przez OECD działalności te zaliczone są do jednej, wspólnej grupy, dlatego w obliczeniach postanowiliśmy uczynić podobnie, przyporządkowując im jedną gałąź gospodarki.

4.1.2.1. Kapitał fizyczny i inwestycje

W analizowanym w pracy modelu gospodarki zakładamy istnienie dwóch rodzajów kapitału fizycznego: kapitału produkcyjnego oraz kapitału innowacyjnego, wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej. W opracowaniach statystycznych nie ma dokładnych danych na temat wartości kapitału fizycznego angażowanego w procesach innowacyjnych w poszczególnych gałęziach. Z tego powodu, w obliczeniach przyjęliśmy upraszczająco, że oba rodzaje kapitału charakteryzują się identycznymi wskaźnikami deprecjacji oraz efektywności inwestycji.

Wielkość wykorzystywanego w poszczególnych gałęziach gospodarki kapitału fizycznego wzięliśmy bezpośrednio z Rocznika Statystycznego 2001, z tabeli „Wartość brutto środków trwałych według sektorów wartości”[5]. Zawarte w niej dane za rok 1999 wraz z informacją o wartości brutto środków trwałych zlikwidowanych w 2000 roku[6] posłużyły nam do oszacowania wartości współczynników deprecjacji kapitału fizycznego. Wyznaczyliśmy je jako ilorazy:

$$\delta_i^P = \frac{z_i^{2000}}{\hat{k}_i^{1999} + \hat{g}_i^{1999}},$$

gdzie z_i^{2000} jest wartością brutto środków trwałych zlikwidowanych w 2000 roku w gałęzi i, natomiast suma $\hat{k}_i^{1999} + \hat{g}_i^{1999}$ oznacza wartość brutto środków trwałych na koniec 1999 roku w i-tej gałęzi gospodarki[7], $i = 1, \ldots, n$.

Współczynniki efektywności inwestycji oszacowaliśmy na podstawie danych o nakładach inwestycyjnych w poszczególnych gałęziach gospodarki[8] oraz o wartości brutto środków trwałych uzyskanych z działalności inwestycyjnej[9]. Zastosowaliśmy następujący wzór:

$$\sigma_i^P = \frac{\Delta(\hat{k}_i + \hat{g}_i)}{i_i^P + i_i^R}, \tag{4.14}$$

[5]GUS [37], tablica 8(537): Wartość brutto środków trwałych według sektorów własności.

[6]Op. cit., tablica 13(542): Wartość brutto środków trwałych zlikwidowanych.

[7]Ponieważ wszędzie dalej obliczenia prowadzić będziemy na podstawie danych statystycznych za rok 2000, w celu zwiększenia przejrzystości zapisu pominiemy indeks czasu.

[8]Op. cit., tablica 4(533): Nakłady inwestycyjne według sekcji i działów.

[9]Op. cit., tablica 12(541): Wartość brutto środków trwałych uzyskanych z działalności inwestycyjnej.

gdzie $\Delta(\hat{k}_i + \hat{g}_i)$ oznacza wartość brutto środków trwałych uzyskanych z działalności inwestycyjnej w gałęzi i, suma $i_i^P + i_i^R$ opisuje nakłady inwestycyjne poniesione w i-tej gałęzi gospodarki, $i = 1, \ldots, n$. Po podstawieniach okazało się, że dla kilku gałęzi współczynniki te osiągnęły wartości znacząco przekraczające 1 lub też niewiele tylko wyższe od 0,6. Utrzymanie ich na takim poziomie, zwłaszcza w długim okresie, wydaje się mało realistyczne, toteż postanowiliśmy skorygować uzyskane wyniki. Dla każdej gałęzi, dla której wartość wyznaczona z warunku (4.14) była mniejsza niż 0,8 przyjęliśmy, że współczynnik efektywności inwestycji jest równy 0,8, natomiast w gałęziach, w których wartość ilorazu (4.14) była wyższa niż 1,1 ustaliliśmy, że współczynnik ten jest równy 1,1. Wyznaczone wartości współczynników deprecjacji kapitału trwałego i współczynników efektywności inwestycji prezentuje tabela A.2 w aneksie A (str. 117).

Wykorzystując dane statystyczne o wartości nakładów na działalność innowacyjną poniesionych w przemyśle[10] oszacowaliśmy współczynniki udziału inwestycji w działalność badawczo–rozwojową w nakładach inwestycyjnych gałęzi przemysłowych m_i. Przyjęliśmy, że:

$$m_i = \frac{i_i^R}{i_i^P + i_i^R}, \tag{4.15}$$

gdzie i_i^R oznacza wartość nakładów na innowacje w gałęzi i, $i = 1, \ldots, n$. Niestety, w ogólnodostępnym materiale statystycznym brak jest danych o wielkości nakładów na badania i rozwój ponoszonych w gałęziach nie związanych bezpośrednio z produkcją przemysłową. Dla tych gałęzi przyjęliśmy, że współczynniki m_i mają wartość 0,04. Tak uzyskane współczynniki wykorzystaliśmy następnie do wyznaczenia wartości produkcyjnego i innowacyjnego kapitału trwałego w poszczególnych gałęziach gospodarki w początkowym okresie horyzontu czasowego (2000 rok). Założyliśmy, że prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{aligned} \hat{k}_i &= m_i(\hat{k}_i + \hat{g}_i), \\ \hat{g}_i &= (1 - m_i)(\hat{k}_i + \hat{g}_i). \end{aligned}$$

Na koniec wyznaczone wektory $\hat{k}$ i $\hat{g}$ podzieliliśmy przez liczbę pracowników zatrudnionych w gospodarce, otrzymując wartości obu rodzajów kapitału fizycznego *per capita*:

$$k = \frac{\hat{k}}{\sum_{i=1}^n l_i}, \qquad g = \frac{\hat{g}}{\sum_{i=1}^n l_i},$$

gdzie l_i oznacza liczbę zatrudnionych w i-tej gałęzi gospodarki[11], $i = 1, \ldots, n$. Wykorzystane w obliczeniach wektory k i g prezentuje tabela A.1 w aneksie A (str. 116).

[10] Op. cit., tablica 16(330): Nakłady na innowacje w przemyśle.

[11] Op. cit., tablica 6(155): Pracujący według sekcji i działów.

W kolejnym kroku, na podstawie danych zawartych w kolumnie *Akumulacja kapitału brutto* (ang. *Gross fixed capital formation*) tabeli przepływów międzygałęziowych udostępnionej przez OECD[12], wyznaczyliśmy elementy wektora inwestycji według gałęzi pochodzenia produktów w początkowym okresie rozpatrywanego horyzontu czasowego. Ponieważ w tabeli przepływów międzygałęziowych, z której korzystaliśmy wyróżniono 48 gałęzi gospodarki, dokonaliśmy agregacji danych, dostosowując materiał statystyczny do potrzeb naszej analizy. Znając z wcześniejszych oszacowań wartości nakładów inwestycyjnych ponoszonych w poszczególnych gałęziach gospodarki w 2000 roku, przystąpiliśmy do wyznaczenia współczynników struktury nakładów inwestycyjnych. Podobnie jak podczas szacowania współczynników deprecjacji kapitału oraz efektywności inwestycji, założyliśmy, że dla obu rodzajów kapitału fizycznego wartości szukanych współczynników są identyczne. Ustaliliśmy je arbitralnie przyjmując, że najistotniejszą rolę w strukturze nakładów inwestycyjnych każdej gałęzi odgrywają produkty wytwarzane przez gałęzie przetwórstwa przemysłowego i budownictwa. Oczywiście, budując macierz współczynników struktury nakładów inwestycyjnych dążyliśmy do tego, aby elementy wektora będącego iloczynem tej macierzy i wektora nakładów inwestycyjnych według gałęzi pochodzenia produktów były możliwie bliskie faktycznym wydatkom inwestycyjnym ponoszonym w odpowiednich gałęziach gospodarki. Przyjętą w obliczeniach postać macierzy S^P (S^R) prezentuje tabela A.5 (str. 120).

4.1.2.2. Kapitał ludzki i wiedza

Jak stwierdziliśmy w rozdziale 1, istnieje kilka metod pomiaru kapitału ludzkiego. W analizowanych modelach typu Leontiefa–Gale'a w równowadze ma miejsce jednak stały wzrost kapitału ludzkiego, co wyklucza możliwość wykorzystania w obliczeniach mierników naturalnych bazujących na takich danych, jak np. liczba lat spędzanych przez przeciętnego pracownika w szkole. Natomiast dokładniejsze dane, potrzebne do zastosowania kosztowych lub dochodowych metod pomiaru kapitału ludzkiego, nie są gromadzone i publikowane w ogólnodostępnych opracowaniach statystycznych. Początkowo przyjęliśmy więc upraszczająco, że wartości zasobów kapitału ludzkiego w poszczególnych gałęziach gospodarki są równe wynagrodzeniom, jakie przeciętnie otrzymują zatrudnieni w nich pracownicy. Elementy początkowego wektora kapitału ludzkiego wyznaczyliśmy na podstawie następującego warunku:

$$h_i = \frac{wyn_i}{l_i}, \tag{4.16}$$

[12] www.oecd.org/sti/inputoutput/, plik pol2000.xls.

gdzie wyn_i oznacza wartość wynagrodzeń i innych kosztów pracowniczych poniesionych w i-tej gałęzi gospodarki[13], l_i jest liczbą pracowników zatrudnionych w i-tej gałęzi[14], $i = 1, \ldots, n$. Po wyznaczeniu magistrali okazało się jednak, że struktura oszacowanego wektora kapitału ludzkiego odbiega znacznie od magistrali po dwóch współrzędnych: 2 (górnictwo i kopalnictwo) i 11 (administracja publiczna). W obu przypadkach w wektorze h arbitralnie zwiększyliśmy wartości współrzędnych h_2 i h_{11}[15]. Z uwagi na brak odpowiednich danych statystycznych, arbitralnie ustaliliśmy również, że dla każdej gałęzi współczynnik efektywności nauki przyjmuje wartość 0,5, natomiast współczynnik deprecjacji kapitału ludzkiego jest równy 0,05.

Niestety, w opracowaniach statystycznych nie są publikowane dane, które mogłyby posłużyć za przybliżenia faktycznych poziomów wiedzy w poszczególnych gałęziach gospodarki. Sami więc zaproponowaliśmy postać początkowego wektora wiedzy, starając się jedynie, aby wyznaczony na jego podstawie wektor ω_0 był niezbyt odległy od wektora $\bar{\omega}$ wyznaczającego magistralę wiedzy technicznej. Przyjęte w obliczeniach początkowe wektory wiedzy i kapitału ludzkiego prezentuje tabela A.1 (str. 116).

4.1.2.3. Produkcja, konsumpcja i innowacje

Współczynniki struktury zatrudnienia w gospodarce wyznaczyliśmy bezpośrednio na podstawie danych statystycznych o liczbie pracowników zatrudnionych w poszczególnych gałęziach gospodarki. Zastosowaliśmy następujący wzór:

$$o_i = \frac{l_i}{\sum_{j=1}^{n} l_i},$$

$i = 1, \ldots, n$. Oszacowane wartości elementów macierzy o prezentuje tabela A.2 (str. 117). W kolejnym etapie obliczeń, znając wartości wyznaczonych wcześniej współczynników m_i opisujących udział inwestycji badawczo–rozwojowych w ogólnej wartości nakładów inwestycyjnych ponoszonych w poszczególnych gałęziach gospodarki, przystąpiliśmy do oszacowania zasobów produkcyjnego kapitału ludzkiego dostępnego w początkowym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$. Przyjęliśmy, że dla każdej gałęzi i spełniony jest następujący warunek:

$$b_i = o_i m_i h_i,$$

[13] GUS [36], tablica 117: Rachunek produkcji i rachunek tworzenia dochodów w gospodarce narodowej według PKD w 2000 roku.

[14] GUS [37], tablica 6(155): Pracujący według sekcji i działów.

[15] W wyniku tej oparacji rozmiary kapitału ludzkiego w gałęziach 2 i 11 wzrosły ponad, odpowiednio, trzy- i dwukrotnie, w stosunku do ich wielkości wyznaczonych z równania (4.16) i odbiegają znacząco od początkowych zasobów kapitału ludzkiego w pozostałych gałęziach gospodarki – por. Tabela A.1, str. 116.

Wyznaczając elementy macierzy współczynników produktywności (wydajności) produkcyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego wykorzystaliśmy dane o wartości produkcji globalnej osiągniętej w wyróżnionych gałęziach gospodarki w 2000 roku. Dane te uzyskaliśmy bezpośrednio z opracowań Głównego Urzędu Statystycznego[16]. Założyliśmy, że pełne wykorzystanie dostępnych w gałęziach zasobów obu rodzajów kapitału pozwala na wytworzenie dokładnie takiej produkcji globalnej, jaką zanotowano w początkowym okresie horyzontu $\mathcal{T}$. Elementy głównych przekątnych macierzy P^k oraz P^b otrzymaliśmy z następujących warunków:

$$p_{ii}^k = \frac{x_i}{k_i}, \qquad p_{ii}^b = \frac{x_i}{b_i},$$

$i = 1, \dots, n$. Ich wartości prezentuje tabela A.2 (str. 117).

Macierz współczynników nakładów bieżących A oszacowaliśmy na podstawie szczegółowej tabeli przepływów międzygałęziowych, przedstawiającej wyrażone wartościowo przepływy produktów pomiędzy 48 gałęziami gospodarki[17]. Ponieważ w naszej analizie w gospodarce wyróżniliśmy jedynie 14 gałęzi, w pierwszej kolejności dokonaliśmy agregacji danych, sumując elementy odpowiednich kolumn i wierszy tabeli. Szukane współczynniki nakładów bieżących uzyskaliśmy dzieląc kolumny otrzymanej w ten sposób pomniejszonej tabeli przepływów międzygałęziowych $\hat{A}$ przez wartość produkcji globalnej uzyskanej w odpowiadających tym kolumnom gałęziach:

$$a_{ij} = \frac{\hat{a}_{ij}}{x_j},$$

$i, j = 1, \dots, n$. Tak otrzymane wartości współczynników nakładów bieżących prezentuje tabela A.3 (str. 118).

Wektor konsumpcji osiąganej w gospodarce w 2000 roku wyznaczyliśmy z modelu, przekształcając warunek bilansowy (2.3) i podstawiając do otrzymanego równania oszacowane wcześniej wartości parametrów, wektor produkcji globalnej oraz wektor inwestycji. W dalszych obliczeniach przyjęliśmy ponadto, że normatywny poziom konsumpcji dóbr wytwarzanych w poszczególnych gałęziach gospodarki opisany jest równaniem:

$$\bar{c} = \frac{c}{2eoh \sum_{i=1}^{n} l_i}. \tag{4.17}$$

Wyznaczone elementy wektora $\bar{c}$ prezentuje tabela A.2 (str. 117). Warunek (4.17) oznacza, że konsumpcja w przeliczeniu na jednostkę kapitału ludzkiego w żadnym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ nie może spaść poniżej połowy konsumpcji przypadającej na jednostkę kapitału ludzkiego w 2000 roku.

[16]GUS [36], tablica 117: Rachunek produkcji i rachunek tworzenia dochodów w gospodarce narodowej według PKD w 2000 roku.

[17]www.oecd.org/sti/inputoutput/, plik pol2000.xls.

W kolejnym kroku przystąpiliśmy do ustalenia wartości elementów macierzy współczynników przepływów wiedzy W. Początkowo postanowiliśmy wykorzystać najprostszą metodę wyznaczania wartości tych współczynników i przyjąć, że elementy macierzy W są równe odpowiadającym im współczynnikom nakładów bieżących A. Okazało się jednak, że przy wyznaczonych w opisany sposób pozostałych parametrach modelu i założeniu, że $W = A$, zadanie (4.4)–(4.5) (wyznaczenia magistrali) nie ma rozwiązania (jest sprzeczne). Zdecydowaliśmy się więc na modyfikację wartości współczynników przepływu wiedzy. Najpierw zwiększyliśmy wartości elementów leżących na głównej przekątnej macierzy W, ustalając je arbitralnie na poziomie zbliżonym do 0,7. Tak więc w rozpatrywanej przez nas gospodarce około 70% innowacji znajduje zastosowanie w gałęziach, w których zostały opracowane i przyczynia się do zwiększania zasobów wiedzy charakterystycznej dla tych gałęzi. Dodatkowo, postanowiliśmy również zmodyfikować wartości kilku innych współczynników, w szczególności tych, które opisują przepływ wiedzy do i z gałęzi przetwórstwa przemysłowego. Zmiany te miały na celu przede wszystkim zapewnienie istnienia magistrali w gospodarce. Przyjęte w obliczeniach wartości elementów macierzy W prezentuje tabela A.4 (str. 119).

W punkcie 4.1.2.2 stwierdziliśmy, że w ogólnodostępnych opracowaniach statystycznych nie są publikowane dane, które z należytą precyzją mogłyby opisywać poziom wiedzy wykorzystywanej w poszczególnych gałęziach gospodarki. Niestety, brakuje również danych, które w naszym modelu mogłyby posłużyć za miernik liczby innowacji wprowadzanych w wyróżnionych gałęziach. Na potrzeby obliczeń założyliśmy, że w początkowym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ liczba innowacji wprowadzonych w każdej gałęzi zapewni wzrost wykorzystywanej wiedzy technicznej o 3%. Dokonując przekształceń warunku (2.11) otrzymaliśmy równanie:

$$\hat{q} = 0,03 \cdot W^{-1} w \sum_{i=1}^{n} l_i,$$

gdzie $\hat{q}$ jest wektorem innowacji wprowadzonych w poszczególnych gałęziach gospodarki w roku bazowym. Następnie, znając postać wektora $\hat{q}$, oszacowaliśmy współczynniki produktywności (wydajności) innowacyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego, postępując analogicznie jak w przypadku wyznaczania wartości współczynników produktywności obu rodzajów kapitału wykorzystywanych w działalności produkcyjnej. Zastosowaliśmy więc następujące wzory:

$$p_{ii}^{g} = \frac{\hat{q}_i}{g_i}, \qquad p_{ii}^{d} = \frac{\hat{q}_i}{d_i},$$

$i = 1, \ldots, n$. Wartości parametrów modelu wykorzystane w obliczeniach prezentuje tabela A.2(str. 117).

4.1.3. Magistrala

Wszędzie gdzie w obliczeniach występują zmienne wyrażone w jednostkach pieniężnych (np. produkcja w gałęziach gospodarki), prezentowane są generalnie w cenach stałych roku bazowego. W celu wyznaczenia magistrali i optymalnej stopy zrównoważonego wzrostu gospodarki z wyżej oszacowanymi wartościami parametrów rozwiązaliśmy zadanie (4.4)–(4.5). W wyniku obliczeń otrzymaliśmy stopę wzrostu zrównoważonego

$$\bar{\lambda} = 0,0235.$$

Aby gospodarka mogła rozwijać się z tą stopą, konieczne jest, oczywiście, osiągnięcie przez nią ściśle określonej struktury produkcyjnego i innowacyjnego kapitału ludzkiego, produkcji, konsumpcji, produkcyjnego i innowacyjnego kapitału fizycznego, a także wiedzy i kapitału ludzkiego. Wyniki prezentujemy w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Optymalny stan gospodarki (magistrala) – struktura

Gałąź gospodarki	$\bar{\kappa}/\Vert\bar{\kappa}\Vert$	$\bar{\phi}/\Vert\bar{\phi}\Vert$	$\bar{\mu}/\Vert\bar{\mu}\Vert$	$\bar{\eta}/\Vert\bar{\eta}\Vert$	$\bar{\chi}/\Vert\bar{\chi}\Vert$	$\bar{\xi}/\Vert\bar{\xi}\Vert$	$\bar{\omega}/\Vert\bar{\omega}\Vert$	$\bar{\gamma}/\Vert\bar{\gamma}\Vert$
1.Rolnictwo	0,0765	0,0004	0,0230	0,0078	0,0019	0,0539	0,0024	0,0365
2.Górnictwo	0,0281	0,1490	0,0741	0,1551	0,3035	0,0310	0,3131	0,0018
3.Przetwórstwo	0,1322	0,0084	0,2024	0,2027	0,0421	0,3233	0,0415	0,2521
4.Energia	0,1308	0,0088	0,0371	0,0151	0,0592	0,0365	0,0555	0,0161
5.Budownictwo	0,0150	0,0070	0,0343	0,0780	0,0411	0,0526	0,0368	0,0477
6.Handel	0,0415	0,0007	0,0777	0,0311	0,0167	0,1357	0,0217	0,1356
7.Hotele	0,0050	0,0010	0,0159	0,0093	0,0303	0,0143	0,0337	0,0235
8.Transport	0,2065	0,0169	0,0650	0,0520	0,0413	0,0650	0,0313	0,0446
9.Finanse	0,0225	0,0076	0,0458	0,0361	0,0811	0,0338	0,0929	0,0302
10.Nieruchomości	0,2455	0,0004	0,0754	0,0148	0,0289	0,1077	0,0317	0,1227
11.Administracja	0,0280	0,7665	0,1409	0,2742	0,2489	0,0492	0,2459	0,1072
12.Edukacja	0,0234	0,0040	0,0912	0,0419	0,0377	0,0303	0,0366	0,0636
13.Zdrowie	0,0169	0,0030	0,0644	0,0329	0,0289	0,0302	0,0231	0,0610
14.Pozostałe	0,0190	0,0040	0,0323	0,0218	0,0381	0,0365	0,0360	0,0574

Źródło: Obliczenia własne.

Wśród wektorów wyznaczających optymalny stan gospodarki zwraca uwagę charakterystyczna struktura magistrali konsumpcyjnej. Zgodnie z lematem 2.1, osiągnięcie maksymalnej stopy zrównoważonego wzrostu możliwe jest tylko wtedy, gdy konsumpcja, w przeliczeniu na jednostkę kapitału ludzkiego, nie przekracza wartości normatywnych, czyli minimalnych. Nie oznacza to, oczywiście, że w procesie wzrostu biegnącym po magistrali wartość konsumpcji pozostaje stała. Przeciwnie, rośnie ona ze stałą, magistralną stopą wzrostu, co przy założeniu niezmiennej liczby ludności implikuje stały wzrost konsumpcji *per capita*.

4.1.4. Zbieżność optymalnych ścieżek wzrostu do magistrali

Aby zilustrować efekt magistrali, o którym mowa w rozdziale 2, po wyznaczeniu optymalnego stanu gospodarki i odpowiadającej mu optymalnej stopy wzrostu, rozwiązaliśmy zadanie znalezienia optymalnej ścieżki wzrostu gospodarczego (4.10)–(4.11). Przyjęliśmy w nim 20-okresowy (letni) horyzont czasowy $\mathcal{T}$, ustalając jako okres początkowy rok 2000. Optymalne trajektorie produkcyjnego i innowacyjnego kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego dostępnego w działalności produkcyjnej, kapitału ludzkiego *per capita*, konsumpcji i wiedzy wyznaczyliśmy bezpośrednio, jako rozwiązania zadania programowania liniowego (elementy wektora $\mathbf{x}$). Optymalne trajektorie produkcji oraz innowacyjnego kapitału ludzkiego otrzymaliśmy natomiast na podstawie równań (4.12), (4.13). Dla każdego okresu t wyznaczyliśmy również struktury poszczególnych trajektorii. Ich zmienność oraz zbieżność do struktur magistralnych prezentują rysunki B.1–B.56 (str. 123 – 141).

Na wykresach zamieszczonych na rysunkach B.1–B.56 można zauważyć, że we wszystkich wyróżnionych gałęziach gospodarki wyraźniejszą zbieżnością do magistrali charakteryzują się te trajektorie, które powiązane są bezpośrednio z działalnością produkcyjną. Najszybciej, bo już około czwartego okresu horyzontu czasowego $\mathcal{T} = \{0, \ldots, 20\}$, do poziomu optymalnego dostosowuje się struktura produkcji, a po upływie kolejnych dwóch lub trzech okresów do magistrali zbliżają się również struktury produkcyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego. Zdecydowanie mniej wyraźny okazuje się natomiast efekt magistrali w sferze innowacyjnej gospodarki. O ile trajektorie kapitału fizycznego i ludzkiego wykorzystywanego w działalności badawczo–rozwojowej w każdej gałęzi pozostają w środkowych okresach horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ w bliskim otoczeniu magistrali, o tyle zmieniające się poziomy wiedzy technicznej w gałęziach nie wykazują tak wyraźnej zbieżności do optymalnej ścieżki zrównoważonego wzrostu. Zbieżność ta uwidacznia się dopiero po przyjęciu w obliczeniach dłuższego horyzontu czasowego. Wyników tych nie prezentujemy, gdyż uznaliśmy, że wydłużenie horyzontu $\mathcal{T}$ kłóciłoby się z przyjętym w tej wersji modelu założeniem stacjonarności gospodarki (stałości technologii). Wydłużony horyzont postulujemy w punkcie 4.2 prezentując wyniki obliczeń w gospodarce niestacjonarnej, ze zmienną technologią.

Bardzo interesująca jest zmienność struktury kapitału ludzkiego. W gałęzi 1 (rolnictwo), 2 (górnictwo), 6 (handel), 7 (hotele) i 10 (nieruchomości) od pierwszych okresów horyzontu $\mathcal{T}$ kapitał ludzki utrzymuje się na poziomie zbliżonym do magistralnego, jednak już około okresu $t = 7$ zaczyna się on wyraźnie zmieniać i w kolejnych okresach obserwujemy coraz szybsze odejście od magistrali. W gałęzi 9 (finanse) i 12 (edukacja) mamy do czynienia z całkowicie odwrotnym zachowaniem trajektorii kapitału ludzkiego. W początkowym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ znajdują się one daleko od optymalnej ścieżki zrównoważonego wzrostu i zbliżają się do niej wraz z upływem czasu, wchodząc w jej bliskie otoczenie w końcowych okresach horyzontu $\mathcal{T}$. Z kolei w gałęzi 4 (energia) i 5 (budownictwo) trajektorie te nie wykazują zbieżności do magistrali i przecinają ją w okresie $t = 7$. W pozostałych gałęziach gospodarki obserwujemy typowy efekt magistrali, tzn. trajektorie kapitału ludzkiego znajdują się w znacznej odległości od optymalnej ścieżki zrównoważonego wzrostu, w środkowych okresach horyzontu $\mathcal{T}$ zbliżają się do niej, po czym ponownie oddalają, zmierzając do stanu końcowego, w którym struktura kapitału ludzkiego jest daleka od struktury magistralnej.

Najwyraźniejszą zbieżnością do magistrali charakteryzują się, i to we wszystkich gałęziach gospodarki, optymalne trajektorie konsumpcji. Zauważmy, że struktura konsumpcji w żadnym okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ nie odbiega znacząco od struktury magistralnej. Wynik ten jest oczywistą konsekwencją z jednej strony przyjęcia założenia, że na ocenę dopuszczalnych ścieżek wzrostu wpływa jedynie użyteczność konsumpcji realizowanej w okresie t_1, z drugiej, zastosowania w obliczeniach funkcji użyteczności u postaci 4.3.

Z wyznaczonej optymalnej struktury gospodarki wynika, że maksymalna stopa wzrostu osiągana jest wtedy, gdy w gałęzi 11 (administracja publiczna) duże zasoby obu rodzajów kapitału angażowane są w przedsięwzięcia badawczo–rozwojowe. Okazuje się bowiem, że w gałęzi tej nie jest możliwe utrzymanie magistralnej stopy wzrostu wiedzy technicznej bez opracowywania i wdrażania innowacji własnych. Jednocześnie, niska produktywność zarówno kapitału fizycznego, jak i ludzkiego wykorzystywanego w działalności innowacyjnej gałęzi 11 pociąga za sobą konieczność zaangażowania w niej znacznych zasobów, przekraczających nakłady ponoszone w innych gałęziach gospodarki. W rezultacie, w optymalnym procesie wzrostu to właśnie tej gałęzi odpowiadają najwyższe wartości innowacyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego.

Z uwagi na dużą liczbę uproszczeń poczynionych na etapie szacowania parametrów modelu, wyników naszych obliczeń nie można traktować jako prognozy kształtowania się podstawowych wielkości ekonomicznych w latach 2001–2020. Nie są one jednak bezwartościowe. Dostarczają bowiem informacji o długości horyzontu czasowego niezbędnego na dojście optymalnej ścieżki wzrostu (gospodarki) do magistrali. Pamiętając, że okres ten jest różny dla poszczególnych gałęzi i trajektorii wyznaczających optymalny proces wzrostu, możemy uznać, że rozpatrywana gospodarka wchodzi w bliskie otoczenie magistrali około szóstego okresu (roku) horyzontu $\mathcal{T}$. Niezwykle ważna dla zrozumienia mechanizmu wzrostu gospodarczego jest również informacja o magistralnej stopie wzrostu gospodarki oraz o strukturze produkcyjnego i innowacyjnego kapitału ludzkiego, produkcji, kapitału fizycznego, wiedzy i kapitału ludzkiego na magistrali.

4.2. Gospodarka z postępem technologicznym

W rozdziale 3 stwierdziliśmy, że analiza gospodarki w długim horyzoncie czasowym pociąga za sobą konieczność uwzględnienia możliwości zmiany wykorzytstywanej w niej technologii. Omówiliśmy dwa kierunki uogólnień modelu Leontiefa–Gale'a z kapitałem ludzkim: model z przedziałami stałą technologią oraz model z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. W pierwszym z nich założyliśmy, że technologia może zmieniać się tylko w ograniczonej liczbie okresów, znanej już w początkowym okresie horyzontu $\mathcal{T}$. Ponieważ w pozostałych okresach, pomiędzy skokami technologicznymi, parametry modelu pozostają stałe, zadanie znalezienia optymalnej ścieżki wzrostu gospodarki nie komplikuje się znacząco w stosunku do zadania sformułowanego przy okazji analizy modelu stacjonarnego. W drugim modelu, z uwagi na możliwość występowania zmian technologicznych w każdym okresie horyzontu czasowego, wyznaczenie optymalnego procesu wzrostu nastręcza zdecydowanie więcej trudności i staje się zadaniem niezwykle złożonym i pracochłonnym. Ujawnienie efektu magistrali wymaga szybkiej zbieżności parametrów modelu do wartości granicznych lub bardzo długiego horyzontu czasowego i, tym samym, znacznego zwiększenia liczby zmiennych w rozwiązywanym zadaniu optymalizacyjnym. Z tego powodu prowadząc analizę empiryczną modelu z postępem technologicznym ograniczymy się dalej do gospodarki z przedziałami stałą technologią.

4.2.1. Wersja zadania zastosowanego w obliczeniach

Podobnie jak w przypadku gospodarki stacjonarnej, w obliczeniach prowadzonych na podstawie modelu z przedziałami stałą technologią przyjęliśmy, że produkcyjne i innowacyjne przekształcenia technologiczne mają, odpowiednio, postać (4.1), (4.2). W rezultacie, dla każdej z rozważanych technologii, optymalną stopę zrównoważonego wzrostu gospodarczego i odpowiadającą jej optymalną strukturę gospodarki mogliśmy wyznaczyć rozwiązując zadanie (4.4)–(4.5) i wykorzystując warunki (4.6)–(4.9).

Prezentując model gospodarki z przedziałami stałą technologią w rozdziale 3 przyjęliśmy, że częstotliwość występowania skoków technologicznych jest uzależniona od wzrostu wiedzy technicznej w poszczególnych gałęziach gospodarki. Im szybsza jest akumulacja wiedzy, tym krótsze mogą być odstępy pomiędzy wprowadzeniem kolejnych zmian technologicznych. Taka konstrukcja modelu uniemożliwia sprowadzenie zadania wyznaczenia optymalnej ścieżki wzrostu wprost do zadania programowania liniowego (4.10)–(4.11). Rozwiązaliśmy więc następujące zadanie:

znaleźć

$$\min f^T \mathbf{x} \tag{4.18}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t \mathbf{x} &\leq 0, \\ \mathbf{B}_t \mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

gdzie

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A1}_t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A1}_t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A1}_t & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A2} & \bar{c}_{t_1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{B1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B2}_t & \mathbf{B3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B2}_t & \mathbf{B3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B2}_t & \mathbf{B3} & \mathbf{b4} \end{bmatrix},$$

$\bar{c}_{t_1}$ jest wektorem normy konsumpcji obowiązującej w ostatnim okresie horyzontu czasowego $\mathcal{T}$, wektory f, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b4}$, $\mathbf{x}$ oraz macierze $\mathbf{A2}$, $\mathbf{B1}$, $\mathbf{B3}$ mają taką samą postać, jak odpowiednie wektory i macierze w zadaniu (4.10)–(4.11) (str. 93–94), postacie macierzy $\mathbf{A1}_t$, $\mathbf{B2}_t$ zależą od wykorzystywanej w gospodarce technologii zgodnie z regułą

$$\mathbf{A1}_t = \begin{cases} \mathbf{A1_1}, \text{ gdy nie jest spełniona nierówność } \mathbf{x}_t \geq \bar{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{A1_2}, \text{ gdy jest spełniona nierówność } \mathbf{x}_t \geq \bar{\mathbf{x}}, \end{cases}$$

$$\mathbf{B2}_t = \begin{cases} \mathbf{B2_1}, \text{ gdy nie jest spełniona nierówność } \mathbf{x}_t \geq \bar{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{B2_2}, \text{ gdy jest spełniona nierówność } \mathbf{x}_t \geq \bar{\mathbf{x}}, \end{cases}$$

wektor $\bar{\mathbf{x}}$ ma postać

$$\bar{\mathbf{x}}^T = \big(0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{w}^T, 0, 0\big),$$

gdzie $\bar{w}$ jest wektorem określającym wymagane poziomy wiedzy technicznej, których osiągnięcie w poszczególnych gałęziach gospodarki spowoduje zmianę stosowanej technologii, struktury macierzy $\mathbf{A1_1}$, $\mathbf{A1_2}$, $\mathbf{B2_1}$, $\mathbf{B2_2}$ są identyczne jak struktury macierzy $\mathbf{A1}$ i $\mathbf{B2}$ w zadaniu (4.10)–(4.11) (str. 93), z tym tylko zastrzeżeniem, że macierze oznaczone indeksem 1 wypełnione są parametrami opisującymi pierwszą, początkową technologię, natomiast macierze oznaczone indeksem 2 odpowiadają drugiej technologii, obowiązującej w gospodarce po wystąpieniu skoku technologicznego. Przyjęliśmy tym samym, że w ciągu całego rozpatrywanego horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ nastąpi tylko jedna zmiana technologii.

4.2.2. Dane statystyczne wykorzystane w obliczeniach

Prowadząc analizę empiryczną modelu z przedziałami stałą technologią i dążąc do zilustrowania ujawniającego się w niej efektu magistrali, wykorzystaliśmy ten sam zestaw danych statystycznych, co w obliczeniach przeprowadzonych dla gospodarki stacjonarnej. Przyjęliśmy, że pierwsza technologia, obowiązująca w okresie początkowym jest identyczna z technologią, którą założyliśmy w pierwszej części rozdziału.

Przy ustalaniu parametrów opisujących drugą technologię, stosowaną w gospodarce po wystąpieniu skoku technologicznego, posłużyliśmy się informacją o technologii początkowej. Uznaliśmy, że wprowadzenie zmian strukturalnych, technicznych i organizacyjnych powinno umożliwić osiągnięcie w gospodarce wyższej stopy zrównoważonego wzrostu. By było to możliwe zmniejszyliśmy wartości tych parametrów, które hamują wzrost gospodarczy, zwiększając jednocześnie wartości współczynników wpływających na tempo akumulacji kapitału fizycznego i ludzkiego oraz możliwości produkcyjne wszystkich wyróżnionych gałęzi. Oszacowane wcześniej macierze współczynników nakładów bieżących A, deprecjacji kapitału fizycznego δ^P, δ^R oraz deprecjacji kapitału ludzkiego δ^H przemnożyliśmy zatem przez liczbę $0,9$, natomiast macierze współczynników efektywności inwestycji w kapitał fizyczny σ^P, σ^R, efektywności nauki σ^H oraz produktywności kapitału fizycznego i ludzkiego P^k, P^g, P^b, P^d przez $1,1$. Na niezmienionym poziomie pozostawiliśmy wartości współczynników struktury nakładów inwestycyjnych S^P, S^R oraz międzygałęziowych przepływów wiedzy W. Dodatkowo, dokonaliśmy także niewielkiej modyfikacji struktury zatrudnienia w gospodarce, opisanej elementami macierzy o. W wyniku zmiany, kosztem gałęzi 1 (rolnictwo), zwiększony został udział pracowników gałęzi 3 (przetwórstwo przemysłowe), 5 (budownictwo), 6 (handel) i 7 (hotele) w ogólnej liczbie zatrudnionych. Na koniec, kierując się założeniem, że postęp technologiczny przyczynia się między innymi również do wzrostu konsumpcji, elementy wektora normy konsumpcji $\bar{c}$ przemnożyliśmy przez liczbę $1,1$. Wartości parametrów charakteryzujące tak wyznaczoną technologię prezentują tabele A.7–A.9 (str. 121–122).

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, w analizowanym przez nas modelu z przedziałami stałą technologią skok technologiczny następuje wtedy, gdy w każdej gałęzi gospodarki osiągnięty zostanie wymagany poziom wiedzy technicznej. Poziomy te oznaczyliśmy przez $\bar{w}_i$, $i = 1, \ldots, n$ i ustaliliśmy arbitralnie tak, aby obie technologie były wykorzystywane w gospodarce w zbliżonej liczbie okresów. Prezentuje je tabela A.7 (str. 121).

4.2.3. Magistrale

W gospodarce przedziałami stacjonarnej z każdą kolejną technologią jest generalnie związana inna magistrala. Prowadząc obliczenia musieliśmy więc dwukrotnie rozwiązać zadanie (4.4)–(4.5), wyznaczając optymalne stopy wzrostu i optymalne stany gospodarki odpowiadające obu technologiom, które mogą być stosowane w gospodarce w analizowanym horyzoncie czasowym $\mathcal{T} = \{0, \ldots, t_1\}$. Oczywiście, skoro technologia początowa jest identyczna z technologią gospodarki stacjonarnej z punktu 4.1, również pierwsza magistrala jest identyczna z magistralą wyznaczoną w punkcie 4.1.3. Optymalny stan gospodarki związany z tą technologią prezentuje więc tabela 4.1. Magistralna stopa wzrostu wynosi w tym przypadku

$$\bar{\lambda}_1 = 0,0235.$$

Zgodnie z założeniem przyjętym podczas ustalania wartości parametrów charakteryzujących drugą technologię, po wystąpieniu skoku technologicznego optymalna stopa zrównoważonego wzrostu gospodarczego wzrosła do

$$\bar{\lambda}_2 = 0,0293.$$

Strukturę optymalnego stanu gospodarki odpowiadającą drugiej technologii prezentuje tabela 4.2.

Tabela 4.2. Optymalny stan gospodarki po skoku technologicznym (druga magistrala) – struktura

Gałąź gospodarki	$\bar{\kappa}/\|\bar{\kappa}\|$	$\bar{\phi}/\|\bar{\phi}\|$	$\bar{\mu}/\|\bar{\mu}\|$	$\bar{\eta}/\|\bar{\eta}\|$	$\bar{\chi}/\|\bar{\chi}\|$	$\bar{\xi}/\|\bar{\xi}\|$	$\bar{\omega}/\|\bar{\omega}\|$	$\bar{\gamma}/\|\bar{\gamma}\|$
1.Rolnictwo	0,0865	0,0003	0,0216	0,0107	0,0026	0,0492	0,0039	0,0365
2.Górnictwo	0,0383	0,2329	0,0808	0,1432	0,2836	0,0276	0,2836	0,0018
3.Przetwórstwo	0,1585	0,0182	0,2071	0,2853	0,0486	0,3306	0,0578	0,2521
4.Energia	0,1276	0,0142	0,0320	0,0131	0,0567	0,0332	0,0541	0,0161
5.Budownictwo	0,0145	0,0089	0,0486	0,0659	0,0427	0,0739	0,0471	0,0477
6.Handel	0,0342	0,0182	0,0928	0,0868	0,0231	0,1332	0,0358	0,1356
7.Hotele	0,0056	0,0064	0,0152	0,0339	0,0366	0,0138	0,0579	0,0235
8.Transport	0,1753	0,0188	0,0596	0,0331	0,0365	0,0597	0,0364	0,0446
9.Finanse	0,0259	0,0099	0,0407	0,0383	0,0831	0,0305	0,0825	0,0302
10.Nieruchomości	0,2375	0,0004	0,0726	0,0162	0,0322	0,1049	0,0375	0,1227
11.Administracja	0,0315	0,6492	0,1681	0,1917	0,2307	0,0480	0,1918	0,1072
12.Edukacja	0,0253	0,0037	0,0891	0,0300	0,0397	0,0293	0,0389	0,0636
13.Zdrowie	0,0193	0,0026	0,0623	0,0188	0,0267	0,0293	0,0268	0,0610
14.Pozostałe	0,0197	0,0051	0,0318	0,0187	0,0408	0,0361	0,0427	0,0574

Źródło: Obliczenia własne.

4.2.4. Zbieżność optymalnych ścieżek wzrostu do magistral

Optymalną ścieżkę wzrostu gospodarczego wyznaczyliśmy rozwiązując sformułowane w punkcie 4.2.1 zadanie (4.10)–(4.11). W obliczeniach ustaliliśmy 30-okresowy (letni) horyzont czasowy $\mathcal{T}$, przyjmując, podobnie jak podczas analizy modelu stacjonarnego, że okresem początkowym tego horyzontu jest rok 2000. Aby zilustrować zachodzący w gospodarce efekt magistrali dla każdego okresu $t \in \mathcal{T}$ wyznaczyliśmy strukturę każdej trajektorii modelu. Ich przebieg, w szczególności zbieżność do struktury magistralnej, prezentują rysunki B.57–B.112 (str. 142–160). Widać na nich wyraźnie, że po około pięciu początkowych okresach struktura gospodarki zaczyna zbliżać się do struktury optymalnej, wyznaczonej przez pierwszą magistralę. Dzięki akumulacji wiedzy technicznej w okresie $t = 14$ dochodzi do skoku technologicznego i począwszy od tego okresu w gospodarce zaczyna obowiązywać druga, efektywniejsza technologia. Wcześniej jednak, kilka okresów przed wprowadzeniem zmian technologicznych, gospodarka zaczyna generalnie odchodzić od pierwszej magistrali, niejako przygotowując się na przyjęcie nowej technologii i dostosowując do nowych warunków, w których będzie funkcjonować po jej wprowadzeniu. Po skoku technologicznym, około okresu $t = 18$, struktura gospodarki zaczyna stabilizować się na nowym poziomie, wyznaczonym przez drugą magistralę i pozostaje w jej bliskim otoczeniu aż do okresu $t = 26$. Naturalnie, w ostatnich okresach horyzontu $\mathcal{T}$

obserwujemy znowu odejście gospodarki od magistrali i zwrot ku strukturze gwarantującej maksymalizację społecznej funkcji użyteczności.

Podobnie jak w rozpatrywanym wcześniej modelu stacjonarnym, również obecnie, w gospodarce z przedziałami stałą technologią, okazuje się, że wyraźniejszą zbieżnością do magistrali charakteryzują się te trajektorie, które powiązane są bezpośrednio z działalnością produkcyjną gospodarki. Ponownie, we wszystkich wyróżnionych gałęziach najsilniejszy efekt magistrali obserwujemy podczas analizy zmienności struktury produkcji, produkcyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego oraz, oczywiście, konsumpcji. Wyraźnie widoczny jest on również na rysunkach prezentujących zmienność struktur innowacyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego. Zdecydowanie wyraźniejsza w stosunku do obserwowanej w punkcie 4.1 jest też zbieżność do magistrali trajektorii kapitału ludzkiego oraz wiedzy technicznej. Jest ona, po pierwsze, wynikiem wydłużenia horyzontu czasowego $\mathcal{T}$ i tym samym zwiększenia wpływu, jakie zmienność poziomów wiedzy technicznej wywiera na kształtowanie się pozostałych zmiennych modelu oraz, po drugie, konsekwencją założonej (co prawda tylko jednorazowej) możliwości zmiany technologii w gospodarce. Wystąpienie skoku technologicznego nie wpłynęło na przebieg trajektorii konsumpcji i ponownie, na przestrzeni całego horyzontu $\mathcal{T}$, jej struktura utrzymuje się na poziomie wyznaczonym przez optymalną ścieżkę zrównoważonego wzrostu. Jak już podkreślaliśmy wcześniej, taki szczególny przebieg trajektorii konsumpcji wynika bezpośrednio z założeń przyjętych na etapie konstrukcji modelu oraz ustalonej przez nas postaci społecznej funkcji użyteczności u.

Można zauważyć, że w analizowanej gospodarce zmiany zachodzące w strukturze kapitału ludzkiego i wiedzy technicznej są zwykle powolne i łagodne, a wykresy przedstawiające kształtowanie się tych struktur na przestrzeni całego horyzontu $\mathcal{T}$ „gładkie". Inaczej jest w przypadku struktur produkcji oraz produkcyjnego i innowacyjnego kapitału ludzkiego, które zmieniają się niekiedy bardzo gwałtownie, co – jak należy przypuszczać – jest rezultatem większej swobody, jaką w kształtowaniu tych wielkości mają wyróżnione gałęzie gospodarki. Posiadane przez nie zasoby produkcyjnego kapitału fizycznego i ludzkiego wyznaczają jedynie górną granicę możliwości produkcyjnych. W wyniku decyzji podejmowanych w gałęziach, produkcja może być bowiem łatwo ograniczana i obniżana do poziomu znacznie odbiegającego od potencjalnego. Podobnie, dzięki możliwości swobodnego przemieszczania dostępnego zasobu kapitału ludzkiego pomiędzy działalnością produkcyjną i badawczo–rozwojową, obserwujemy w gospodarce duże wahania wielkości produkcyjnego i innowacyjnego kapitału ludzkiego. Tymczasem zmienność zarówno wiedzy technicznej, jak i kapitału ludzkiego jest zdeterminowana przez sformułowane na etapie konstrukcji modelu równania dynamiki. Ponieważ wiedza w naszym modelu nie ulega deprecjacji i jest jedynym czynnikiem wpływającym na tempo akumulacji kapitału ludzkiego, nie są możliwe gwałtowne spadki jego poziomu[18]. Z kolei nadmierny wzrost inwestycji w kapitał ludzki będzie skutkował ograniczeniem inwestycji produkcyjnych i w efekcie spowolnieniem wzrostu produkcji (a tym samym konsumpcji) w gospodarce. Gwałtowne zmiany poziomów wiedzy technicznej i kapitału ludzkiego mogą występować ewentualnie tylko w końcowych okresach rozpatrywanego horyzontu czasowego $\mathcal{T}$.

Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe, niezależnie od szeregu wcześniej sformułowanych zastrzeżeń pod adresem wartości parametrów modelu, ujawniają istotny wpływ innowacji i postępu technologicznego na zachowanie gospodarki i przebieg jej optymalnych ścieżek wzrostu. Wynika z nich, że zmiana technologii wytrąca gospodarkę z bliskiego otoczenia magistrali na około 6 okresów (lat), po czym ponownie następuje reorientacja gospodarki na (nową) magistralę. Efekt ten powtarza się także po zmianie warunków początkowych gospodarki, zatem ma charakter stabilny. Długość horyzontu czasowego potrzebnego na dostosowanie się gospodarki do nowych warunków technologicznych zależy bardzo mocno od siły skoku technologicznego. Jeżeli nowa technologia jest zbliżona do dotychczasowej, to wszystkie wyróżnione gałęzie dostosowują się do niej dość szybko. Jeśli jednak zmiany technologiczne są bardziej rewolucyjne, dostosowanie trwa dłużej.

[18]Wiedzę w naszej pracy traktujemy jako dobro społeczne (ogólnodostępne), zatem założenie o braku deprecjacji jest uzasadnione.

Zakończenie

Głównym celem pracy była

- budowa wielosektorowego, matematycznego modelu wzrostu (w wersji stacjonarnej i niestacjonarnej) uwzględniającego akumulację kapitału ludzkiego i wiedzy oraz postęp technologiczny w gospodarce,
- analiza tzw. magistralnych własności optymalnych procesów (ścieżek) wzrostu w takim modelu,
- weryfikacja „efektu magistrali" na przykładzie gospodarki Polski w przestrzeniach: kapitału (odpowiednio – produkcyjnego, innowacyjnego i ludzkiego), produkcji, konsumpcji i wiedzy.

Pragnęliśmy w ten sposób połączyć wciąż rosnący dorobek teorii wzrostu endogenicznego z dorobkiem teorii magistral, która, mimo że w drugiej połowie minionego wieku rozwijała się bardzo dynamicznie, obecnie nie należy do głównego nurtu teorii ekonomicznych. Tymczasem może ona dostarczyć niezwykle przydatnego – zarówno w rozważaniach teoretycznych, jak i empirycznych – narzędzia, jakim niewątpliwie jest „droga szybkiego ruchu" gospodarczego nazywana magistralą. Dla racjonalnie postępującej władzy gospodarczej znajomość magistralnej struktury i magistralnego tempa wzrostu może, i powinna, być fundamentalną wytyczną przy formułowaniu długookresowych założeń polityki społecznej i gospodarczej. Dlatego budowa modelu wzrostu, który uwzględniałby wpływ, jaki na przebieg procesów gospodarczych wywiera zgromadzony w gałęziach zasób kapitału ludzkiego i wiedzy oraz postęp techniczny, a jednocześnie ujawniałby efekt magistrali, jest zadaniem zarówno ważnym praktycznie, jak i ciekawym teoretycznie. Modele takie przedstawiliśmy w rozdziale 3.

W większości prezentowanych w literaturze wielosektorowych modeli wzrostu dowód „efektu magistrali" przeprowadza się przy założeniu stałości wykorzystywanej w gospodarce technologii. Nawet w pracach, w których dopuszcza się zmienność technologii, twierdzenia o magistrali formułowane i dowodzone są zazwyczaj jako uogólnienie wyników uzyskanych na gruncie modeli stacjonarnych. My postąpiliśmy podobnie. Zanim bowiem przystąpiliśmy do analizy modeli niestacjonarnych, uwzględniających zjawisko postępu technicznego, w rozdziale 2 skonstruowaliśmy model gospodarki, w której technologia we wszystkich okresach rozpatrywanego horyzontu czasowego pozostaje stała. Pokazaliśmy, że w gospodarce takiej optymalne ścieżki wzrostu gospodarczego są w środkowym okresie odpowiednio długiego horyzontu czasowego zbieżne do magistrali. Co więcej, udowodniliśmy, że w długim okresie czasu w gospodarce pozostającej na magistrali (w równowadze) możliwy jest wzrost produkcji (a zatem również i konsumpcji) w przeliczeniu na zatrudnionego (*per capita*), co jest niemożliwe w gospodarce bez kapitału ludzkiego i wiedzy (był to zresztą jeden z powodów krytyki teorii wzrostu i w szczególności modelu Solowa–Swanna w latach 80-tych ubiegłego wieku, a w konsekwencji rozwoju teorii wzrostu endogenicznego). Uogólniając uzyskane wyniki, w rozdziale 3 wykazaliśmy, że analogiczne własności ma gospodarka, w której technologia może zmieniać się w czasie. Przy budowie modelu takiej gospodarki przyjęliśmy, co zrozumiałe, że postęp technologiczny prowadzi do poprawy możliwości produkcyjnych, zatem gdy się ujawnia, wzrost produkcji *per capita* staje się coraz szybszy.

Jednym z ważnych wyzwań stojących obecnie przed teorią wzrostu endogenicznego jest niewątpliwie uzgodnienie i powszechne przyjęcie precyzyjnych definicji takich pojęć, jak kapitał ludzki czy wiedza techniczna. Okazuje się bowiem, że pomimo ogromnego znaczenia, jakie przypisuje się tym pojęciom, często stosuje się je do nazywania zupełnie różnych zjawisk obserwowanych w gospodarczej rzeczywistości. Ponadto, większość z proponowanych definicji może być bez przeszkód wykorzystywana póki co jedynie w rozważaniach teoretycznych; w badaniach empirycznych, kiedy konieczny staje się pomiar tych zjawisk, zaczynają pojawiać się ogromne trudności związane z szacowaniem niemierzalnych wielkości, takich jak na przykład zdolności drzemiące w człowieku. Przyjęcie jednej definicji i dokładne określenie sposobu jej praktycznego wykorzystania dałoby możliwość większej porównywalności wyników osiąganych zarówno w analizie teoretycznej, jak i empirycznej.

Podczas szacowania wartości parametrów w celu weryfikacji empirycznej „efektu magistrali" w naszych modelach korzystaliśmy z danych statystycznych o gospodarce Polski (głównie w 2000 r.). Na ich podstawie wyznaczyliśmy zarówno magistrale, jak i optymalne ścieżki wzrostu. O ułomności materiału źródłowego pisaliśmy obszernie w rozdziale 4. Materiał statystyczny, gromadzony i udostępniany zarówno przez krajowy Urząd Statystyczny, jak i organizacje międzynarodowe takie, jak na przykład OECD, jest bowiem niewystarczający do precyzyjnego oszacowania wszystkich występujących w naszych modelach parametrów. Wartości niektórych z nich musieliśmy ustalić arbitralnie na, naszym zdaniem, akceptowalnym poziomie. Niestety, z uwagi na uproszczenia poczynione na etapie szacowania wartości parametrów, na podstawie skonstruowanych modeli nie można postawić wiarygodnych prognoz kształtowania się podstawowych wielkości ekonomicznych w przyszłości. Wyniki przeprowadzonych obliczeń stanowią jednak naturalne uzupełnienie analizy teoretycznej i ilustrują opisane na jej etapie własności modelowanej gospodarki.

Przystępując w rozdziale 2 do budowy endogenicznego wielosektorowego modelu wzrostu gospodarczego mieliśmy świadomość, że nie będziemy w stanie uwzględnić w nim wszystkich koncepcji teoretycznych stanowiących dorobek teorii wzrostu endogenicznego. Do analizy nie włączyliśmy, na przykład, kapitału społecznego, choć w literaturze poświęca się mu ostatnio wiele miejsca i traktuje jako rozwinięcie koncepcji kapitału ludzkiego[1]. Oczywiście, uwzględnione przez nas zjawiska postępu technicznego oraz akumulacji kapitału ludzkiego i wiedzy technicznej uważane są przez większość ekonomistów za najważniejsze czynniki długookresowego wzrostu produkcji i konsumpcji *per capita* i to one odgrywają najistotniejszą rolę zarówno w badaniach teoretycznych, jak i empirycznych. Kontynuując rozważania zapoczątkowane w 2 i 3 rozdziale pracy należałoby zatem włączyć do analizy i te nowe czynniki wzrostu, które, być może, pozwoliłyby na lepsze zrozumienie procesu wzrostu gospodarczego.

W rozdziale 3, w którym rozpatrywaliśmy gospodarkę ze zmienną technologią, zaprezentowaliśmy dwa kierunki uogólnień modelu stacjonarnego. W pierwszym z nich przyjęliśmy, że technologia wykorzystywana w gospodarce zmienia się skokowo i pozostaje stała pomiędzy okresami wprowadzania zmian. W drugim uogólnieniu założyliśmy, że technologia może zmieniać się w każdym okresie analizowanego horyzontu czasowego, zbliżając się asymptotycznie do technologii granicznej, wzorcowej. Nie zbudowaliśmy natomiast modelu, w którym zmiany technologiczne mogą być wprowadzane w każdym okresie, nie prowadząc przy tym gospodarki do technologii granicznej, lecz opisując, na przykład, jej cykliczny rozwój. Można przypuszczać, że w tego typu gospodarkach w odpowiednio długim okresie czasu odległości pomiędzy ścieżkami optymalnymi „startującymi" z różnych stanów początkowych będą, prawdopodobnie, stawały się coraz mniejsze. Skonstruowanie odpowiedniego modelu i wykazanie dla niego opisanej własności stanowiłoby interesujące rozszerzenie wyników uzyskanych w tej pracy.

Wytyczając kierunki dalszych badań nad endogenicznymi wielosektorowymi modelami wzrostu nie można zapomnieć też o prowadzonej na ich podstawie analizie empirycznej. Prowadząc obliczenia w oparciu o dane statystyczne dla gospo-

[1]Zob. np. S. N. Durlauf, M. Fafchamps [23], F. Sabatini [92].

darki Polski zmuszeni byliśmy do przyjęcia szeregu upraszczających założeń, które niewątpliwie zniekształciły uzyskane wyniki. By były one dokładniejsze i w większym stopniu odpowiadały gospodarczej rzeczywistości konieczne jest wykorzystanie, a wcześniej zgromadzenie, bardziej precyzyjnych danych statystycznych. Być może, gdybyśmy podczas prowadzenia obliczeń dysponowali odpowiednimi danymi, efekt magistrali byłby wyraźniejszy, a liczba lat potrzebnych do jego ujawnienia mniejsza. Niewątpliwie cennych informacji o przebiegu optymalnych ścieżek wzrostu w rzeczywistych gospodarkach dostarczą kolejne analizy empiryczne.

Podjęta w pracy próba połączenia dorobku teorii magistral z dorobkiem teorii wzrostu endogenicznego dostarczyła wielu interesujących wyników. Mamy nadzieję, że będą one stanowiły dobry punkt wyjścia do dalszych badań i rozwoju wielosektorowych modeli wzrostu.

Aneks A

Wartości parametrów wykorzystane w obliczeniach

A.1. Gospodarka ze stałą technologią

Tabela A.1. Początkowy stan gospodarki[1]

Gałąź gospodarki	k_0	g_0	h_0	w_0
1.Rolnictwo	7,2487	0,3020	0,9671	0,1000
2.Górnictwo	2,3636	0,2615	164,7612	17,1333
3.Przetwórstwo	13,0699	2,8685	24,2873	1,8667
4.Energia	12,0074	0,4941	34,0973	2,9333
5.Budownictwo	1,5755	0,0656	21,0649	2,2667
6.Handel	3,8483	0,1603	13,6048	0,7333
7.Hotele	0,4220	0,0176	16,8507	1,5333
8.Transport	17,6462	0,7353	25,0916	1,6667
9.Finanse	2,1554	0,0898	37,3851	5,3333
10.Nieruchomości	21,2760	0,8865	21,9443	1,6000
11.Administracja	2,4003	0,1000	133,1058	14,6667
12.Edukacja	1,9483	0,0812	24,8809	1,6667
13.Zdrowie	1,4966	0,0624	17,4391	1,2000
14.Pozostałe	1,6566	0,0690	22,6332	1,6667

Źródło: Obliczenia własne.

[1] Wartości produkcyjnego i innowacyjnego kapitału fizycznego oraz kapitału ludzkiego wyrażone są w tysiącach PLN (w cenach 2000 r.). Ponieważ początkowy wektor wiedzy nie został wyznaczony na podstawie danych statystycznych, ale przyjęty arbitralnie, nie wskazujemy jednostki, w jakiej wyrażamy poziomy wiedzy technicznej.

Tabela A.2. Wartości parametrów

Gałąź gospodarki	o	δ^P	σ^P	δ^H	σ^H
1.Rolnictwo	0,2846	0,0283	1,1000	0,0500	0,5000
2.Górnictwo	0,0147	0,0442	1,0836	0,0500	0,5000
3.Przetwórstwo	0,1764	0,0348	1,0099	0,0500	0,5000
4.Energia	0,0156	0,0258	1,0107	0,0500	0,5000
5.Budownictwo	0,0537	0,0414	0,8006	0,0500	0,5000
6.Handel	0,1369	0,0283	0,9358	0,0500	0,5000
7.Hotele	0,0149	0,0184	0,8000	0,0500	0,5000
8.Transport	0,0514	0,0180	1,0616	0,0500	0,5000
9.Finanse	0,0197	0,0351	0,9794	0,0500	0,5000
10.Nieruchomości	0,0543	0,0186	0,8388	0,0500	0,5000
11.Administracja	0,0325	0,0181	1,1000	0,0500	0,5000
12.Edukacja	0,0596	0,0140	0,8000	0,0500	0,5000
13.Zdrowie	0,0599	0,0231	0,8114	0,0500	0,5000
14.Pozostałe	0,0258	0,0214	0,8000	0,0500	0,5000

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.3. Wartości parametrów – c.d.

Gałąź gospodarki	P^k	P^b	P^g	P^d	$\bar{c}$
1.Rolnictwo	0,5962	16,3534	0,0423	1,1611	0,0384
2.Górnictwo	0,7557	3,0099	0,0255	0,4850	0,0019
3.Przetwórstwo	2,1956	8,1661	0,1028	0,0746	0,2647
4.Energia	0,2730	6,4147	0,0256	0,6008	0,0170
5.Budownictwo	5,2649	7,6332	0,1947	0,2824	0,0501
6.Handel	4,0847	8,7944	0,0797	0,1717	0,1423
7.Hotele	2,5951	4,5473	0,7270	1,2739	0,0247
8.Transport	0,3570	5,0880	0,0467	0,2478	0,0468
9.Finanse	1,2362	3,7691	0,1424	0,4340	0,0317
10.Nieruchomości	0,4630	8,6163	0,0144	0,2684	0,1288
11.Administracja	1,6020	2,3211	0,0038	0,1852	0,1126
12.Edukacja	1,2142	1,6631	0,1575	0,2157	0,0668
13.Zdrowie	1,5906	2,3735	0,2050	0,3059	0,0640
14.Pozostałe	1,9234	5,6868	0,1852	0,5476	0,0603

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.4. Macierz współczynników nakładów bieżących A

Gałąź gospodarki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.Rolnictwo	0,2652	0,0011	0,0625	0,0003	0,0011	0,0123	0,0245	0,0013	0,0003	0,0009	0,0022	0,0003	0,0037	0,0024
2.Górnictwo	0,0069	0,0301	0,0519	0,2627	0,0081	0,0048	0,0050	0,0025	0,0050	0,0057	0,0010	0,0007	0,0012	0,0076
3.Przetwórstwo	0,1926	0,1685	0,3504	0,0619	0,2952	0,1267	0,2892	0,1206	0,0805	0,0856	0,0586	0,0497	0,0990	0,1697
4.Energia	0,0196	0,0601	0,0265	0,0710	0,0134	0,0138	0,0339	0,0191	0,0091	0,0658	0,0166	0,0299	0,0256	0,0230
5.Budownictwo	0,0050	0,0088	0,0094	0,0724	0,1544	0,0163	0,0157	0,0115	0,0022	0,0490	0,0392	0,0056	0,0055	0,0135
6.Handel	0,1126	0,0372	0,1007	0,0373	0,0735	0,0823	0,1494	0,0636	0,0315	0,0285	0,0353	0,0174	0,0320	0,0572
7.Hotele	0,0007	0,0020	0,0021	0,0004	0,0027	0,0056	0,0063	0,0150	0,0026	0,0026	0,0018	0,0034	0,0022	0,0027
8.Transport	0,0111	0,0302	0,0329	0,0309	0,0258	0,0895	0,0159	0,1619	0,0426	0,0234	0,0175	0,0110	0,0140	0,0408
9.Finanse	0,0090	0,0122	0,0064	0,0073	0,0085	0,0166	0,0071	0,0237	0,3202	0,0075	0,0042	0,0025	0,0042	0,0097
10.Nieruchomości	0,0099	0,0393	0,0370	0,0504	0,0327	0,0917	0,0406	0,0867	0,0255	0,0821	0,0276	0,0279	0,0210	0,0531
11.Administracja	0	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0002	0	0	0,0001	0	0,0001	0,0001	0,0001
12.Edukacja	0,0002	0,0002	0,0005	0,0004	0,0003	0,0011	0,0004	0,0005	0,0017	0,0011	0,0004	0,0122	0,0004	0,0007
13.Zdrowie	0,0043	0,0004	0,0006	0,0003	0,0003	0,0007	0,0007	0,0004	0,0002	0,0007	0,0032	0,0002	0,0447	0,0014
14.Pozostałe	0,0020	0,0104	0,0060	0,0080	0,0036	0,0085	0,0121	0,0077	0,0030	0,0290	0,0064	0,0043	0,0101	0,0435

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.5. Macierz współczynników przepływu wiedzy W

Gałąź gospodarki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.Rolnictwo	0,7152	0,0011	0,0625	0,0003	0,0011	0,0023	0,0045	0,0013	0,0003	0,0009	0,0022	0,0003	0,0037	0,0024
2.Górnictwo	0,0069	0,7001	0,1519	0,0127	0,0081	0,0048	0,0050	0,0025	0,0050	0,0057	0,0010	0,0007	0,0012	0,0076
3.Przetwórstwo	0,0126	0,0685	0,7004	0,0119	0,0152	0,0267	0,0092	0,0206	0,0205	0,0256	0,0186	0,0097	0,0590	0,0197
4.Energia	0,0196	0,0601	0,1565	0,7210	0,0134	0,0138	0,0339	0,0191	0,0091	0,0658	0,0166	0,0299	0,0256	0,0230
5.Budownictwo	0,0050	0,0088	0,1694	0,0724	0,7044	0,0163	0,0157	0,0115	0,0022	0,0490	0,0392	0,0056	0,0055	0,0135
6.Handel	0,1126	0,0372	0,1507	0,0373	0,0735	0,7323	0,1494	0,0636	0,0315	0,0285	0,0353	0,0174	0,0320	0,0572
7.Hotele	0,0007	0,0020	0,1521	0,0004	0,0027	0,0056	0,7063	0,0150	0,0026	0,0026	0,0018	0,0034	0,0022	0,0027
8.Transport	0,0111	0,0302	0,1529	0,0309	0,0258	0,0895	0,0159	0,7119	0,0426	0,0234	0,0175	0,0110	0,0140	0,0408
9.Finanse	0,0090	0,0122	0,1564	0,0073	0,0085	0,0166	0,0071	0,0237	0,7202	0,0075	0,0042	0,0025	0,0042	0,0097
10.Nieruchomości	0,0099	0,0393	0,1570	0,0504	0,0327	0,0917	0,0406	0,0867	0,0255	0,6821	0,0276	0,0279	0,0210	0,0531
11.Administracja	0,0100	0,0100	0,1500	0,0100	0,0101	0,0101	0,0102	0,0100	0,0100	0,0101	0,7000	0,0101	0,0101	0,0101
12.Edukacja	0,0102	0,0102	0,1505	0,0104	0,0103	0,0111	0,0104	0,0105	0,0117	0,0111	0,0104	0,7122	0,0104	0,0107
13.Zdrowie	0,0043	0,0004	0,1506	0,0003	0,0003	0,0007	0,0007	0,0004	0,0002	0,0007	0,0032	0,0002	0,7447	0,0014
14.Pozostałe	0,0020	0,0104	0,1560	0,0080	0,0036	0,0085	0,0121	0,0077	0,0030	0,0290	0,0064	0,0043	0,0101	0,7435

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.6. Macierz współczynników struktury nakładów inwestycyjnych S^{P2}

Gałąź gospodarki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.Rolnictwo	0,0150	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0003	0,0012	0,0006	0,0004	0,0010	0	0,0022	0,0023	0,0150
2.Górnictwo	0	0,0001	0,0002	0,0003	0	0,0001	0,0004	0,0003	0,0010	0,0004	0,0001	0,0009	0,0012	0,0043
3.Przetwórstwo	0,4389	0,4150	0,4400	0,4507	0,4700	0,4462	0,4585	0,4215	0,4600	0,4341	0,4297	0,4200	0,4200	0,4277
4.Energia	0,0040	0,0006	0,0007	0,0047	0,0028	0,0053	0,0013	0,0008	0,0007	0,0029	0,0009	0,0091	0,0054	0,0082
5.Budownictwo	0,4000	0,3164	0,3300	0,4100	0,3913	0,3600	0,3000	0,3900	0,3504	0,3800	0,3300	0,3400	0,3200	0,4000
6.Handel	0,1400	0,1300	0,1140	0,0010	0,0958	0,1082	0,1298	0,0913	0,1451	0,0899	0,1200	0,2034	0,0800	0,0680
7.Hotele	0	0,0002	0	0,0065	0,0001	0	0,0076	0,0007	0,0021	0	0,0224	0,0075	0,0219	0,0075
8.Transport	0	0,0005	0	0,0001	0	0	0,0001	0,0013	0,0002	0,0130	0,0400	0,0088	0	0,0156
9.Finanse	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10.Nieruchomości	0,0001	0,1250	0,0500	0,0703	0,0400	0,0800	0,1005	0,0933	0,0400	0,0773	0,0552	0,0064	0,1484	0,0532
11.Administracja	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12.Edukacja	0	0	0	0,0004	0	0	0	0,0001	0,0001	0	0,0001	0,0001	0	0,0001
13.Zdrowie	0	0	0	0,0010	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0007	0,0009	0,0009	0	0
14.Pozostałe	0,0020	0,0120	0,0650	0,0550	0	0	0,0008	0,0001	0,0001	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008	0,0004

Źródło: Obliczenia własne.

[2]Elementy macierzy zostały zaokrąglone do 4 miejsc po przecinku, zatem sumy elementów w poszczególnych kolumnach mogą być różne od 1.

A.2. Gospodarka z postępem technologicznym

Tabela A.7. Wartości parametrów opisujących drugą technologię

Gałąź gospodarki	o	δ^P	σ^P	δ^H	σ^H
1.Rolnictwo	0,2346	0,0255	1,2100	0,0450	0,5500
2.Górnictwo	0,0147	0,0398	1,1920	0,0450	0,5500
3.Przetwórstwo	0,2164	0,0313	1,1109	0,0450	0,5500
4.Energia	0,0156	0,0233	1,1118	0,0450	0,5500
5.Budownictwo	0,0595	0,0373	0,8807	0,0450	0,5500
6.Handel	0,1519	0,0255	1,0294	0,0450	0,5500
7.Hotele	0,0299	0,0166	0,8800	0,0450	0,5500
8.Transport	0,0514	0,0162	1,1677	0,0450	0,5500
9.Finanse	0,0197	0,0316	1,0773	0,0450	0,5500
10.Nieruchomości	0,0543	0,0167	0,9227	0,0450	0,5500
11.Administracja	0,0325	0,0163	1,2100	0,0450	0,5500
12.Edukacja	0,0596	0,0126	0,8800	0,0450	0,5500
13.Zdrowie	0,0599	0,0208	0,8925	0,0450	0,5500
14.Pozostałe	0,0258	0,0192	0,8800	0,0450	0,5500

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.8. Wartości parametrów opisujących drugą technologię – c.d.

Gałąź gospodarki	P^k	P^b	P^g	P^d	$\bar{c}$	$\bar{w}$
1.Rolnictwo	0,6558	17,9887	0,0466	1,2772	0,0422	0,2
2.Górnictwo	0,8312	3,3109	0,0280	0,5334	0,0021	26,5
3.Przetwórstwo	2,4151	8,9827	0,1131	0,0820	0,2912	4,5
4.Energia	0,3002	7,0562	0,0281	0,6609	0,0186	4,8
5.Budownictwo	5,7914	8,3966	0,2142	0,3106	0,0551	3,5
6.Handel	4,4931	9,6739	0,0877	0,1888	0,1566	2,3
7.Hotele	2,8546	5,0021	0,7997	1,4013	0,0271	3,2
8.Transport	0,3927	5,5967	0,0514	0,2726	0,0515	2,8
9.Finanse	1,3599	4,1460	0,1566	0,4774	0,0349	7,6
10.Nieruchomości	0,5092	9,4779	0,0159	0,2952	0,1417	2,9
11.Administracja	1,7622	2,5532	0,0041	0,2037	0,1238	19,3
12.Edukacja	1,3357	1,8294	0,1732	0,2373	0,0735	3,3
13.Zdrowie	1,7497	2,6108	0,2255	0,3365	0,0704	2,2
14.Pozostałe	2,1157	6,2554	0,2037	0,6024	0,0663	3,6

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela A.9. Macierz współczynników nakładów bieżących A obowiązująca w gospodarce stosującej drugą technologię

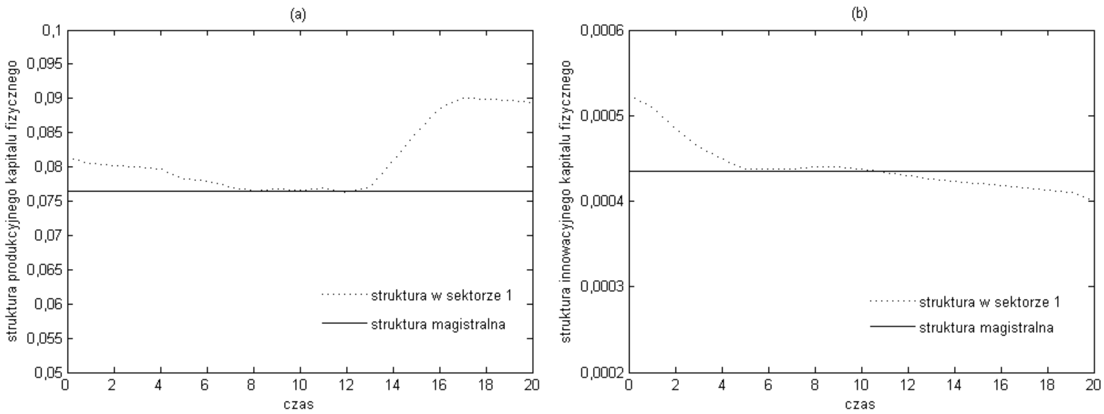
Gałąź gospodarki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.Rolnictwo	0,2387	0,0010	0,0562	0,0003	0,0010	0,0111	0,0221	0,0012	0,0002	0,0008	0,0020	0,0002	0,0034	0,0022
2.Górnictwo	0,0062	0,0271	0,0467	0,2364	0,0073	0,0044	0,0045	0,0023	0,0045	0,0051	0,0009	0,0006	0,0011	0,0068
3.Przetwórstwo	0,1733	0,1516	0,3153	0,0557	0,2657	0,1140	0,2603	0,1085	0,0725	0,0770	0,0527	0,0447	0,0891	0,1527
4.Energia	0,0176	0,0541	0,0239	0,0639	0,0121	0,0125	0,0305	0,0172	0,0082	0,0593	0,0149	0,0269	0,0230	0,0207
5.Budownictwo	0,0045	0,0079	0,0084	0,0652	0,1390	0,0147	0,0141	0,0103	0,0020	0,0441	0,0353	0,0051	0,0050	0,0121
6.Handel	0,1014	0,0335	0,0906	0,0335	0,0662	0,0740	0,1345	0,0573	0,0283	0,0257	0,0318	0,0157	0,0288	0,0515
7.Hotele	0,0006	0,0018	0,0019	0,0004	0,0024	0,0051	0,0056	0,0135	0,0024	0,0023	0,0016	0,0030	0,0020	0,0024
8.Transport	0,0100	0,0272	0,0296	0,0278	0,0232	0,0805	0,0143	0,1457	0,0384	0,0210	0,0157	0,0099	0,0126	0,0367
9.Finanse	0,0081	0,0110	0,0058	0,0065	0,0077	0,0149	0,0064	0,0213	0,2881	0,0067	0,0038	0,0023	0,0038	0,0087
10.Nieruchomości	0,0089	0,0354	0,0333	0,0454	0,0294	0,0825	0,0365	0,0780	0,0230	0,0739	0,0248	0,0251	0,0189	0,0478
11.Administracja	0	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0002	0	0	0,0001	0	0,0001	0,0001	0,0001
12.Edukacja	0,0002	0,0002	0,0004	0,0003	0,0002	0,0010	0,0003	0,0005	0,0016	0,0010	0,0003	0,0110	0,0004	0,0007
13.Zdrowie	0,0039	0,0003	0,0005	0,0003	0,0002	0,0007	0,0006	0,0004	0,0002	0,0006	0,0029	0,0002	0,0402	0,0012
14.Pozostałe	0,0018	0,0093	0,0054	0,0072	0,0032	0,0076	0,0109	0,0070	0,0027	0,0261	0,0058	0,0038	0,0091	0,0392

Źródło: Obliczenia własne.

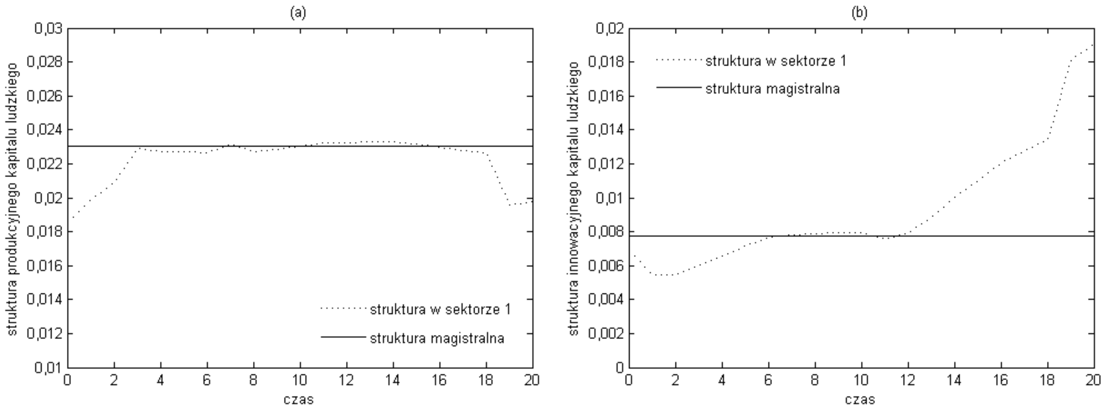
Aneks B

Wykresy

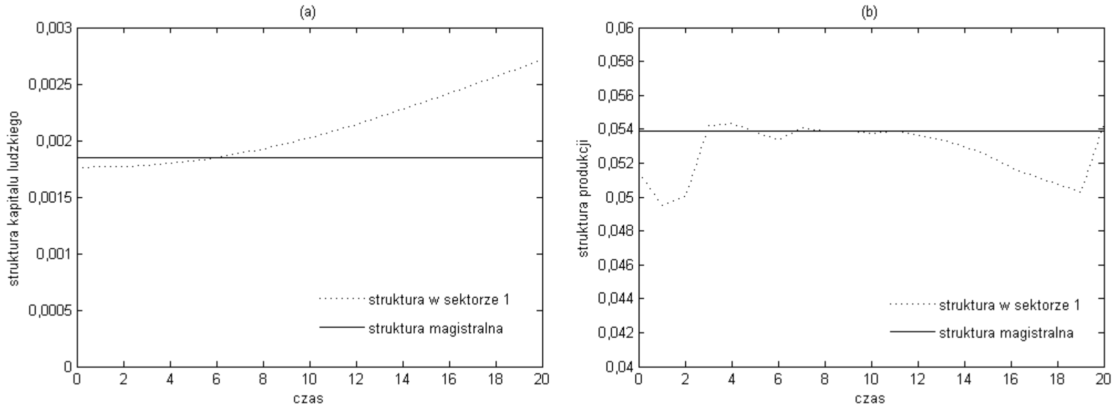
B.1. Gospodarka ze stałą technologią



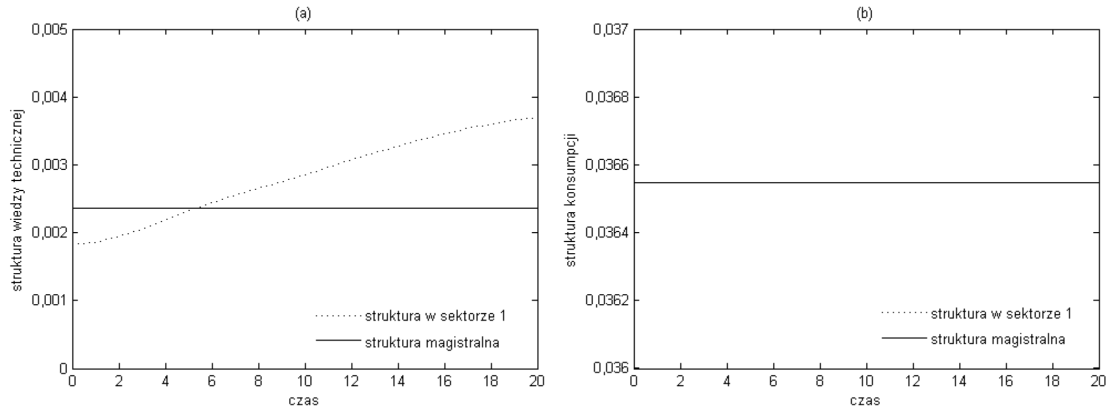
Rysunek B.1. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 1 do magistrali



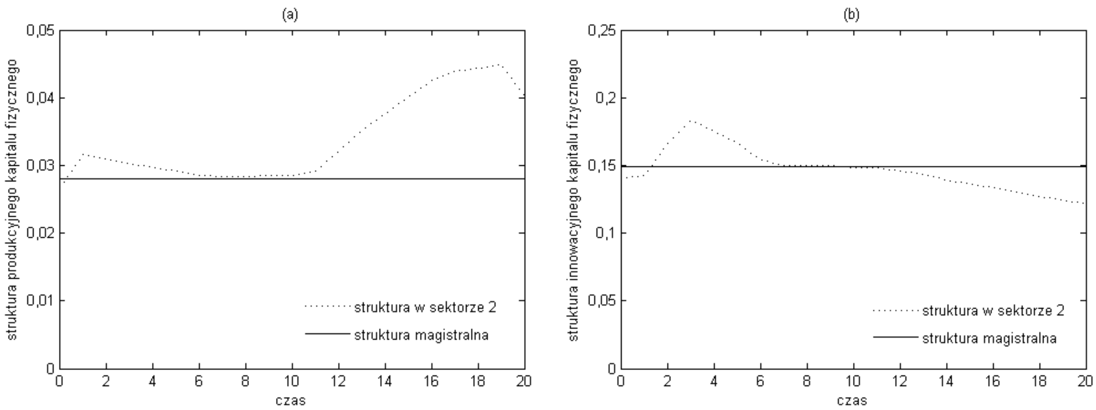
Rysunek B.2. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 1 do magistrali



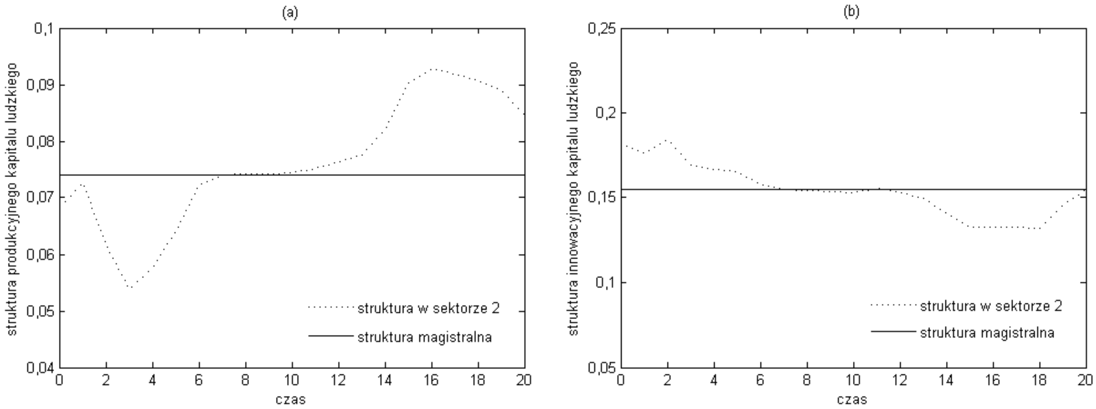
Rysunek B.3. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 1 do magistrali



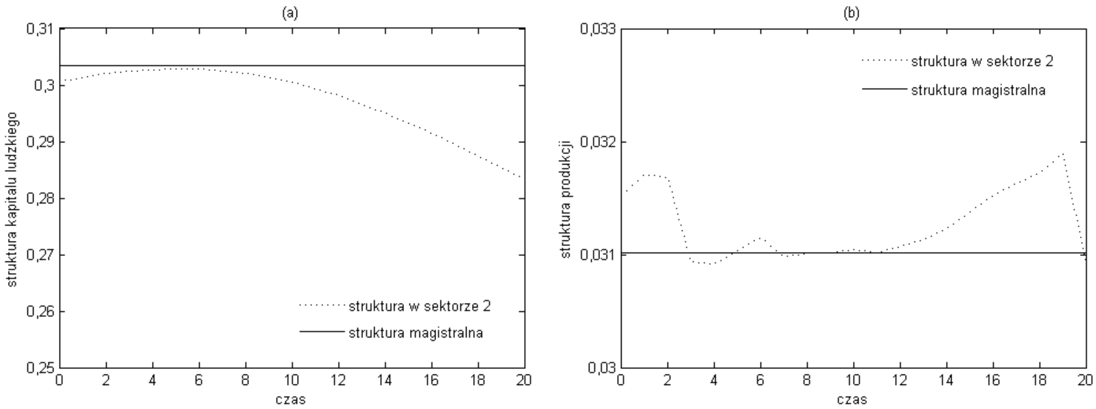
Rysunek B.4. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 1 do magistrali



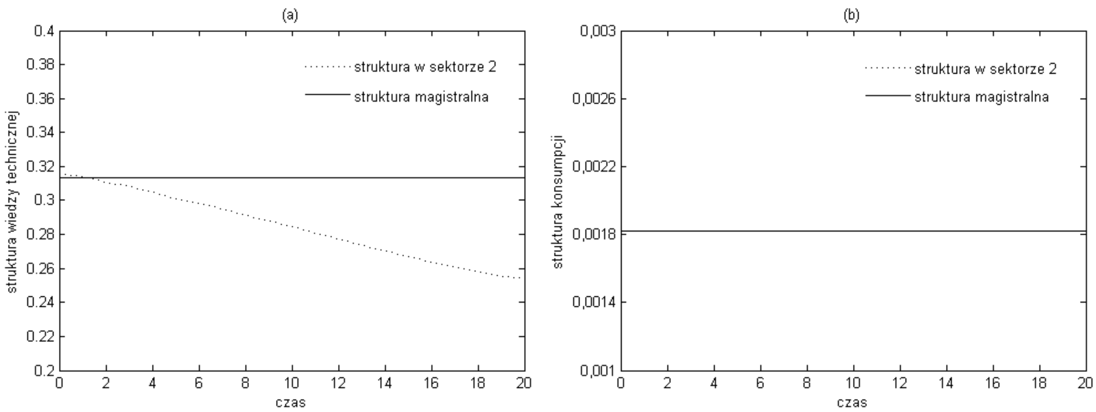
Rysunek B.5. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 2 do magistrali



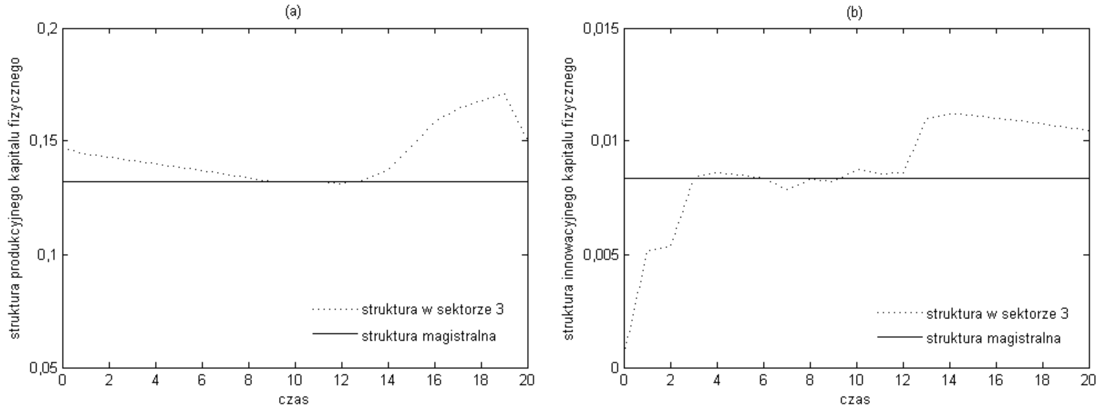
Rysunek B.6. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 2 do magistrali



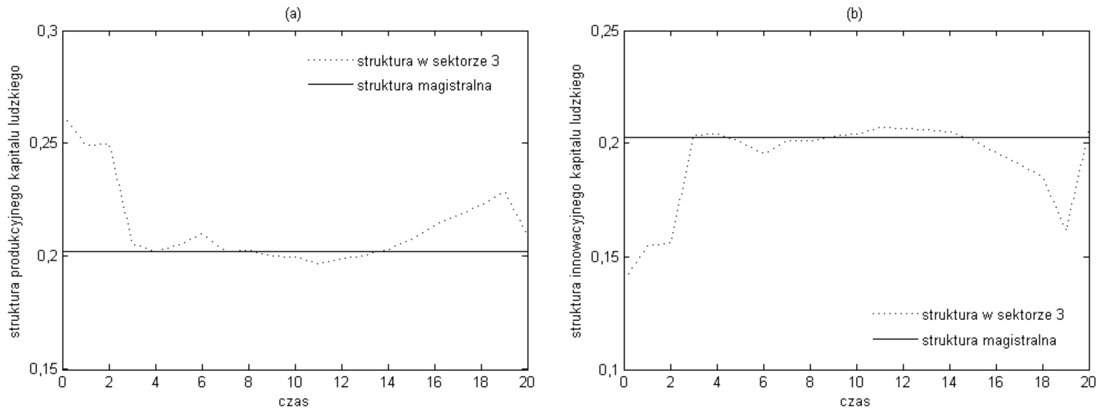
Rysunek B.7. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 2 do magistrali



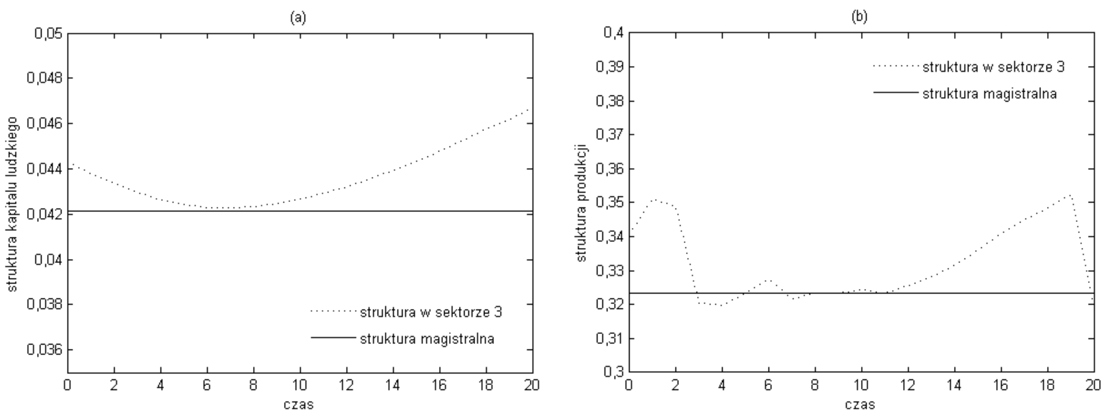
Rysunek B.8. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 2 do magistrali



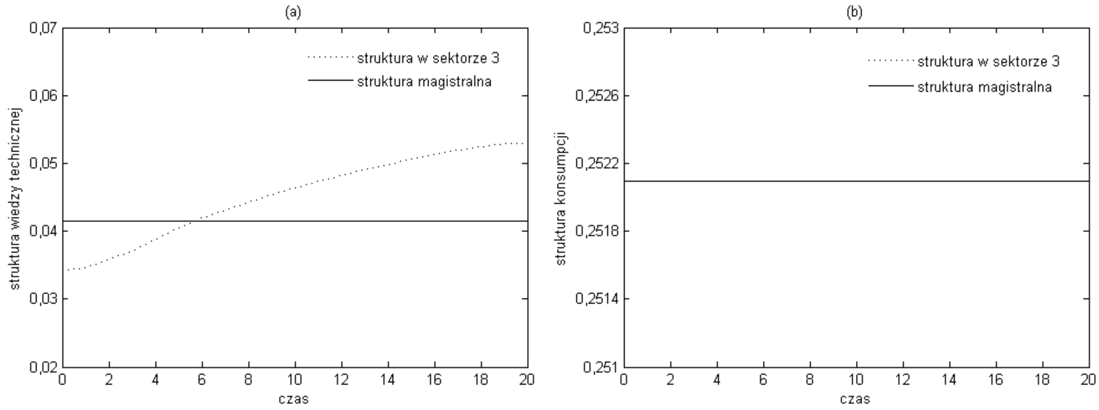
Rysunek B.9. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 3 do magistrali



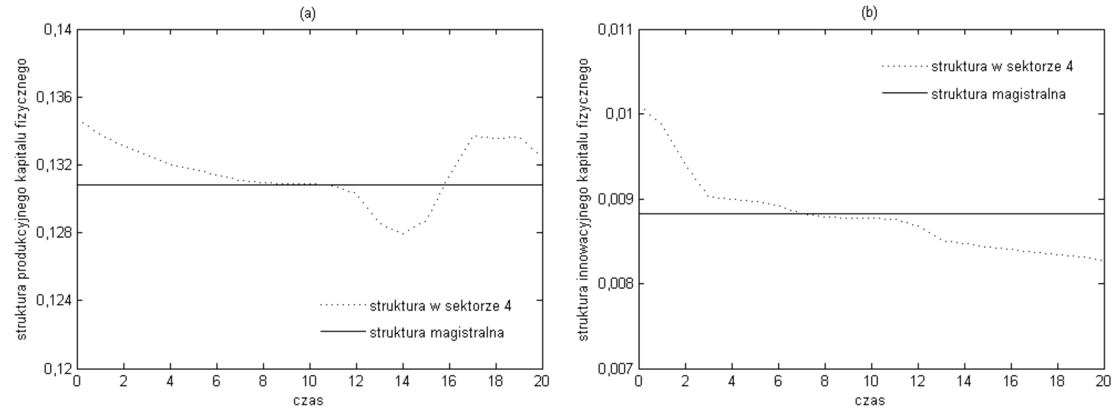
Rysunek B.10. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 3 do magistrali



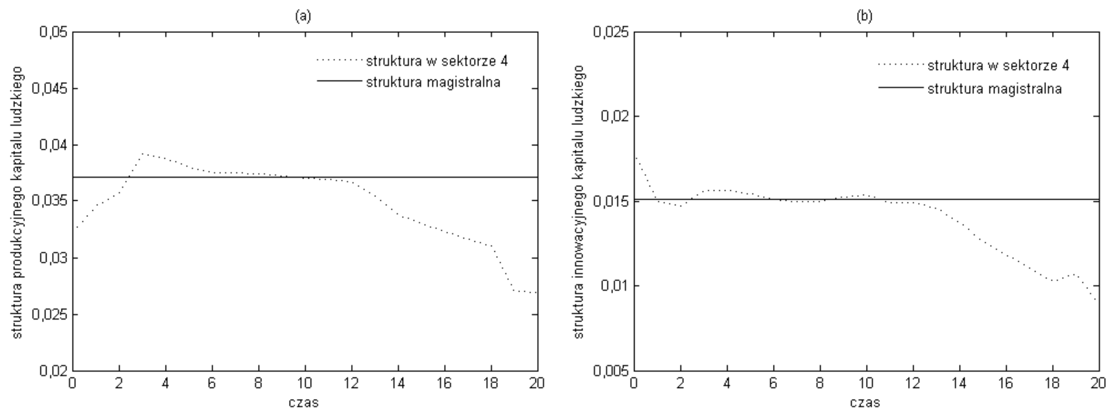
Rysunek B.11. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 3 do magistrali



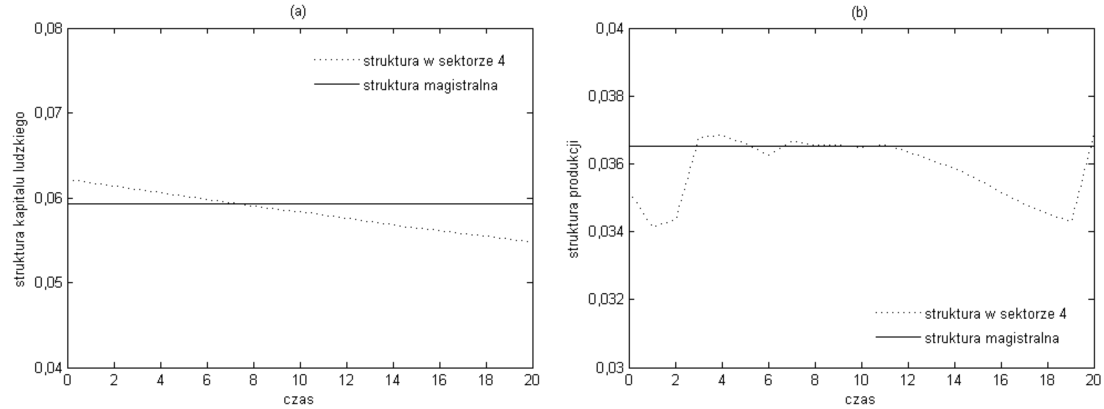
Rysunek B.12. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 3 do magistrali



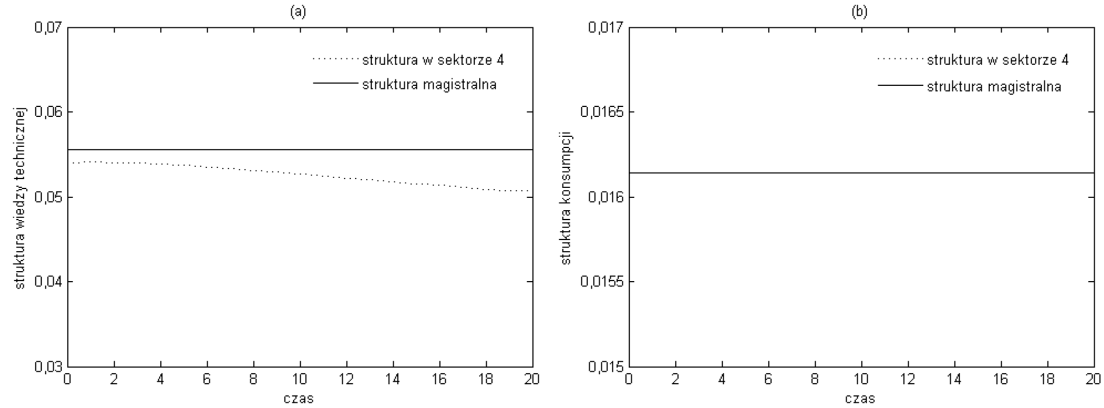
Rysunek B.13. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 4 do magistrali



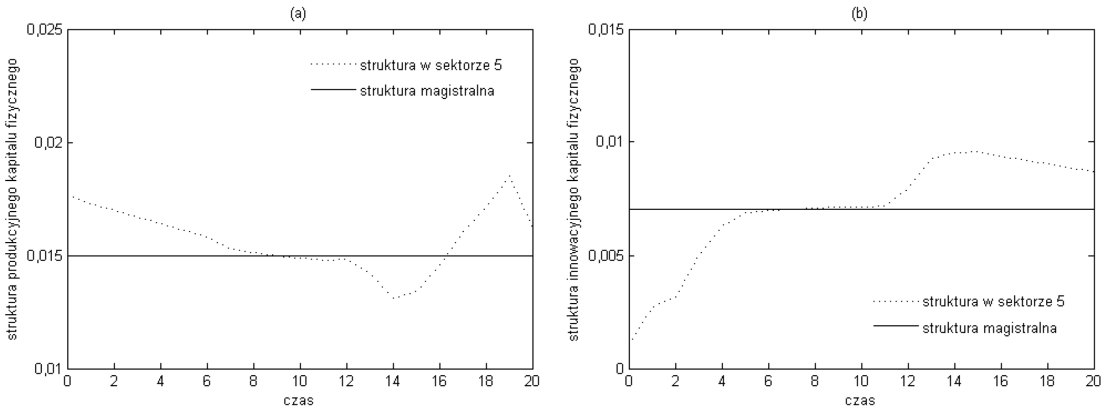
Rysunek B.14. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 4 do magistrali



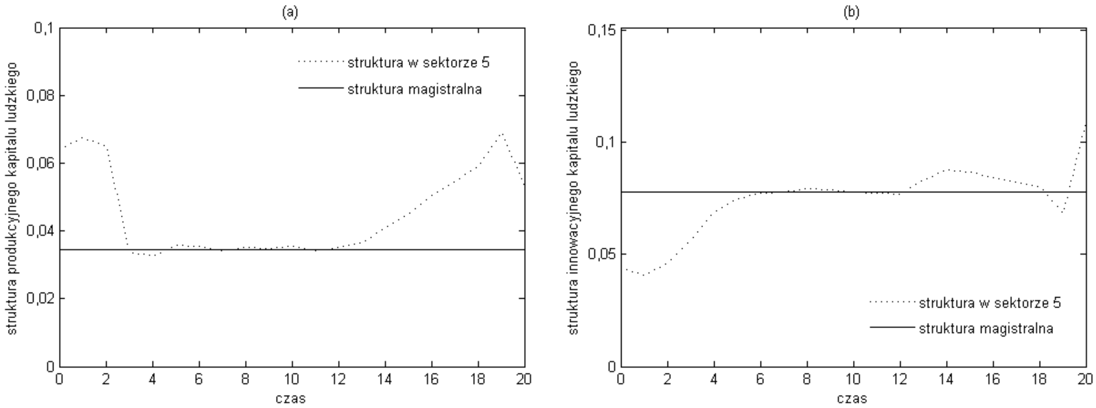
Rysunek B.15. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 4 do magistrali



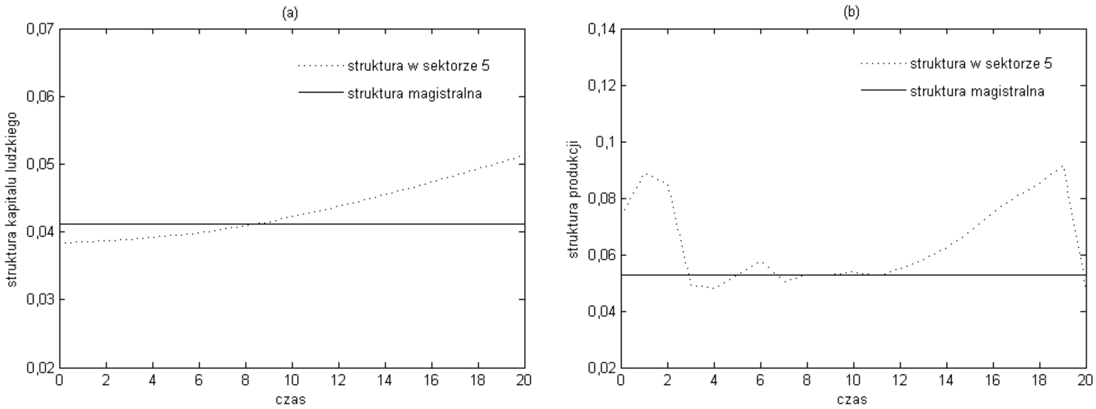
Rysunek B.16. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 4 do magistrali



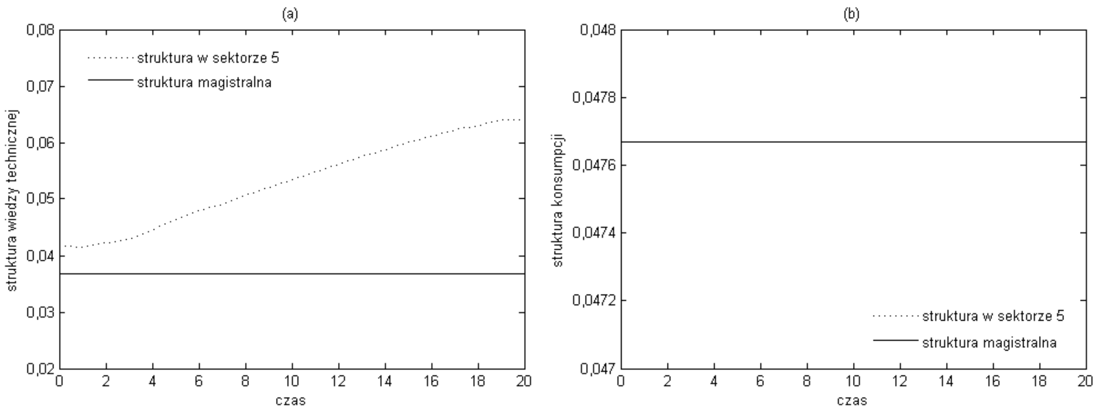
Rysunek B.17. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 5 do magistrali



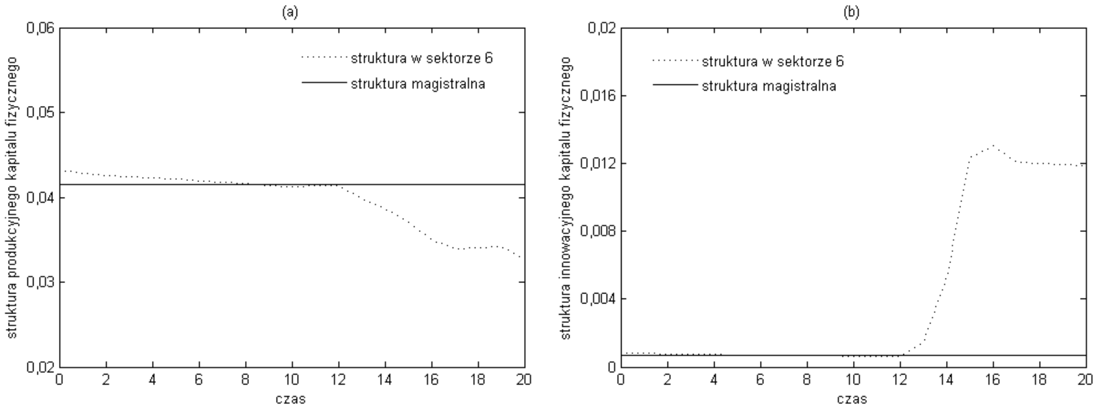
Rysunek B.18. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 5 do magistrali



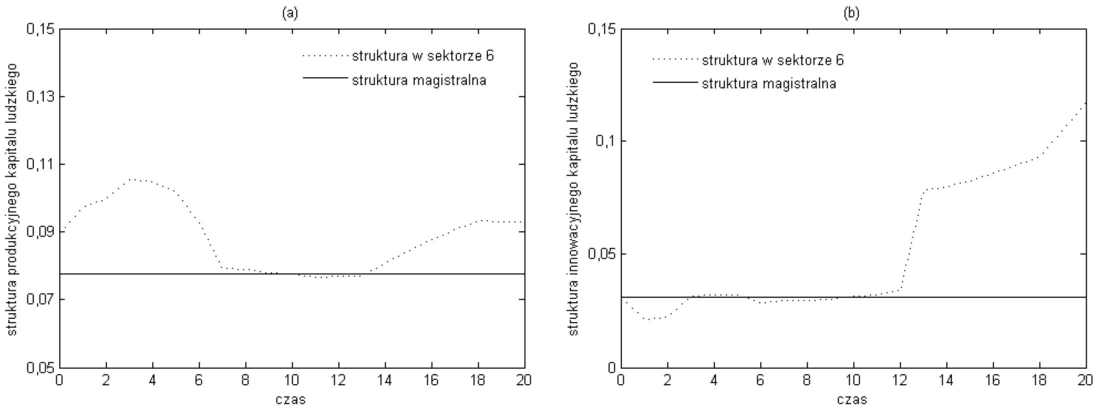
Rysunek B.19. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 5 do magistrali



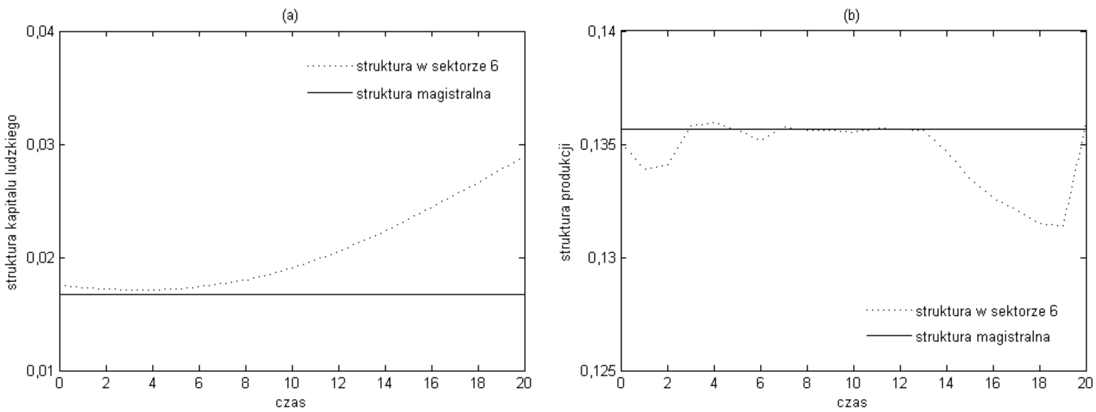
Rysunek B.20. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 5 do magistrali



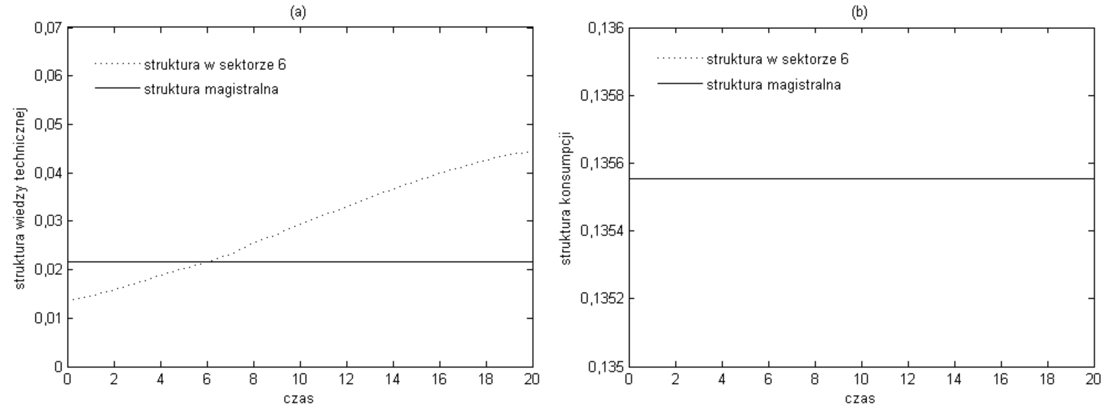
Rysunek B.21. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 6 do magistrali



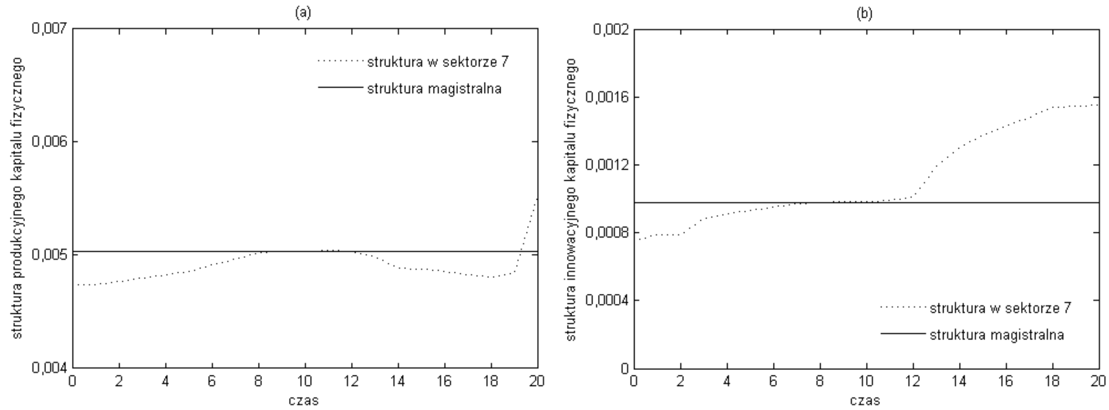
Rysunek B.22. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 6 do magistrali



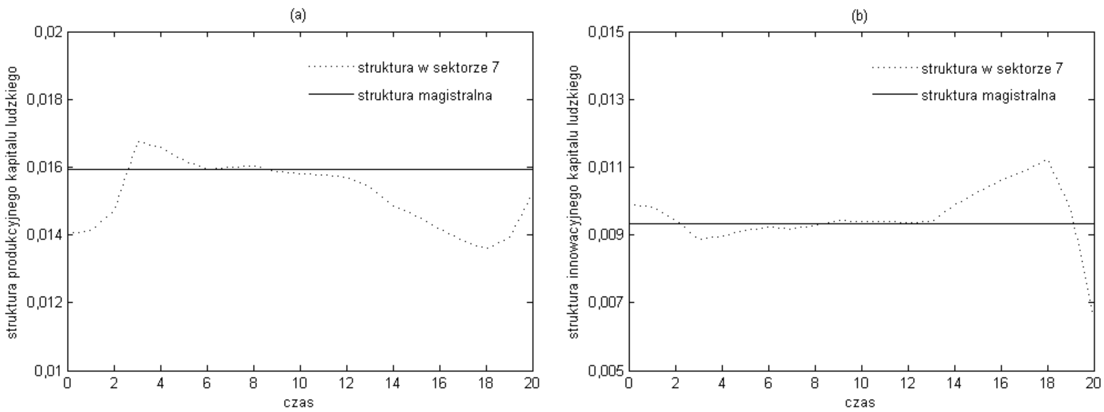
Rysunek B.23. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 6 do magistrali



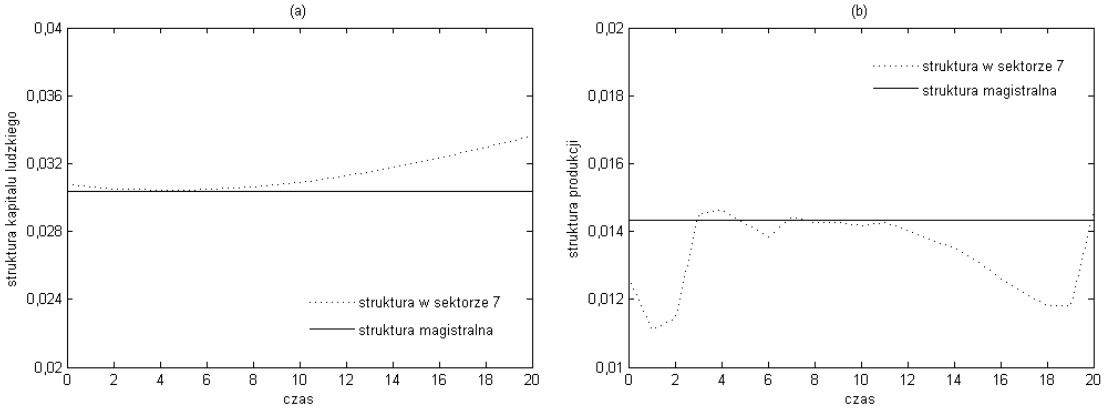
Rysunek B.24. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 6 do magistrali



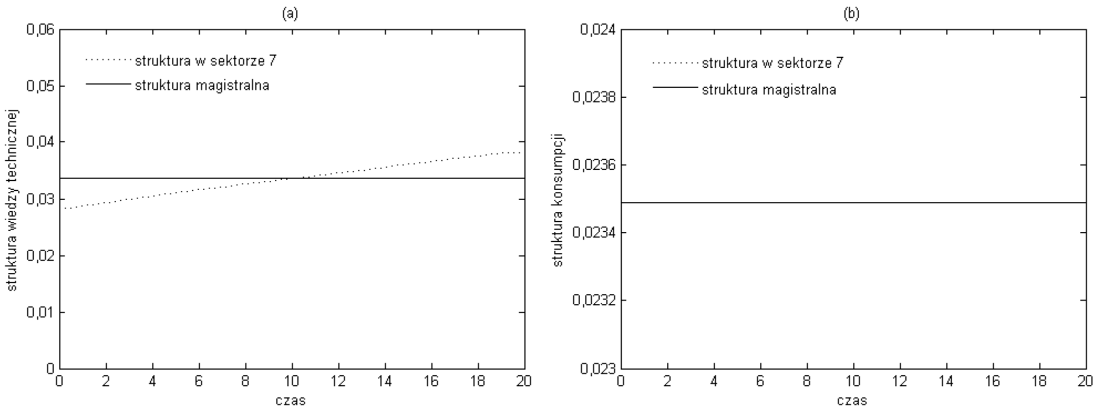
Rysunek B.25. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 7 do magistrali



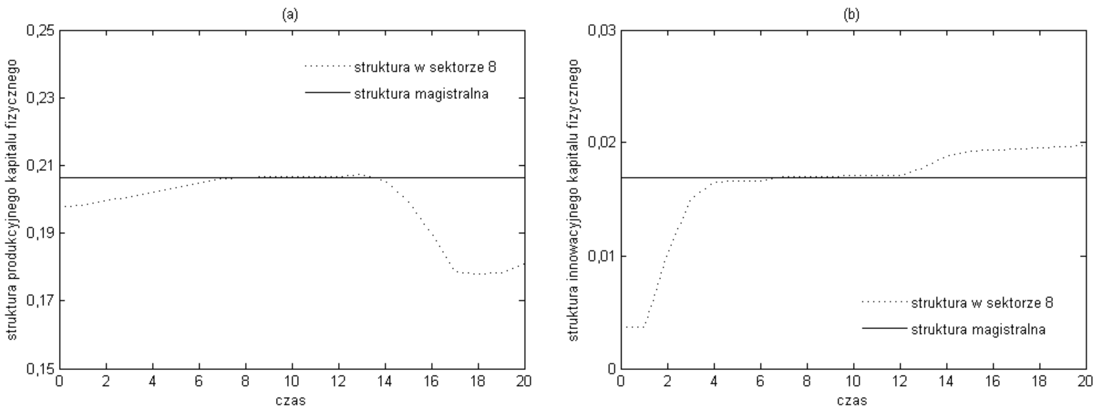
Rysunek B.26. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 7 do magistrali



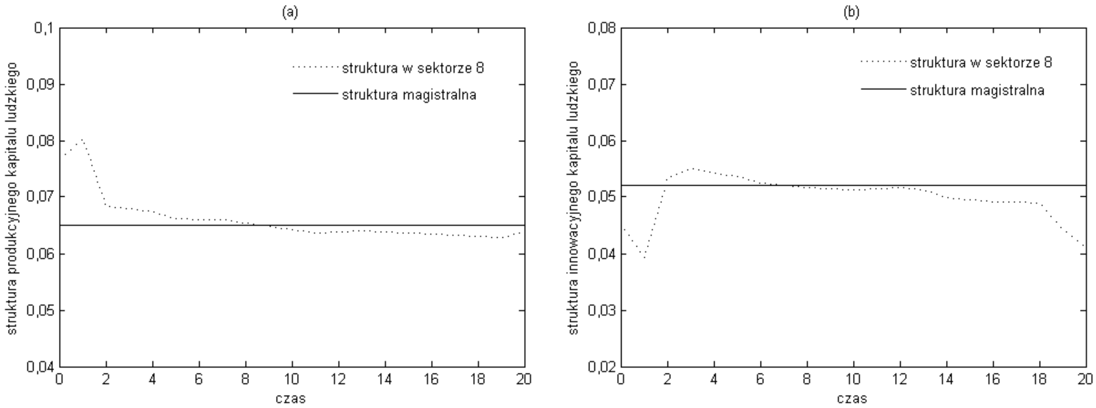
Rysunek B.27. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 7 do magistrali



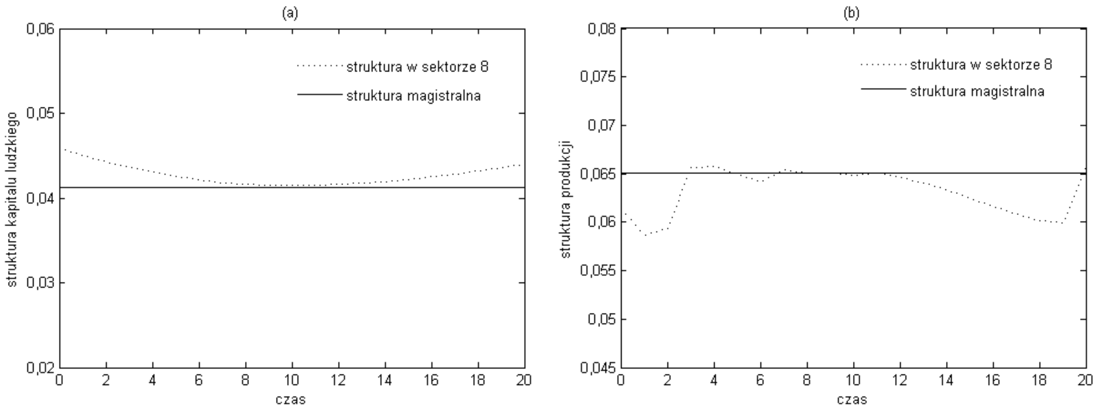
Rysunek B.28. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 7 do magistrali



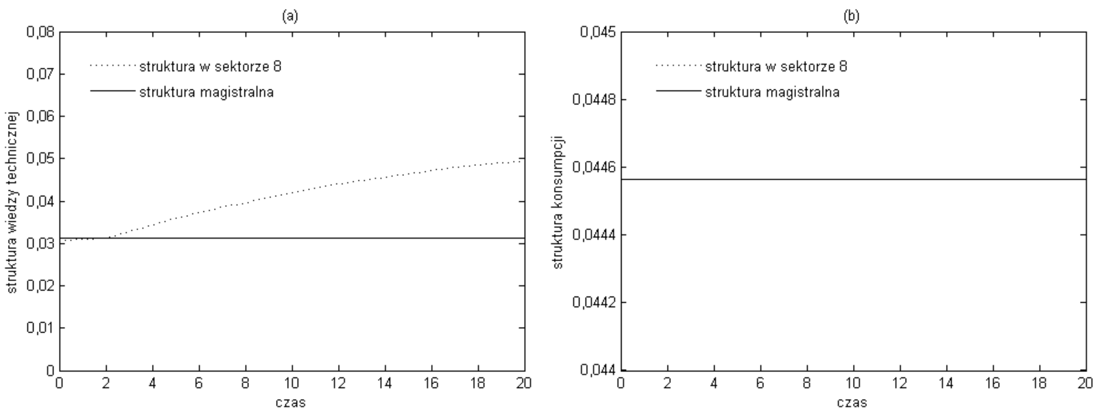
Rysunek B.29. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 8 do magistrali



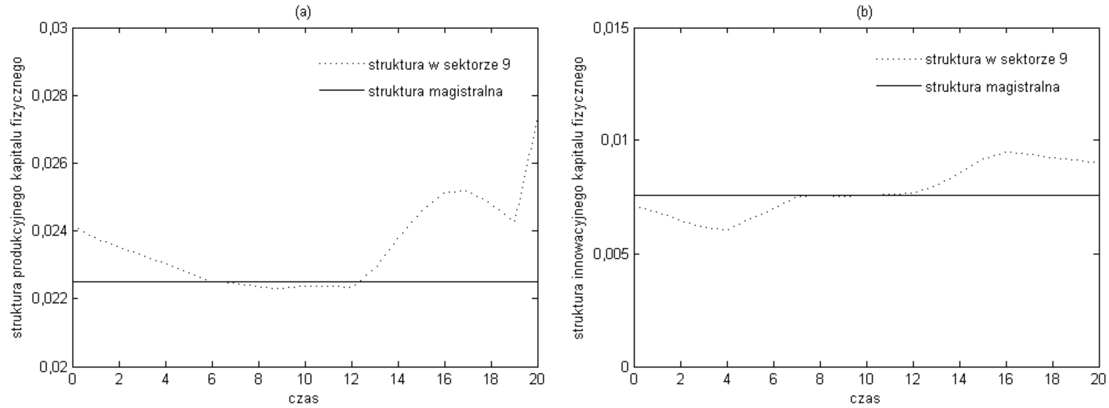
Rysunek B.30. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 8 do magistrali



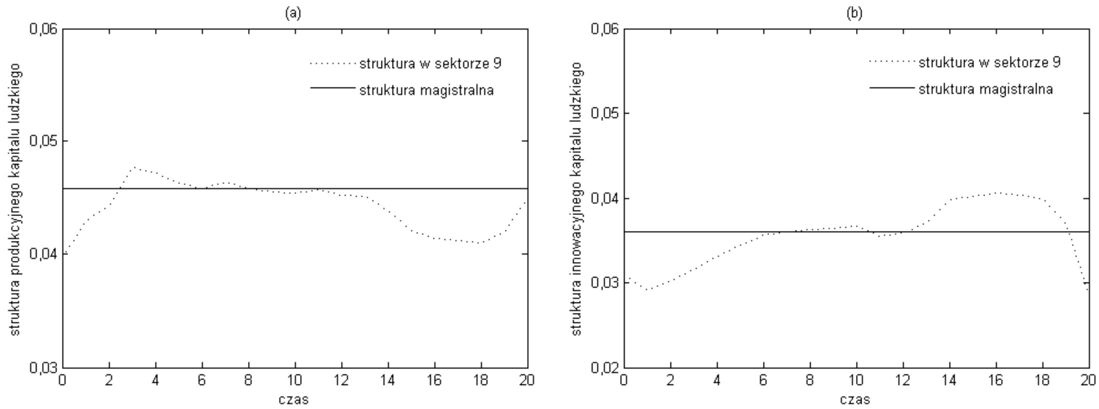
Rysunek B.31. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 8 do magistrali



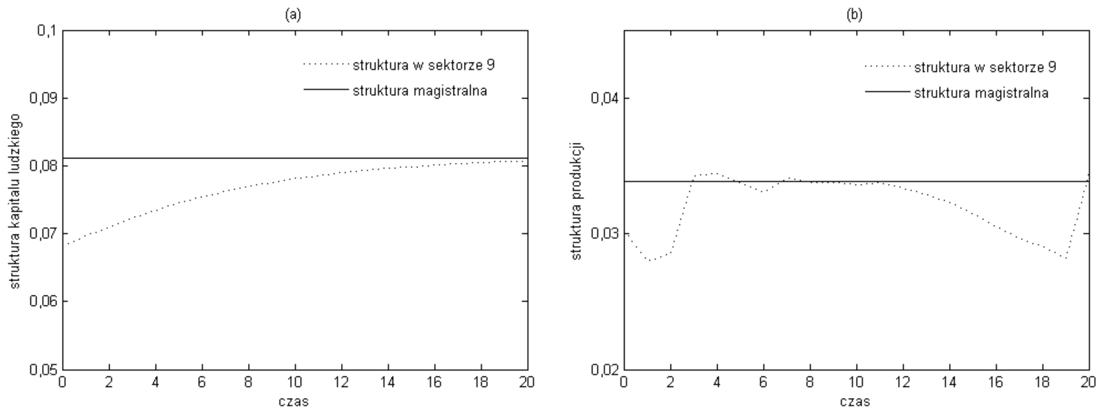
Rysunek B.32. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 8 do magistrali



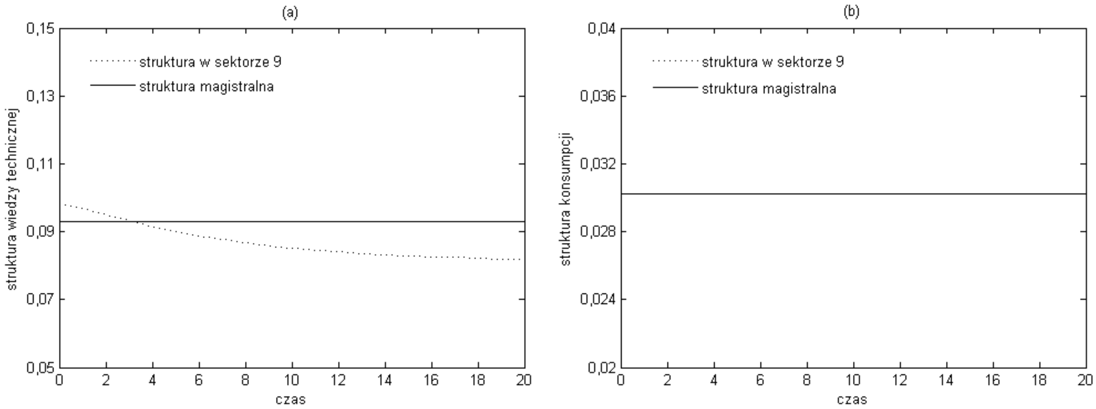
Rysunek B.33. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 9 do magistrali



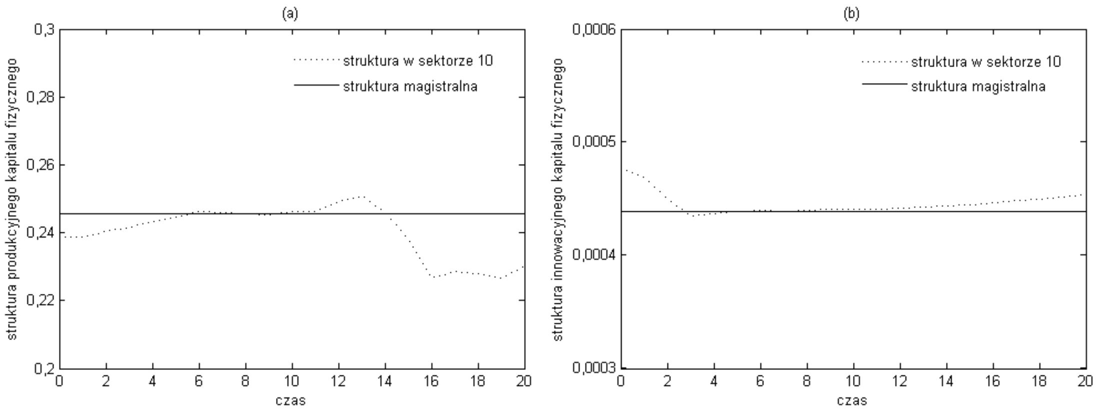
Rysunek B.34. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 9 do magistrali



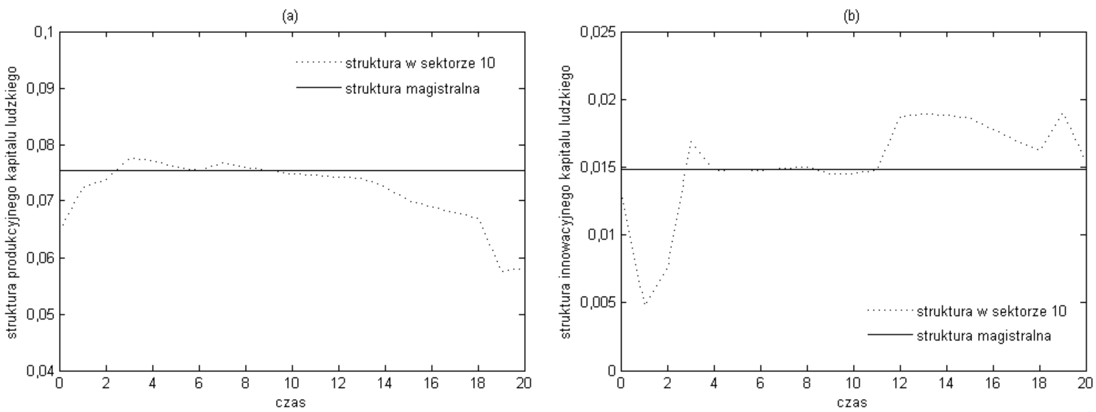
Rysunek B.35. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 9 do magistrali



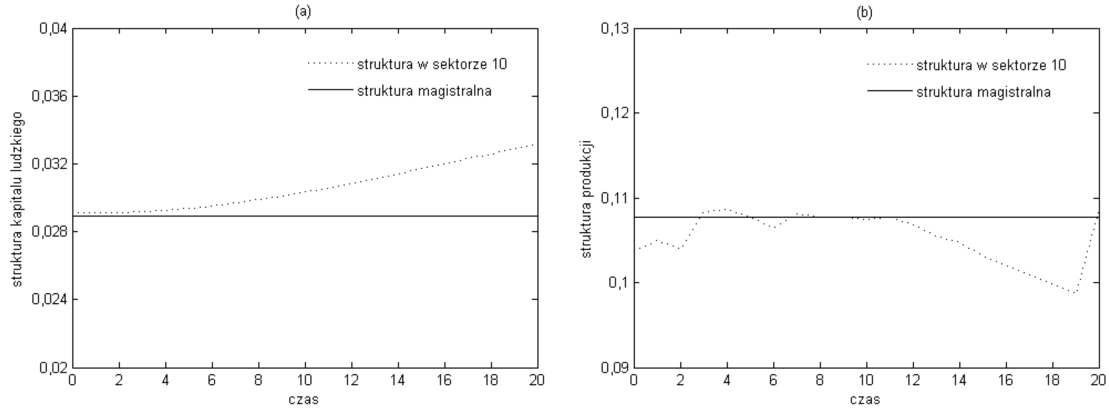
Rysunek B.36. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 9 do magistrali



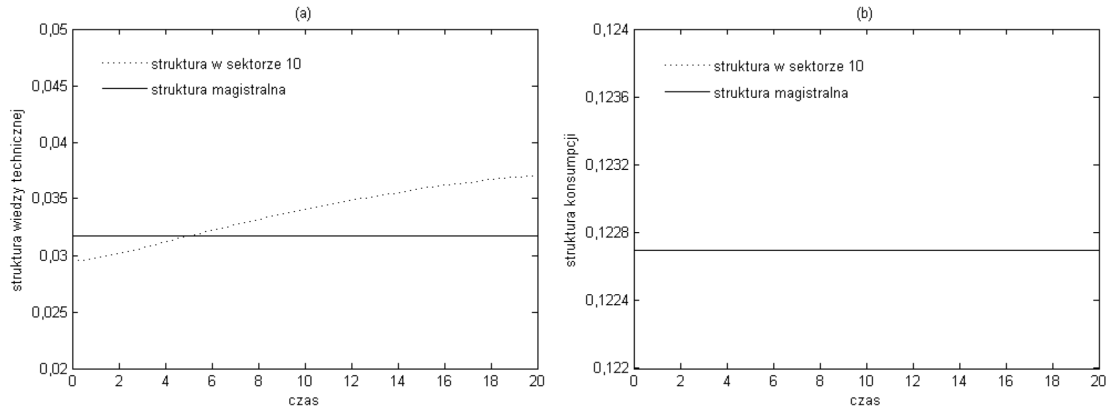
Rysunek B.37. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 10 do magistrali



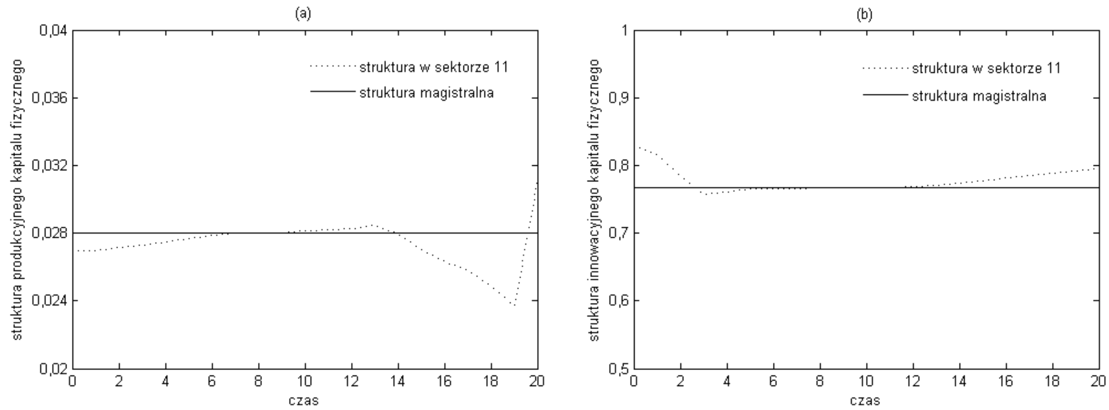
Rysunek B.38. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 10 do magistrali



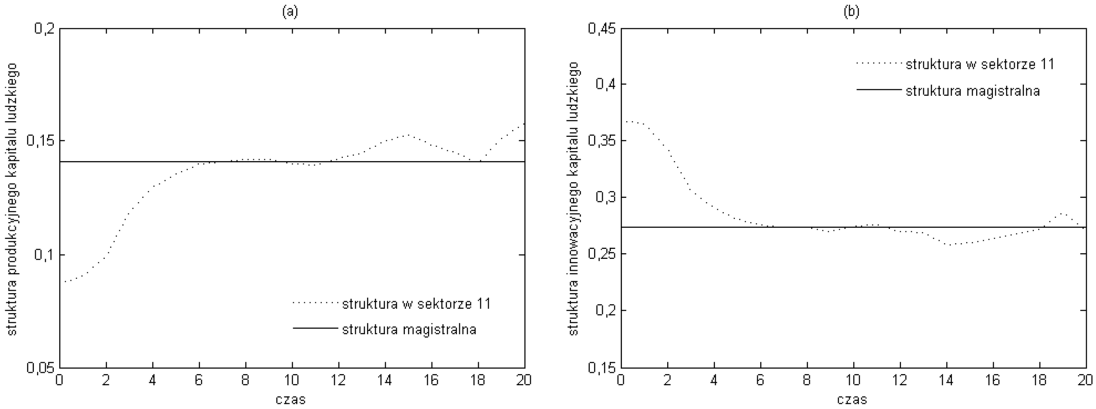
Rysunek B.39. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 10 do magistrali



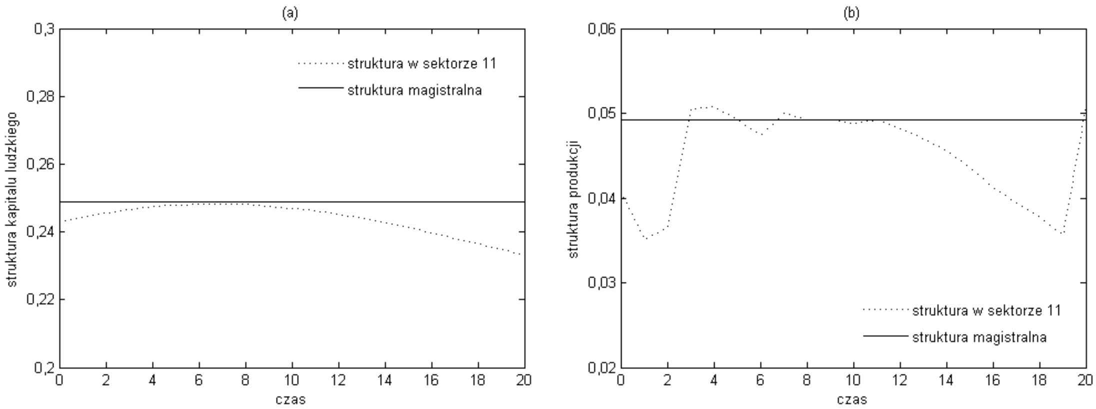
Rysunek B.40. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 10 do magistrali



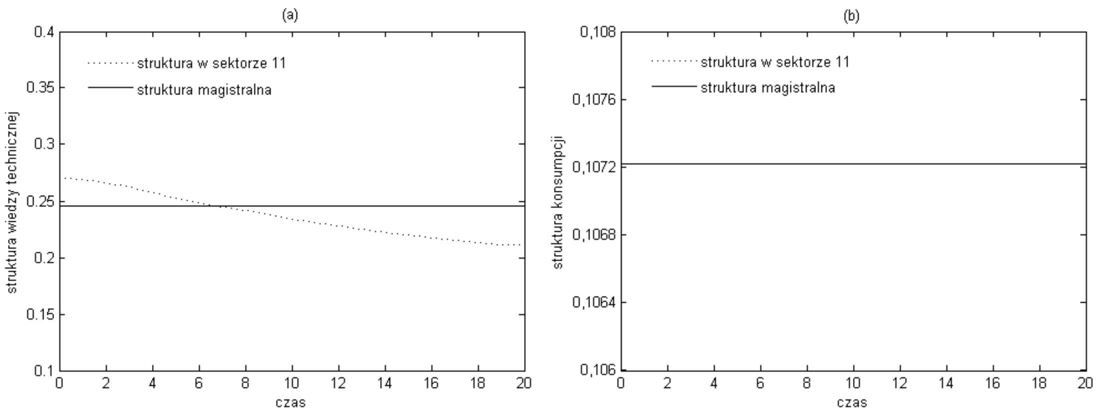
Rysunek B.41. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 11 do magistrali



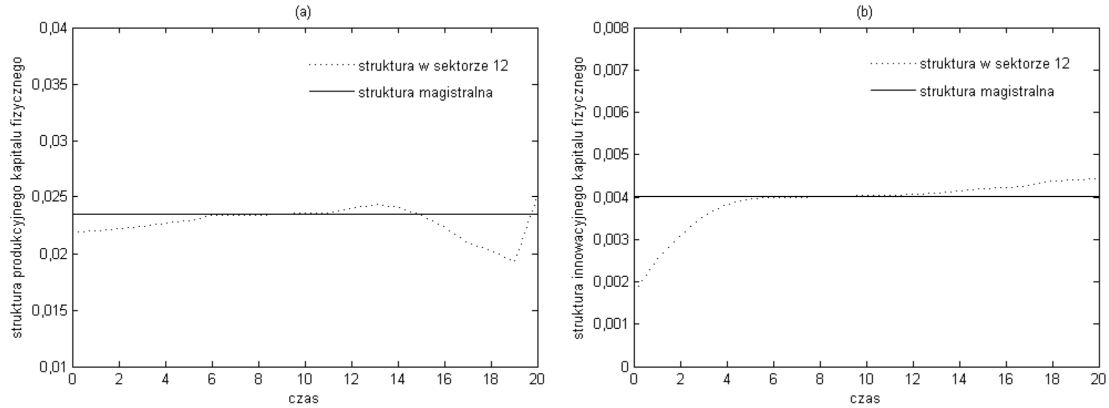
Rysunek B.42. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 11 do magistrali



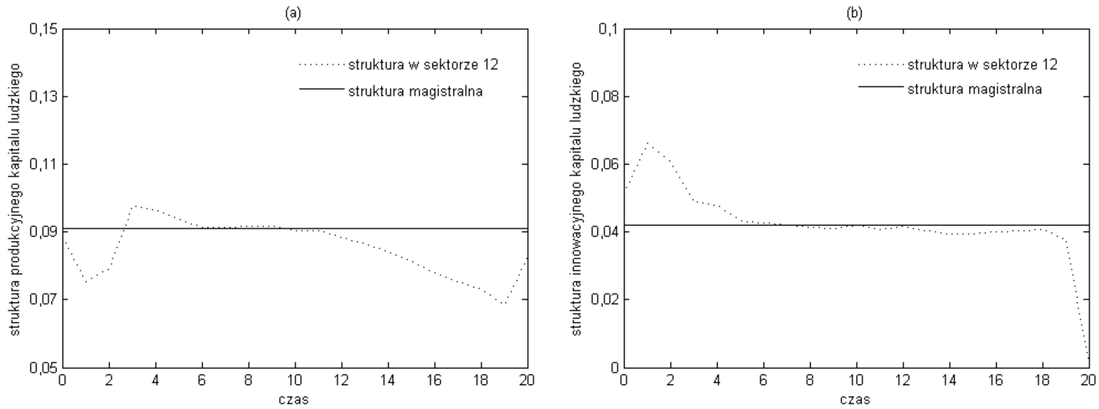
Rysunek B.43. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 11 do magistrali



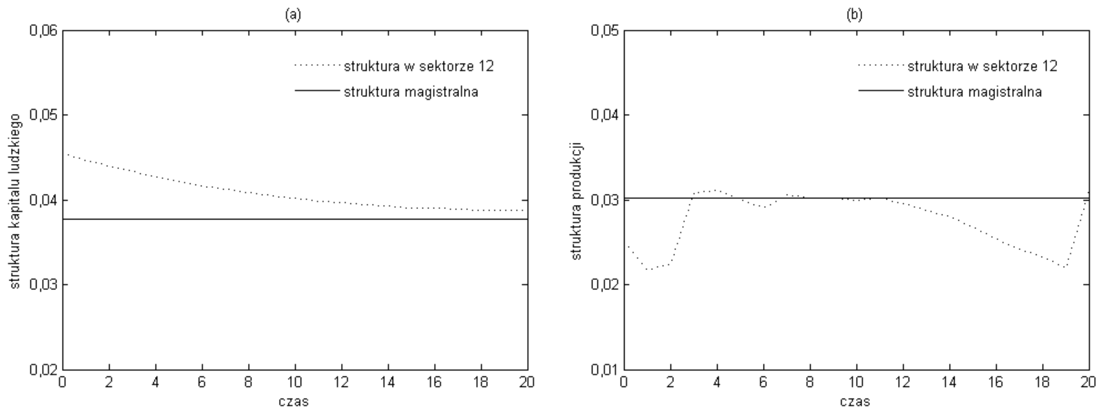
Rysunek B.44. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 11 do magistrali



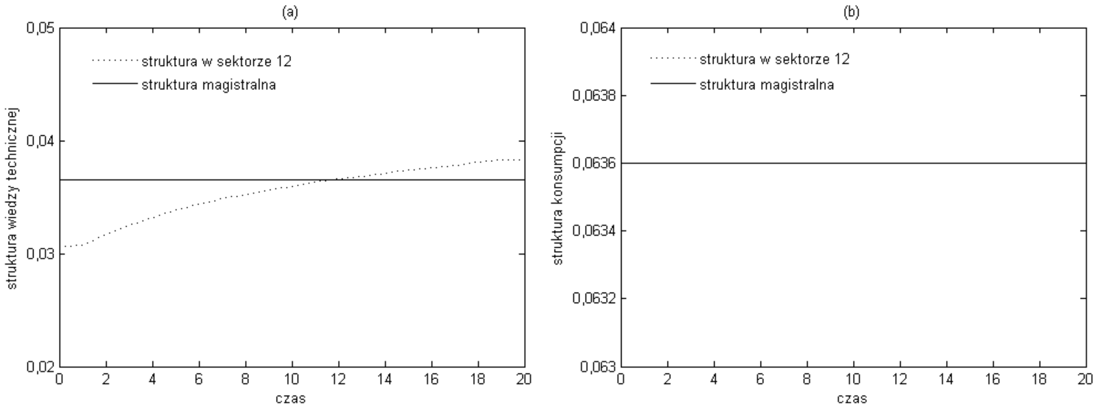
Rysunek B.45. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 12 do magistrali



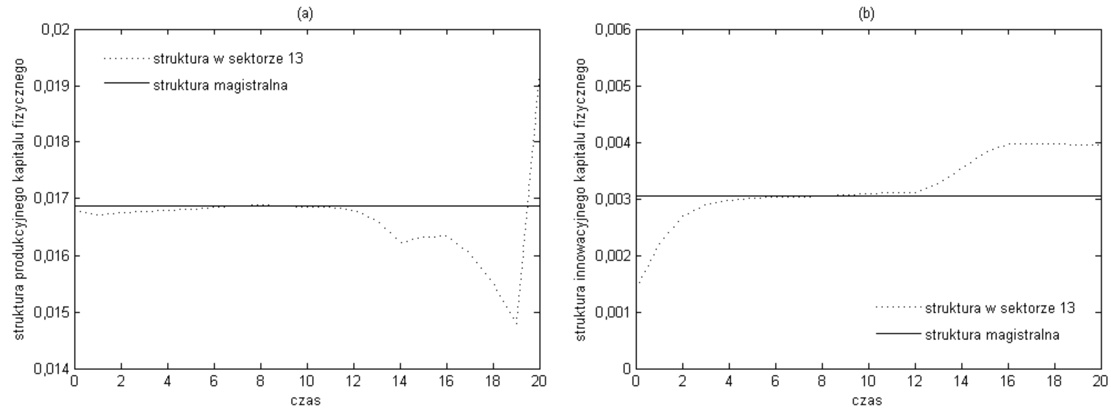
Rysunek B.46. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 12 do magistrali



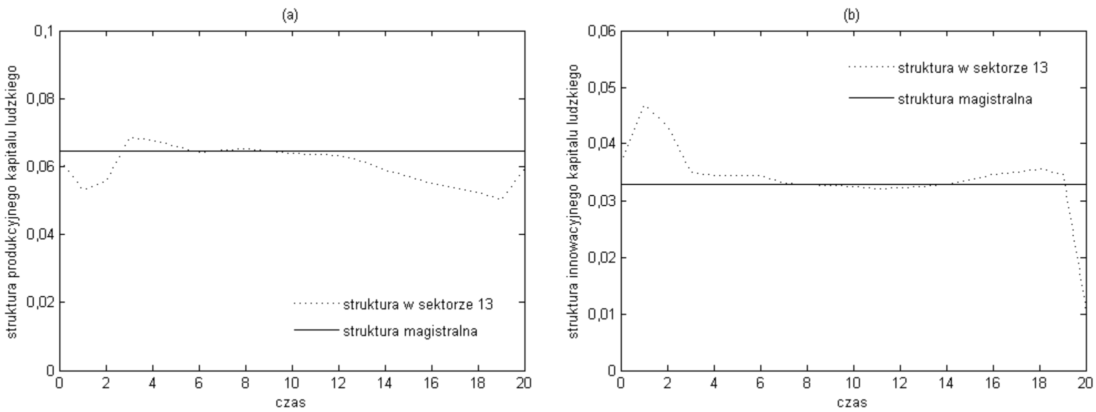
Rysunek B.47. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 12 do magistrali



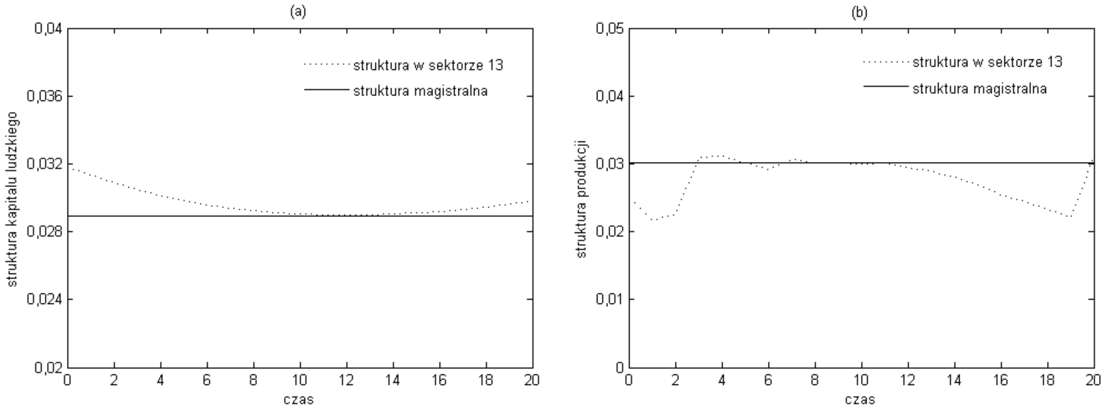
Rysunek B.48. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 12 do magistrali



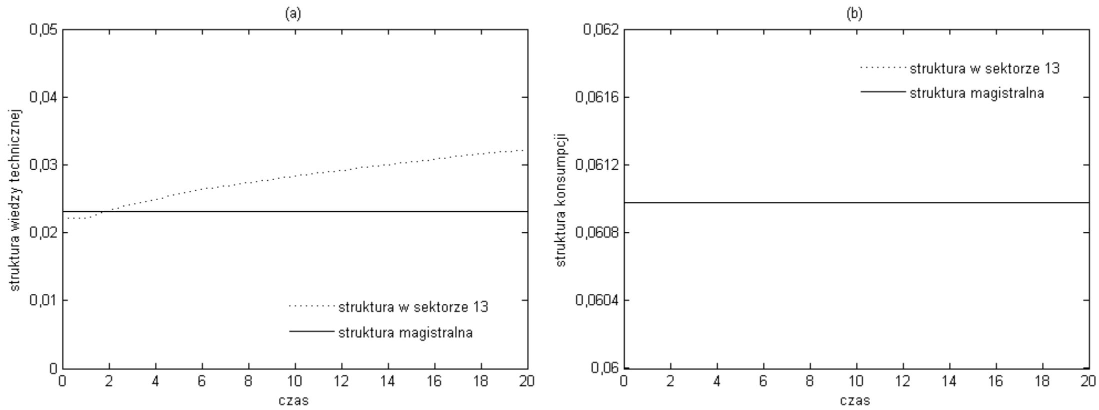
Rysunek B.49. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 13 do magistrali



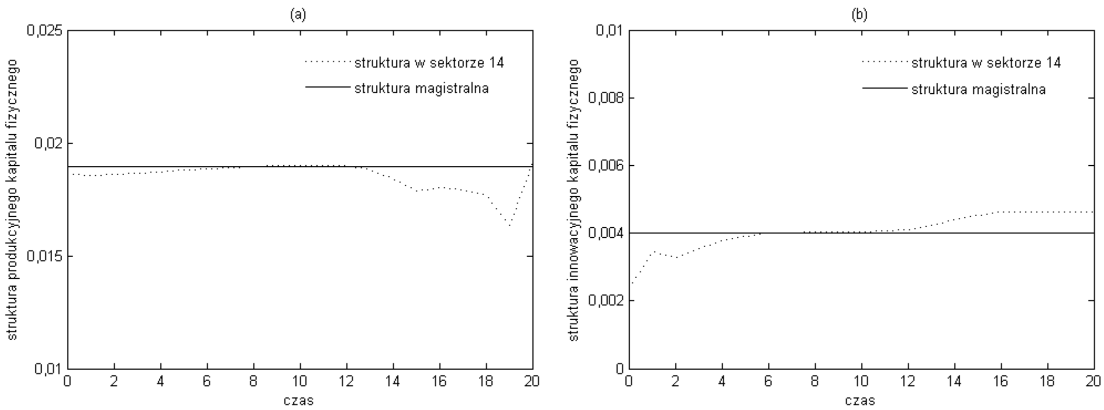
Rysunek B.50. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 13 do magistrali



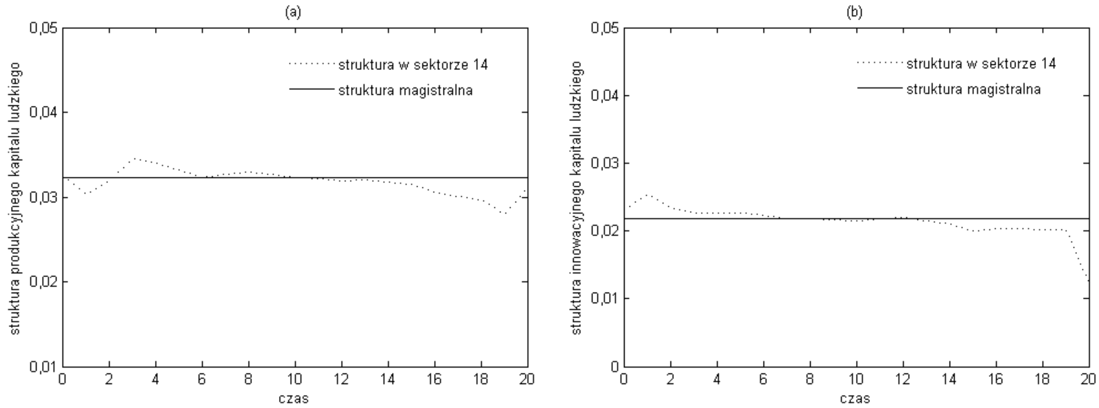
Rysunek B.51. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 13 do magistrali



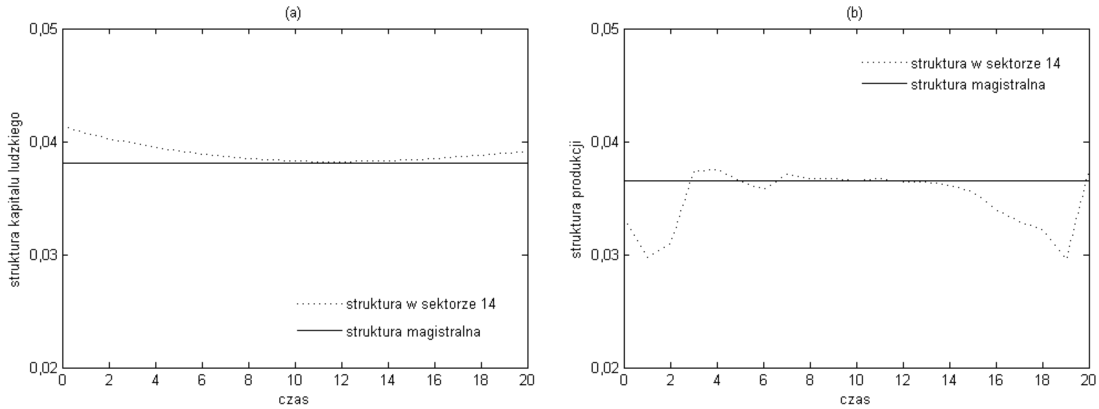
Rysunek B.52. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 13 do magistrali



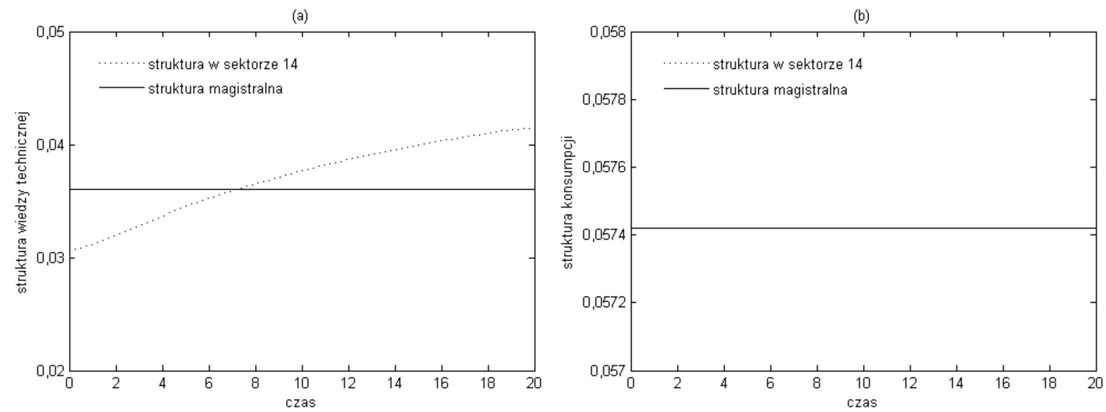
Rysunek B.53. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 14 do magistrali



Rysunek B.54. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 14 do magistrali

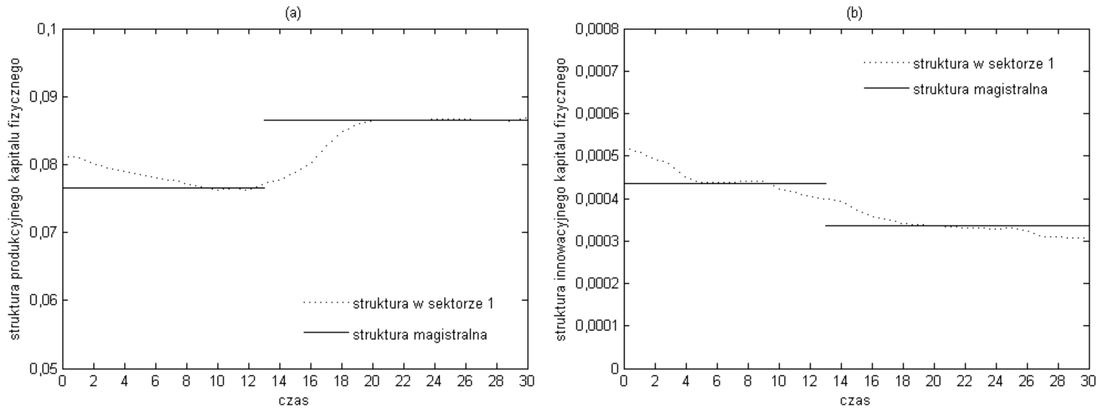


Rysunek B.55. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 14 do magistrali

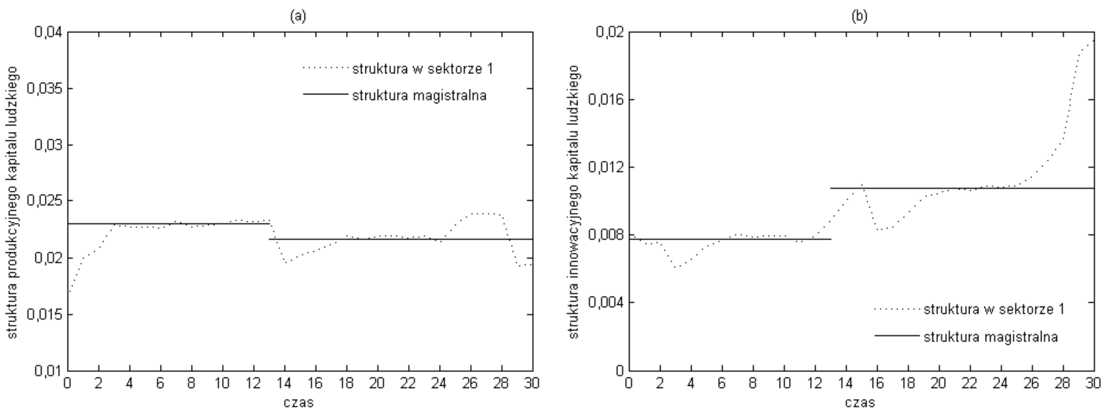


Rysunek B.56. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 14 do magistrali

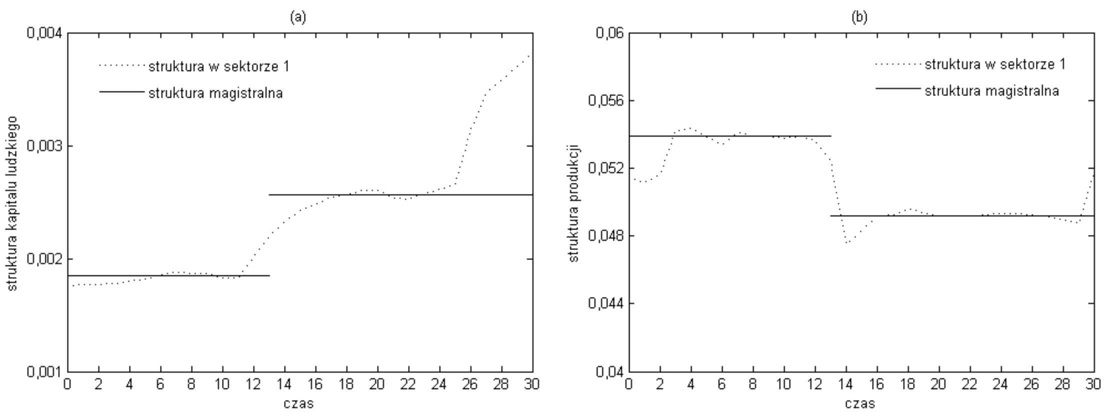
B.2. Gospodarka z postępem technologicznym



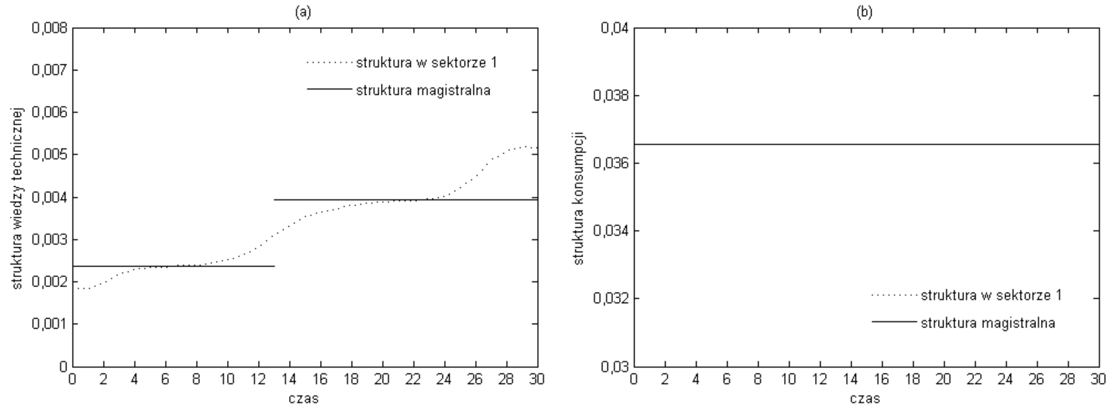
Rysunek B.57. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 1 do magistrali



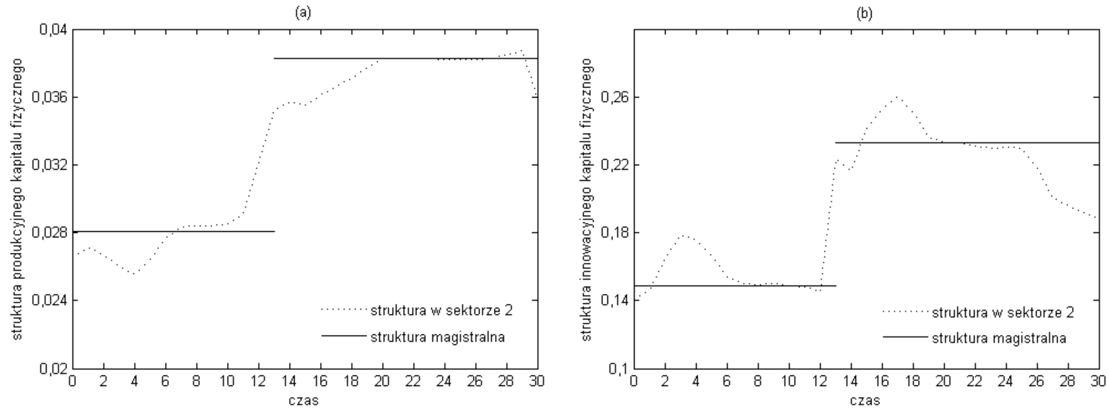
Rysunek B.58. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 1 do magistrali



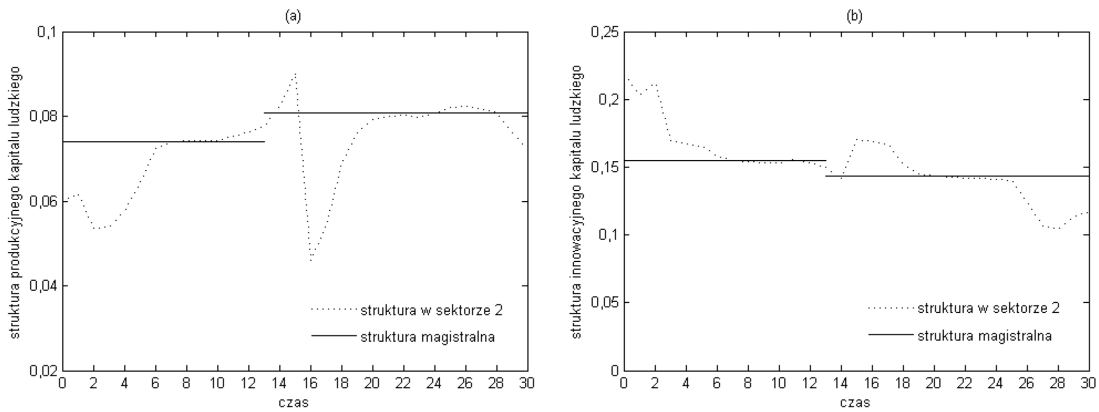
Rysunek B.59. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 1 do magistrali



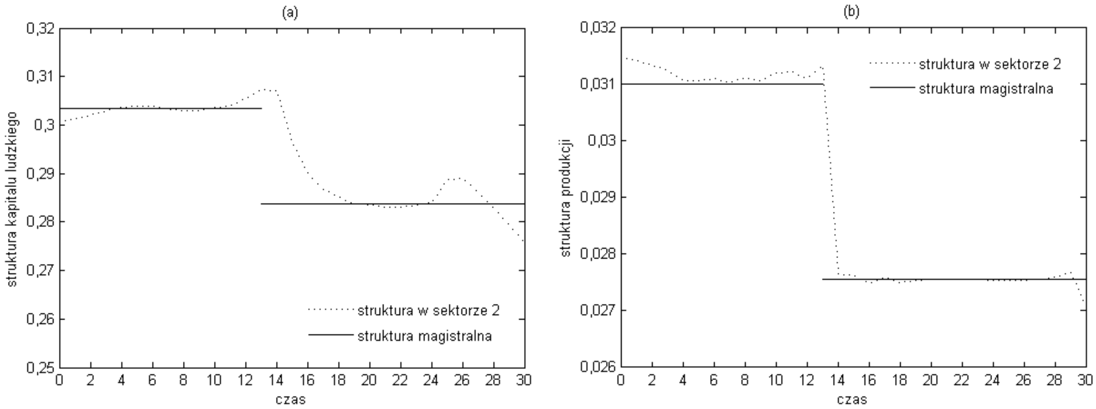
Rysunek B.60. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 1 do magistrali



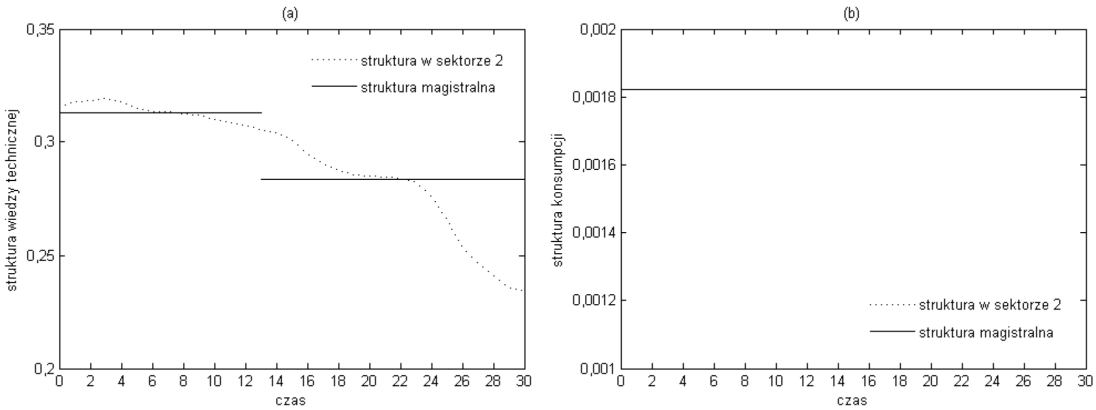
Rysunek B.61. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 2 do magistrali



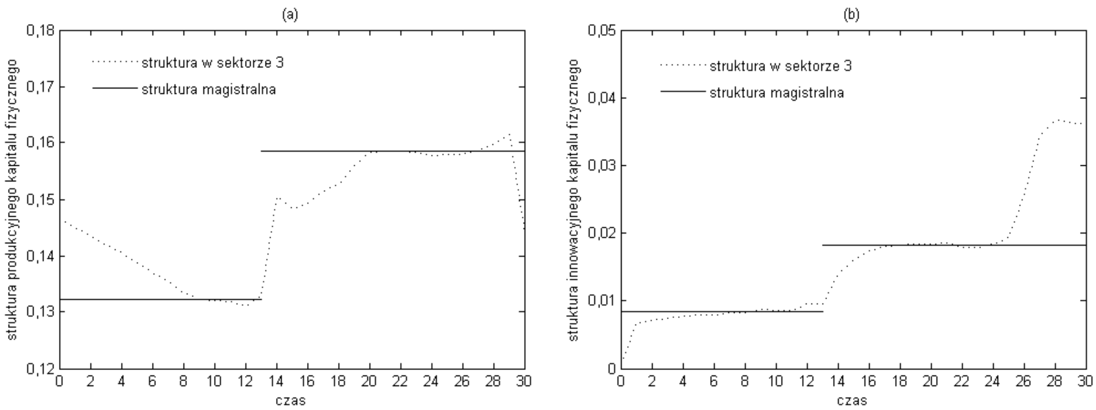
Rysunek B.62. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 2 do magistrali



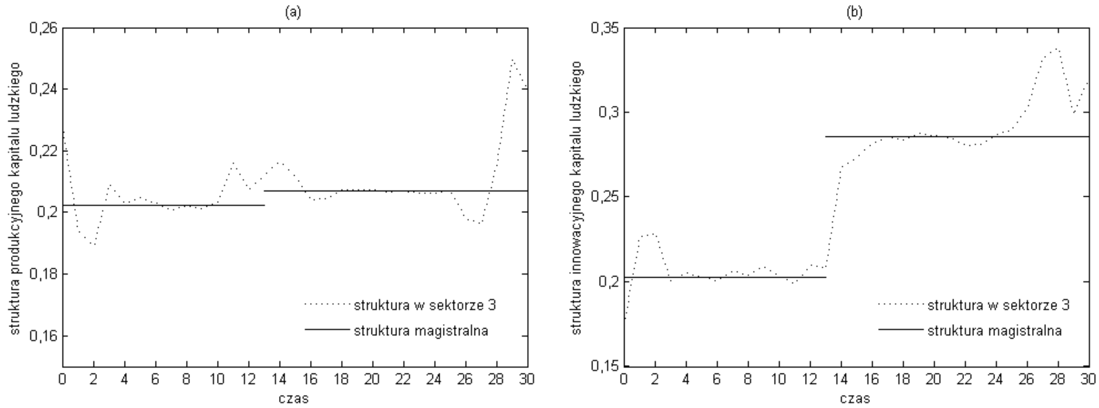
Rysunek B.63. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 2 do magistrali



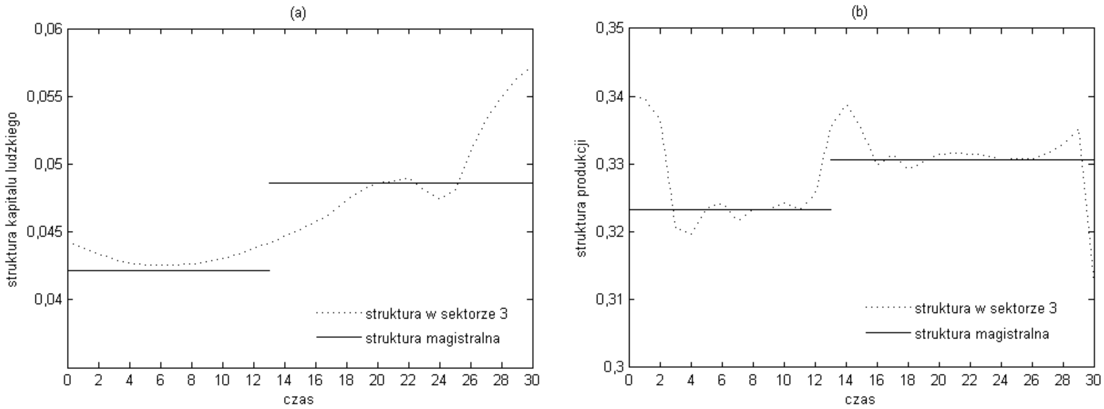
Rysunek B.64. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 2 do magistrali



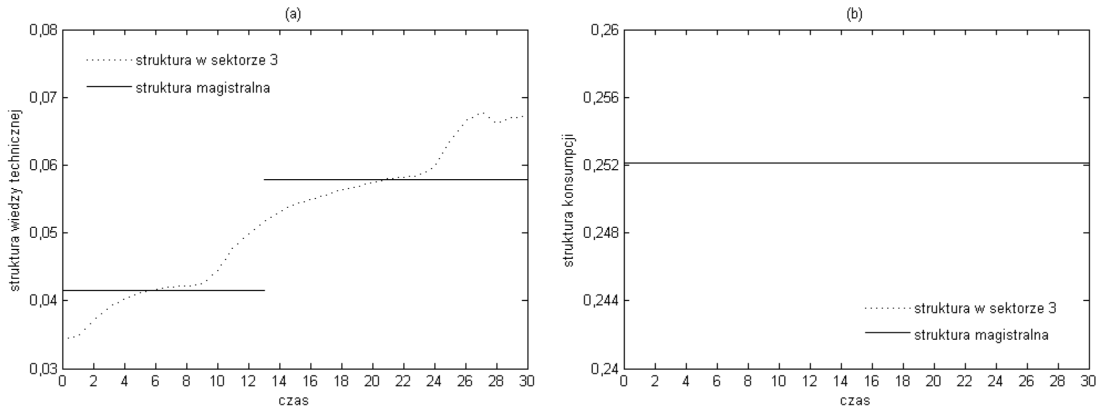
Rysunek B.65. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 3 do magistrali



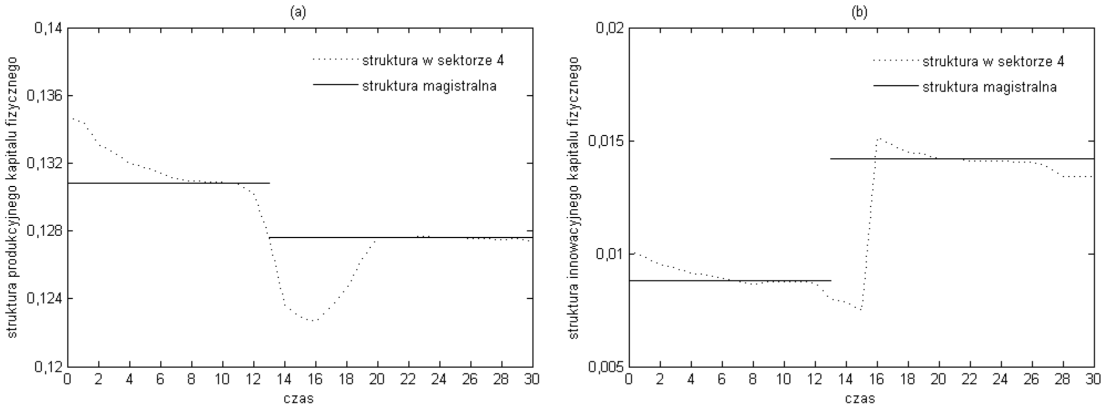
Rysunek B.66. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 3 do magistrali



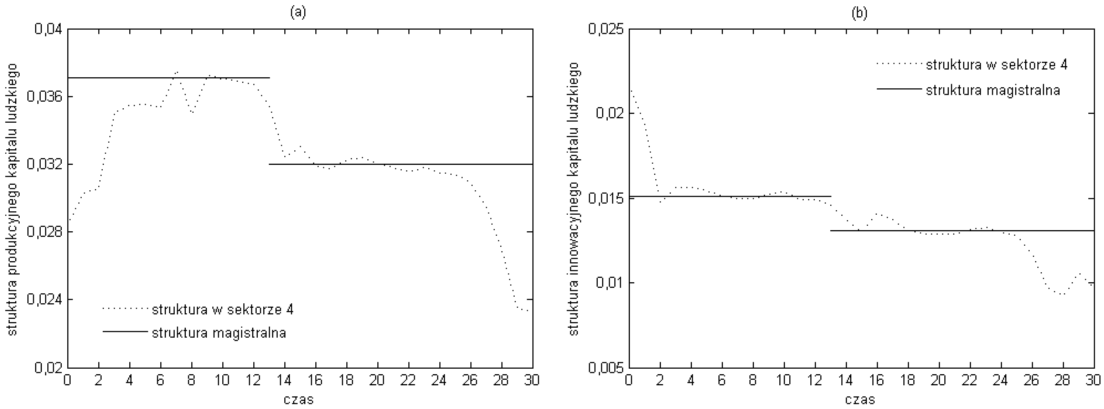
Rysunek B.67. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 3 do magistrali



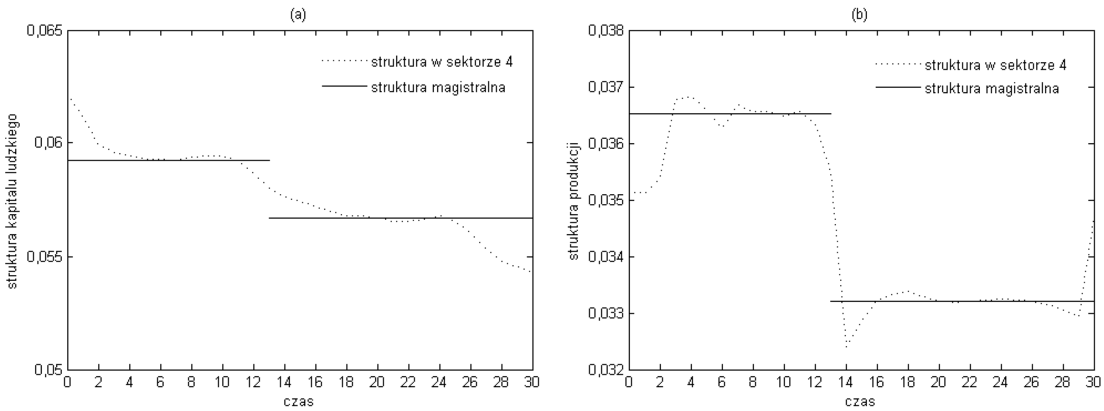
Rysunek B.68. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 3 do magistrali



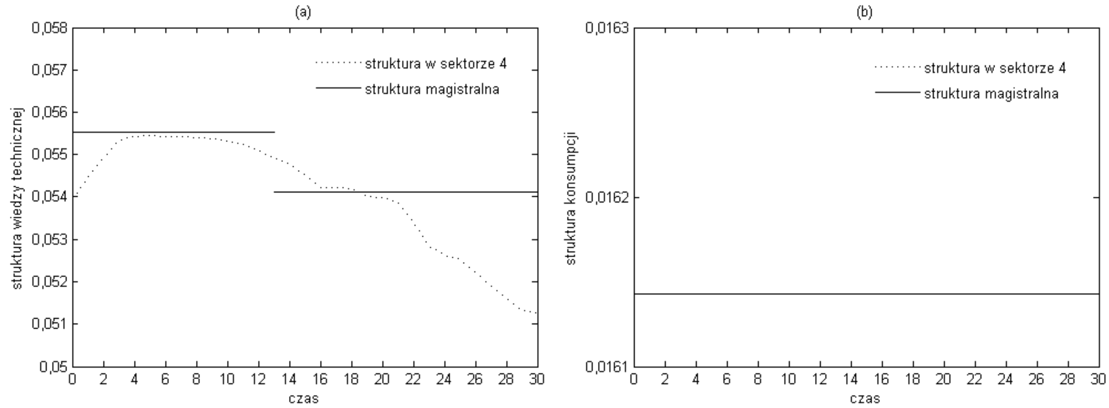
Rysunek B.69. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 4 do magistrali



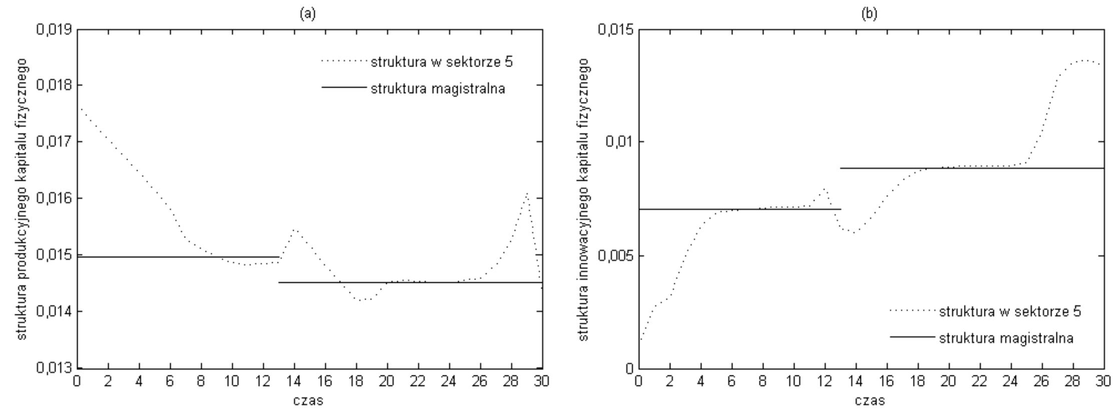
Rysunek B.70. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 4 do magistrali



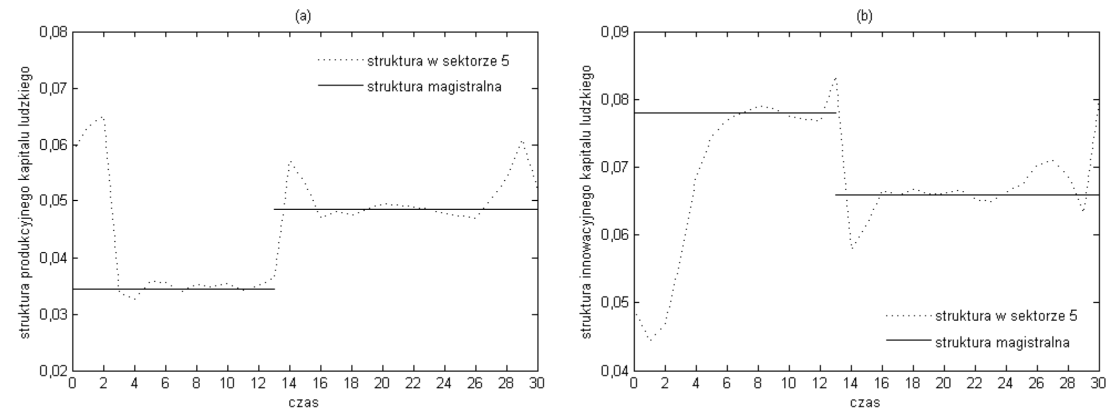
Rysunek B.71. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 4 do magistrali



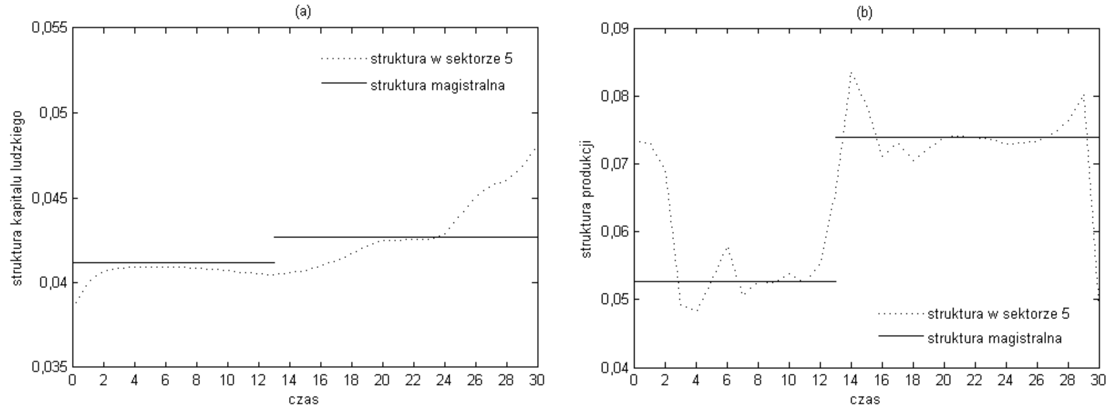
Rysunek B.72. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 4 do magistrali



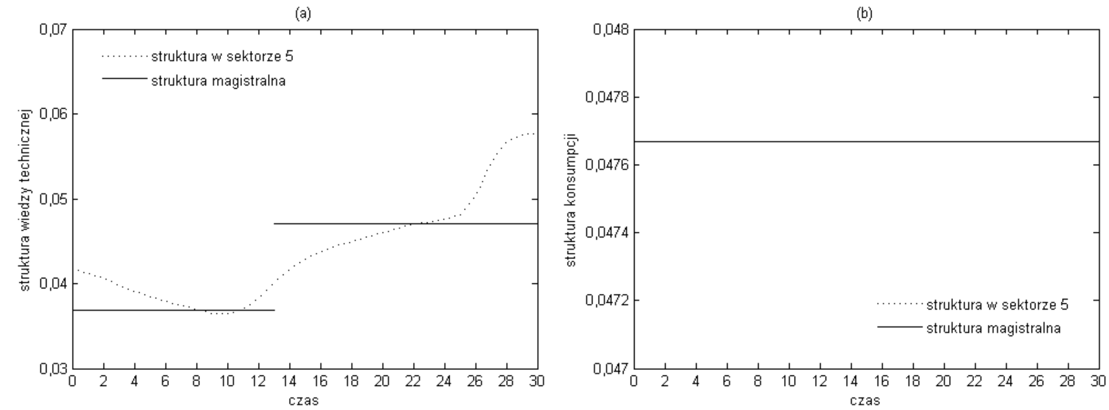
Rysunek B.73. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 5 do magistrali



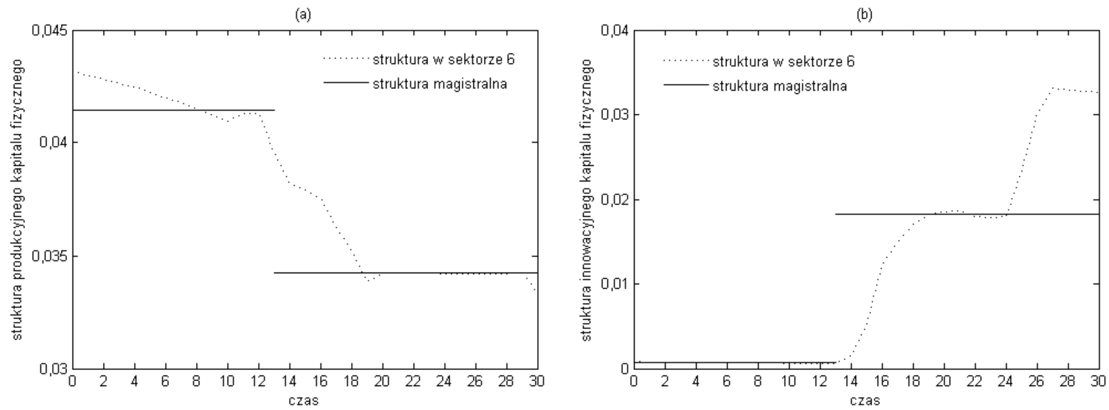
Rysunek B.74. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 5 do magistrali



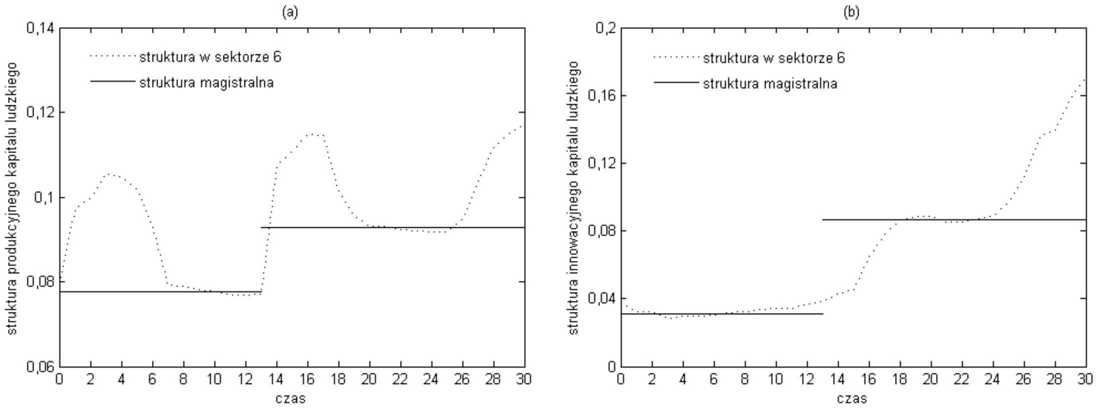
Rysunek B.75. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 5 do magistrali



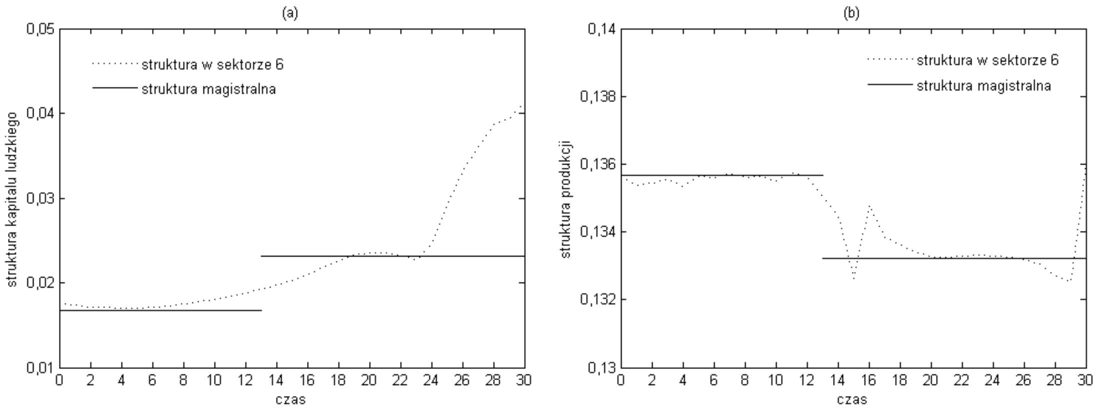
Rysunek B.76. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 5 do magistrali



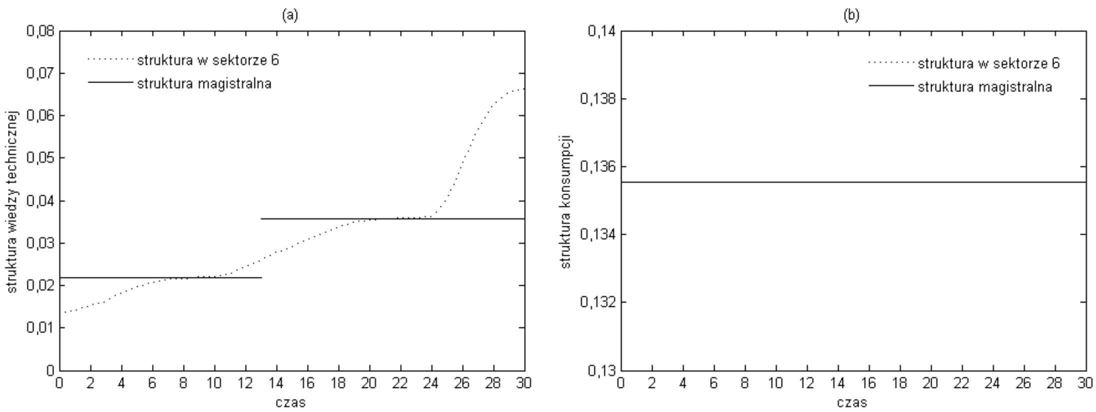
Rysunek B.77. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 6 do magistrali



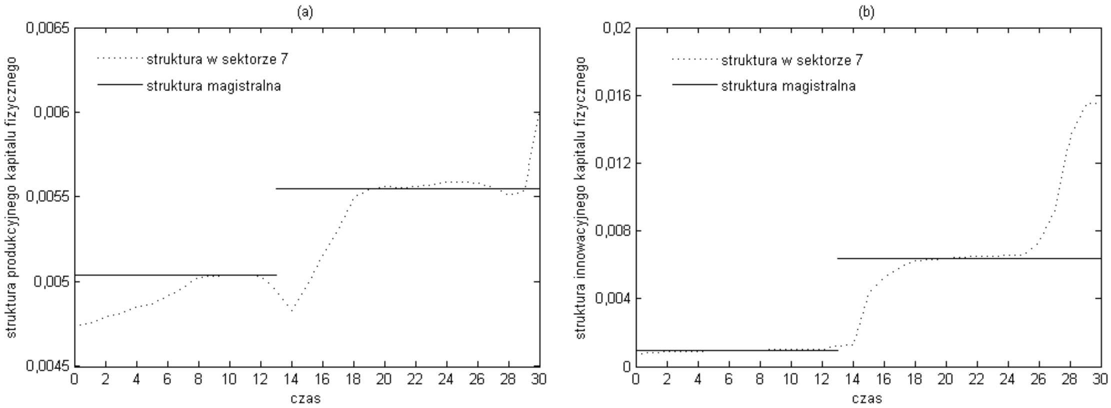
Rysunek B.78. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 6 do magistrali



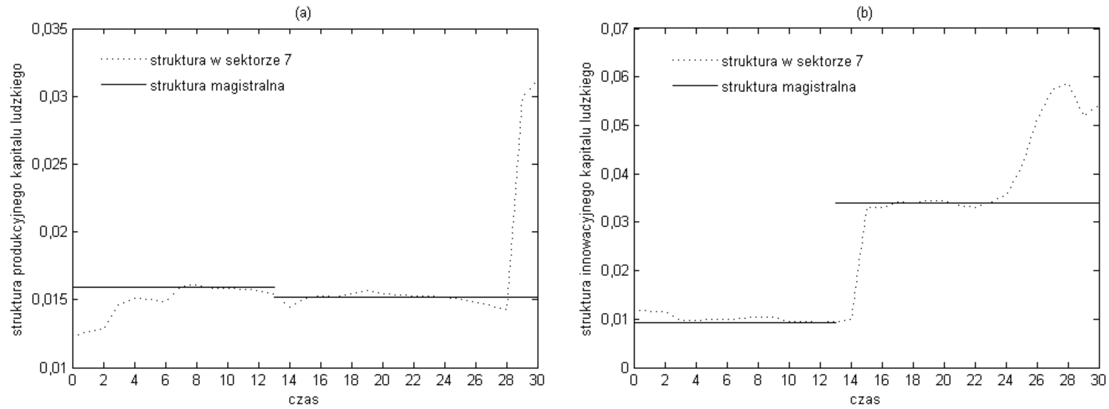
Rysunek B.79. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 6 do magistrali



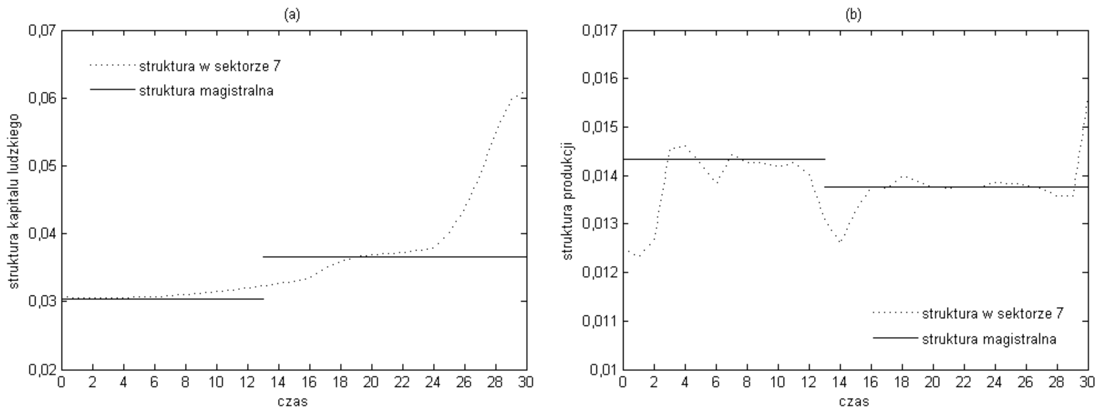
Rysunek B.80. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 6 do magistrali



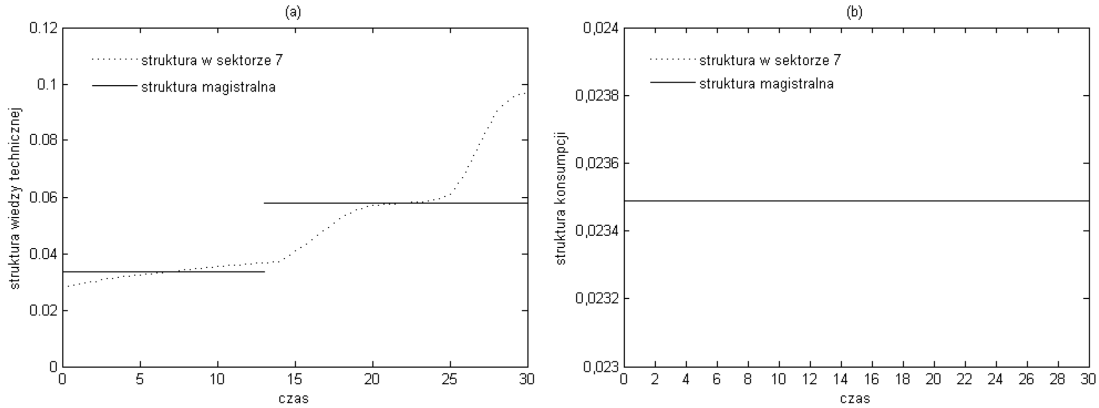
Rysunek B.81. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 7 do magistrali



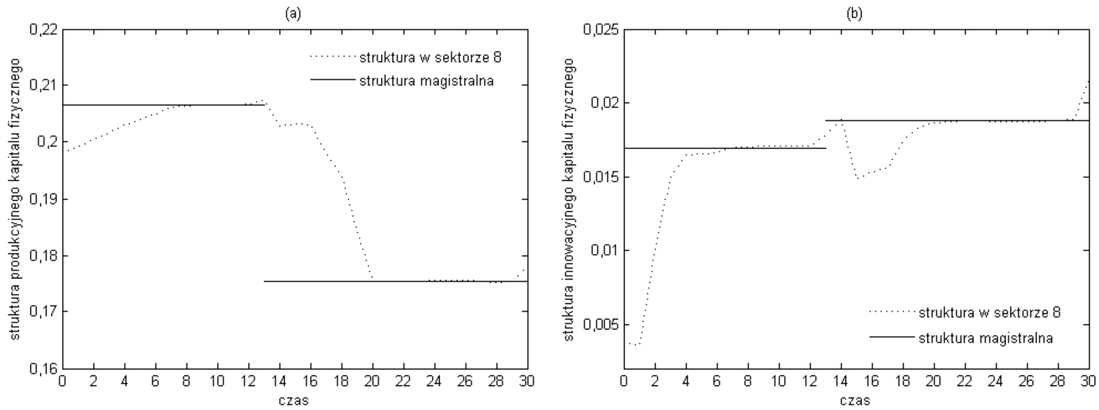
Rysunek B.82. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 7 do magistrali



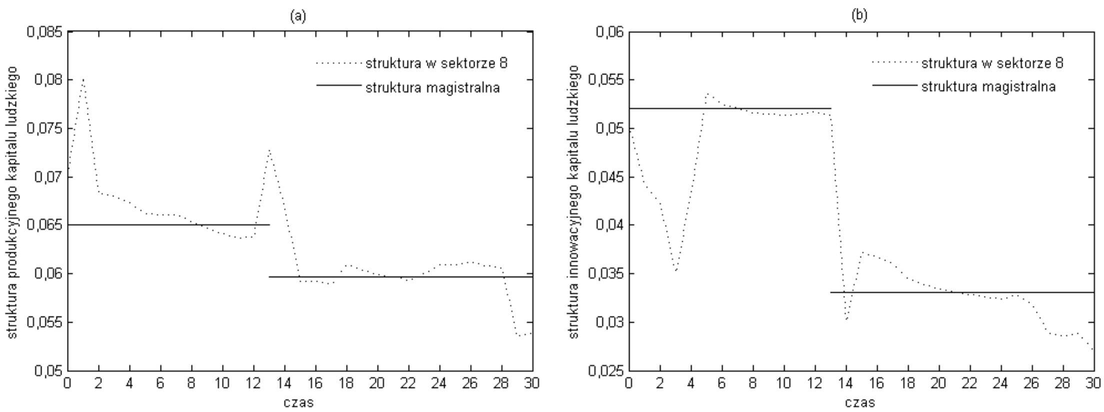
Rysunek B.83. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 7 do magistrali



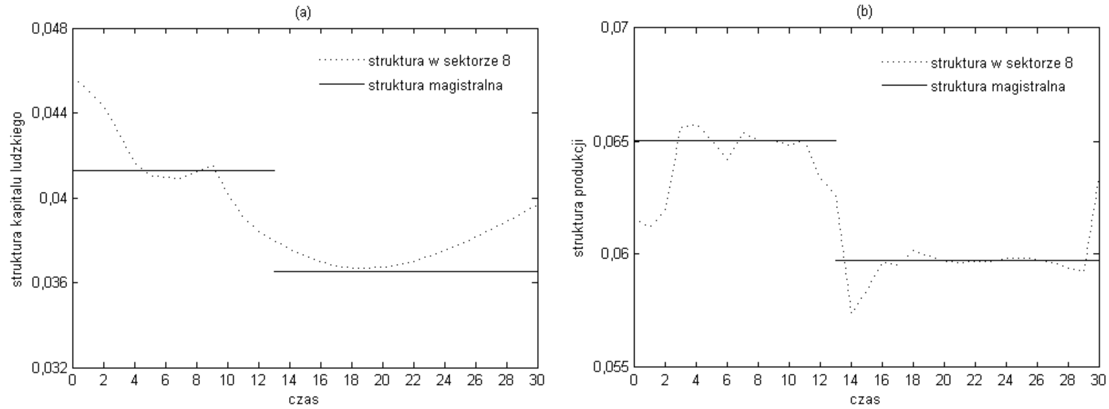
Rysunek B.84. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 7 do magistrali



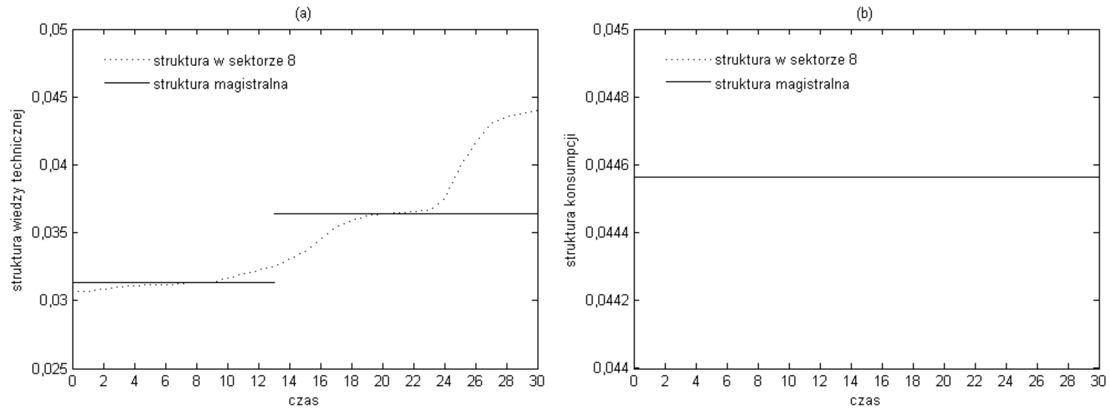
Rysunek B.85. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 8 do magistrali



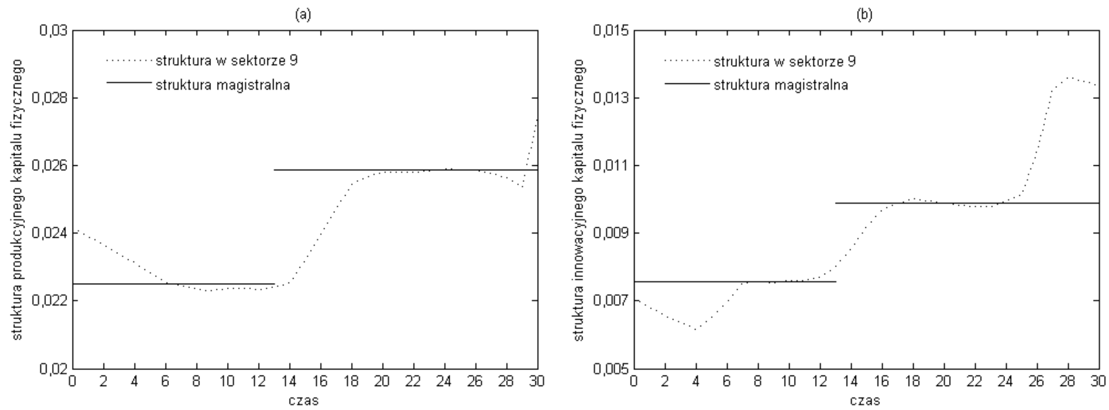
Rysunek B.86. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 8 do magistrali



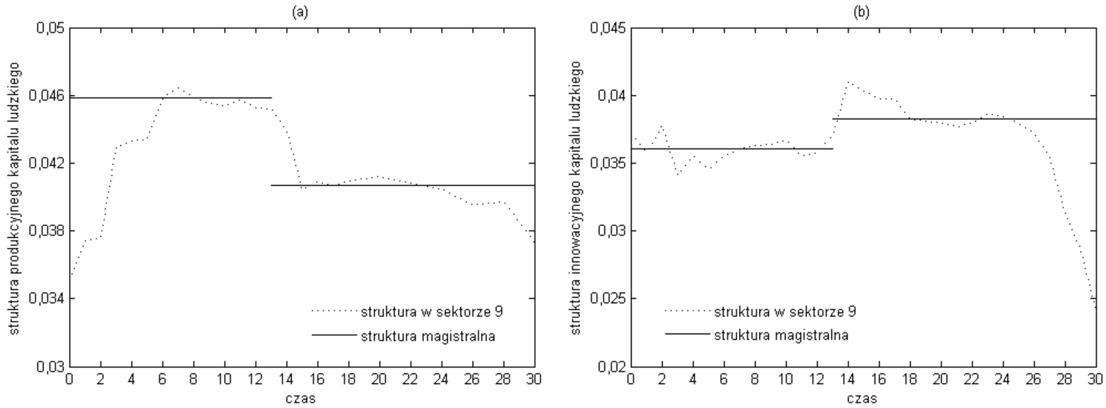
Rysunek B.87. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 8 do magistrali



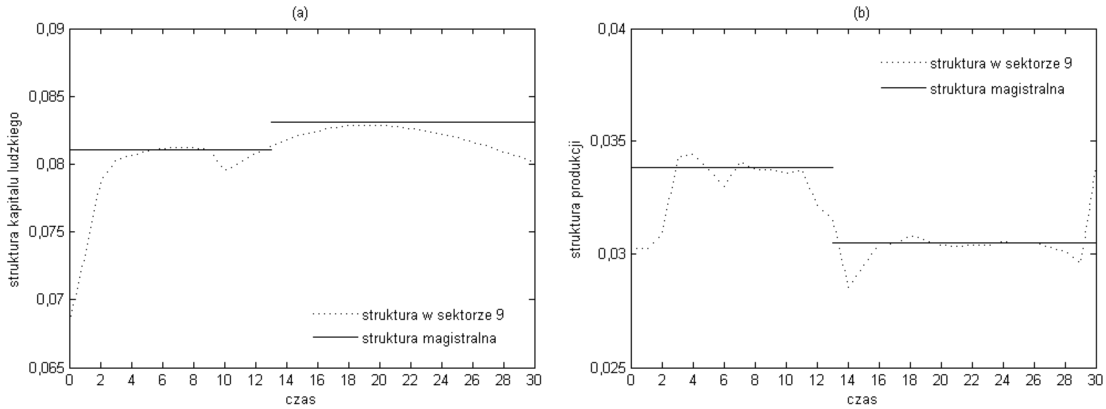
Rysunek B.88. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 8 do magistrali



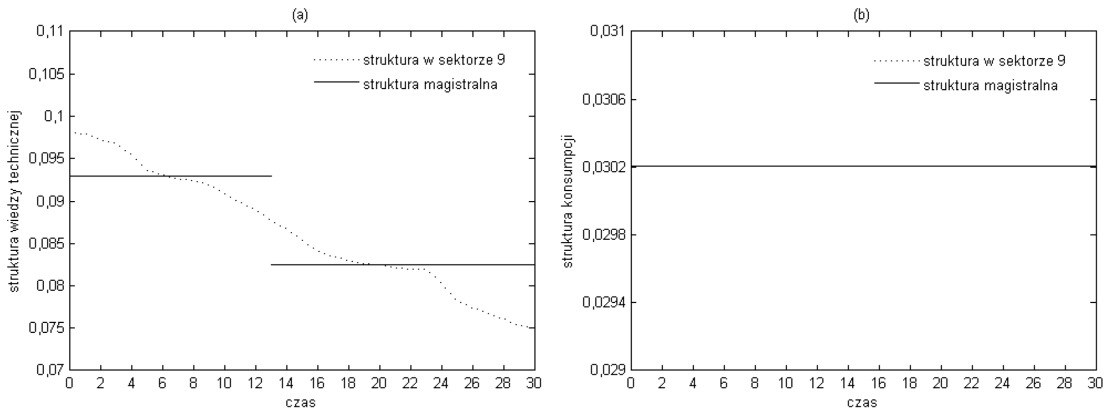
Rysunek B.89. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 9 do magistrali



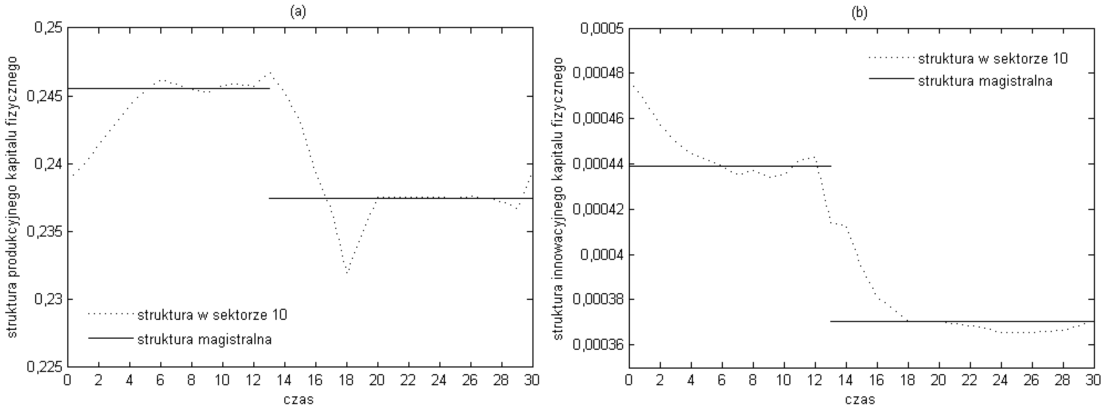
Rysunek B.90. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 9 do magistrali



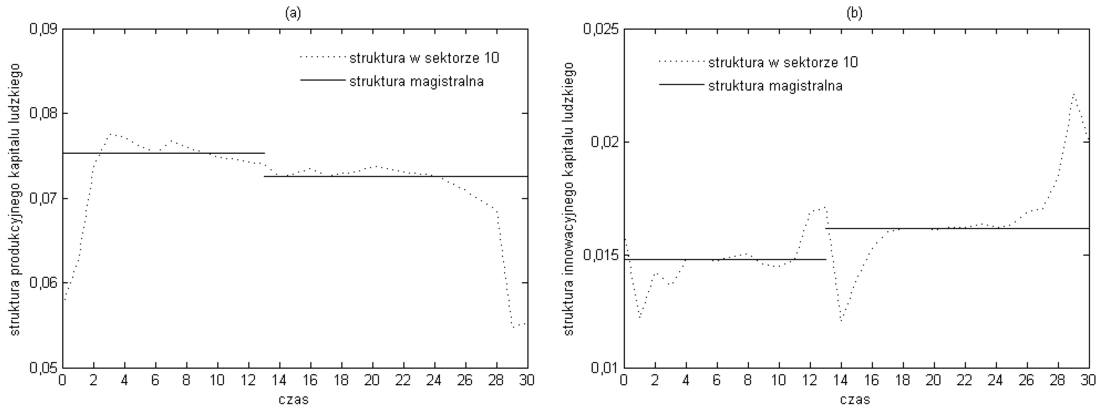
Rysunek B.91. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 9 do magistrali



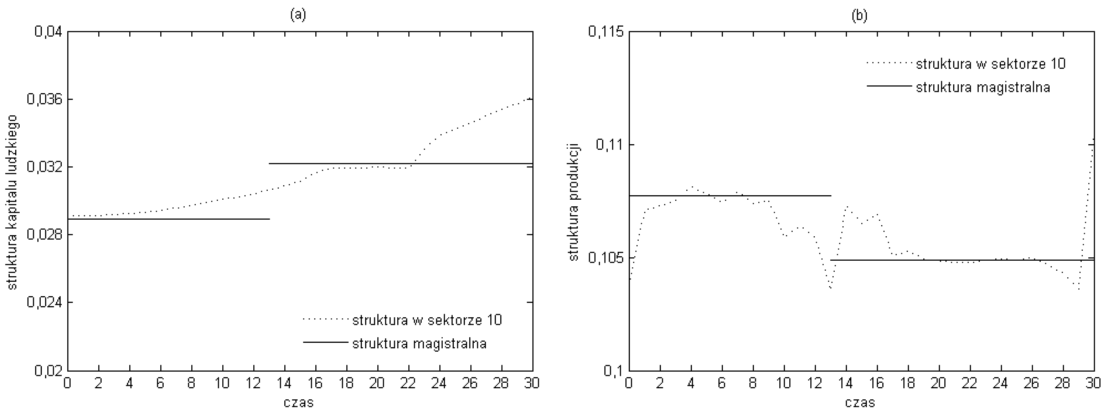
Rysunek B.92. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 9 do magistrali



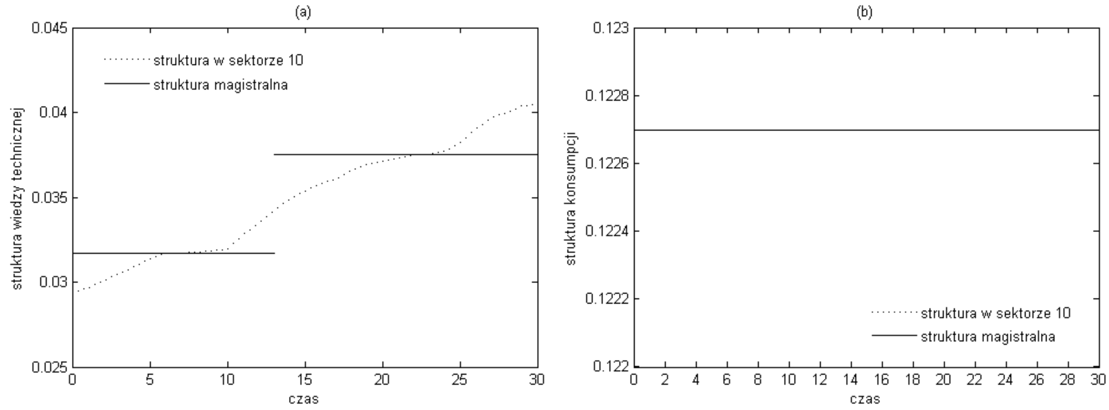
Rysunek B.93. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 10 do magistrali



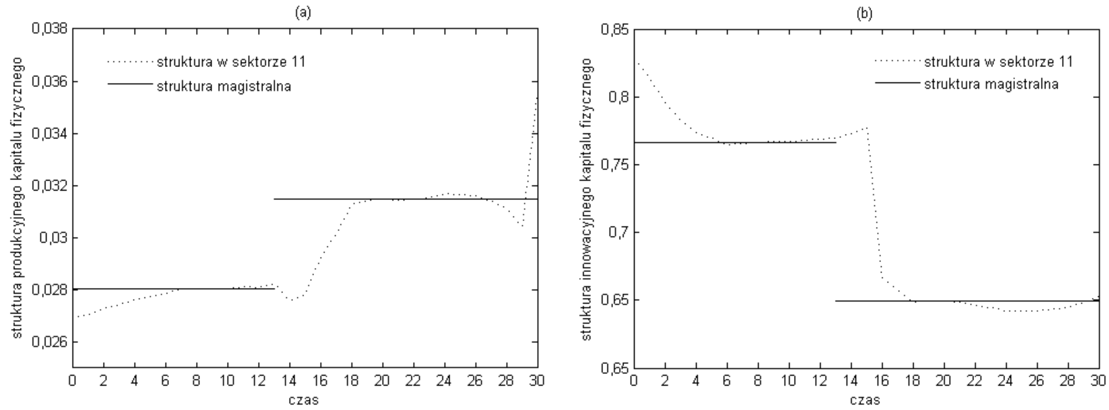
Rysunek B.94. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 10 do magistrali



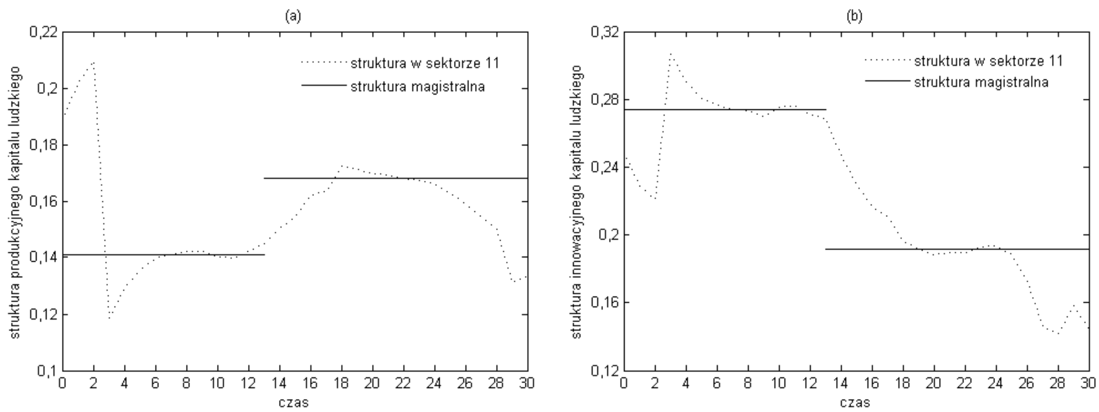
Rysunek B.95. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 10 do magistrali



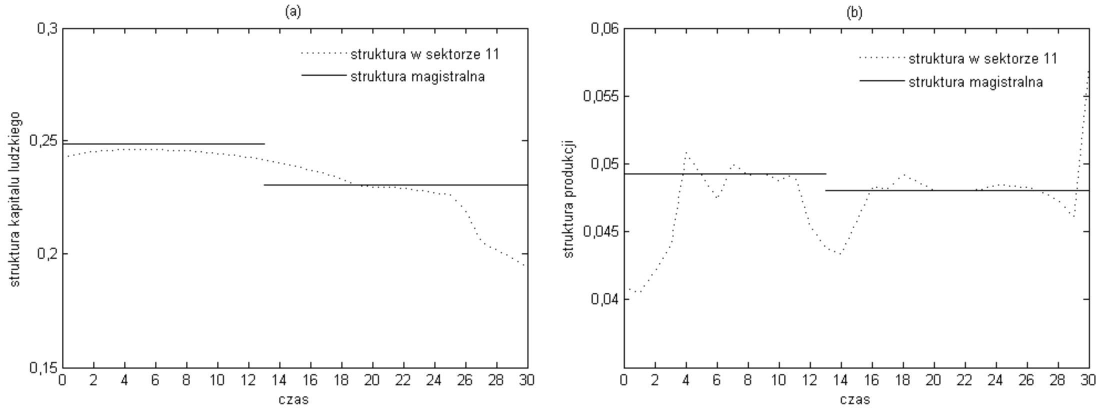
Rysunek B.96. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 10 do magistrali



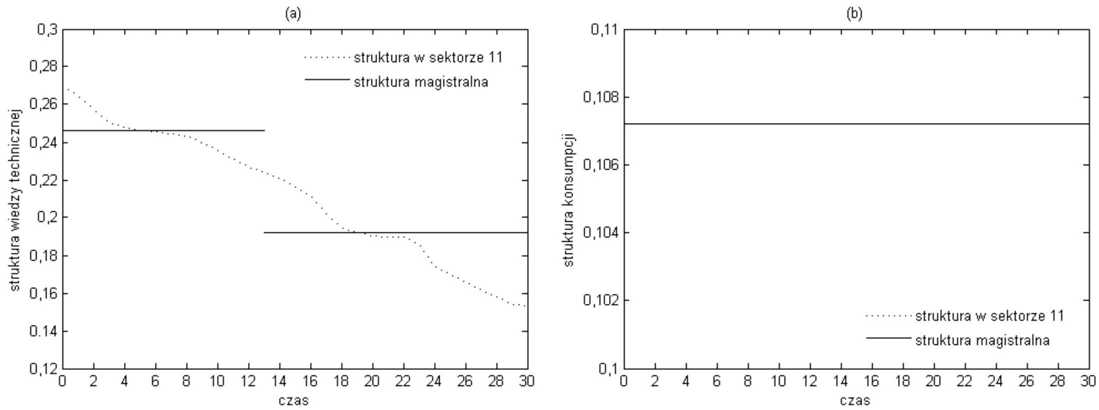
Rysunek B.97. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 11 do magistrali



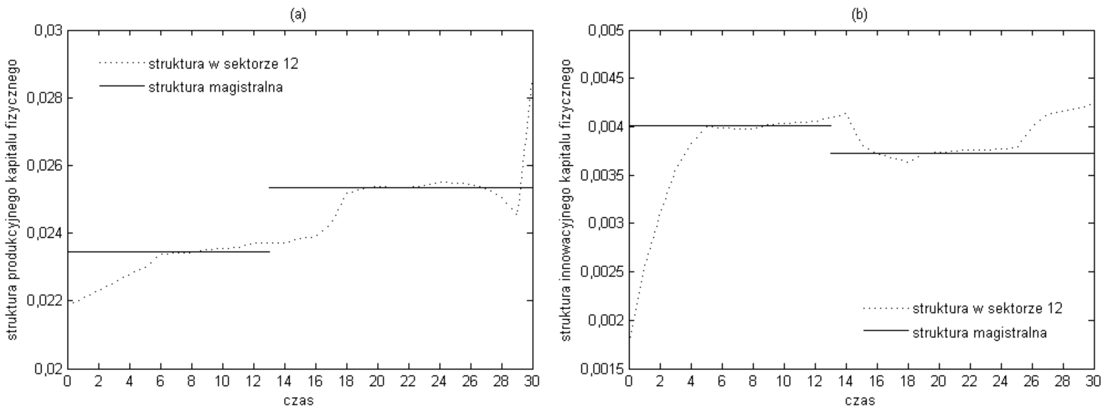
Rysunek B.98. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 11 do magistrali



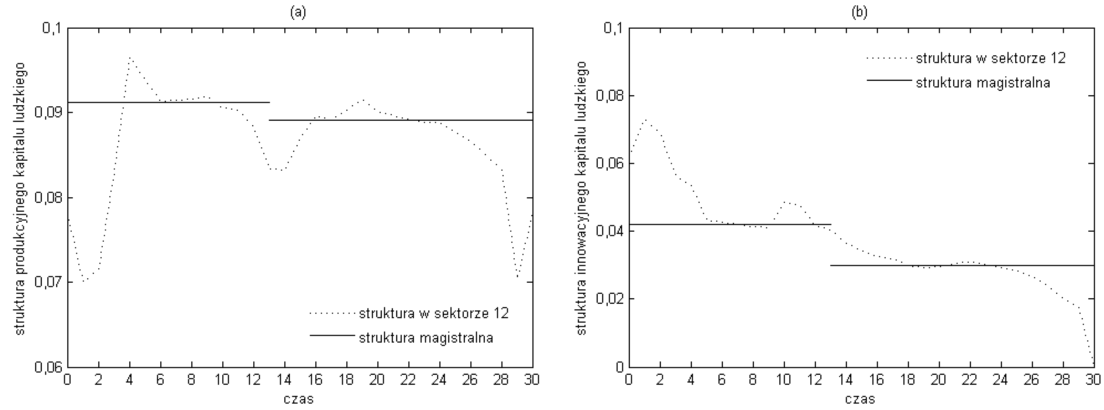
Rysunek B.99. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 11 do magistrali



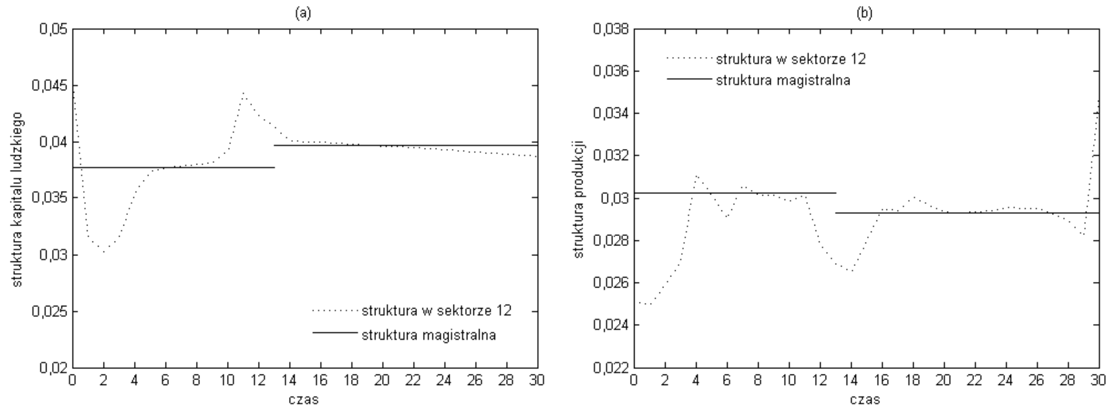
Rysunek B.100. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 11 do magistrali



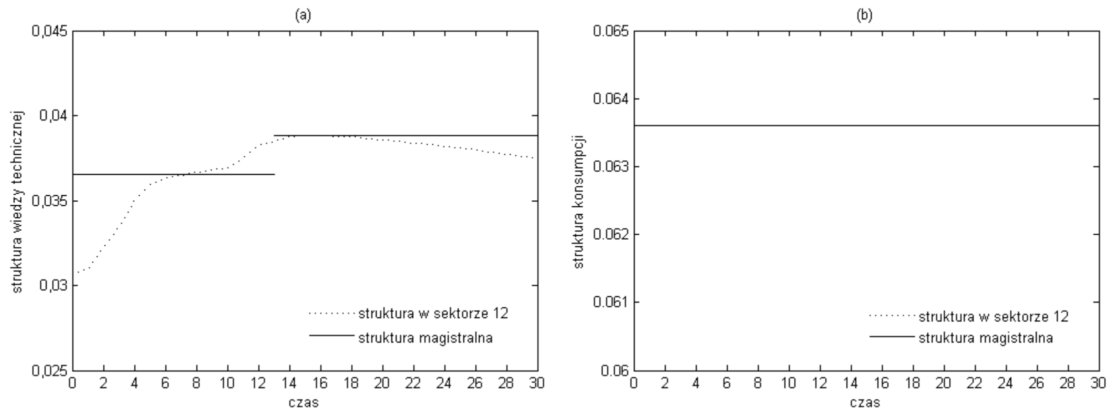
Rysunek B.101. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 12 do magistrali



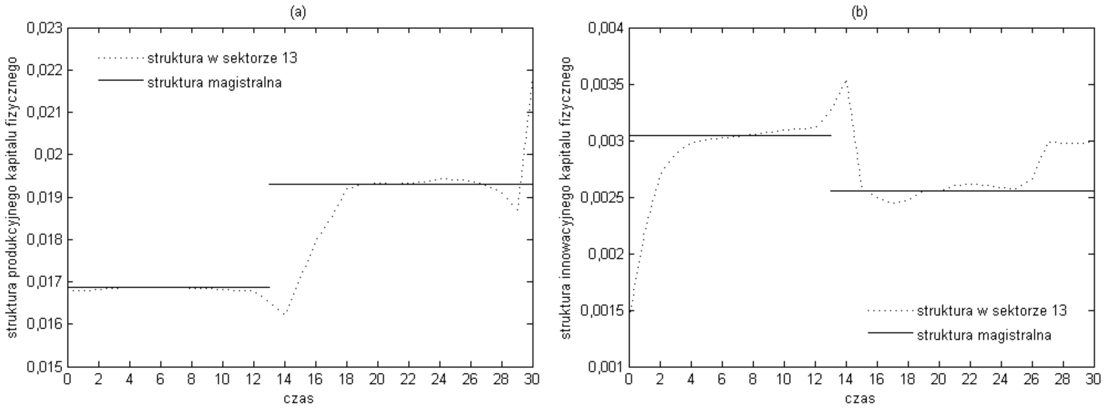
Rysunek B.102. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 12 do magistrali



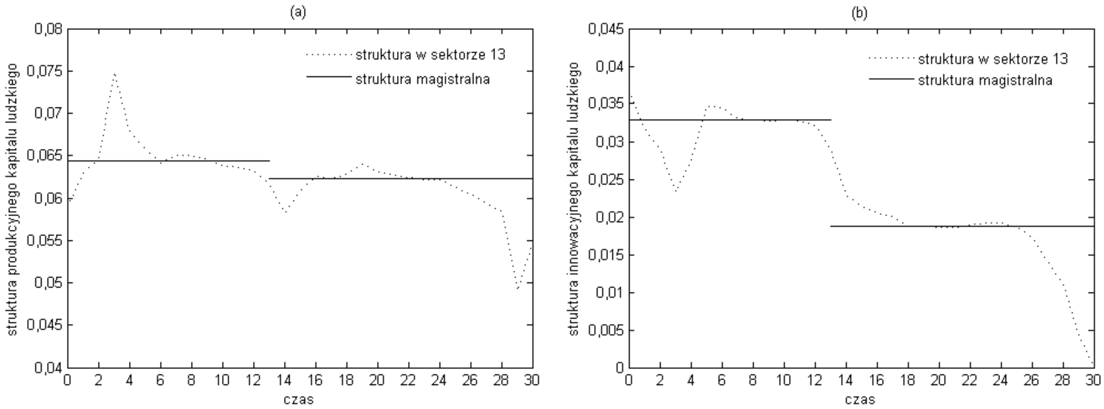
Rysunek B.103. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 12 do magistrali



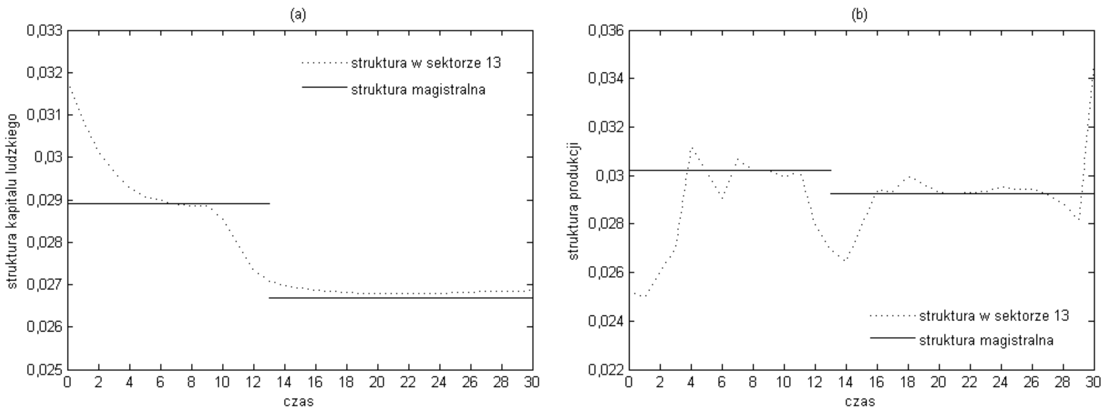
Rysunek B.104. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 12 do magistrali



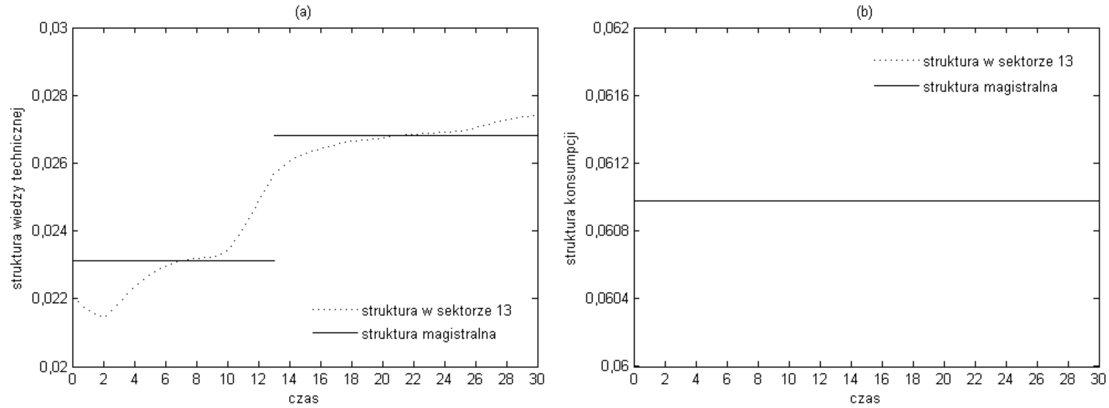
Rysunek B.105. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 13 do magistrali



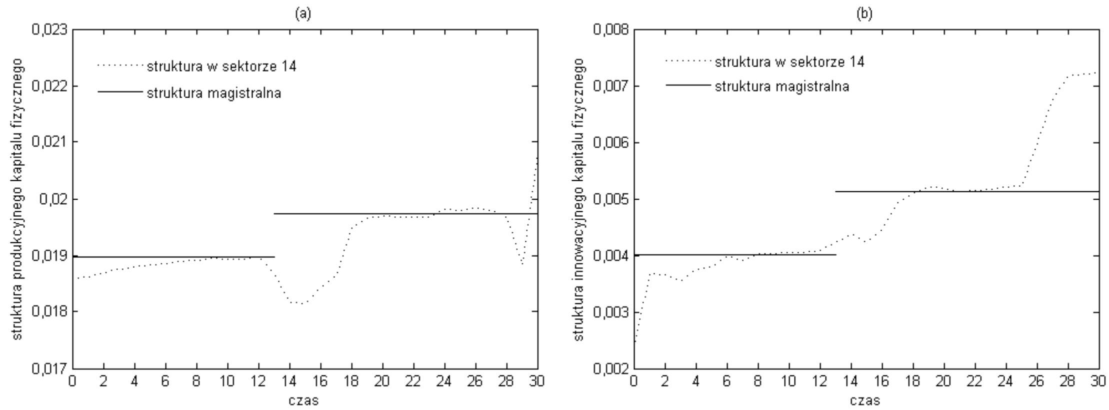
Rysunek B.106. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 13 do magistrali



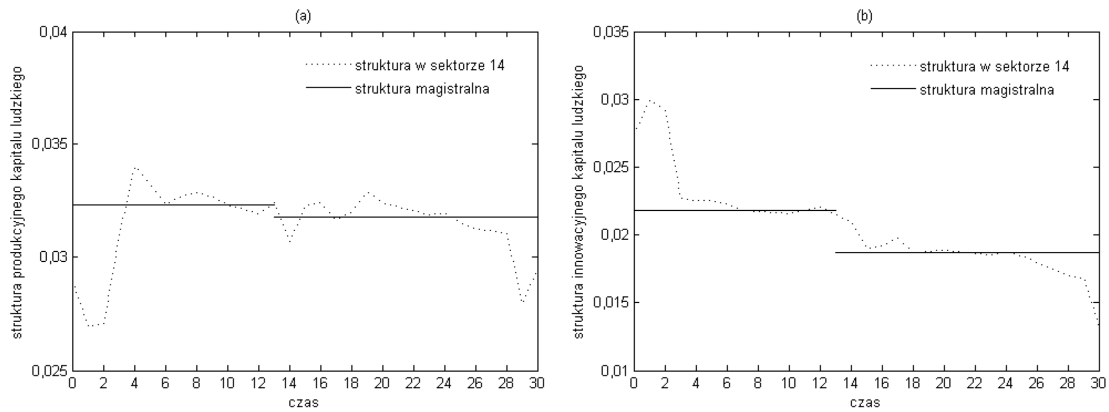
Rysunek B.107. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 13 do magistrali



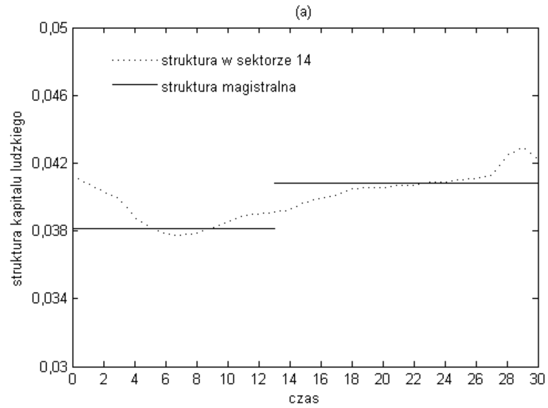
Rysunek B.108. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 13 do magistrali



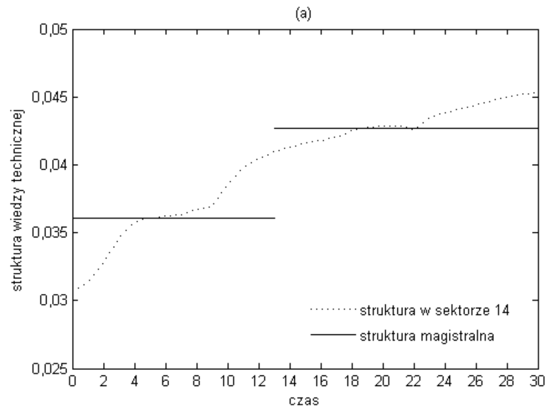
Rysunek B.109. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału fizycznego (a) i innowacyjnego kapitału fizycznego (b) w sektorze 14 do magistrali



Rysunek B.110. Zbieżność struktury produkcyjnego kapitału ludzkiego (a) i innowacyjnego kapitału ludzkiego (b) w sektorze 14 do magistrali



Rysunek B.111. Zbieżność struktury kapitału ludzkiego (a) i produkcji (b) w sektorze 14 do magistrali



Rysunek B.112. Zbieżność struktury wiedzy technicznej (a) i konsumpcji (b) w sektorze 14 do magistrali

Bibliografia

[1] Acemoglu D., *Introduction to Economic Growth*, MIT, 2006.

[2] Aghion P., P. Howitt, *Endogenous Growth Theory*, MIT Press, Boston 1998.

[3] Ahlroth S., A. Björklund, A. Forslund, *The Output of the Swedish Education Sector*, Review of Income and Wealth, t. 43, nr 1, 1997.

[4] Allen R. G. D., *Teoria makroekonomiczna – ujęcie matematyczne*, PWN, Warszawa 1975.

[5] Atsumi H., *Neoclassical Growth and the Efficient Program of Capital Accumulation*, Review of Economic Studies, t. 32, nr 90, 1965.

[6] Barro R. J., *Determinants of Economic Growth: A Cross–Country Empirical Study*, NBER Working Papers Series, nr 5698, 1996.

[7] Barro R. J., X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, MIT Press, Boston 2004.

[8] Barro R. J., *Human Capital and Growth*, American Economic Review, t. 91, nr 2, 2001.

[9] Barro R. J., J. W. Lee, *International Measures of Schooling Years and Schooling Quality*, American Economic Review, t. 82, nr 2, 1996.

[10] Benhabib J., M. M. Spiegel, *Human Capital and Technology Diffusion*, FRBSF Working Papers, nr 2003-02, 2002.

[11] Bernstein J. I., M. I. Nadiri, *Interindustry R&D Spillovers, Rates of Return, and Production in High–Tech Industries*, American Economic Review, t. 78, nr 2, 1988.

[12] Brock W. A., *Some Results on the Uniqueness of Steady State in Multisector Models of Optimal Growth When Future Utilities are Discounted*, International Economic Review, t. 14, nr 3, 1973.

[13] Caballé J., M. S. Santos, *On Endogenous Growth with Physical and Human Capital*, Journal of Political Economy, t. 101, nr 6, 1993.

[14] Cichy K., *Kapitał ludzki w modelach i teorii wzrostu gospodarczego*, Zeszyty Studiów Doktoranckich Wydziału Ekonomii Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, zeszyt 23, Poznań 2005.

[15] Cohen W. M., D. A. Levinthal, *Innovation and Learning: Two Faces of R&D*, Economic Journal, t. 99, 1989.

[16] Conrad K., *Comment on D. W. Jorgenson and B. M. Fraumeni, "Investment in Education and U.S. Economic Growth"*, Scandinavian Journal of Economics, t. 94, 1992.

[17] Craven J., *Input–Output Analysis and Technical Change*, Econometrica, t. 51, nr 3, 1983.

[18] Czeremnych J. N., *Analiz powiedienija trajektorii dinamiki narodnochoziajstwiennych modielej*, Nauka, Moskwa 1982.

[19] Czeremnych J. N., *Kaciestwiennoje isliedowanije optimalnych trajektorij dinamicieskich modielej ekonomiki*, Izdatielstwo Maskowskawa Uniwersiteta, Moskwa 1975.

[20] Czerwiński Z., B. Guzik, W. Jurek, E. Panek, H. Runka, W. Śledziński, *Modelowanie i planowanie wzrostu gospodarki narodowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.

[21] Dietzenbacher E., B. Los, *Externalities of R&D Expenditures*, Economic Systems Research, t. 14, nr 4, 2002.

[22] Dorfman R., P. A. Samuelson, R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw–Hill, Nowy Jork 1958.

[23] Durlauf S. N., M. Fafchamps, *Social Capital*, Canadian Society of Association Executives Working Paper, nr. 2004-14, 2004.

[24] Eicher T. S., *Interaction Between Endogenous Human Capital and Technological Change*, Review of Economic Studies, t. 63, nr 215, 1996.

[25] Eisner R., *Extended Accounts for National Income and Product*, Journal of Economic Literature, t. 26, nr 4, 1988.

[26] Eisner R., *The Total Incomes System of Accounts*, Survey of Current Business, nr 65, 1985.

[27] Frantzen D., *R&D, Human Capital and International Technology Spillovers: A Cross–country Analysis*, Scandinavian Journal of Economics, t. 102, nr 1, 2000.

[28] Gale D., *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1969.

[29] Gale D., *On Optimal Development in a Multi-Sector Economy*, Review of Economic Studies, t. 34, nr 97, 1967.

[30] Gantz D. T., *A Strong Turnpike Theorem for Nonstationary von Neumann–Gale Production Model*, Econometrica, t. 48, nr 7, 1980.

[31] Goto A., K. Suzuki, *R&D Capital, Rate of Return on R&D Investment and Spillover of R&D in Japanese Manufacturing Industries*, The Review of Economics and Statistics, t. 71, nr 4, 1989.

[32] Graham J. W., R. H. Webb, *Stocks and Depreciation of Human Capital: New Evidence from a Present–Value Perspective*, Review of Income and Wealth, t. 25, nr 2, 1979.

[33] Griliches Z., *Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth*, Bell Journal of Economic Growth, t. 10, nr 1, 1979.

[34] Griliches Z., *The Search for R&D Spillovers*, Scandinavian Journal of Economics, t. 94, 1992.

[35] Grossman G. M., E. Helpman, *Trade, Innovation, and Growth*, American Economic Review, t. 80, nr 2, 1990.

[36] GUS, *Rachunki narodowe według sektorów i podsektorów instytucjonalnych 2000–2005*, Zakład Wydawnictw Statystycznych, Warszawa 2007.

[37] GUS, *Rocznik statystyczny 2001*, Zakład Wydawnictw Statystycznych, Warszawa 2001.

[38] Hanel P., *R&D, Interindustry and International Technology Spillovers and the Total Factor Productivity Growth of Manufacturing Industries in Canada, 1974–1989*, Economic Systems Research, t. 12, nr 3, 2000.

[39] Haveman R. H., B. L. Wolfe, *Schooling and Economic Well–Being: The Role of Nonmarket Effects*, Journal of Human Resources, t. 19, nr 3, 1984.

[40] Jaffe A. B., M. Trajtenberg, M. S. Fogarty, *Knowledge Spillovers and Patent Citations: Evidence from a Survey of Inventors*, American Economic Review, t. 90, nr 2, 2000.

[41] Jaffe A. B., *Technological Opportunity and Spillovers of R&D: Evidence from Firm's Patents, Profits, and Market Value*, American Economic Review, t. 76, nr 5, 1986.

[42] Jorgenson D. W., B. M. Fraumeni, *Investment in Education and U.S. Economic Growth*, Scandinavian Journal of Economics, t. 94, 1992.

[43] Jones C. I., *Human Capital, Ideas, and Economic Growth*, VIII Villa Mondragone International Economic Seminar on Finance, Research, Education, and Growth, Roma 1996.

[44] Jones C., I., *R&D-Based Models of Economic Growth*, Journal of Political Economy, t. 103, nr 4, 1995.

[45] Jurek B., *Efekt magistrali w modelu Leontiefa-Gale'a z kapitałem ludzkim i stałą liczbą ludności*, w: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, red. A. Welfe, zeszyt nr 7, SGH, Warszawa 2007.

[46] Jurek B., *Efekt magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu z dyfuzją wiedzy*, w: *Kapitał ludzki i wiedza w gospodarce – wyzwania XXI wieku*, red. E. Panek, Zeszyty naukowe AE w Poznaniu, zeszyt nr 96, Poznań 2007.

[47] Jurek B., *Inwestycje innowacyjne w niestacjonarnym dynamicznym modelu Leontiefa*, Zeszyty Studiów Doktoranckich Wydziału Ekonomii Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, zeszyt nr 26, Poznań 2006.

[48] Jurek B., *Równowaga i wzrost w modelu Leontiefa–Gale'a z kapitałem ludzkim. Twierdzenia o magistrali*, w: *Metody ilościowe w ekonomii*, red. M. Matłoka, Zeszyty naukowe AE w Poznaniu, zeszyt nr 92, Poznań 2007.

[49] Jurek W., *Magistrala produkcyjna w uogólnionym dynamicznym modelu Leontiefa, cz. I: Istnienie magistrali*, Przegląd Statystyczny, nr 3, 1988.

[50] Jurek W., R. Kiedrowski, E. Panek, *Magistrale w systemach typu input–output*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1992.

[51] Keeler E. B., *A Twisted Turnpike*, International Economic Review, t. 13, nr 1, 1972.

[52] Kiker B. F., *The Historical Roots of the Concept of Human Capital*, The Journal of Political Economy, t. 74, nr 5, 1966.

[53] Krueger A. B., M. Lindahl, *Education for Growth: Why and For Whom?*, Journal of Economic Literature, t. 39, nr 4, 2001.

[54] Kurz H. D., N. Salvadori, *The Dynamic Leontief Model and the Theory of Endogenous Growth*, Economic Systems Research, t. 12, nr 2, 2000.

[55] Kyriacou G. A., *Level and Growth Effects of Human Capital: A Cross–Country Study of the Convergence Hypothesis*, Economic Research Reports, nr 91-26, 1991.

[56] Laitner J., *Long–Run Growth and Human Capital*, Canadian Journal of Economics, t. 26, nr 4, 1993.

[57] Laroche M,. M. Mérette, G. C. Ruggeri, *On the Concept and Dimensions of Human Capital in a Knowledge-Based Economy Context*, Department of Finance Canada Working Papers, nr 1998-01, 1998.

[58] Lau L. J., D. T. Jamison, F. F. Louat, *Education and Productivity in Developing Countries. An Aggregate Production Function Approach*, PRE Working Papers, nr 612, 1991.

[59] Le T., J. Gibson, L. Oxley, *A Forward–Looking Measure of the Stock of Human Capital in New Zealand*, Working Paper, 2003.

[60] Le T., J. Gibson, L. Oxley, *Cost– and Income–Based Measures of Human Capital*, Journal of Economic Surveys, t. 17, nr 3, 2003.

[61] Le T., J. Gibson, L. Oxley, *Measures of Human Capital: A Review of the Literature*, New Zealand Treasury Working Paper, nr 05/10, 2005.

[62] Lee J. W., R. J. Barro, *Schooling Quality in a Cross–Section of Countries*, Economica, t. 68, 2001.

[63] Levin R. C., A. K. Klevorick, R. R. Nelson, S. G. Winter, *Appropriating the Returns from Industrial Research and Development*, Brookings Papers on Economic Activity, t. 3, 1987.

[64] Los B., *Endogenous Growth and Structural Change in a Dynamic Input–Output Model*, Economic Systems Research, t. 13, nr 1, 2001.

[65] Los B., B. Verspagen, *Technology Spillovers and Their Impact on Productivity*, w: *Elgar Companion to Neo-Schumpeterian Economics*, red. H. Hanush, A. Pyka, Cheltenham UK: Edward Elgar, 2006.

[66] Lucas R. E., *On the Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics, nr 26, 1988.

[67] Maćkowiak P., *Efekt magistrali w uogólnionym modelu Leontiefa-Gale'a*, w: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, red. A. Welfe, SGH, Warszawa 2002.

[68] Maćkowiak P., *„Silna" wersja twierdzenia o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu optymalnego typu Leontiefa-Gale'a*, w: *Matematyka w ekonomii*, red. E. Panek, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.

[69] Mankiw N. G., D. Romer, D. N. Weil, *A Contribution To the Empirics of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, t. 107, nr 2, 1992.

[70] Maurseth p. B., B. Verspagen, *Knowledge Spillovers in Europe: A Patent Citation Analysis*, Scandinavian Journal of Economics, t. 104, nr 4, 2002.

[71] McKenzie L. W., *Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comperative Dynamics*, w: *Handbook of Mathematical Economics*, t. 3, red. K. J. Arrow, M. D. Introligator, Elsevier Science Publishers B.V., North–Holland, 1986.

[72] McKenzie L. W., *Turnpike Theorem for a Generalized Leontief Model*, Econometrica, t. 31, nr 1-2, 1963.

[73] McKenzie L. W., *Turnpikes*, American Ecnonomic Review, t. 88, nr 2, 1998.

[74] Milo W., G. Szafrański, Z. Wośko, M. Malaczewski, *Rynki inwestycyjne a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2006.

[75] Mohnen P., *Introduction: Input–Output Analysis of Interindustry R&D Spillovers*, Economic Systems Research, t. 9, nr 1, 1997.

[76] Morishima M., *Equilibrium Stability and Growth. A Multisector Analysis*, Clarendon Press, Oxford 1964.

[77] Mulligan C. B., X. Sala-i-Martin, *A Labour–Income–Based Measure of the Value of Human Capital: An Application to the States of the United States*, NBER Working Papers Series, nr 5018, 1995.

[78] Nadiri M. I., *Innovations and Technological Spillovers*, NBER Working Paper nr 4423, 1993.

[79] Nikaido H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York–London 1968.

[80] Nikaido H., *Persistence of Continual Growth Near the von Neumann Ray: a Strong Version of the Radner Turnpike Theorem*, Econometrica, t. 32, nr 1–2, 1964.

[81] OECD, *The Well-being of Nations: The Role of Human and Social Capital*, OECD, Paryż, 2001.

[82] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.

[83] Panek E., *„Słabe" twierdzenie o magistrali konsumpcyjnej w wielosektorowym modelu wzrostu*, Przegląd Statystyczny, nr 3, 1985.

[84] Papaconstantinou G., N. Sakurai, A. Wyckoff, *Embodied Technology Diffusion: An Empirical Analysis for 10 OECD Countries*, STI Working Papers, nr 1996/1, 1996.

[85] Popkin J., *Inter–Industry Diffusion of Technology That Results From ATP Projects*, NIST GCR 03–848, 2003.

[86] Radner R., *Paths of Economic Growth That Are Optimal with Regard Only to Final States*, Review of Economic Studies, t. 28, nr 1, 1961.

[87] Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[88] Romer P. M., *Endogenous Technological Change*, Journal of Political Economy, t. 98, nr 5, 1990.

[89] Romer P. M., *Human Capital and Growth: Theory and Evidence*, NBER Working Paper Series, nr 3173, 1989.

[90] Rose A., W. Miernyk, *Input–Output Analysis: The First Fifty Years*, Economic Systems Research, t. 1, nr 2, 1989.

[91] Ruttan V. W., *Usher and Schumpeter on Invention, Innovation, and Technological Change*, Quarterly Journal of Economics, t. 73, nr 4, 1959.

[92] Sabatini F., *The Empirics of Social Capital and Economic Development: A Critical Perspective*, Social Science Research Network Electronic Paper Collection, 2006.

[93] Sachs J. D., A. M. Warner, *Fundamental Sources of Long–Run Growth*, American Economic Review, t. 87, nr 2, 1997.

[94] Samuelson P. A., *Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variations*, w: P. A. Samuelson, *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, t. 1, MIT Press, Boston, 1972.

[95] Scherer F. M., *Inter–Industry Technology Flows and Productivity Growth*, Review of Economics and Statistics, t. 64, nr 4, 1982.

[96] Scherer F. M., *Technology Flows Matrix Estimation Revisited*, Economic Systems Research, t. 15, nr 3, 2003.

[97] Schultz T. W., *Investment in Human Capital*, American Economic Review, t. 51, nr 1, 1961.

[98] Smith A., *An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Printed for Mundell, Doig, and Stevenson, Edinburgh; Lackington, Allen and Co. Cradock and Joy, and T. Hamilton, London; and Wilson and Son, York, Edinburgh 1809.

[99] Solow R., *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, nr 70, 1956.

[100] Spengler J. J., *Adam Smith on Human Capital*, American Economic Review, t. 67, nr 1, 1977.

[101] Tsukui J., *The Consumption and the Output Turnpike Theorems in a von Neumann Type of Model – A Finite Term Problem*, Review of Economic Studies, t. 34, nr 97, 1967.

[102] Tsukui J., Y. Murakami, *Turnpike Optimality in Input–Output Systems. Theory and Applications for Planning*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford 1978.

[103] Tsukui J., *Turnpike Theorem in a Generealized Dynamic Input–Output System*, Econometrica, t. 34, nr 2, 1966.

[104] Verspagen B., *Economic Growth and Technological Change, An Evolutionary Interpretation*, Eindhoven Centre for Innovation Studies Working Paper, nr 00.12, 2000.

[105] Verspagen B., *Measuring Intersectoral Technology Spillovers: Estimates from the European and US Patent Office Databases*, Economic Systems Research, t. 9, nr 1, 1997.

[106] Wei H., *Measuring Human Capital for Australia: Issues and Estimates*, Australian Labour Market Research Workshop, 2004.

[107] Wolff E. N., *Spillovers, Linkages and Technical Change*, Economic Systems Research, t. 9, nr 1, 1997.

[108] Wößmann L., *Specifying Human Capital*, Journal of Economic Surveys, t. 17, nr 3, 2003.